elektrik

elektrik

elektrik ve mıknatıslık

berkeley fizik dizisi – 2

Edward M. Purcell
Nobel Ödüllü
Harvard Üniversitesi
Fizik Profesörü

Türkçesi
Rauf Nasuhoğlu
Ankara Fen Fakültesi
Fizik Profesörü

GÜVEN KİTABEVİ YAYINLARI

This volume is the Turkish translation of Berkeley Physics Course, Electricity and Magnetism published by Mc Graw-Hill Book Company and copyrighted by Education Development Center, Newton Mass., USA. Turkish copyright of this book by Scientific and Technical Research Council, Ankara, Turkey. This volume is published by Güven Bookstore Publications

SANEM MATBAASI ANKARA 1979

electricity and magnetism

berkeley physics course – volume 2

The preparation of this course was supported by a grant from the National Science Foundation to Educational Services Incorporated

Edward M. Purcell

Gerhard Gade University Professor
Harvard University

mcgraw-hill book company

New York
St. Louis
San Francisco
Toronto
London
Sydney

KİTAPTA KULLANILAN YENİ TERİMLER

Bağlılaşım: Korelasyon
Bakışım: Simetri
Bayırgı: Gradiyent
Birik: Unique
Boygu: Ordinat

Çatkı: Koordinat eksenleri
Çevrim: Devre
Çizit: Grafik

Dalga direnci: İmpedans (etkin direnç)
Devinirlik: Momentum
Değiştirge: Transformatör
Dikit: Normal
Doruk: Maksimum
Döngü: Moment
Dönül: Rotasyonel

Engi: Absis
Erey: Limit
Eşgerilim: Ekipotansiyel
Esnemez: Rijid
Eşyönlü: İzotrop

Genil: Makroskopik
Gerçel: Reel
Gergi: Tensor
Görelilik: İzafiyet
Gizilgüç: Potansiyel

Ilım: Nötral
Iraksama: Diverjans

İçyapışkanlık: Kohezyon
İkizkutup: Dipol
İkizkutup döngüsü: Dipolmoment
İrginim: Özindüksiyon
İrgitim: İndüksiyon
İrgitgi: İndüktör
İşlev: Fonksiyon

Karmal: Kompleks
Kavuşmaz: Asimptoti
Kılgın: Pratik
Konumluk: Koordinat
Koşut: Paralel
Koyut: Postüla

Minil: Mikroskopik

Oyluk: Minimum
Oylum: Hacım

Ölçün: Standart
Sanal: İmajiner
Sayıl: Skaler
Sığalık: Kapasitans
Sıralı: Seri halinde

Tasar: Plan
Tasarlama: Planlama
Tasarım: Proje
Tepkinlik: Reaktans
Taslam: Model
Tümlev: İntegral
Türdeş: Homojen

Yeğinlik: Şiddet
Yeğni: Hafif
Yöngü: Vektör
Yöngül: Vektörel

BERKELEY FİZİK PROGRAMI

ÖNSÖZ

Bu dizi, fen ve mühendislik öğrenimi görecek gençler için iki yıllık bir temel fizik dersidir. Yazarların amacı, giriş fiziğini, fiziğin ön safında çalışan bilim adamlarının işledikleri gibi sunmaktır. Bu bakımdan fiziğin temellerini belirgin şekilde işleyen bir izlence hazırlama çabasına girdik. Başta gelen amaçlarımız özel görelilik, kuantum fiziği ve istatistiksel fizik düşüncelerini tutarlı bir giriş programı çerçevesi içinde sunmaktır.

Bu öğreti lise fiziği görmüş öğrenciler için planlanmıştır. Diferansiyel ve tümlevsel hesabı içeren bir matematik dersinin programla birlikte yürütülmesi gerekir.

Günümüzde Birleşik Amerika'da üniversite düzeyinde birçok giriş fiziği izlencesi geliştirilmektedir. Yeni bir fizik izlencesi hazırlama düşüncesi hem fennin ve teknolojinin gelişiminin, hem de ilk ve orta öğretim düzeyinde girişilen fen öğretimi geliştirme çabalarının doğal bir uzantısı olarak birçok fizikçinin birden kafasında oluşmuştur. Bu izlence düşüncesi Cornell Üniversitesinden Philip Morrison ile C. Kittel arasında 1961 sonunda geçen bir konuşma sonucu ortaya çıktı. Bu arada National Science Foundation'den John Mays ve arkadaşlarının ve o sırada Üniversite Fizik izlencesi Komisyonunun başkanı bulunan Walter C. Michels'in düşünceleri de bizi özendirdi. İzlenceyi ilk aşamasına ulaştırmak için özel bir komite kuruldu. Bu komite başlangıçta Luis Alvarez, William B. Fretter, Charles Kittel, Walter D. Knight, Philip Morrison, Edward M. Purcell, Malvin A. Ruderman, ve Jerrold R. Zacharias'dan oluşmuştu. Komite ilkin Mayıs 1962'de Berkeley'de toplandı; bu toplantıda yeni bir fizik izlencesinin ana çizgileri bütünü ile hazırlandı. Komitenin ilk üyelerinden çoğunun ağır sorumlulukları bulunduğu için 1964 ocağında aşağıda adları olanlarla yeniden kurulması gerekti. Daha başka katkıda bulunanlar her cildin başındaki önsözlerde teşekkürle anılmıştır.

Ana çizgiler ve bununla ilişkin anlayış, ortaya çıkan izlence özdeklerini tümünce etkilemiştir. Ana çizgiler, fen ve mühendislik öğrencilerine giriş derslerinde öğretilmesi gerektiğine ve öğretilebileceğine inandığımız konuları ve edinilmesi istenilen davranışları ayrıntıları ile vermektedir. Sadece üstün öğrenciler ve yüksek puanlılar için bir izlence düzenlemek düşüncesinde hiç olmadık. Biz fiziğin temel ilkelerini taze ve birleştirici bir görüşle vermeğe çalıştığımız için izlencenin bazı kısımları öğrenciler için olduğu kadar öğreticiler için de yeni sayılabilir.

İzlencenin beş cildi aşağıdaki kişilerce hazırlanmıştır:

I. Mekanik (Kittel, Knight, Ruderman, yeni baskı Helmholz)
II. Elektrik ve Mıknatıslık (Purcell)
III. Dalgalar (Crawford)
IV. Kuantum Fiziği (Wichmann)
V. İstatistiksel Fizik (Reif)

Her cildin yazarı konuya uygun biçemi ve sunuş yolunu seçmekte özgür idi.

Yeni bir fizik laboratuvarı hazırlama işi, baştan beri Alan M. Portis'in yönetiminde gelişerek bugün Berkeley Fizik Lâboratuvarı diye bilinen çalışmaları ortaya çıkardı. İzlencemiz fiziğin temel ilkelerini işlemeğe yöneldiği için bazı meslektaşlar ye-

terince deneysel fizik yapılmadığı izlenimi edinebilirler. Laboratuvar çalışmaları önemli deneylerce zengindir ve izlencenin bütününü dengeli tutacak biçimde düzenlenmiştir.

Bu izlencenin gelişmesi National Science Foundation'nin mali desteği ve California Üniversitesinin önemli yardımları ile olmuştur. Bu yardımlar izlence geliştirimlerini yürüten bir kamu kuruluşu olan Educational Services Incorporated tarafından idare edilmiştir. Bu bakımdan bütün bu kuruluşlara şükran borçluyuz. California Üniversitesi, izlencemizle resmi bir ilişkisi olmasa da, bize her bakımdan çok yardımda bulundu. Bu yardımlar için Fizik Bölümünün ardısıra gelen iki başkanına August C. Helmholz'e ve Burton J. Moyer'e akademik olan ve olmayan personeline teşekkür ederiz.

Komitemiz kitapları sınıflarında deneyerek bize yararlı eleştirilerde ve önerilerde bulunan meslekdaşlarımıza ayrıca teşekkür borçludur.

Bundan önce olduğu gibi, her türlü düzeltme önerileriniz ve eleştirileriniz şükranla karşılanacaktır.

Frank S. Crawford, Jr.
Eugene D. Commins
A. Carl Helmholz
Charles Kittel,
Walter D. Knight
Philip Morrison
Alan M. Portis
Edward M. Purcell
Frederick Reif
Malvin A. Ruderman
Eyvind H. Wichmann

Berkeley, California

CİLT 2'NİN ÖNSÖZÜ

Fizik izlencesinin bu cildinin konusu elektrik ve mıknatıslıktır. Konuların dizilişi ana çizgileriyle alışılmamış değil; durgun elektrik; kararlı akımlar; mıknatısal alan; elektro-mıknatısal irgitim; madde içinde elektriksel ve mıknatısal kutuplanırlık. Bununla birlikte bizim konuya yanaşma biçimimiz gelenekselden değişik oldu. Değişiklik daha çok Böl. 5 ve 6'da kendini göstermektedir ki, burada Cilt I'in bilgilerine dayanarak devinen yüklerin elektriksel ve mıknatısal alanlarını, göreliğin ve elektrik yüklerinin değişmezliğinin uzantısı olarak işliyoruz. Probleme böyle yanaşmak, dikkatleri yük korunumu, yüklerin değişmezliği, ve alanın anlamı gibi kimi temel sorunlar üzerine odaklamaktadır. Bunun için özel göreliğin gerçekten gerekli olduğu tek araç, konumluk çatkılarının Lorentz dönüşümleri ile hızların bileşimi eşitliğidir. Bununla birlikte öğrencinin dersin bu kısmına Cilt I'in geliştirmeye çalıştığı kimi düşünceleri ve davranışları ve bu arada olaylara ve cisimlere ayrı konumluk çatkılarından bakma alışkanlığı, değişmezliği değerlendirebilme, ve bakışım kalıplarına karşı saygı duyma gibi davranışları birlikte getirmesi gerekir. Cilt II'de de üstüste gelme ilkesine dayanan birçok tartışmadan yararlanacağız.

Madde içindeki elektriksel ve mıknatısal olayları ele alış biçimimiz öncelikle minil (mikroskopik)'dir ve hem elektriksel hem de mıknatısal ikizkutupların atomsal ve molekülsel yapıları iyice belirmektedir. Bundan başka elektriksel iletkenlik Drude-Lorentz modeline göre minil düzeyde anlatılıyor. Kimi soruların Cilt IV'de kuantum fiziği öğreninceye kadar açık bırakılması doğal. Ama biz, bir boyutu, bir şekli, ve bir katılığı olan elektriksel yapılar olarak moleküllerden ve atomlardan, elektron yörüngelerinden ve spinlerden bir olup bitti halinde özgürce konuşuyoruz. Giriş ders kitaplarında yer yer kaçınılan ve yer yer karanlıkta kalan bir konuyu, yani madde içindeki minil **E** ve **B** alanlarının anlamını özenle işlemeye çalıştık. Cilt II'de öğrencinin matematiksel araçları, yöngü çözümlemesinin bayırgı, ıraksama, dönül ve Laplace işlemcesi gibi bazı araçları ile genişletilmiştir. Bu kavramlar gerektiği gibi ilk bölümlerde geliştirilmiştir.

İlk şekli ile Cilt II California Üniversitesinde birçok sınıfda kullanıldı. Kitap Berkeley izlencesi ile ilişkili birçok kişinin eleştirisinden ve özellikle bu kitabı sınıfta ilk kullanan E. D. Commins ve F. S. Crawford, Jr'un katkılarından yararlandı. Bu meslektaşlar ve öğrencileri açıklık gereken ya da kökten değişiklik isteyen yerleri yüze çıkardılar. Gözden geçirilen yerlerin çoğu onların verilerine dayanılarak yapılmıştır. İlk taslakların son biçimi üzerine öğrenci eleştirilerini, aynı zamanda problemleri düzenleyen Robert Goren topladı. Bu bakımdan ilk müsveddeleri Texas Üniversitesinde kullanan J. D. Gavenda'nın ve Wesleyan Üniversitesinde kullanan E. F. Taylor'un da çok değerli eleştirileri oldu. Allan Kaufman başlangıçta birçok düşüncelerle katkıda bulundu. A. Felzer ise, ilk "sınama öğrenci"miz olarak ilk metni işledi.

Elektrik ve mıknatıslığın bu ele alınış biçiminin geliştirilmesi düşüncesi yalnız bizim ilk izlence komitesince değil, Massachusetts Institute of Teknology'de yeni izlence materyali geliştirme bakımından koşut bir çalışma yapan meslektaşlarımızında özendirici etkileri oldu. Bunlar arasında M.I.T.de Fen Öğretimi Merkezinden ve aynı zamanda Tufts Üniversitesinden J. R. Tessman genel tutum ve biçimlenme bakımından özellikle etkili oldu. Bu meslektaşım

ilk kopyaları M.I.T.'de kullandı, ve bütün metni eleştirici gözle okuyarak, birçok yeni değişiklikler ve düzeltmeler yapılmasını sağladı.

İlk metnin yayınlanması ve ondan sonra gelen gözden geçirmelere bayan Mary, R. Maloney gözcülük etti. Bayan Lila Lowel metnin büyük kısmını makinada yazdı. Şekillere son şeklini Felix Cooper verdi.

Bu cildin yazarı, Berkeley'deki dostlarına ve en başta bu uzun çalışmayı tatlandıran Charles Kittel'e yüreklendirici uyarıları ve özendirileri için gönül borçlusudur.

E.M.Purcell

ÇEVİRİNİN ÖNSÖZÜ

Berkeley Fizik Programı üniversite düzeyinde bir temel ders kitabı dizisi olmaktan öte tutarlı, dengeli, ileri ve çağdaş bir fizik izlencesidir. Bu 1960'larda dünyanın heryerinde ve eğitimin her düzeyinde girişilen öğretimi yenileme çabalarından birinin ürünüdür.

İzlencenin özellikleri dizinin önsözünde yeterince belirtiliyor; biz sadece Nobel ödüllü Purcell'den Kittel'e, Reif'a, Zacharias'a dek fizik dünyasının ünlü araştırıcılarının fizik öğretimini çağdaşlaştırmak için bilimsel çalışmalarına ara vermeyi göze alışlarını vurgulamak istiyoruz. Bu özverinin nedeni bu ünlü kişilerin mesleklerinin geleceği için duydukları kaygı ve sorumluluktur. Böylece ortak bir çabadan doğan Berkeley Fiziği bilimsel ve pedagojik anlayışı ile dünyanın heryerinde ilgi görmüş Rusça'dan Japonca'ya dek pekçok dile çevrilmiş, İsrail'den Hindistan'a ve Brezilya'ya dek çeşitli ülkelerin üniversitelerinde kullanılır olmuştur.

Berkeley dizisinin elinizdeki ikinci cildi ünlü bir fizikçi, eşsiz bir öğretmen olduğu kadar usta bir yazar olan Edward M. Purcell'in yapıtı. Purcell kitabında doğayı tüm derinliği ile görebilen bir bilim adamı olarak çok karmaşık konuları dupduru yorumlayabilme hünerinin güzel bir örneğini veriyor.

İzlencenin niteliklerini belirtme bakımından daha ilk cildinde mekaniğin görelilik anlatımı içinde ele alındığını ve bunun boylu boyunca bütün konuların işlenmesinde sürdürüldüğünü ve örneğin mıknatısal alan dediğimiz kavramın elektrik alanının göresel bir dönüşümü olarak işlendiğini, termodinamik ve ısı kuramının istatistiksel fiziğe ve kuantum fiziğine dayandırıldığını vurgulamak yerinde olur.

Dizi ülkemizde umulmadık bir ilgi gördü ve kısa süre sonunda ikinci kez basılması gerekti. Bu da kültürel ortamımızın nitelikli yapıtları ne denli özlediği ni gösterir.

Tümü altı cilt tutan izlencenin dilimize çevrilmesi girişimi Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Fizik Bölümünün fizik öğretimini çağdaşlaştırma zorunluğu duymasından ve bu bakımdan meslek çevrelerinden destek görmelerinden kaynaklanmıştır. Böyel bir eylem için tutarlı bir izlence ve onu destekleyen bir laboratuvar programı geliştirmek gerekiyordu. Bunu kendi olanaklarımızla oluşturmağa çalışmak, personel darlığından para darlığına ve hepsinin de üstünde yeterli bir deneyim birikiminden yoksun oluşumuza dek aşılmaz güçlüklerle karşılaşacaktı. Bu bakımdan denenmiş, olgunlaşmış izlencelerden birini uyarlama yolunu tuttuk. Bunun kolay yol olduğunu biliyoruz. Ama Türkiyemizde temel fen bilimlerinin önemi anlaşılıncaya ve bunların öğretimini geliştirmek için gerekli özveri göze alınıncaya dek herhalde daha bir süre geçmesi gerekecek.

Diziyi Türkçeye uyarlamada özellikle terimler yönünden güçlüklerle karşılaştık. Fen dilimizi zenginleştirmek için yeni terimler türetmek gerekiyor. Bunlardan yadırgananlar olacaktır. Ama yabancı dillerden terim aktarma işini olabildiğince dar tutmak zorunda olduğumuz inancındayız. Terim türetim girişimimizi bu ikinci baskıda biraz daha belirginleştirdik. Bu terimler kullanıldıkları yerde dipnotları halinde ve öğretim notları sonunda liste halinde verilmiştir.

İzlence Ankara Fen'de her kitap bir sömestre olmak üzere beş sömestrede uygulanmaktadır. İlk yıl

öğrencilerinin genellikle pek kısa olan birinci sömestresini, bir uyum dönemi olarak, çokça laboratuvara dayalı Newton mekaniğine vermekteyiz. Böylece Berkeley izlencesi fizik öğrencilerinin ilk üç yılını doldurmaktadır. Dördüncü yılda bunun üstüne kuramsal mekanik, elektro-mıknatısal kuram ve kuantum mekaniği gelmektedir. Dizinin elinizdeki cildi ikinci yılın ilk sömestresinde kullanılmaktadır.

İzlence oldukça ağır olduğu halde son yılların olumsuz koşullarına karşın uygulamada beklediğimizden daha az güçlükle karşılaştık. Öğrencilerimizin ön hazırlıkları yeterli olmadığı için çok çaba göstermeleri gerekiyor. Ama tutarlı ve çağdaş bir izlencenin etkili laboratuvarların kendilerine neler kazandırdığını farkeder görünüyorlar; bu, izlencenin tutunmasını sağlayan başlıca etken olmaktadır.

Çabalarımızı destekleyen Türkiye Bilimsel ve Teknik Araştırma Kurumuna, Ford Vakfına ve dizinin bu cildinin ilk baskısını yapan Karadeniz Teknik Üniversitesine bu cildin sınıf içi uygulamasında çeviri ve terimler üzerinde yapıcı uyarılarda bulunan Doç.Dr. Nizamettin Armağan'a, ikinci baskıyı yapan Güven yayınevine şükranlarımızı dile getirmek zevkli bir ödevdir.

Ankara 1979 RAUF NASUHOĞLU

ÖĞRETİM NOTLARI

Cilt II'deki ana konular 14 ya da 15 haftalık bir sömestre içinde bitirebilir. Yalnız öğrenci buradaki ana konuları gereğince işliyebilmek için Cilt I ile hazırlıklı durumda olmalıdır. Metnin geriye kalan kısmını çok acele etmeden okuyabilmeli ve problemler halinde verilen özel konulardan hiç değilse bir kaçını işleyebilmelidir. Böyle de olsa iyi bir seçim ve planlama gerekir. Kitapta bulunan konu sayısı bir sömestrede iyice *işlenebilecek* tutarı aşkındır. Kullanma sırasında kimi kesimler geçilebilir, bazıları da öğrencinin kendi özgür incelemesine bırakılmalıdır. Aşağıdaki notlarda az çok seçimlik sayılabilecek kesimler numaraları ile verilmiştir. Biz burada "az, çok" diyoruz çünkü bunun kesin kararı ve ayrıntıları öğrencilerin yetenekleri ve ilgileri ile, elde bulunan toplam zamanla ve öğrencinin kendisinin konu hakkındaki görüşleri ile belirecektir.

Problemler

Kitaba derste yapılabileceğinden çok daha fazla problem konulmuştur. Bunlar iki grup içinde verilmişlerdir. Her bölümün sonunda bulunan problemler o bölümdeki temel konularla ilgilidir. Bunların çoğu doğrudan işlenebilecek niteliktedir. Eğer öğrenci bu problemlerin birisiyle çok sıkıntıya düşerse temel bir konuyu kaçırmış demektir. Her bölümün sonundaki problemler listesi, kitabın sonuna konulan "Daha Başka Problemler ve Sorular" başlığı altındaki bölümde sürüyor. Dereceleme herzaman keskin olmasa da, bu "Daha Başka Problemler" bölüm sonu problemlerine bakınca daha iddialı ve daha ilginçtir. Bunlardan kimi yeni bir uygulama ve hatta yeni bir konu ortaya getirir. Metin içinde yer yer atlanmış bir konu ya da bir tanıt bu problemlerin biri içindeki tartışmalar ve ip uçlarından yararlanarak geliştirilecektir. Bu problemler ve sorular birçok amaçlara yarayabilir: İyi öğrenciler için bunlar, üzerinde düşünmeğe devam edecekleri konulardır. Bu problemler çözülmeden doğrudan okunsalar bile, incelemekte olduğumuz düşüncelerin nekadar geniş bir uygulama yeri olduğunu gösterir. Problemlerden kimi özel bir konu üzerine yapılacak bir dersin çıkış noktası olabilir. (Bunun bir örneği sınırlı uzayyüklü diyod üzerine düzenlenmiş olan Prob. 4.25'dir.) Bir dersten önce, bu problemlerden birkaçını işlemek için bir saat harcamak yararlı olur. "Daha Başka Sorular" ise bir tartışma saatinde çalışmalara başlangıç olabilir.

Ders Gösterileri

Ders deneyleri hiç kuşkusuz çok önemli. Hiç bir kitap tek başına öğrenciyi elektrik ve mıknatıslık içine sokamaz; özellikle çok güzel bir mantık yapısı içine sokulmuş herhangi bir konuda bir ders kitabı, çok fazla kuramsal olma eğilimine düşer. Bu kitabı bu genel kuralın dışında sayamayız. Öğrencinin mıknatıslarla oynaması, kangallar sarması, kıvılcımlar çıkarması, çok planlı ve ince yapılı elektriksel aletleri görmesi, çok sağın bir aygıtı kullanması gereklidir. Öğrenci 1 megawatt'ı olduğu kadar 1 mikrowatt'ıda iş başında görmelidir. Berkeley laboratuvar çalışmaları bu bakımdan olabildiğince güzeldir. Bununla birlikte elektrik alanının sadece bir simge değil ama şakırdayan bir gerçek olduğunu her fırsat düştükçe öğrenciye göstermek için daima uyanık bulunmak gerekir.

Sınavlar

Bu kitapta birçok konu oldukça ileri düzeyde işleniyor. Öğrencinin böyle bir tutumdan yararlanacağına inanıyoruz. Bununla birlikte sınavları bu düzeye göre ayarlama eğilimine karşı durmak gerek.

Bizim gördüğümüz daha basit sınavların daha iyi ölçtüğünü göstermiştir.

Bölüm I. (Durgun yük: Yükler ve Alanlar.) Bu temel düşüncelere doğrudan bir giriştir. Konu çokçası kurudur ve daha baştan, durgun yük üzerine ders gösterileri ile birlikte yürümesi uygun olur.

Seçimlik kesimler: 1.6

Bölüm 2. (Elektrik Gerilimi). Bu bölümde de çok fazla yeni fizik yok, ama birçok yeni matematiksel araç geliştirilmiştir. Bunlar, sınıfın matematikteki yeteğine ve hazırlık derecesine uygun bir hızla özenle işlenebilir. Bu bölümde bütün verilenlere ergeç gereksinim olacaktır. Bununla birlikte dönül (rotasyonel) işlemi Böl. 6'ya kadar çok kullanılmayacaktır. Eğer başlangıçta matematiksel bir güçlük olursa Kes. 2.15'den 2.18'e kadar giden kesim daha ileriye bırakılabilir. Öğrencinin ıraksamayı ve dönülü sezileriyle kavramak gereksiniminde bulunduğu göz önünde tutulmalıdır. Metin içinde Şek. 2.23 ve 2.34 gibi bir takım yardımlar ve bazı alıştırmalar var: Yine de açık tartışmanın, tahtada çizilen şekillerin ve el imlemelerinin yerini tutabilecek hiç bir şey yoktur.

Seçimlik kesimler: Hiçbiri.

Bölüm 3. (İletkenlerin Çevresindeki Elektrik Alanları). Bu bölüm oldukça hızlı işlenebilir. Burada incelenen koşut yapraklı sığalık bir çok kez karşımıza çıkacaktır. Bazı önemli düşünceler, tartışmalar ve yargılar sonunda pek basit olmadığı anlaşılan eşsizlik teoremi ile ortaya çıkar. Durgun elektrikte sınır değeri problemleri için, gevşeme yönteminin ve uydurumlu yöntemin bu basamakta kullanılmaya başlaması pek görülmüş değildir. Ama geleneksel "görüntü" hilesinden daha öğretici olan ve daha çok kullanılan bu düşüncelere öğrenciler ilgi gösterirler. Bununla birlikte bütün bu kesim (Kes. 3.8) fazla zarar görmeden geçilebilir. Aynı biçimde çizgisel dizgelerin genel olarak nasıl anlatımlanacağı üzerine somut bir örnek verme amacı güden sığa katsayıları ile ilgili Kes. 3.6'da geçilebilir. Bu bölümde elektrik alanlarının ve gerilimlerin kılgın (pratik) ölçülüşleri, herhangi bir aygıtın anlatımı, alanların işe karıştığı deneylerle ilgili aygıtlar, elektroskoplar durgun yük voltölçeri gibi aygıtlar atlanmıştır, çünkü gerçek dünyayı yakına getirmek için ders gösterileri ve laboratuvar deneyleri yapmak yani öğrenciyi kılgın çalışmalara yöneltmek gereklidir.

Seçimlik kesimler: 3.6, 3.8

Bölüm 4. (Elektrik Akımları). Hacımca (oylumca) akım yoğunluğu kavramı daha başlarda veriliyor ve iyonlarla yük taşınımına dayanan minil model daha başlarda geliştiriliyor. Ohm yasasının altında saklı fizik, klasik Drude-Lorentz modeli yoluyla araştırılmıştır. Kes. 4.4'deki konular izlence olanaklarınca az çok derinlikle işlenebilir. Sonra gelen konuların hiç biri buna bağlı değildir. Ama buradaki fizik, fiziğin kendisi için önemlidir ve öğrenci bu konuyu hiç değilse okumalıdır. Doğru akım devrelerinin işlenmesi temel çizgilerine indirgenmiştir. Bu bilinen yol boyunca örnekler ve problemler yardımıyla genişletilebilir. Berkeley Laboratuvar ile öğrenciler daha önce kılgın deneyimli bulunacaklardır.

Seçimlik kesimler: *4.5, 4.6, 4.10*

Bölüm 5. (Devinimde Bulunan Yüklerin Alanları). Cilt 1'den ve laboratuvar çalışmalarından öğrenci, mıknatısal alan ve devinen bir yüke etkiyen $q(\mathrm{v}/c) \times \mathbf{B}$ kuvveti üzerine bilgi edinmiş bulunuyor. Bunu şimdi gözden geçirmek iyi olacaktır. Mıknatısal etkileşim üzerine basit gösteri deneyleri ve özellikle koşut iletkenler arasındaki kuvvetler Kes. 5.3'e başlamazdan önce gösterilmelidir. Bu bölümde öğrenci mıknatısal etkileşime başka bir görüş açısından bakacaktır. Burada başta gelen fiziksel olgu yüklerin değişmez (invariant) oluşudur. Bunu tadabilmek için devinimli bir yükün bulunduğu bir dizge içindeki yük tutarı tanımını tam olarak ele almak gerekir. Bu bölümün başta gelen amacı, sabit hızla devinen bir yükün elektrik alanının iyice anlaşılmasıdır. Bunun kilit noktası da elektrostatik alanın devinen bir çatkıya dönüşümüdür. Burada alan kavramının ayrıntıları ile tartışılması gerekir. Öğrenci Kes. 5.5'deki düşünüşü anlayıncaya dek, çok özel bir hal gibi görülen bir örnekten, genel bir dönüşüm yasası çıkarılmasını kuşku ile karşılayacaktır. Çok hızlı parçacıkların elektrik alanı, öğrencilerin çoğuna, hatta daha çok "gecikmiş" bir alan uman yetişkinlere ilginç bir şaşırtı olmaktadır. Işıma olayı buradan kısa bir adım ötededir, ve bunu Cilt III'e bırakmış olsak da öğrencilere burada bremsstrahlung ve sinkrotron ışınlarının nasıl oluştuğu (bk. 5.8) gösterilebilir. Öğrencinin daha önce öğrenmiş olması gereken bir konuyu tanıtlamak için oldukça uzun bir zaman alan Kes. 5.8, eğer dizinin Cilt I sayfa 401'de kuvvet dönüşümünü incelemiş ise çok kısalabilir. Son kesimde hıza bağlı kuvvet ortaya çıkmaktadır. Türetilişin ayrıntıları bunun niçin olabildiğini anlamaktan daha az önemlidir. Sonuçların yalınlığı ve kesinliği genişçe belirtilmelidir.

Seçimlik kesimler: Hiçbiri

Bölüm 6. (Mıknatısal alan). Kaynağı açıklanmış olan $\mathbf{B}$ mıknatısal alanı yeniden ortaya atılır.

Doğru biçimli bir akım teli için elde edilmiş

$$\int \mathbf{B} \cdot ds = 4\pi I/c$$

tümlev bağıntısı, genellikle kararlı akımlar için yeterli olduğu yalınca bir koyut (postülat) halinde verilir. (Daha önceki türetim işlemini burada da yapmaya kalkışmak bizi ivmeli yükler ile karşı karşıya getirirdi.) Bu bölümde gerilim yöngüsü kavramını ortaya atışımızın birçok nedeni var. Burada ve daha sonra Böl. 10'da kullanıldığı şekliyle bu pek karışık değildir. Fizikte ilerlemek isteyen her öğrenci buna alışmak zorundadır. Metin içinde ortaya konulmuş olmasa da eksence yönelmiş bir yörgüyle bir kutupsal yöngü arasındaki ayrım göz önünde tutulabilir. Madde içindeki $\mathbf{E}$ ve $\mathbf{B}$'nin daha sonraki işlenişini, elektriksel ve mıknatısal kaynaklar arasındaki temel bakışım ayrımı ile bağdaşır halde tutmaya özellikle özenli davrandık. Ama bu bölümdeki en önemli konu, mıknatısal alanın kendisidir. Boşluktaki alanların burada doğal olarak gelen dönüşüm yasaları birçok örnekleri işleyerek ortaya konulabilir. Örneğin Problem 6.15 çözülmesi ve derslikte irdelenmesi gereken bir örnektir. Kes. 6.9'un ilk Kesimi önemli bir noktayı açıklığa kavuştursa da Kes. 6.8 ve Kes. 6.9 vazgeçilmeyecek nitelikte değildir ve seçimlik okuma parçası gibi kullanılabilir.

Seçimlik kesimler: 6.8, 6.9

Bölüm 7. (Elektro Mıknatısal İrgitim ve Maxwell Denklemleri). Bu bölümü vermek için birçok denel gösteri gerek. Oldukça duyar ve hızlı bir aynalı akımölçer ile Kes. 7.2., 7.3, ve 7,4'deki eşdeğerlik tartışması, kangalları ve mıknatısları devindirerek göz alıcı şekilde açıklığa kavuşturulabilir. (Kitapta Böl. 10'a kadar adı geçmeyecek olan sürekli mıknatısları burada kullanmakta duraksamayın). Bu bölüm özel hiç bir problem ortaya çıkarmaz. İrgitimin kılgın örneklerinin sayısı sınırsızdır. İşleyişimiz iki noktada fazlaca sık dokunmuş gibidir: (1) Kes. 7.8'de özirgitim yüzünden çıkan güçlük ve bu yüzden karşılıklı irgitimi önceden ortaya atışımız; (2) Kes. 7.12'de uzun boylu tartıştığımız yer değiştirme akımlarının oynadığı kesin rol. Bizim görgümüze göre bu sorular eğer fazla karıştırılacak olursa, düşünceli öğrencileri rahatsız edecektir; bunlar hemen ilkten düzeltilebilir. Bir kez Maxwell denklemlerini ele geçirince, elektro mıknatısal dalgalardan söz etmek hevesine dayanmak güçtür, Kes. 7.13'ün sonunda Cilt III Dalgalar bölgesine azıcık sızdık.

Seçimlik kesimler: 7.7, 13'ün son bölüğü.

Bölüm 8. (Dalgalı Akım Çevrimleri). Dalgalı akım kuramı yalnız ana çizgileri ele alınmıştır. Bu ölçülü girişin öğrencinin laboratuvarda edindiği kılgın deneyimi tamamlayacağı umulur. Bundan başka karmaşık gösterimin kullanılması Cilt III çalışmalarına bir hazırlık olacaktır. Zaman kalırsa, öğreticiler, alışılmış yol boyunca kolayca yürüyebilecek olan bu konuyu geliştirmek istiyebilirler. Öğrenci mühendislik derslerinde dalgalı akım çevrimlerini inceleyecek ise bu bölümü büsbütün atlamak da düşünebilirler. Bu durumda Kes. 8.1 alıkonmalı ve Böl. 7'nin bir parçası halinde ve mantıkça Kes. 7.10'nun ardından incelenmelidir.

Seçimlik kesimler: Hiçbiri. (ya da kes. 8.1 dışında tümü)

Bölüm 9. (Madde İçinde Elektrik Alanları). Özenli bir planlama ile gidilmezse, Böl. 9'a ve 10'a varıncaya dek zaman tükenebilir. Bu iki bölüme bütün

zamanın beşte birinden daha fazla bir kısmı, yani 13 ya da 14 haftalık sömestrenin 4 haftasının verilmesi gerekir. Buradaki ana amacımız öğrenciyi maddenin elektriksel yapısı ile tanıştırmaktır; minil alan üzerine görüngüsel kuram ikinci derecede yer alır. Örneğin zaman sıkışık ise, dielektrik küre klasik örneğini irgitimle oluşan ya da sürekli çiftkutup döngüleri lehine bir yana bırakabiliriz. (Bununla birlikte bir ilk işleme sırasında, uzun bir kesim olan Kes. 9.13'ün her zaman bırakılması uygundur; ama iyi hazırlanmış uyanık ve ilgili öğrenciler için değil.) Öğrencinin kimya temel bilgisi her ne ise kullanmak için her fırsattan yararlanılmalıdır. Bu konu fizikçi ile kimyacının ortak bahçesidir ve buradaki düşünceler dersliğinizdeki geleceğin molekülsel biyologları ve fizyologları için de aynı derecede önemlidir. Konuyu Debye'in düşüncesi doğrultusunda ele alın.

Seçimlik kesimler: 9,6, 9.10, 9.11, 9.13, 9.17

Bölüm 10. (Madde İçinde Mıknatısal Alanlar). Bu bölüm de Böl. 9 gibi birçok kapılar açar. Öğreticinin sınıfını bu kapılardan heyecanlı gezintilere çıkarması olanağına karşı Böl. 9'dan daha az bir zaman ister. Eğer zaman sıkışıksa ya da böyle geziler için zaman ayırmak istenirse, Kes. 10.15'de Denk. 23'den başlayarak mıknatıslığın klasik çözümlemesi ile ilgili ayrıntılar bir yana bırakılabilir ve Kes. 10.3 ile 10.4 bir takım eşitliklerin türetilmesinden çok, verdikleri sonuçlar için gözden geçirilebilir. Bundan başka madde içinde minil alanlar sorusu üzerinde daha az zaman harcanabilir. (öğrenci bu konuya, daha sonra, gerektiğinde dönebilir). Minil mıknatısal alanın işlenmesi Böl. 9'daki elektrik alanı işlenmesine koşut düzenlenmiştir. Bu işleniş her iki halde de bir varsayım olan "koğuklar" dan kaçınmamızı sağlar. Şek. 10.19'da verilen gengüdüm özeti öğrencinin kendi irdelemesini planlamasına yardım edebilir.

BİRİMLER

Bu kitapta genellikle CGS Gauss birimlerini, ama uygun geldiği yerlerde volt, ampere, coulomb, ve ohm'dan oluşan kılgın birimleri kullanıyoruz. Ampere birimini kullanmaktan kaçındık ve temel akım birimi olarak esb/s'yi aldık. Önde gelen mıknatısal alan B'dir. gauss ile ölçülür ve adına mıknatısal irgitim demiyoruz. Bir birimler çizelgesi ve birimlerin dönüşümleri kitabın sonunda verilmiştir. Kitabın sonundaki çizelgede MKS elektrik birimleri ile kullandığımız birimlerin bağıntısı sağlanır.

Bir evrensel sabitler çizelgeside kitabın sonunda verilmiştir.

İÇİNDEKİLER

	Kitapta Kullanılan Yeni Terimler	*IV*
	Berkeley Fizik Programı	*V*
	Cilt II'nin Önsözü	*VII*
	Çevirinin Önsözü	*IX*
	Öğretim Notları	*XI*
Bölüm 1	Durgun Elektrik: Yükler ve Alanlar	1
Bölüm 2	Elektrik Gerilimi	29
Bölüm 3	İletkenler Çevresindeki Elektrik Alanları	67
Bölüm 4	Elektrik Akımları	91
Bölüm 5	Devinimli Yüklerin Alanları	120
Bölüm 6	Mıknatısal Alan	150
Bölüm 7	Elektromıknatısal Gerilim	185
Bölüm 8	Dalgalı Akım Çevirimleri	226
Bölüm 9	Madde İçinde Elektrik Alanları	245
Bölüm 10	Madde İçinde Mıknatısal Alanlar	292
	Daha Başka Problemler	338
	MKS Sistemi Üstüne Not	368

Bölüm I

Durgun Elektrik: Yükler ve Alanlar

1.1	Elektrik Yükü	2
1.2	Yük Korunumu	3
1.3	Yüklerin Kuantumlu Oluşu	4
1.4	Coulomb Yasası	5
1.5	Bir Yükler Dizgesinin Enerjisi	9
1.6	Bir Kristal Örgüsünün Elektriksel Enerjisi	10
1.7	Elektrik Alanı	13
1.8	Yük Dağılımının Alanı	15
1.9	Akı	17
1.10	Gauss Yasası	19
1.11	Küresel Bir Yük Dağılımının Alanı	22
1.12	Doğrusal Bir Yük Dağılımının Alanı	24
1.13	Yassı Sonsuz bir Yük Katmanının Alanı	25
	Problemler	26

BÖLÜM 1 : DURGUN ELEKTRİK: YÜKLER VE ALANLAR

1.1 Elektrik Yükü

Elektrik, ilk araştırıcılara olağanüstü bir olay gibi göründü. Cisimleri şiddetle elektriklemek ya da sürekli bir akım sağlamak için, onlardan, *ince ateş* dedikleri bir şeyi ayırmak gerekiyordu ki bu da büyük bir hüner istiyordu. Doğada şimşek ile yıldırımın dışında, suyun donmasından ağaçların büyümesine değin giden olayların elektrikli cisimlerin garip davranışı ile hiç ilişkileri yok gibi idi. Bugün biliyoruz ki, atomdan canlı gözeye değin giden bütün bir madde dünyasının fiziksel ve kimyasal özellikleri geniş ölçüde elektrik kuvvetleri ile belirlenir. Elektromıknatıslığın özelliklerini ortaya koyarak bu anlayışı getirdikleri için, Ampere, Faraday, Maxwell ve daha birçokları gibi 19'uncu yüzyıl fencilerine ve maddenin atomlu yapısına bugünkü açıklığı getiren 20'nci yüzyıl fizikçilerine ve kimyacılarına çok şey borçluyuz.

Klâsik elektromıknatıslık elektrik yükleri ve elektrik akımları ile bunların etkileşimlerini inceler ve bu işe karışan niceliklerin, birbirinden bağımsız olarak, sınırsız bir incelikle ölçülebildiğini varsayar. Buradaki klâsik sözü, yalnız kuantumlu olmayan anlamına gelir. Kuantum yasaları ve bu yasalara giren h sabitine, klâsik mekanikte olduğu gibi klâsik elektromıknatısal kuramda da rastlanmaz. Gerçekten klâsik kuram bugünkü gelişmiş halini Planck'ın kuantum kuramından önce bulmuştur. İlginç olanı şudur ki, klâsik kuram bundan sonra da yaşamını sürdürdü; Maxwell'in yüz yıl önce ortaya koyduğu elektromıknatısal denklemlerin parlaklığını, ne kuantum mekaniği devrimi, ne de, özel görelilik (relativite) kuramının* gelişmesi söndürebilmiştir.

Çünkü kuram, deneyler üzerine sağlamca oturmakta ve uygulama bölgesi içinde yani, akım kangallarına, sığaçlara, titreşimli akımlara, radyo dalgalarına ve ışık dalgalarına uygulanma bakımından güvenlik içinde bulunmakta idi. Ama bu denli büyük bir başarı bile, büyük bir kuramın başka bir boyut içinde, örneğin bir molekül içinde de doğru olacağını sağlama bağlamaz.

Elektromıknatıslığın bu klâsik biçiminin çağdaş fizik içinde de önemini korumakta devam etmesini anlamamıza yardım edecek iki olay sayabiliriz. Birincisi, özel göreliliğin klâsik elektromıknatıslığın yeniden gözden geçirilmesini istemeyişidir. Konuyu tarihsel gelişme bakımından ele alacak olursak, özel görelilik kuramı, klâsik elektromıknatıslık ve ondan esinlenen deneylerden doğup gelişmiştir. Maxwell'in alan denklemleri, Lorentz ve Einstein'in çalışmalarından çok önceleri geliştirilmiş olduğu halde, özel görelilik ile tam bağdaşır haldedir. Bundan başka elektromıknatısal kuvvetlerin, kuantum mekaniğine göre uğrayacakları değişim, 10^{-10} cm'den daha küçük boyutlara yani atomun yüzde biri boyutlara kadar önemsizdir. Bir atom içindeki parçacıklar çekim, itim kuvvetleri bir elektroskobun yapraklarına uygulanan yasalara uyarlar: ama, atomsal parçacıkların bu kuvvetlerin etkisi altında nasıl davrandıklarını kestirebilmek kuantum mekaniği ister. Daha da küçük boyutlar halinde, elektromıknatısal kuram ile kuantum kuramının kaynaştırılması ile oluşan kuantum elektrodinamiği başarılı olmakta, ve bugün için araştırılabilen en küçük uzaklıklar halinde birbiri ile bağdaşan sonuçlar verdiği anlaşılmaktadır.

Okuyucunun elektriğin temel olgularını bir ölçüde bildiğini düşünüyoruz. Elektrik yüklerinin varlığını tanıtlayan bütün deneyleri ya da maddenin ne yapıda olduğunu gösteren deneyleri yineleyecek değiliz. Yalnızca, bütün olayların bağlı olduğu ana yasaların dayandığı denel temellere özenle göz gezdirmek istiyoruz. Bu bölümde, durgun elektrik yükleri fiziğini, yani durgun elektriği inceleyeceğiz.

Elektrik yüklerinin bir temel özelliği iki nitelik altında bulunuşu, daha doğrusu, çoktan beri artı ve eksi diye anılan niteliklerde bulunuşudur. Gözlenen olgular öyledir ki, bütün yüklü cisimler iki öbeğe ayrılabilir ve aynı öbektekiler birbirlerini itmelerine karşın, ayrı öbekten yüklü cisimler biribirlerini çekerler. Herhangi uzaklıkta bulunan A ve B gibi iki küçük cisim biribirlerini iterlerse, ve A, elektrikli üçüncü bir C cismini çekerse, B'nin de C'yi çekti-

*Görelilik: Relativite

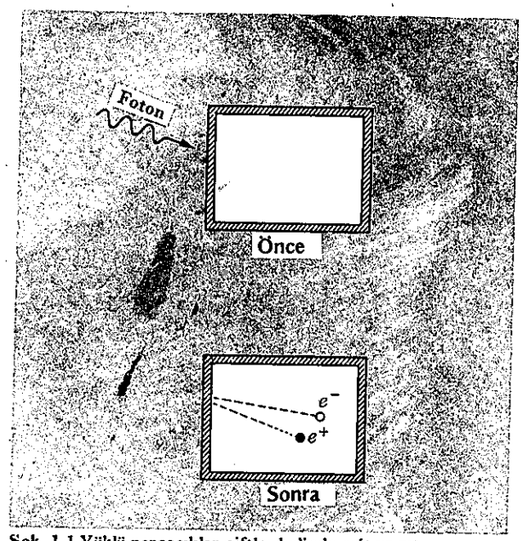
ğini gözleriz. Doğanın bu evrensel yasaya niçin öncelik tanıdığını kesin olarak bilemiyoruz. Ama fizikçiler artı ve eksi yüklere, aynı bir özelliğin zıt görünüşleri diye bakmaktadırlar; sağ ve solun, yönelişin zıt görünüşleri olarak alınabildiği gibi. Gerçekten sağ ve sol bakışım sorunu, elektrik yüklerindeki bu ikilik ile, zamanın iki yönlü olması gibi temel bir bakışım ile yakından bağlı görünmektedir. Temel parçacıklar fiziği, bu sorunları aydınlatmağa çalışmaktadır.

Bizim eksi yük dediğimize artı yük de denilebilirdi, ve bunun karşıtı da doğrudur*. Bu söyleyişin seçilmesi tam bir tarihsel raslantıdır. İçinde bulunduğumuz evren çok iyi dengelenmiş artı ve eksi yüklerden oluşmuş görünmektedir, aynı türden yükler birbirlerini ittiklerine göre bunun şaşılacak yanı yoktur.

Elektrik yüklerinin başka iki özelliği maddenin elektrikli yapısı bakımından önemlidir. Bu iki özellik yük korunumu ve yüklerin kuantumlu oluşudur. Bu özellikler yük tutarı kavramının anlaşılmasını gerektirir. İleride belirli uzaklıkta bulunan yükler arasındaki kuvvetleri ölçmekle yüklerin nasıl ölçülebileceğini belirteceğiz. Şimdilik bu işi sağlama bağlanmış sayalım ki, temel olguları daha rahatça gözden geçirebilelim.

1.2 Yük Korunumu

Yalıtılmış bir dizge içindeki toplam yük hiç bir zaman değişmez. Yalıtılmış bir dizge sözü ile, sınırlarından hiç bir madde geçmeyen dizgeyi anlıyoruz. Fotonlar yük taşımadıklarına göre, dizgenin içine ışık girmesinin ya da dizgeden ışık çıkmasının ilkeyi bozmadığını düşünüyoruz. Örneğin, boşlukta gamma ışınlarına tutulan ince çeperli bir kutu, bir "çift doğuşuna" yol açabilir. Böyle bir olayda yüksek enerjili foton yok olarak yerine bir eksi elektron ile bir artı elektron doğar (Şek. 1.1). Dizge içinde



Şek. 1.1 Yüklü parçacıklar çiftler halinde eşit ve zıt yüklü olarak doğarlar.

elektrik yüklü yeni parçacıklar oluşmuş ama kutunun içinde ve çeperlerinde toplam yükün net değişikliği, sıfır kalmıştır. Bu yasayı çiğneyen bir olgu, eksi yüklü bir parçacık oluşmazken yalnızca artı yüklü bir parçacığın doğması olabilirdi. Ama bugüne değin böyle bir olay gözlenmiş değildir.

Elektronların ve pozitronların yükleri tam olarak eşit olmasa idi, çift yaratılışı yük korunumunu çiğnerdi. Bugüne değin yapılabilen deneylerin duyarlığı içinde bu iki parçacığın yükleri eşittir. Bunun ilginç bir denel sınaması, *pozitronyum* denilen, bir elektronla bir pozitrondan kurulmuş yapı ile verilir. Bu garip *"atom"* ayrıntıları ile incelenebilecek ölçüde uzun ömürlüdür (1 mikrosaniyenin onda birine yakın). Bu incelemeler dizgenin elektrikçe tam ılın* olduğunu göstermiştir. Oysa bu yüklerin büyüklüğünde *herhangi* bir fark gözlenmiş olsa idi buna çoğu fizikçi şaşar belki de hiç inanmazdı; zira elektron ile pozitronun *parçacık-karşıtparçacık* ilişkisi ile bağlı oldukları bilinmektedir. Kütleleri gibi yüklerinin de tam

* Bildiğimiz elektronun *özünde "eksi"lik* ile ilgili bir şey yoktur. Çarpım işlemi tanımlandıktan sonra eksi bir tam sayının artı bir tam sayıdan ayrıldığı özellik; karesinin karşı işaretli bir tam sayı oluşundadır. Ama iki yükün çarpımı bir yük değildir, iki kavramı karşılaştırmak söz konusu değil.

*Ilın: Nötral

eşit olması, doğanın parçacık-karşıtparçacık ikiliği denilen evrensel bir bakışımının açık bir görünüşüdür. Buna göre, yük korunumunun, parçacıkların yaratılması ve yok olması ile ilgili daha geniş bir korunum yasasının bir sonucu olup olmadığı düşünülebilir; yoksa yük korunumu, başka doğa yasalarını düzene koyan bir temel gerek midir? Acaba bu gibi soruların bir anlamı var mıdır? Bunu kesenkes bilmiyoruz.

Elektromıknatıslık işlenirken şu nokta açıkça belirecektir: Yük korunumu bugünkü elektromıknatısal kuramın yapısı ile tam olarak bağdaşır. Böylece aşağıda belirttiğimiz *yük korunumu yasasını*, ya kuramın bir koyutu (postülatı) olarak ya da bugüne dek yaptığımız gözlemlerin tam olarak desteklediği bir denel yasa olarak varsayarız:

> Yalıtılmış bir dizgede bulunan toplam elektriksel yük, yani, her an var olan artı ve eksi yüklerin cebirsel toplamı hiç bir zaman değişmez.

Bu yasanın göreliğin değişmezlik sınavını başarı ile geçip geçmeyeceğini ergeç yoklamak zorunda kalacağız. Bu önemli sorunun tartışılmasını Böl. 5'e bırakalım. Şimdiden hemen şu yanıtı verelim ki, yasa bu sınamadan da sağlam çıkmıştır, ve az önce verilen deyiş yalnız herhangi bir eylemsizlik çatkısı içinde yapılan ölçüler için değil daha kuvvetli olarak, ayrı eylemsizlik çatkılarında bulunan gözlemcilerin yaptıkları ölçüler için de doğrudur, yani bütün bu ölçüler yük tutarı için aynı değeri verir. Başka bir deyimle, yalıtılmış bir dizgenin toplam elektrik yükü görelikçe değişmez bir sayıdır.

1.3 Yüklerin Kuantumlu Oluşu

Milikanın yağ damlası deneyi, ve daha başka sayısız deneyler elektrik yükünün doğada bir tek büyüklükte birimlerden oluşmuş halde göründüğünü ortaya koymuştur. Elektron yüküne eşit olan bu büyüklüğü e ile gösteriyoruz. Pozitronun da tam bu yüke eşit olduğunu daha önce belirtmiştik. İşin daha ilginç yanı, yüklü bütün temel parçacıkların taşıdıkları yüklerin eşitliğidir; örneğin, protonun taşıdığı artı yükün büyüklüğü elektronun eksi yüküne tam eşittir.

Proton-elektron yük denkleşmesindeki bu özel eşitlik, duyarlı pek çok yoklamadan geçirilebilir. Bunun için normal hidrojen atomlarının ya da hidrojen moleküllerinin, toplam elektrik bakımından ılın olduğu sınanabilir. Bunun için bir atomlar ya da moleküller ışının bir elektrik alanınca, saptırılmasına çalışılabilir. Bu amaçla yapılan duygun bir deneyde, sezyum atomlarından oluşmuş keskin sınırlı bir demet, yüksek boşluk içinde kuvvetli bir elektrik alanından geçirilir*. Bu geçiş sırasında demette ölçüye gelir hiç bir sapma gözlenmezse, bir sezyum atomu üzerindeki net yükün $10^{-16}e$ 'den daha az olduğu sonucuna varılır. Daha da duyarlıklı bir sınama son zamanlarda değişik bir yöntemle yapılmıştır**. Büyük tutarda hidrojen gazı çevresinden elektrikçe çok iyi yalıtılmış bir depo içine sıkıştırılmıştır. Herhangi bir normal iyonu kaçırmaksızın gazın depodan çıkmasına olanak veren bir düzen kurulmuştur. Protonun taşıdığı yük elektronunkinden diyelim milyarda bir kadar farklı olsun; bu halde iki proton ile iki elektrondan oluşan her hidrojen molekülü dışarıya çıkarken $2 \times 10^{-9}e$ ye eşit yük götürür ve bütün hidrojen kütlesinin depodan dışarıya çıkması deponun elektrik yükünde ölçülebilecek büyüklükte bir değişiklik yaratır. Gerçekten böyle bir deney, atom başına $10^{-20}e$ tutarlık küçük bir yük değişikliğinin gözlenmesine yolaçardı, ama hiç böyle bir şey gözlenmemiştir. Bundan proton ile elektronun yüklerinin 10^{20} de 1'lik bir duyarlıkla eşit olduğu yargısına varıyoruz.

Bugünkü düşüncelerimize göre, elektron ile proton iki temel parçacık için olabildiğince değişiktirler. Ama bu parçacıkların yüklerinin akla durgunluk verecek bir incelik derecesinde eşit olmasının nedenini kimse anlayamamaktadır. Açıkca görülmektedir ki, yüklerin kuantumlu oluşu, doğanın derin ve evrensel bir yasasıdır. Bütün temel parçacıklar bugünkü ölçülerimizin sağladığı olanakların gösterdiği ölçüde hep özdeş tutarda elektrik yükleri taşımaktadırlar. Bazı buluşların ya da bazı kuramsal açıklamaların, $0{,}500\ e$, ya da $0{,}999e$ lık yük taşıyan parçacıkların neden bulunmadığını göstermesini isterdik ama bu yalnızca bir umuttur*.

Yüklerin kuantumluluğu konusunun klâsik elektromıknatıslığın konusu dışında kaldığında kuşku yoktur. Biz bu konu üzerinde durmayacağız, yeq gibi bir nokta yük herhangi bir değerde olabilirmiş gibi davranacağız. Bu davranış bize bir sıkıntı vermez. Bununla birlikte klâsik kuramın temel parçacıkların yapısının ne olduğunu açıklamasını beklememek gerektiğini anımsatmakta yarar vardır. (Bu açıklama zaten bugünkü kuantum kuramında yapılmaktadır). Elektronu elektron halinde tutanın ne olduğu, yükünü kesin olarak bir değerde tutan neden gibi gizemlidir. Burada elektrik kuvvetlerinden başka şeylerin de işe karışması gerekir, çünkü bilindiği gibi elektronun ayrı kısımları arasındaki durgun elektrik kuvvetleri itici kuvvetlerdir.

Biz elektrik ve mıknatıslığı incelerken yüklü parçacıkları yalnız bir yük taşıyıcısı olarak alacağız ve boyutlarını o denli küçük düşüneceğiz ki uzayda tuttukları yer ve içyapıları birçok konular için önemsiz sayılabilsin. Örneğin, proton halinde, yüksek enerji saçılması deneylerinden bildiğimize göre, elektrik yükleri 10^{-13} cm yarıçaplı bir kürenin dışına taşmamaktadırlar. Rutherford'un alfa parçacıkları saçılması deneyinin çözümlemesinin, ağır atom çekirdeklerinin yüklerinin bile 10^{-11} cm'den daha küçük bir bölge içine toplandığını gösterdiğini anımsayalım. 19. yüzyıl fizikçisi için bir nokta yük, soyut bir kavram idi ve bunu göstermekte kullanılan bir mürver özü küreciği, oldukça kaba bir yaklaşıklık idi. Bugün atomsal parçacıklara epeyce alıştık. Elektriğin taneli oluşu doğanın bugünkü anlatımında o kadar bellidir ki, artık bir nokta yükü, sürekli olarak değişen bir yük dağılımı anlayışından daha yapmacık bir tasarı diye düşünmeyebiliriz. Sürekli bir yük dağılımı varsaymak gerektiği zaman bu çok büyük sayıdaki temel yüklerden oluşmuş bir ortalama olarak düşünülebilir. Nasıl ki, bir sıvının genil ölçüde tanımlanan yoğunluğu, molekül ölçeğine gidince ayakta duramaz. Millikan'ın yağ damlalarından çok daha büyük cisimler için yüklerin kuantumlu oluşu pek ayırdedilemez.

1.4 Coulomb Yasası

Durgun haldeki yükler arasındaki etkileşimin Coulomb Yasası ile betimlendiğini her halde bilirsiniz: Durgun iki elektrik yükü biribirlerini yüklerinin büyüklüğünün çarpımı ile oranlı ve aradaki uzaklığın karesi ile ters oranlı bir kuvvetle iterler ya da çekerler.

Bu yasa yöngü (vektör) dili ile kısaca*

$$\mathbf{F}_2 = k\frac{q_1 q_2 \hat{\mathbf{r}}_{21}}{{r_{21}}^2} \qquad (1)$$

biçiminde yazılabilir. Burada q_1 ve q_2 iki yükün büyüklüklerini ve imlerini veren sayıl (skaler) niceliklerdir**, $\hat{\mathbf{r}}_{21}$ ise, 1 yükünden 2 yüküne yönelen birim yöngü*** $\mathbf{F}_2$,2 yüküne etkiyen kuvvettir. Böylece Denk. 1, daha başka noktalar arasında, aynı türden yüklerin birbirini ittiğini ve ayrı türden yüklerin birbirlerini çektiğini, kuvvetin bir Newton kuvveti olduğunu, yani $\mathbf{F}_2 = -\mathbf{F}_1$ olduğunu anlatır.

---

* J. C. Zorn, G. E. Chamberlain and V. W. Hughes, *Phys. Rev.* 129, 2566 (1963).

** J.G. King *Phys. Rev. Letters* 5 562 (1960). Yük eşitliği üzerine daha önce yapılan sınamalar bu yazıda ve *Gravitation and Relativity* adlı kitabın V. W. Hughes tarafından yazılan bölümünde özetlenmiştir. (W. A.Benjamin,Inc. New York,1964). Böl. 13.

* Öğesel parçacıklar üzerine bazı kuramsal kurgular $\frac{1}{3}e$ ve $\frac{2}{3}e$ yüklü parçacıkların bulunabileceğini ileri sürmektedir. Ama bunların doğmasına ve yüze çıkarılmasına elverişli sayılan koşullar altında yapılan araştırmalar bu parçacıkların varlığını gösterememiştir. [L. B.Leipuner, W. T. Chu, R.C.Larsen, R. K. Adair, Particles with a Charge of $\frac{1}{3}e$, *Phys. Rev.* Letters 12. 423 (1964). Bu kitabın yazıldığında tartışmalar sürmükte idi.

* Yöngü: Vektör

** Sayıl: Skaler

*** Burada uyduğumuz anlaşma en doğal seçim olmayabilir, ama bu şekli fiziğin başka yerlerinde kullanılanlar ile bağdaşmaktadır ve bu kitap boyunca buna bağlı kalacağız.

Eşitlikteki birim yöngüsü, kuvvetin yükleri birleştiren doğruya koşut olduğunu anlatır. Bunun başka bir biçimi olası değildir, yeter ki, uzayın kendisinin, kendi içinde doğrultuya bağlı özellikleri olmasın. Boş ve eşyönlü bir uzay içinde bulunan yalnız iki yük için herhangi başka bir doğrultu seçilip alınamaz. Eğer "nokta yük"ün özel bir iç yapısı ve bu yüzden kendi bir öz ekseni olsa idi, o zaman bu yük q gibi basit bir yalın nicelikle tanımlanamazdı.

Denklem 1'in yazılışında her iki yükün uzay içinde belli yerler tuttuklarını ve bu yerlerin r_{21} 'e bakınca küçük olduğu varsayılıyor; yoksa r_{21} belirsizleşir ve Denk. 1 genel olamazdı. Durgun yükler haline sınırlanmamızın nedeni hareketli yüklerden doğan mıknatısal kuvvetleri şimdilik aradan çıkarmak içindir.

Denk. 1'deki k sabiti birimleri hesaba katmak içindir. Genel olarak r_{21}'i cm ile ölçeceğiz. $\mathbf{F}$ kuvvetleri din ile, yük ise CGS birimleri veya esb cinsinden olacaktır. Bu halde k tam 1'e eşittir. Büyüklükleri 1'er esb olan iki yük, 1 cm aralıkla dururlarken birbirlerini tam 1 dinlik kuvvetle iterler; $k = 1$ almak koşulu ile Denk. 1'i CGS durgun elektrik birim kümesinde yük birimini tanımlıyan bir eşitlik olarak görebiliriz. Yük birimi olarak *coulomb* da kullanılacaktır. Bu birim çokcası metre-kg-saniye dizgesinde kullanılır. Yükler coulomb, uzaklık metre olarak alınırsa k sabitine 8.9875×10^9 değeri vermek koşulu ile Denk. 1 kuvveti Newton olarak verir. Coulomb'un ortaya atılmasının koşulu bunun kılgında kullanılan elektrik birimlerine (ampere, volt, ohm, watt) yalınca bağlanabilmesidir. Bilindiği gibi bu birimler mühendislikte, laboratuvarlarda ve günlük uygulamalarda kullanılırlar. 1 coulomb'luk yükün değeri $2{,}998 \times 10^9$ esb'ye eşittir*.

* Burada gözüken ve daha sonra elektrik birimleri dönüşümlerinde yeniden karşımıza çıkacak olan 2,998 sayısı size ışığın yayılma hızını anımsatabilir. Gerçekten bu oradan gelmektedir, geliş yolunu şimdilik araştırmayacağız. Çoğu kez çizelgelerde ve kitaplarda bunun yerine 3 katsayısı verilir. Gerçekte elektrik birimleri dönüşümünde rastlanan her 3 sayısı yerine 2,99792... ya da ışığın metre dizgesinde ölçülen hızının anlamlı sayıları alınmalıdır.

* Eşyönlü: İzotrop

Elektrik yüklerini yüze çıkarabilmek ve ölçebilmek için tek yol, yüklü cisimler arasındaki etkileşimden yararlanmaktır. O zaman, Coulomb yasasının görünürdeki kapsamının ne kadarının yalnızca bir tanım olduğu merak edilebilir. Yasa bu biçimi ile, fiziksel kapsam bakımından, kuvvetin uzaklığın karesi ile ters oranlı olduğunu, ve elektrik yüklerininin etkilerinin birbirine eklenebildiğini anlatır. Bu son noktayı daha iyi belirtebilmek için, ikiden fazla yük halini ele almamız gerekir. Dünyada deney yapabileceğimiz q_1 ve q_2 gibi yalnızca iki yük bulunsa idi, bunları hiç bir zaman ayrı ayrı ölçemezdik. Yalnızca F kuvvetinin $1/r_{21}^2$ ile oranlı olduğunu doğrulayabilirdik. Şimdi q_1, q_2 ve q_3 yüklerini taşıyan üç cisim bulunduğunu düşünelim. Bunlardan q_1 yükü q_2 'den 10 cm uzakta ve q_3 Şek. 1.2 a'da olduğu gibi çok uzakta bulunduğu sırada q_1 'e etkiyen kuvveti ölçebiliriz. Sonra q_2 'yi öteye götürür ve q_3 'ü q_2 'nin daha önce bulunduğu konuma getirerek q_1 'e etkiyen kuvveti yeniden ölçeriz. Son olarak q_2 'yi ve q_3 'ü birbirine çok yaklaştırır ve bu yüklerin q_1 'den 10 cm uzaklıkta bulundukları zaman ikisinin birden etkiledikleri kuvveti ölçeriz. Böylece yaptığımız ölçülerle q_1 'e etkiyen kuvvetin daha önce ölçülen kuvvetlerin toplamına eşit olduğunu görürüz. Bu önemli bir sonuçtur ve daha önce iki nokta yük arasındaki kuvvetin bu noktaları birleştiren doğru boyunca olması gerektiğini söyleyen bakışım kanıtları gibi, düşünme ve mantık ile kestirilemeyen bir sonuçtur. *İki yük arasındaki etkileşim kuvveti üçüncü bir yükün varlığı ile değişmez.*

Dizgede ne denli yük bulunursa bulunsun, Coulomb yasası (Denk. 1) her yük çifti arasındaki etkileşimi hesaplamak için kullanılabilir. Bu *üstüste gelebilme ilkesi*'dir ve elektromıknatıslık boyunca durmadan yararlanacağımız bir yöntemin temelidir. *Üstüste gelebilme ilkesi*, iki yük takımı ile yeni bir dizge oluşturmak ve bu sırada her iki takımın yapısında hiç bir değişiklik yapmamak demektir. Bu ilke, bir yere gelmiş dizgenin bir noktasına konulan bir yüke etkiyen kuvvetin, her kaynak takımı tarafından ayrı ayrı etkilenen kuvvetlerin yöngü toplamına eşit olduğunu sağlama bağladığımızı sanmayalım, pek

âlâ çok küçük uzaklıkların ve çok şiddetli kuvvetlerin işe karıştığı bölgelerde *üstüste gelebilme ilkesi* geçerli olmayabilir. Gerçekten elektromıknatısal alanda öyle kuantum olayları biliyoruz ki, klâsik kuram açısından bakılınca *üstüste gelebilme ilkesi* başarısız kalır.

Böylece elektriksel etkileşim fiziği, 2'den fazla yük bulunduğu zaman ancak tam görünüşünü alır. Denk. 1'in anlattığından öteye geçerek, Şek. 1,3'deki gibi herhangi birer konumda bulunan üç yükün birine örneğin q_3 'e etkiyen kuvvet şu eşitlik ile doğru olarak verilir:

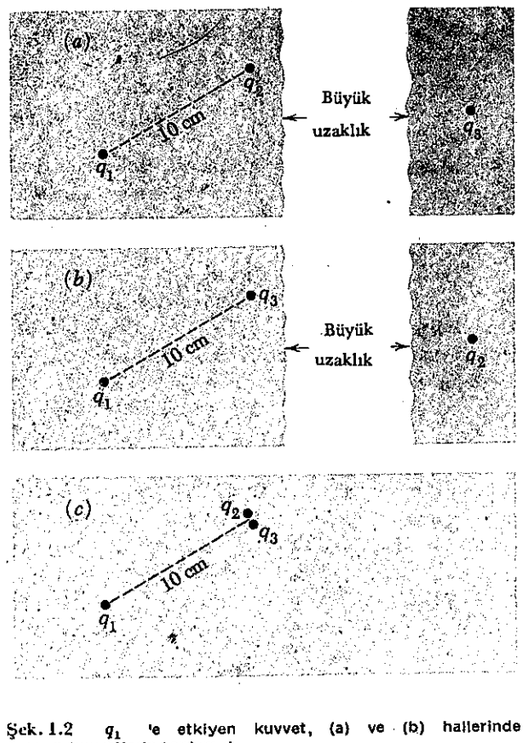
$$\mathbf{F}_3 = \frac{q_3 q_1 \hat{\mathbf{r}}_{31}}{r_{31}^2} + \frac{q_3 q_2 \hat{\mathbf{r}}_{32}}{r_{32}^2} \qquad (2)$$

Örneğin Denklem 2, Şek. 1.3'ün gösterdiği durumda uygulanabilir.

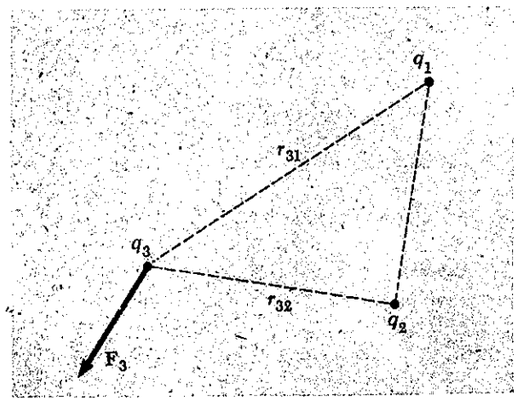
Uzaklığın karesi ile ters oranlılık gibi, yüklere bağlılık yasası da denel yoldan belli bir uzaklık bölgesi için tümcek sınanmış sayılabilir. Coulomb 1785'de, burulma terazisi kullanarak yüklü küçük kürecikler arasındaki kuvvetleri ölçmüştür. Coulomb'dan çok yıllar önce, Priestley, içi boş yüklü bir kürenin içindeki elektrik etkisinin sıfır oluşunda, yer çekim alanı ile benzerlikten yararlanarak, uzaklığın karesi ile ters oranlılık yasasının geçerliğini görmüştür. Hünerli bir deneyci olmasına karşın, çağdaşlarınca pek tanınmayan İngiliz Henry Cavendish, 1772 yılında, uzaklıkla ters oranlı yasasını yüzde 2 yaklaşıklıkla sınamıştır. Cavendish bunun için ikiye ayrılabilen içi boş bir küreyi yüklemiş, sonra küreyi iki yarım parçaya ayırarak daha önce içine konmuş bulunan bir iletken kürenin yüklü olup olmadığına bakmıştır. İç kürede hiç yük bulunmaması uzaklığın karesi ile ters oranlılık yasası için bir kanıttır*. Cavendish sınamasının bugünkü yinelenimlerinde**, yasa-

* Böl 3'de tartışacağımız gibi küresel olsun ya da olmasın bir iletken kabuğun içindeki alan sıfırdır. Cavendish'de Priestley gibi kütle çekimi ile benzerliği düşünerek kare ile ters oranlılık yasasının bu daha genel sonucunu farketmiş görünmemektedir.

** S. J. Plimton ve W. E. Lawton *Phys. Rev.* 50, 1066 (1936).



Şek. 1.2 q_1 'e etkiyen kuvvet, (a) ve (b) hallerinde etkiyen kuvvetlerin toplamıdır.

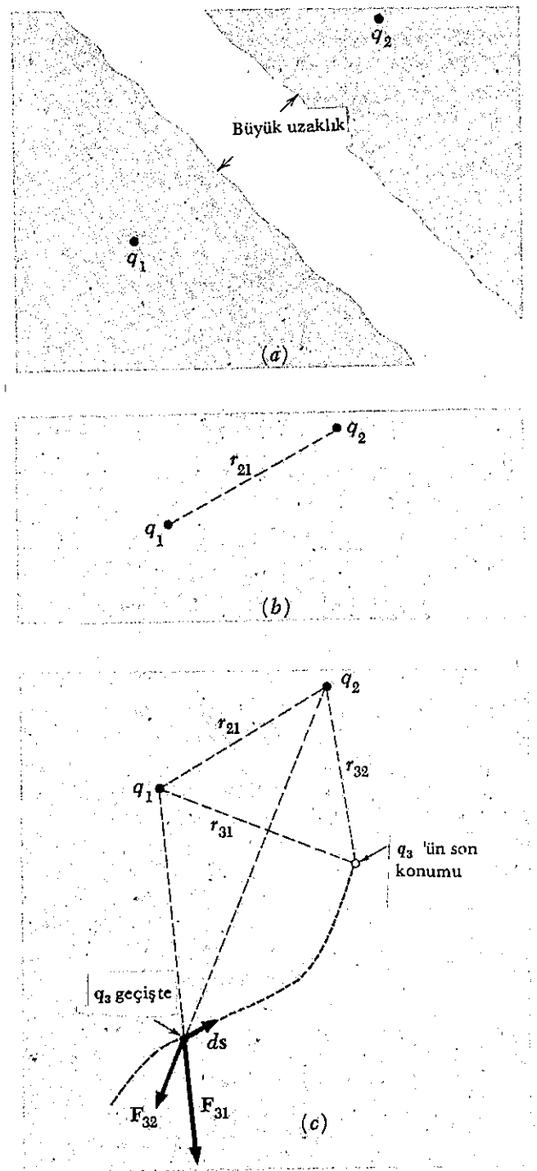


Şek. 1.3 İki yükün bir yüke etkilediği Denk. 2'de deyimlenen kuvvet.

nın birkaç santimetreden 30-40 cm'ye kadar giden uzaklıklar için, 10^9 'da bir hata ile doğru olduğu anlaşılmıştır.

Bu denel sonuçlar zaman zaman, karenin tersi ile oranlı yasasının "üssünün" sınanması olarak anlatılır. Bununla birlikte gerçek soru, üs için doğru sayının 2'mi yoksa 1,99998 gibi bir sayı mı olduğu değil, kare ile ters oranlı yasanın gerçekliğini yitirdiği bir uzaklık varsa bunun hangi uzaklık olduğudur. Yasanın geçerliğini yitirebileceği iki bölge vardır. Birincisi 10^{-14} cm'nin altında çok küçük uzaklıklar bölgesidir ki, bu bölgede elektromıknatısal kuramın bütünü ile işleyeceği üzerine, daha önce de belirttiğimiz gibi, hiç bir güvencemiz yok. Bundan başka, coğrafi boyutlardan astronomik boyutlara dek giden çok geniş aralıklar içinde, Coulomb yasasının geçerli olacağı üzerine elimizde hiç bir denel yoklama sonucu yoktur. Gerçi büyük uzaklıklar halinde yasanın çökmesini beklemek için bir neden yok. Modern kuantumlu elektromıknatısal alan kuramı Coulomb yasasının, bugün yapılan Cavendish deneylerinde kullanılan uzaklıklardan çok büyük uzaklıklar için de ayakta duracağını tartışmağa elverişli bazı temeller vermektedir. Bunun nedeni büyük uzaklıklarda, uzaklıkla ters oranlı yasanın kesilmesi ışık kuantumlarının yani fotonların küçük ama sonlu bir durgun kütlesi olmasını ve dolayısiyle elektromıknatısal dalgaların boşluktaki yayılma hızında dalga boyuna bağlı küçük bir değişim gözlenmesi gerekirdi*. Doğrudan yapılan gözlemlerden bilindiği gibi, boşlukta kısa radyo dalgaları, görünen ışık ile 10^6. da 1 denel hata içinde aynı hızla yayılırlar. Buna dayanarak Coulomb yasanın hiç değilse kilometrelere varan uzaklıklar için doğru kalacağını tartışmak ya da bu gibi dolaylı ve daha da etkili kuramsal tartışma olanakları bulunabilir.

Sözlerimizi özetlersek 10^{-13} cm'den hiç değilse kilometrelere varan çok geniş bir uzaklık



Şek. 1.4 Üç yük biribirlerine yaklaştırılmışlardır. Önce q_2 gelmiş sonra q_1 ile q_2 sabit durdukları halde q_3 beriye getirilmiştir.

* Bunun her gün bilinen en iyi kanıtı, bizden 20 ışık yılı uzakta bulunan patlama yıldızlarından patlama ile yola çıkan radyo dalgalarının ve ışık dalgalarının yere hemen hemen aynı anda (birkaç dakika farkla) ulaşmalarıdır. B.Lovell, F. L. Whipple and L. H. Solomon Nature 202, 377 (1964).

bölgesi içinde Coulomb yasasına inanmak için çok nedenler vardır ve biz bu yasaları elektromıknatısl ığın incelenmesinde temel olarak alıyoruz.

1.5 Bir Yükler Dizgesinin Enerjisi

Bir ilke olarak durgun elektriğin bütünü Coulomb yasası içindedir denilebilir. Yükler ve yüklerin konumları verilirse bütün elektrik kuvvetlerini bulabiliriz. Yüklerin elektrik kuvvetlerinin ya da daha başka kuvvetlerin etkisi altında özgürce devinimleri sağlandığında, yük dağılımının kararlı kalacağı denge düzenlenişlerinin hangileri olduğunu bulabiliriz. Aynı anlamda, Newton'un mekanik yasalarının tümü burada da geçerlidir. Ama yine mekanikte olduğu gibi elektromıknatısl ıkta da başka kavramlar ve bu arada enerji kavramını işe karıştırmakla olayları içyüzü ile anlamakta yeni bir güç kazanırız.

Burada da enerji kullanışlı bir kavramdır. Çünkü elektrik kuvvetleri *korunumlu* kuvvetlerdir. Önce yüklü birkaç cismi belirli bir düzen içine getirmek için dizge üzerinde görülmesi gerekli işi ele alalım. Bunun için, Şek. 1.4 üstte görüldüğü gibi birbirinden çok uzakta bulunan q_1 ve q_2 gibi yüklü iki cisim ya da yüklü iki parçacık ile işe başlayalım. Yüklü cisimleri yaratabilmek için ne gibi enerji harcanmış bulunduğunu hesabımızın dışında sayıyoruz. Bu parçacıkları, aralarındaki uzaklık ∞ oluncaya değin yavaş yavaş yaklaştıralım. Bunun için ne tutarda iş gerekir?

Yükleri yaklaştırırken q_1'i q_2'ye doğru getirmek ya da öteki türlü gitmek arasında bir ayrım yoktur. Her iki halde de görülen iş, kuvvet ile, yerdeğiştirmenin kuvvet doğrultusundaki bileşeninin tümlevine* eşittir. Bir yükü ötekine yaklaştırmak için uygulayacağımız kuvvet, Coulomb kuvvetine eşit ve ona karşıt yöndedir:

$$W = \int \text{kuvvet} \times \text{yol} = \int_{r=\infty}^{r_{12}} \frac{q_1 q_2 (-dr)}{r^2} = \frac{q_1 q_2}{r_{12}} \quad (3)$$

Aynı imli yükler halinde yapılacak işin artı olması gerekir. Zira böyle iki yükü yaklaştırmak için birbirlerine doğru itmeliyiz. Denk. 3'de q_1 ve q_2 esb birimler cinsinden ve r cm alınırsa iş erg olarak çıkar. Mekanikte *korunumlu* kuvvetleri, incelediğimiz zaman, (Bak. Cild 1, sayfa 145) iki nokta arasındaki işin tutulan yol ne olursa olsun, aynı kaldığını görmüştük. Şek. 1.5'deki q_1 ve q_2 yüklerine orada kullanılan düşünme yolunu uygulayalım. Önce q_1 yükünü yerinde tutuyoruz, ve q_2 yükünü son konumuna değin farklı iki yoldan getirildiğini gösteriyoruz. Yolların her ikisi de yarı çapları r ve $r + dr$ olan iki küre arasında kalan bir katmandan geçecektir. Bu katman içindeki kısa yol boyunca görülen $-\mathbf{F} \cdot ds$ iş öğesi her iki yol için de aynıdır. Bunun nedeni $\mathbf{F}$ kuvvetinin her iki yerde de aynı büyüklükte olması ve q_1'den dışa doğru yarıçap boyunca yönelmesi, ds yolunun ise $ds = dr/\cos\theta$ olmasıdır; buna göre $\mathbf{F} \cdot ds = F\,dr$ dir. O halde her yol parçası üzerindeki öğesel iş öteki yol boyunca görülen işle tam karşılanır, yollar boyunca görülen toplam iş hep eşit olur. Elde ettiğimiz sonuç Şek. 1.5'de görülen noktalı yolda olduğu gibi bir içeri bir dışarı gittiği zaman da doğrudur. (Niçin?)

Şimdi Şek. 1.4'deki bıraktığımız iki yük haline dönelim ve çok uzak bir yerde bulunan üçüncü bir q_3 yükünün yük 1'den r_{31} cm ve yük 2'den r_{32} cm uzakta bulunan bir P_3 noktasına geldiğini düşünelim; bunun için gerekin iş,

$$W_3 = -\int_{\infty}^{P_3} \mathbf{F}_3 \cdot ds \quad (4)$$

olacaktır. Daha önce belirttiğimiz gibi, elektriksel etkileşimlerin birbirlerine eklenebilecekleri anımsanarak:

$$-\int \mathbf{F}_3 \cdot ds = -\int (\mathbf{F}_{31} + \mathbf{F}_{32}) \cdot ds = -\int \mathbf{F}_{31} \cdot dr - \int \mathbf{F}_{32} \cdot dr \quad (5)$$

yazılabilir. Yani q_3 yükünü P_3 noktasına getirmek için görülmesi gereken iş, yalnızca q_1 yükü bulunduğu zaman ki işle, yalnızca q_2 yükü bulunduğu zamanki işin toplamına eşittir:

$$W_3 = \frac{q_1 q_3}{r_{31}} + \frac{q_2 q_3}{r_{32}} \quad (6)$$

buna göre bu üç yükten oluşmuş düzenin kurulması için gerekli, toplam iş U ile gösterilirse,

$$U = \frac{q_1 q_2}{r_{12}} + \frac{q_1 q_3}{r_{13}} + \frac{q_2 q_3}{r_{23}} \quad (7)$$

olur.

*Tümlev: İntegral

Bu örnekte q_3 yükü en son getirilmiş olduğu halde yukarıdaki iş yazımında, q_1, q_2 ve q_3 nicelikleri bakışımlı görünmektedir. Yani q_3 yükü bulunduğu noktaya en önce getirilmiş olsa idi, yine aynı yazımı elde ederdik. (Sınayınız!) Demek ki, U niceliği bir yere yüklerin geliş *sırasına* bağlı değildir. Bu nicelik yüklerin getirildiği yola da bağlı olmadığına göre U niceliği yüklerin son düzenlenişinin "bir tek veya biricik" işlevidir. Bız bu niceliğe bu özel dizgenin *elektriksel gizilgüç enerjisi** adı verebiliriz. Her zaman olduğu gibi gizilgüç enerjinin tanımında bir isteğe bağlılık vardır. Burada dizgenin gizilgüç enerjisinin sıfır noktası olarak, bu elektrik yüklerinin birbirinden sonsuz uzakta, bulundukları hali alıyoruz. Gizilgüç enerji bu *kuruluşun bütününün malıdır*. Dizgenin herhangi bir bölüğüne ya da yüklerden birine gizilgüç enerjinin bir bölüğünü tanımak için tutulacak anlamlı bir yol yoktur.

Bu çok yalın sonucun herhangi sayıda yükler haline genelleştirilmesi yolu açıkca ortadadır. Uzayda herhangi bir düzenleniş içinde bulunan değişik N yükümüz var ise, dizgenin gizilgüç enerjisi, tam Denk. 7'de olduğu gibi, çifter çifter alınan terimlerin toplamı ile bulunur. Yine bu halde olduğu gibi dizgenin gizilgüç enerjisinin sıfırı bütün yüklerin birbirinden çok uzak bulundukları duruma uyar.

Bir örnek olmak üzere, Şek. 1.6 (a)'da görüldüğü gibi, merkezinde artı bir yük bulunan bir kübün, sekiz köşesinde sekiz eksi yük bulunmakta ise gizilgüç enerjisinin ne olacağını hesaplayalım. Eksi yüklerden her birinin $-e$ yüklü bir elektron olduğunu, merkezdeki parçacığın ise $2e$ yükü taşıdığını düşünelim. Bütün çiftler üzerinden toplam alınacak olursa:

$$U=\frac{8(-2e^2)}{(\sqrt{3}/2)b}+\frac{12e^2}{b}+\frac{12e^2}{\sqrt{2}\,b}+\frac{4e^2}{\sqrt{3}\,b}=\frac{4.32e^2}{b} \tag{8}$$

bulunur. Şekil 1.6 (b)'de bu terimlerin her birinin nereden geldiği görülüyor. Enerjinin artı çıkması, bu dizgeyi kurmak için, dizge üzerinde iş görmek gerektiğini gösterir. Buradaki yüklerin çevreye veya başka cisimlere karşı kuvvet kullanarak birbirinden uzaklaşmalarını sağlamak ile, bu iş dizgeden geri alınabilir, ya da, dizgedeki elektronlar özgürce uçup gidecek biçimde kendi hallerine bırakılırlarsa, bütün parçacıklar bir yere gelirken kazandıkları U gizilgüç enerjisi toptan devimsel enerji haline girecektir. Bu söylediğimiz parçacıklar hep birden uzaklaşsalar, ya da, hangi sıra içinde olursa olsun, tek tek uzaklaşsalar da doğrudur. Böylece, toplam gizilgüç enerji kavramının gücünü görüyoruz. Şimdi bu dizgeyi bir yere getirmek için, her parçacık üzerinde, gelişin her basamağında etkiyen kuvveti hesaplamak zorunda olsaydık, problemin ne hale gireceğini düşünün, hemen şunu ekleyelim ki, uğraştığımız örnek üzerinde dizgenin geometrik bir bakışım göstermesi işimizi epey kolaylaştırırdı; yine de yukarda verilen basit hesaplamadan çok daha karışık bir durumla karşılaşacağımız açıktır. Çifter çifter terimlerin toplamlarını yazmanın bir yolu:

$$U=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N}\sum_{k\neq j}\frac{q_jq_k}{r_{jk}} \tag{9}$$

dır. Buradaki $\sum_{j=1}^{N}\sum_{k\neq j}$, çift toplam yazılışı şunu anlatır: $j=1$ ve $k=2,3,4,\ldots,N$ için toplamı bul; sonra $j=2$ ve $k=1,3,4,\ldots,N$ için toplamı bul ve bu yolu $j=N$'ye dek izle. Açıkca görüldüğü gibi bu işlem her çiftin iki kez sayılması demektir; bunun için toplam önüne 1/2 katsayısı koyduk.

1.6 Bir Kristal Örgüsünün Elektriksel Enerjisi

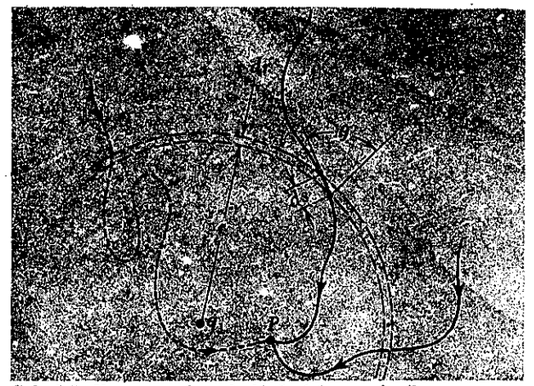
Bu düşüncelerin kristal fiziği içinde önemli uygulama yeri vardır. Biliyoruz ki sodyum klorür gibi bir iyon kristali, çok iyi bir yaklaşıklıkla artı iyonların (Na^+) ve eksi iyonların (Cl^-) üç boyutlu bir ağ ya da kristal örgüsü içinde nöbetleşe yerleşerek düzenledikleri düşünülür. Sodium klorür kristalinde bu düzenleme Şek. 1.7 (a)'da görüldüğü gibidir. Hiç kuşkusuz, iyonlar nokta yükler değildir; ama hemen hemen küresel bir yük dağılımı gösterdikleri için (bunu tanıtlayacağız) birbirlerine etkiledikleri elektrik kuvvetleri, merkezlerine koyduğumuz eşdeğer nokta yükler kuvvetlerinin aynı olacaktır. Elektrikçe eşdeğer olan bu dizgeyi Şek. 1.7 (b)'de gösterdik. Bir yükler örgüsünün durgun elektrik gizilgüç enerjisi, iyon kristallerinin dayanıklılığını ve içyapışkanlığını* açıklamada önemli bir rol oynar. Şimdi bu enerjinin büyüklüğünü hesaplamaya çalışalım.

İrice bir kristal parçası içinde hiç değilse 10^{20} atom bulunduğunu düşünürsek, iki kez sonsuz değilse bile, çok büyük sayıda terimlerin toplamını almak zorunluğu ile karşılaşacağımızı anlarız. Bu toplam bir ereye doğru yaklaşacak mıdır? Burada hesaplamayı umduğumuz, kristalin hacım birimi başına ya da kütle birimi başına gizilgüç enerjisidir. Hesaplanan enerjinin kristalin boyutuna bağlı olmasını bekliyoruz, çünkügenil (makroskopik) bir kristalin bir ucundaki iyonların öteki uçtaki etkileri çok küçük kalacaktır. 2 gramlık sodyum klorür kristalinin gizilgüç enerjisi, 1 gramlık kristalinkinin iki katı olmalıdır. Kristalin yüzeyindeki atomların sayısı toplam sayının küçük bir bölüntüsü olduğu sürece, şekli bir önem taşımaz. Kristal yalnız bir imli iyonlardan oluşmuş olsa idi, bu öngörümüz yanlış olurdu,çünkü o zaman, 1 gramlık bir kristal içinde çok, çok büyük sayıda elektrik yükleri bulunur ve böyle iki kristali bir yere getirerek 2 gramlık bir kristal yapmak için çok büyük enerji harcamak gerekirdi. (Bunun ne kadar olabileceğini hesaplayabilirsiniz!) Kristal yapısının nöbetleşe değişen zıt imli yüklerden oluşması durumu kurtarmaktadır, zira genil bir kristal parçası aldığımız zaman bu hemen hemen ılındır.

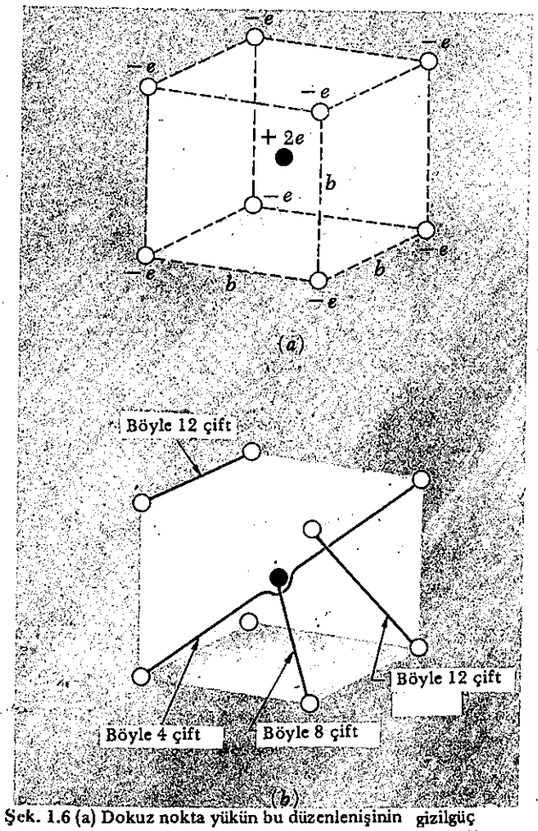
Gizilgüç enerjiyi hesaplayabilmek için, önce her artı yükün konum bakımından herhangi başka bir artı yüke eşdeğer olduğunu görelim. Bundan başka, Şek. 1.7'de açıkca belirmese de, bir eksi iyon çevresindeki eksi iyonların düzenlenişi ile aynı olduğunu ve bunun böyle sürdüğünü de görelim. Bu nedenle imi ne olursa olsun bir iyonu merkez seçer, onun bütün öteki iyonlarla etkileşiminin toplamını alır, ve bu toplamı her iki imli iyonların toplam sayısı ile çarpabiliriz. Bu işlem Denk, 9'daki çift toplamı, bir tek toplam ile bir N katsayısı çarpanı haline sokar; yine orada olduğu gibi her çifti iki kez almamız yüzünden

* Gizilgüç: Potansiyel

* İçyapışkanlık: Kohezyon



Şek. 1.5 Kuvvet merkezsel olduğu için r — dr ile r arasında kalan farklı yollar üzerinde eşit işler görülür.



Şek. 1.6 (a) Dokuz nokta yükün bu düzenlenişinin gizilgüç enerjisi Denk. 9 ile verilmiştir. (b) toplam içinde dört tip çift işe karışmaktadır.

1/2 katsayısını yine kullanmak zorunluğu var. Böylece toplam N iyondan oluşmuş bir sodyum klorür örgüsünün enerjisi,

$$U = \tfrac{1}{2}N \sum_{k=2}^{N} \frac{q_1 q_k}{r_{1k}} \qquad (10)$$

olur. Şek. 1.7 (*b*)'de olduğu gibi bir artı iyonu merkez alacak olursak, toplamımız yakın, uzak bütün komşular üzerinden alınacaktır. Baştaki terimler şöyle gider:

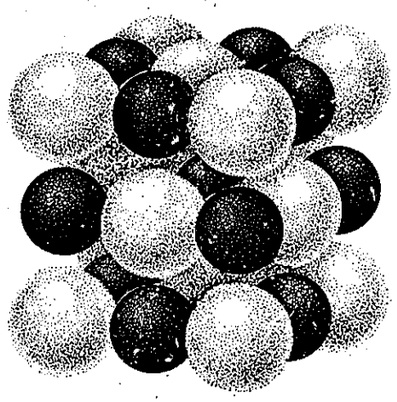
$$U = \tfrac{1}{2}N\left[-\frac{6e^2}{a} + \frac{12e^2}{\sqrt{2}\,a} - \frac{8e^2}{\sqrt{3}\,a} + \cdots\right] \qquad (11)$$

Buradaki ilk terim aralıkları a olan en yakın altı klor iyonundan ileri gelir. İkinci terim kübün kıyılarında bulunan oniki sodyum iyonundan ileri gelir ve bu böylece gider. Bu arada hemen açıkca görülür ki, bu dizinin *kesenkes belli* bir değere yaklaşması yani yakınsak olması gerekmez; önce bütün artı terimleri toplamak gibi bir yanılgıya düşersek, toplam ıraksak olur. Böyle bir toplamı hesaplamak için, öyle düzenlemeliyiz ki, dışa doğru daha uzaktaki iyonlarla ilgili terimleri hemen hemen ılın madde katmanları halinde gruplar olarak hesaba sokabilelim. Böylece toplam bir yerde kesilirse, daha dışta bulunan ve savsanan iyonlar, öyle düzgün artı ve eksi yükler karışımından oluşurlar ki, hesap ettiğimiz noktadaki katkıları çok küçük kalır. Bu oldukça karışık olan bir hesaplama probleminin kabaca özetlemesidir. Bugün böyle bir dizinin sayıca değerinin bulunması bir bilgi sayar ile yapılır.
Uğraştığımız örnek halinde bu değer:

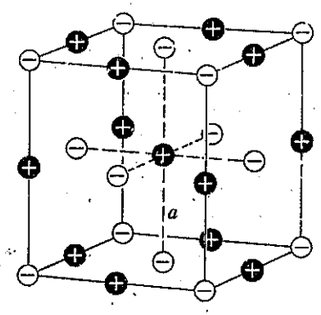
$$U = \frac{-0{,}8738Ne^2}{a} \qquad (12)$$

çıkar. Burada N toplam iyon sayısını gösterir ve NaCl moleküllerinin sayısının iki katına eşittir.

Enerjinin eksi imi en yakın komuşların baskın geldiğini, ve kristali ayırarak iyonlar haline getirmek için *iş yapmak* gerektiğini gösterir. Başka



(*a*)



(*b*)

Şek. 1.7 Sodyum klorür kristalinin Na^+ ve Cl^- iyonlarının aşağı yukarı doğru ölçekle düzenlenişi (a) ve eşdeğer nokta yükler iyonların yerlerini aldıkları zamanki çizem (b).

bir deyimle, elektrik enerjisi kristalin iç yapışkanlığını açıklamaya yardım eder. Bununla birlikte iş bunda kalsa idi, kristal çökerdi, zira kristalin a örgü aralığının küçülmesi, yük dağılımı gizilgüç enerjisinin *alçalması* demektir. Burada yine klâsik yani, kuantumsuz fiziğin her zamanki çıkmazı ile karşılaşıyoruz. Klâsik yasalara göre, yalnız elektrik kuvvetleri etkisi altında bulunan böyle bir yapı dayanıklı denge haline giremez. Öyle ise, bu çözümleme bir işe yaramadı mı? Pek de öyle değil! İşin ilginç ve hoş yanı o'dur ki, kristallerin kuantum fiziği ile incelenmesinde elektrik gizilgüç enerjisine bir anlam tanınabilir, ve bu nicelik burada öğrendiğimize çok benzer bir yoldan hesaplanabilir.

1.7 Elektrik Alanı

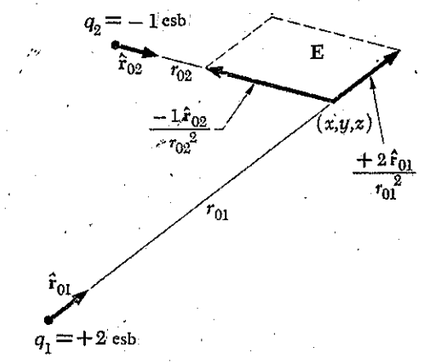
Uzayda değişmez konumlarda $q_1, q_2, \ldots, q_N$, gibi yükler bulunsun, ve şimdi bunların etkileşdikleri kuvvetlerle değil, yakınlarına getirildiği düşünülen q_0 gibi bir yüke etkiledikleri kuvvet ile ilgilenelim. Bu son yükün x, y, z konumlukları* ile belirli konumu verilmiş ise, ona etkiyen bileşke kuvvetin nasıl hesaplanacağını biliyoruz. Bu q_0 yüküne etkiyen kuvvet:

$$\mathbf{F}_0 = \sum_{j=1}^{N} \frac{q_0 q_j \hat{\mathbf{r}}_{0j}}{r_{0j}^2} \qquad (13)$$

dır; burada $\mathbf{r}_{0j}$ dizgedeki j'inci yükten (x,y,z) noktasına yönelen birim yöngüyü gösteriyor. Bu kuvvet q_0 ile oranlıdır, böylece kuvvet yazımını q_0 'a bölersek, $q_1, \ldots, q_N$ dizgesinin yapısına ve (x,y,z) noktasının konumuna bağlı bir yöngül nicelik buluruz. İşte $q_1, \ldots, q_N$, yüklerinden oluşan x, y, z konumluklarının işlevi olan bu yöngü işlevine *elektrik alanı* diyoruz ve $\mathbf{E}$ ile gösteriyoruz. Alanı oluşturan $q_1, \ldots, q_N$ yüklerine bu alanın *kaynakları* diyeceğiz. Bir yük dağılımının bir (x,y,z) noktasında uyardığı alanın tanımı olarak

$$\mathbf{E}(x,y,z) = \sum_{j=1}^{N} \frac{q_j \hat{\mathbf{r}}_{0j}}{r_{0j}^2} \qquad (14)$$

eşitliğini alabiliriz. Şek. 1.8 uzayın belli bir noktasında $+2$ esb'lik bir nokta yükün alanının, -1 esb'lik ikinci bir yükün alanına yöngül olarak katılışını gösteriyor. CGS birimler dizgesinde elektriksel alan yeğinliği birimi yük birimi başına din olarak yani, din/esb diye söylenir.



Şek. 1.8 Bir noktadaki alan dizge içindeki bütün yüklerin alanlarının bileşkesine eşittir.

Buraya dek hiç bir yenilikle karşılaşmadık. Yalnızca elektrik alanını bir yükler dizgesini anlatmanın başka bir yolu olarak gördük; bu anlatım q_0 gibi bir sınama yükünün, herhangi bir noktada etkilendiği kuvvetin tutarının ve doğrultusunun, yük birimi başına düşen tutarı olarak yapılır. Bu yorumlamada biraz uyanık olmalıyız. Kaynak noktalar gerçekten devinimsiz değil iseler, belirli q_0 yükünün dizgenin içine sokulması, bu kaynakların konumlarını biraz değiştirmelerine ve dolayısı ile Denk. 14 ile tanımlanan alanın biraz değişmesine neden olabilir. Bu yüzden tartışmamıza başlarken yüklerin konumlarını değişmiyor saydık. Kimileri alanı tanımlamak için, q_0 yükünün sonsuz küçük bir sınama yükü olmasını ve $\mathbf{E}$ alanının $\mathbf{F}/q_0$ 'ın $q_0 \to 0$ için aldığı erey* değer olarak sunmak isterler. Bu anlayıştaki kesinlik belirtisi aldatıcıdır. Unutmayın ki, doğada e'den daha küçük bir yük gözleyebilmiş değiliz. O halde $\mathbf{E}$'yi tanımlamak için Denk. 14'ü alarak hiçbir sınama yükünü

* Konumluk: Koordinat

* Erey: Limit

işe karıştırmazsak, karşımıza bir güçlük çıkmaz ve alan kaynaklarının sabit konumlu olmasını istemek de gerekmez. Dizge içine yeni bir yük sokulması kaynak yüklerde bir yer değişimine yol açarsa, bu elektrik alanında bir değişiklik yapacak, ve bu yüke etkiyen kuvvetin ne olduğunu bulmak için bu yeni elektrik alanını kullanmak zorunda olacağız.

Belki yine de nedir bu elektrik alanı diyorsunuzdur? Bu gerçek bir şey midir? Yoksa bir deneyde ölçtüğümüz bir kuvvetin sayıca değerini elde edebilmek için, gereken bir katsayının adı mıdır? Burada iki düşünce yararlı olabilir. Birincisi, bu kavram işe yarıyor ise şöyle ya da böyle oluşu önemli değildir. Bu yeğni bir yanıt değil, çok ciddidir. İkincisi ise şudur: Uzayın herhangi bir noktasında bulunan herhangi bir yüke etkiyen kuvveti bulabilmek için bilmemiz gereken biricik niceliğin, o noktadaki elektrik alanı oluşu, hiç de basit bir sorun değildir. Bu başka türlü de olabilirdi! Bu yönde hiç bir deney yapılmamış olsa idi, birim yükün eşit kuvvetler etkisine uğradığı farklı iki durumda, iki birim'lik sınama yükü farklı kuvvetler etkisi altında kalabilir ve bunun dizge içindeki öteki yüklerin yapısına bağlı olduğu düşünülebilirdi. Bu doğru olsa idi, dizgenin anlatımı çabası yürümezdi.

Elektrik alanı bir dizgede bulunan her noktaya şu anlamda yöresel bir özellik bağlar: Eğer dar bir bölgede $\mathbf{E}$'yi biliyorsak, *başka bir bilgi istemeden* herhangi bir yükün orada neye uğrayacağını biliyoruz demektir. Alanı oluşturanın ne olduğunu bilmek gerekmez. Uzayın *bütün* noktalarındaki elektrik alanını biliyorsak bütün dizgenin tam bir anlatımı elimizde demektir; bu arada bütün yüklerin büyüklüklerinin ve konumlarının anlatımını biliyoruz demektir.

Elektrik alanını gözümüzde canlandırmak için, uzayın her noktasına bir yöngü yani bir doğrultu ve bir yön bağlamak gerekir. Bu kitapta yöngü alanlarının resmini çizmek için çeşitli yollar kullanılacaktır, ama bunların hiç biri tam doyurucu değildir.

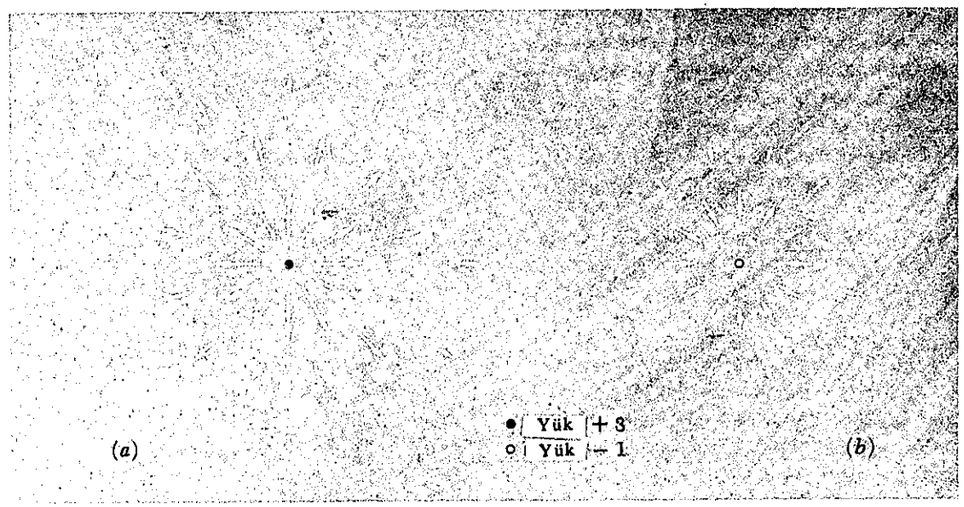
Üç boyutlu uzayda bulunan bir yöngü işlevini iki boyutlu bir resim ile anlatmak güçtür.

* Yeğni: Hafif

$\mathbf{E}$ elektrik alanının büyüklüğünü ve doğrultusunu belirtmek üzere uzayın çeşitli noktalarında, bu noktalara uygun küçük oklar çizebiliriz. E'nin büyük olduğu yerlerde oklar daha uzun çizilecektir*. Bu çizgeyi kullanarak Şek. 1.9 a'da yalıtılmış $+3$ birimlik bir nokta yükün alanını ve Şek. 1.9 b'de -1 birimlik bir nokta yükün alanını gösterdik. Bu resimler yalıtılmış bir yükün alanı üzerine edindiğimiz anlayışa herhangi bir şey eklememektedir; herkes bir resim yardımı olmadan uzaklığın karesi ile ters oranlı ışınsal bir alanı kafasında tasarlayabilir. Ama bunları Şek. 1.10'da birleştirerek, a aralıklı böyle iki yükün alanının nasıl olduğunu aynı yolla gösterebiliyoruz. Şek. 1.10 bu iki yükün bulunduğu düzlemin içindeki alandır. Bunun üç boyutlu tam bir gösterimini elde edebilmek için, şeklin bakışım ekseni çevresinde döndüğünü düşünmemiz gerekir. Şek. 1.10'da E'nin sıfır olduğu bir uzay noktası vardır. Bu nokta yakın yükten ne uzaklıkta olmalıdır? Şeklin kıyılarında, alan her yanda dışarıya doğru yönelmiştir. Yüklerden çok uzaklara gidilirse, alanın artı bir nokta yükün alanına çok benzeyeceğini düşünebiliriz. Bunu beklememiz gerekir, çünkü çok uzakta bulunan noktalar için yüklerin aralığı uzaklığı çok etkilemez, ve 2 birimlik bir nokta yük, iki kaynağımızı bir noktada toplamakla kalan yük olacaktır.

Bir yöngü alanını göstermek için kullanılacak başka bir yol *alan çizgileri* çizmektir. Bunlar herhangi bir noktada bu noktadaki alan doğrultusuna teğet sürekli eğrilerdir; yalnızca nokta yüklerin bulunduğu yerlerde ya da Şek. 1.10'da alanın sıfır olduğu nokta gibi yerlerde ayrıklık göstereceklerdir. Daha sonra göreceğimiz gibi, genel olarak, alanın kuvvetli olduğu yerlere doğru gidince alan çizgilerinin sıklaştığı ve zayıf bölgelerde ise seyreldiği halde alan çizgileri çizimi alanın büyüklüğünü doğrudan vermez. Şek. 1.11'de Şek. 1.10'da olduğu gibi artı 3 birimlik bir yük ile eksi 1 birimlik bir yükün Şek. 1.10'daki düzenlenme halinde bulunduklarında oluşturduk-

* Böyle bir gösterim pek te kullanışlı değildir. Özellikle bir yöngüsel değerin bağlı olduğu noktada değeri ile göstermek kolay değil, ve genel olarak E alanının değer aralığı o denli geniş olabilir ki okların boyunu E'ye oranlı almak olanağı bulunmayabilir.



Şek. 1.9 (a) $q_1 = +3$ olan bir yükün alanı. (b) $q_2 = -1$ olan bir yükün alanı. Her iki gösterim kabacadır ve tam nicel değildir.

ları alanın bazı alan çizgileri çizilmiştir. Burada üç boyutlu bir eğri demetinin alan çizgilerinin çizim gereği iki boyutlu kâğıt üzerinde kesiti görülmektedir.

1.8 Yük Dağılımlarının Alanı

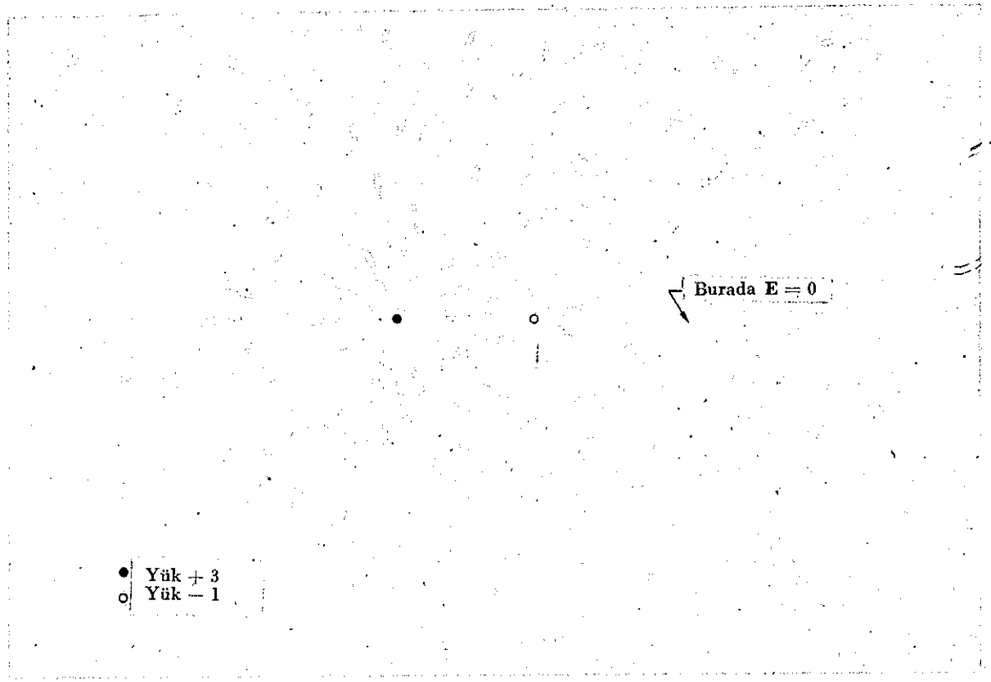
Konunun burası, *nokta yüklerden, sürekli yük* dağılımlarına geçerek bir genelleme yapmak için uygundur. Yüklerin oylumsal* dağılımı, ρ ile gösterilen sayıl bir yük yoğunluğu işlevi ile anlatılır, bu boyutu *Yük/oylum* olan bir konum işlevidir. Başka bir deyimle ρ çarpı bir oylum öğesi bu oylum öğesi içinde bulunan yük tutarını verir. Aynı simgenin oylum birimi başına kütle için de kullanıldığı olur, ama biz bu kitapta oylum birimi başına yükü hep ρ ile göstereceğiz. Eğer ρ 'yu x, y, z konum sayılarının işlevi olarak yazacak olursak, o zaman $\rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$ yazımı, oylumu $dx\,dy\,dz$ olan ve (x,y,z) noktasında bulunan küçük bir kutu içindeki yük tutarını gösterir.

* Oylum: Hacim

Ama atomlar boyutuna inersek, yük yoğunluğu noktadan noktaya çok geniş ölçüde değişir; bu kavram bu bölgede bile çok kullanışlıdır. Bununla birlikte biz bu kavramı büyük ölçekli dizgeler için kullanacağız; büyük ölçekli dizge deyimi ile $dv = dx\,dy\,dz$ oylum öğesinin, dizgenin boyutları yanında çok küçük, ama yine de, içinde pek çok atom ya da temel yükün bulunabileceği büyüklükteki halleri anlıyoruz. Daha önce de uyardığımız gibi, bir maddenin kütle yoğunluğunu tanımlarken de benzer bir durumla karşılaşılmıştır.

Elektrik alanının kaynağı nokta yükler olacak yerde sürekli bir yük dağılımı olursa, Denk. 13'deki toplam yerine uygun bir tümlev almamız gerekir. Böyle bir tümlev bir takım (x',y',z') noktalarında bulunan yüklerin bir (x,y,z) noktasında uyardıkları alanı verir:

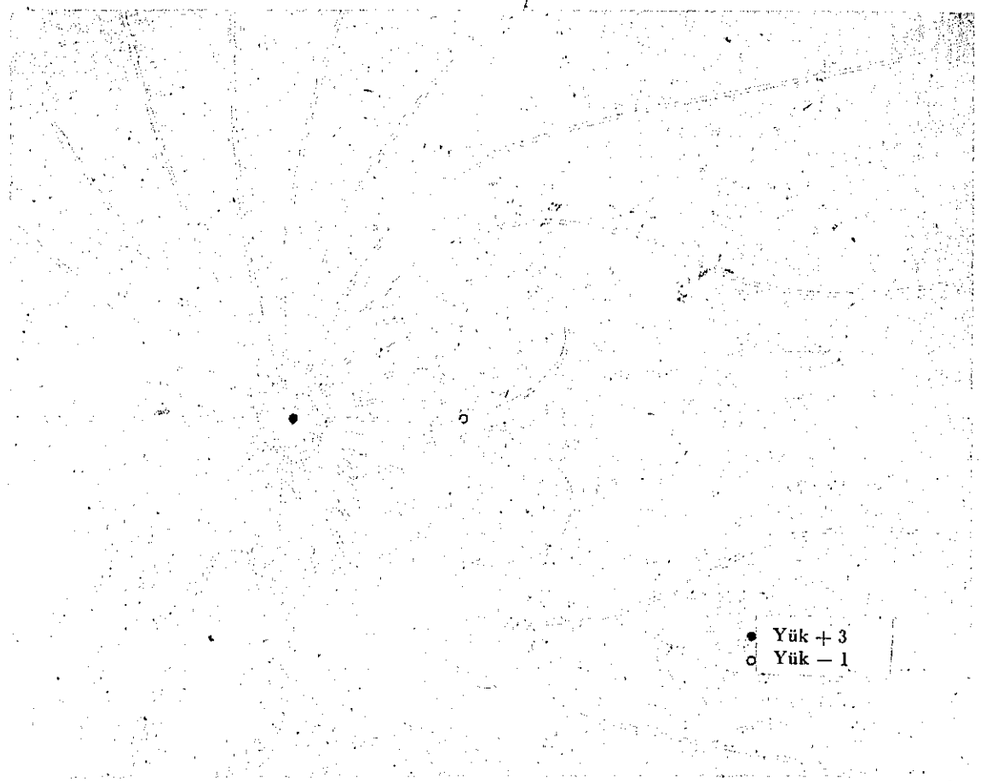
$$\mathbf{E}(x,y,z) = \int \frac{\rho(x',y',z')\hat{\mathbf{r}}\,dx'\,dy'\,dz'}{r^2} \qquad (15)$$



Şek. 1.10 Bir önceki şekilde verilen $q_1 = +3$ ve $q_2 = -1$ yüklerinin yakınlarındaki alan; Şek. 9 a ve 9 b'nin üstüste gelmesidir.

Bu bir oylum tümlevidir. Hesaplamada (x,y,z) sabit tutularak tümlev değişkenleri olan x', y', z' yüklerin bulunduğu bütün uzay boyunca değiştirilir; yani, bu uzayda bulunan en küçük yüklerin bile katkısını toplama sokmamız gerekir. Yazımdaki $\hat{\mathbf{r}}$ birim yöngüsü (x', y', z')'den (x,y,z)'ye doğru yönelmiştir; $\hat{\mathbf{r}}$ birim yöngüsü karşıt yönde de alınabilir; bu halde tümlevin önüne bir eksi imi koymak gerekir. Bu im sorununu her zaman elverişli düzende tutmak güçtür. Sıkıntıya düşünce elektrik alanının artı yükten hep öteye doğru yöneldiğini anımsayalım (Şek. 1.12).

Gerçek bir nokta yük yakınlarında, nokta yüke yaklaştıkça alan, $1/r^2$ 'ye uygun olarak, sonsuza doğru büyür; nokta yükün tam üstünde $\mathbf{E}$ alanının ne olacağından söz etmenin bir anlamı yoktur. En son fiziksel alan kaynağımız, sıfır oylumlu sonsuz yoğunlukta bir nokta değil, sonlu boyutta bir yapı olduğu için, nokta yük deyiminin gerektirdiği matematiksel ayrıklığı bilmezlikten geleceğiz ve öğesel kaynağın sınırları içini hesap dışında bırakacağız. Bununla birlikte, sürekli yük dağılımı bir ayrıklık tehdidi taşımadığı gibi, bu dağılımın içinde bulunan noktalarda da alanın tanımlanmasını sağlar. Çünkü Denk. 15'deki oylum öğesi $r^2\,dr$ yazımı uyarınca değiştiği için $r = 0$ yakınlarında oylum tümlevinin patlaması, yani sonsuza gitmesi önlenmiş olur. Bu demektir ki ρ sonlu kaldığı sürece alan her yerde üstelik bir yük dağılımının sınırları üzerinde ve içinde de sonlu kalacaktır.

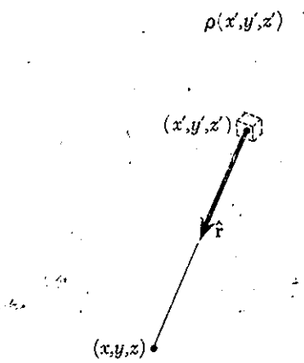


Şek. 1.11 Biri $q_1 = +3$ öteki $q_2 = -1$ olan iki yükün çevresindeki elektrik alan çizgilerinden bazıları.

1.9 Akı

Elektrik alanı ile bu alanın kaynakları arasındaki bağlılık çok ilginç bir yalınlıkla deyimlenebilir ki bu ileride çok kullanışlı bulunacaktır. Bunun için *Akı* denilen niceliği tanımlamak gerek.

Uzayda bir elektrik alanı ve istenilen biçimde balon gibi herhangi kapalı bir yüzey ele alalım. Şek. 1.3 böyle bir yüzeyi ve yüzeyin bulunduğu bölgede alanı, alan çizgileri ile gösteriyor. Şimdi bu yüzeyi küçük parçalara ayıralım; öyle küçük parçalar ki, her biri bir düzlem gibi görülebilsin ve bu parça boyunca alan yöngüsü bir noktadan ötekine ölçüye gelir bir değişim göstermesin. Başka bir deyişle, ba-

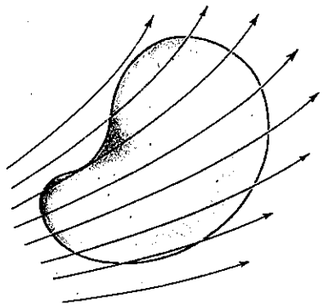


Şek. 1.12 $\rho(x',y',z')$ yük dağılımının her öğesi (x,y,z) noktasındaki $\mathbf{E}$ elektrik alanına bir katkıda bulunur. Bu noktadaki toplam alan bu gibi katkıların hepsinin toplamına eşittir (Denk. 15).

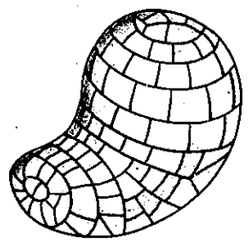
lonun yüzeyinin fazla kırışıklı olmasına ya da bir nokta yükün bulunduğu yer gibi, alanın bir özel noktasından geçmesine izin vermeyelim* Bu yüzeyciklerden her birinin santimetre kare olarak belli bir yüz ölçümü ve uzay içinde belli bir yönelişi, yani yüzeyin dışa doğrulmuş dikmesi ile belirlenen yönelişi vardır. Yüzey kapalı olduğu için içini dışından ayırdetmekte duraksamayız. Parçanın yüzeyinin büyüklüğünü ve yönelişini bir yöngü ile gösterelim. Böylece kapalı yüzeyin bölündüğü parçalardan her biri için, örneğin j numaralı parça için onun yüzölçümünü ve yönelişini veren bir $\mathbf{a}_j$ yöngümüz olacaktır. Bu düşünüşümüzde attığımız adımlar Şek. 1.13 *b* ve *c*'de resimlenmiştir. $\mathbf{a}_j$ yöngüsünün parçaların biçimine hiç bağlı olmadığını gözden kaçırmayınız; yeterince küçük kaldıkça yüzeyin bölünüş biçimi önemli değildir.

Şimdi, j numaralı parçacığın bulunduğu yerdeki elektrik alan yöngüsü $\mathbf{E}_j$ olsun. $\mathbf{E}_j \cdot \mathbf{a}_j$ sayıl çarpımının verdiği sayıya bu küçük yüzeyden geçen *akı* diyoruz. Bu terimin nereden geldiğini anlamak için, bir akışkan hareketini, örneğin ırmakta akan suyun hızını gösteren yöngüsel işlevi düşünelim; kararlı bir akıntıda bu yöngü bir yerden ötekine değişecek ama bir yerde zaman içinde sabit kalacaktır. Metre bölü saniye olarak ölçebileceğimiz bu yöngü alanını $\mathbf{v}$ ile gösterelim. Şimdi suyun içine sarkıtılmış bir çerçevenin metre kare olarak alınan yönelmiş yüzeyi $\mathbf{a}$ ise $\mathbf{v} \cdot \mathbf{a}$ bu çerçeveden akan suyun saniyede metre küb olarak *akış hızını* verecektir (Şek. 1.14). Akı tanımının, hangi fiziksel değişkeni gösterirse göstersin herhangi bir yöngü işlevine uygulanabildiğini belirtmek gerekir.

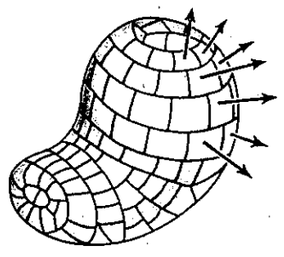
* Alanın kesikllik gösterdiği ayrık noktalar deyince, biz yalnızca alanın sonsuzlaştığı nokta kaynağın bulunduğu yeri değil, sonsuz ince bir yük katmanı üzerinde olduğu gibi, alanın değer ve yön değiştirdiği bir yeri anlıyoruz. Daha yumuşak olan bu gibi bir kesiklilik, bize burada fazla bir güçlük çıkarmaz, yeter ki, gözönüne aldığımız balonun yüzeyi, sonlu bir bölge boyunca yük yüzeyi ile çakışmasın.



(*a*)

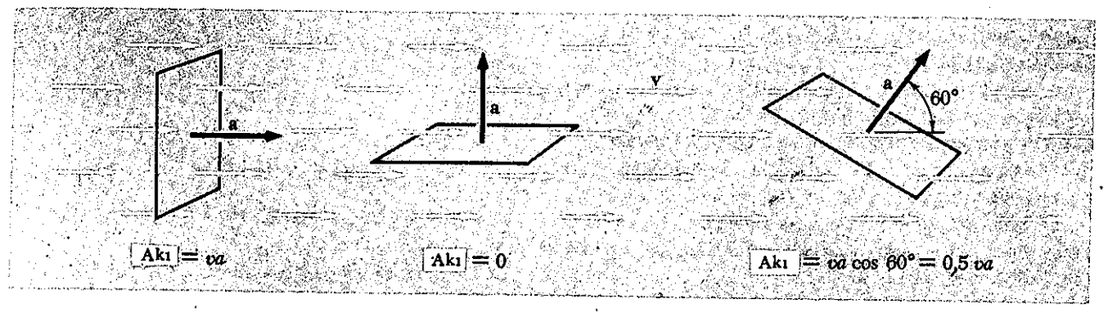


(*b*)



(*c*)

Şek. 1.13 (a) Bir yöngü alanı içinde bulunan kapalı bir yüzey, (b) Bu yüzey küçük yüzey parçalarına ayrılmıştır. (c) Yüzey öğelerinden her biri dışa doğru yönelmiş bir yöngüyle gösterilmiştir.



Şek. 1.14 Yüzölçümü a olan bir çerçeveden geçen Φ akısı $\mathbf{v}.\mathbf{a}$'dır. Burada $\mathbf{v}$ akışkanın hızını göstermektedir. Akı, çerçeveden birim zamanda geçen akışkan hacmına eşittir.

Şimdi Φ ile göstereceğimiz ve yüzeyin bütününden geçen sayıl bir nicelik olan elektrik akısını bulabilmek için, bütün parçalardan geçen akıyı toplayalım.

$$\Phi = \sum_{\text{Tüm } j\text{'ler}} \mathbf{E}_j \cdot \mathbf{a}_j \qquad (16)$$

Parçaları daha küçültürsek, dolayısıyle sayısını sınırsız olarak artırırsak, Denk. 16'daki toplamdan bir yüzey tümlevine geçeriz:

$$\Phi = \int_{\substack{\text{Tüm} \\ \text{yüzey}}} \mathbf{E} \cdot da \qquad (17)$$

Genel olarak herhangi bir $\mathbf{F}$ yöngü işlevinin bir S yüzeyince tümlevi yalnızca şunu anlatır: yüzeyi küçük parçalara ayır; her birini dışa doğru yönelmiş ve değeri parçanın yüzölçümüne eşit bir yöngüyle göster; yüzey parçası yöngüsü ile oradaki $\mathbf{F}$ yöngüsünün sayıl çarpımını al; bütün bu çarpımları topla; parçaların yüzeylerini küçülterek gidersek bu toplamın vardığı sınır yüzey tümlevidir. Böyle bir hesabı Şek. 1.13'deki gibi garip bir şekil için yapmak zorunda kalabileceğimizi düşünerek kaygılanmayın. Şimdi göstereceğimiz şaşırtıcı bir özellik böyle bir hesabı gereksiz kılar!

1.10 Gauss Yasası

Düşünebileceğiniz en basit hali alın; alan yalıtılmış artı bir q nokta yükünün alanı ve yüzey de merkezi bu nokta yükte bulunan r yarıçaplı bir küre olsun (Şek. 1.15). Bu yüzeyden geçen akı nedir? Bunun yanıtı kolaydır, çünkü yüzeyin bütün noktalarındaki $\mathbf{E}$ alanı q/r^2 'ye eşittir ve yüzeyin bu noktada dışa yönelmiş dikmesi doğrultusundadır. Böylece:

$$\Phi = E \times \text{tüm yüzey} = \frac{q}{r^2} \times 4\pi r^2 = 4\pi q \qquad (18)$$

olur. Akı kürenin büyüklüğüne bağlı değildir.

Şimdi ikinci bir yüzey düşünelim ve bu Şek. 1.16'da görüldüğü gibi küreyi saran herhangi biçimde bir yüzey olsun. Bu yüzeyden geçen toplam akının, küresel yüzeyden geçen akıya eşit olduğunu ileri sürüyoruz. Bunu anlamak için, q'den dışa doğru çıkan ince bir piramit düşünün; bu piramit küre yüzeyinden a gibi bir parça kesiyor dışa doğru giderek, dış yüzeyden, nokta yüke olan uzaklığı R olan bir A parçası ayırıyor. Bu A parçasının yüzölçümü a'nın-

kinden iki nedenle daha büyüktür; bunlardan biri, merkeze uzaklıkların $(R/r)^2$ katsayısı, ikincisi ise, dış yüzeyin eğik durması yüzünden işe karışan $1/\cos\theta$. katsayısıdır. Burada θ açısı dışa yönelik dikme ile yükten gelen ışınsal doğru arasındaki açıdır (Bak Şek. 1.16). Bu bölgedeki elektrik alanı, küre yüzeyindeki alana bakınca $(r/R)^2$ oranı kez küçülmüş ama, yine de ışınsal olarak dışarıya yönelmiştir. Dıştaki yüzey üzerindeki alanı $\mathbf{E}_{(R)}$ ile küre yüzeyi üzerindeki alanı $\mathbf{E}_{(r)}$ ile gösterirsek:

Dış yüzey parçasından geçen akı$= \mathbf{E}_{(R)} \cdot \mathbf{A} = E_{(R)}A\cos\theta$
İç yüzey parçasından geçen akı$= \mathbf{E}_{(r)} \cdot \mathbf{a} = E_{(r)}a$ (19)

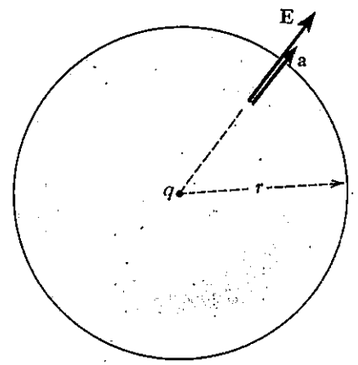
$$E_{(R)}A\cos\theta = \left[E_{(r)}\left(\frac{r}{R}\right)^2\right]\left[a\left(\frac{R}{r}\right)^2\frac{1}{\cos\theta}\right]\cos\theta = E_{(r)}a$$

yazılabilir: Demek ki iki yüzey parçasından geçen akılar aynıdır.

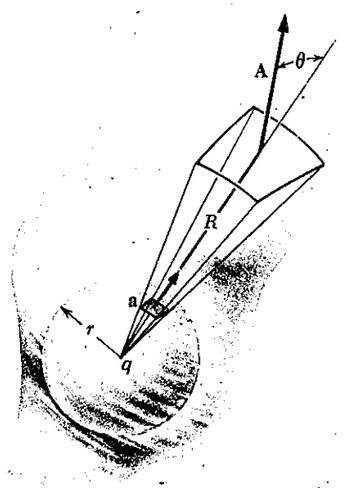
Böylece dış yüzey üzerinde alınan her yüzey parçasına küre yüzeyi üzerinde başka bir parça düşürebiliriz, şöyle ki, bu iki yüzeyden de geçen akı aynı kalsın. Başka bir deyişle yeni yüzeyden geçen akı tam $4\pi q$ kadardır. Ama bu yüzey *gelişigüzel* biçimde ve gelişigüzel büyüklükte idi*. Bundan bir q yükünü saran herhangi bir yüzeyden geçen akının $4\pi q$'ye eşit olduğu, ama yükler yüzeyin dışında bulunacak olursa bu yüzeyden geçen akının sıfır olduğu sonucunu çıkarabiliriz. Bunu tanıtlamayı okuyucuya bırakıyoruz, bu bakımdan Şek. 1.17 bir yol gösterebilir.

Bütün bu söylediklerimize başka bir açıdan bakmak olasıdır ve bu bakış her şeyi pek açık gösterebilir. q noktasında parçacıklar salan bir kaynak bulunduğunu ve her yana mermi gibi ya da foton gibi taneler püskürdüğünü düşünelim. Açıkca görülür ki, birim yüzeyde bir pencereden geçen tane akısı, bu pencerenin q'ye olan uzaklığının karesi ile ters oranlı olarak azalır. Böylece E elektrik alan yeğinliği

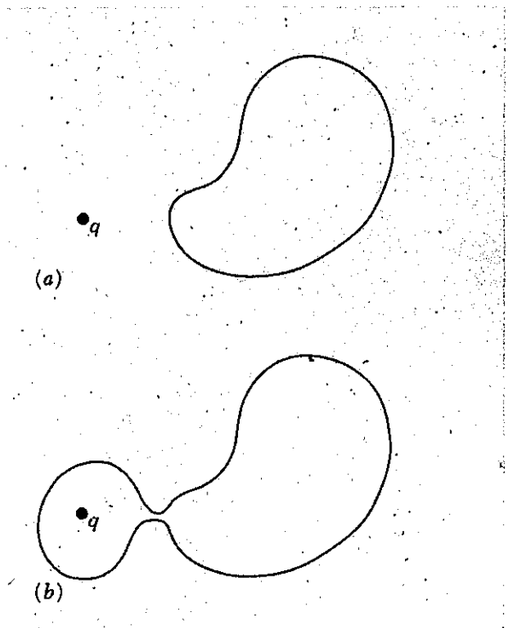
* Güvenebilmek için ikinci yüzeyin küreyi tümcek sarmasını sağladık, ama bu hiç te gerekli değil. Bundan başka küre istediğimizce küçük alınabilir.



Şek. 1.15 Bir q nokta yükünün $\mathbf{E}$ alanının q'ye merkezlenmiş bir küre yüzeyinden geçirdiği akı ne tutar?



Şek. 1.16 q'yü saran herhangi bir kapalı yüzeyden geçen akı küre yüzeyinden geçen akıya eşittir.



Şek. 1.17 Şeklin (a) halinde geçen akımın sıfır olduğunu göstermek için (b) halinden yararlanabilirsiniz.

(şiddeti) ile, birim yüzeyden birim zamanda geçen parçacık akım yeğinliği arasında bir benzerlik kurarız. q'yü büsbütün saran herhangi bir yüzeyden geçen mermi akısının bu yüzeyin biçimine ve büyüklüğüne bağlı olmadığı oldukça açıktır; çünkü bu, kaynağın birim zamanda püskürdüğü toplam parçacık sayısına eşittir. Buna uygun olarak, kapalı yüzeyden geçen E alanının akısı, yüzeyin biçiminden ve büyüklüğünden bağımsız olmalıdır. Bu ortak davranışın sorumlusu yeğinliğin uzaklığın karesi ile ters oranlı oluşudur. Şimdi durum üstüste gelme ilkesini kullanmak için olgunlaşmıştır! Herhangi bir elektrik alanı ayrı kaynakların alanlarının toplamına eşittir. Bu özellik Coulomb yasası ile ilgili Denk. 13'de anlatılmıştı. Açıkca bellidir ki, akı da aynı anlamda toplanabilen bir niceliktir, çünkü $q_1, q_2, \ldots, q_N$ gibi birçok kaynağımız varsa, bunların yalnız oluklarında uyardıkları alanlar $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \ldots, \mathbf{E}_N$ olacak ve oluşan toplam alan içindeki bir S yüzeyinden geçen akı,

$$\Phi = \int_S \mathbf{E}\cdot da = \int_S [\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 + \cdots + \mathbf{E}_N]\cdot da \quad (20)$$

biçiminde yazılabilecektir.

Az önce öğrendiğimize göre tümlev $\int_S \mathbf{E}_n \cdot da$-nın değeri $4\pi q_n$ 'dir, yetir ki q_n, S yüzeyinin içinde bulunsun; yoksa tümlev sıfır olur. Böylece yüzey içindeki her q yükü Denk. 20'deki tümleve $4\pi q$ gibi bir katkıda bulunur ve yüzeyin dışında kalan yüklerin hiç katkıları yoktur. Böylece Gauss yasasına vardık:

> Bir $\mathbf{E}$ alanının herhangi kapalı bir yüzeyden geçirdiği akı, yani, yüzey üzerinde alınan $\int \mathbf{E}\cdot da$ tümlevi 4π kez yüzey içinde kapalı toplam yük tutarıdır. (21)
>
> $$\int \mathbf{E}\cdot da = 4\pi\sum_i q_i = 4\pi\int \rho\, dv$$

Çerçeve içindeki deyime yasa gözü ile bakıyoruz, çünkü bu, Coulomb yasasına eşdeğerdir ve yükler ile alanlar tanımlandığına göre durgun elektrik etkileşimlerinin temel yasası olarak kullanılabilir. Gauss yasası ve Coulomb yasası iki bağımsız yasa değil, değişik biçimde deyimlenmiş aynı bir yasadırlar*.

* Burada önemli olmayan ama daha sonra devinimli yüklerin alanlarını incelediğimizde önem kazanan bir ayrım var. Gauss yasası, durgun elektrik alan dışında daha geniş bir alanlar öbeği için de doğrudur. Özellikle, r uzaklığının karesi ile ters oranlı olan ama küresel bakışım göstermeyen alanlar Gauss yasasına uyarlar. Başka bir deyişle yalnızca Gauss yasası bir nokta kaynağın alanının bakışımlı olmasını gerektirmez, oysa bu Coulomb yasasının bir özelliğidir.

Yeniden gözden geçirirsek, bu tanıtın *etkileşimin uzaklığın karesi ile ters oranlı oluşuna*, ve kuşkusuz *etkileşimlerin eklenebilmesine ya da üstüste gelebilme ilkesine dayandığı görülür.* Bu nedenle bulunan *teorem fizikte uzaklığın karesi ile ters oranlı herhangi bir alan haline*, örneğin Kitap 1 Böl. 9'da incelendiği gibi *Genel Çekim alanına uygulanabilir.*

Kolayca görülebileceği gibi kuvvet yasası kare tersi ile oranlı olacak yerde küb tersi ile oranlı olsa idi, Gauss yasası doğru *olmazdı.* Çünkü bu halde bir q nokta yükünün, merkezi bu yükde bulunan r yarıçaplı bir küreden geçirdiği akı,

$$\Phi = \int \mathbf{E} \cdot da = \frac{q}{R^3} \cdot 4\pi R^2 = \frac{4\pi q}{R} \qquad (22)$$

olurdu. Küreyi yeterince büyütmekle bundan geçen akıyı istediğimizce küçültebilirdik, oysa kürenin içindeki toplam yük bu sırada değişmeyecekti.

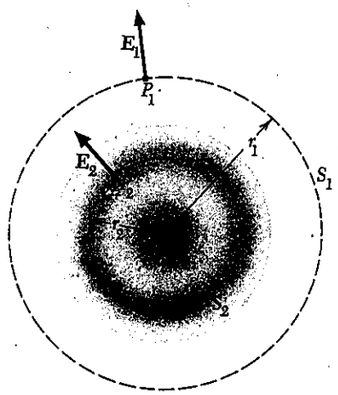
Bu çok ilginç teorem, kavrayışımızı iki bakımdan genişletiyor. Bunlardan birincisi, alan ile bu alanı yaratan kaynaklar arasındaki bağıntıyı ortaya koymakla Coulomb yasasına doğru gitmektedir. Coulomb yasası yükler verilmiş ise alanın nasıl hesaplanabileceğini söyler; Gauss yasası ise, bir bölgedeki alanı biliyor isek o bölgede bulunan yüklerin ne tutarda olduğunu bildirir. Belirteceğimiz ikinci nokta, burada tanıtlanmış olan matematiksel bağıntının güçlü bir çözümleme aygıtı oluşudur; daha sonra göreceğimiz gibi bu aygıt karışık problemleri çok kolaylaştırır.

1.11 Küresel Bir Yük Dağılımının Alanı

Gauss Yasasını kullanarak küresel bakışım gösteren bir yük dağılımının elektrik alanını bulabiliriz. Küresel yük dağılımı deyince yük yoğunluğunun, yalnızca merkeze olan uzaklığa bağlı dağılımını anlıyoruz. Şek. 1.18 bu gibi bir dağılımın kesitini göstermektedir. Şekilde gösterilen dağılımda yoğunluk merkezde büyüktür, sonra azalır ve merkezden olan uzaklık arttıkça yeniden artar, ve r_0 uzaklığının ötesinde sıfıra düşer. Bu dağılım dışında bulunan P_1 gibi bir noktadaki ya da içinde bulunan P_2 gibi (Şek. 1.19)



Şek. 1.18 Küresel bakışımlı bir yük dağılımı.



Şek. 1.19 Bir küresel yük dağılımının elektrik alanı.

bir noktadaki elektrik alanının tutarı nedir? Yalnızca Coulomb yasasından yürümek zorunda kalsa idik, yük yoğunluğu içindeki her ögesel hacmın P_1 'de oluşturduğu alan yöngülerinin tümlevini alarak toplam alanı bulmamız gerekirdi. Bunun yerine probleme, hem Gauss yasasından hem de dizgenin bakışımlı oluşundan yararlanan başka bir yol tutarak yanaşalım.

Yük dağılımında küresel bakışım bulunduğu için herhangi bir noktadaki elektrik alanı ışınsal doğrultuda olacaktır, oysa bu doğrultu "birik"* bir doğrultudur yani ikinci bir benzeri yoktur. Benzerince r_1 yarıçaplı S_1 küresel yüzeyi üzerindeki bütün noktalarda alanın E değeri aynı olmalıdır, çünkü bütün bu noktalar eşdeğerdir. Bu alan değerini E_1 ile gösterelim. Böylece S_1 yüzeyinden geçen yalınca $4\pi r_1^2 E_1$ 'dir, ve Gauss yasasına göre bunun 4π kez yüzeyin içinde bulunan toplam yüke eşit olması gerekir. Yani, $4\pi r_1^2 E_1 = 4\pi$(S$_1$içindeki yük), ya da

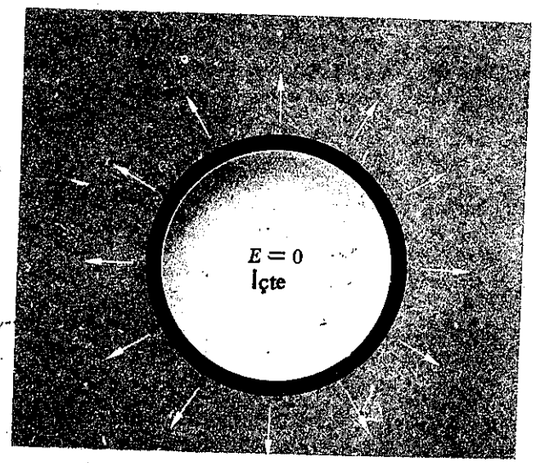
$$E_1 = \frac{\text{içindeki yük}}{r_1^2} \qquad S_1 \qquad (23)$$

yazabiliriz.

Bu eşitliği bir nokta yükün yarattığı alan yazımı ile karşılaştırırsak, S_1 yüzeyi üzerinde bulunan bütün noktalardaki alanın, S_1 içindeki bütün yükler merkezde toplanmış olsa uyarılacak *alanla aynı olduğunu görürüz.* Aynı şey yük dağılımının *içine* çizilmiş bir küre için de söylenebilir. Bir S_2 yüzeyi üzerinde bulunan herhangi bir noktadaki alan, S_2 içindeki tüm yükler merkezde toplanmış ve S_2 dışındaki yükler yokmuş gibi bulunur. İçi "boş" küresel bir yük kabuğunun içindeki elektrik alanının sıfır olduğu açıktır (Şek. 1.20).

Aynı düşünüş kütle çekimi alanına uygulanınca, yer küresi kütlesinin, küresel bakışım gösterdiği düşünülürse, dışında bulunan cisimleri bütün kütlesi merkezine toplanmış gibi çekeceği bildiğimiz bir özelliktir. Bu olgu, Cilt I'de kütle çekimi gizilgücünü kullanarak ve tümlev alarak tanıtlanmıştır. Kimileri bunun kütle merkezinin bir özelliği gibi düşünmek eğilimi gösterirlerse de, onlara bu teoremin başka biçimdeki cisimler için doğru olmadığını anımsatmak gerekir. Yoğunluğu her yerinde *aynı olan kusursuz bir küb dışındaki cisimleri bütün kütlesi geometrik merkezinde imiş gibi çekmez.*

Newton da bu teoremi tanıtlama istemeyecek yalınlıkta saymadı. Ayın yer çevresinde dolanmasını sağlayan kuvvetle, yer yüzünde özgürce düşen bir cismi düşüren kuvvetin aynı şey olduğunu tanıtlamak için Newton'a böyle bir teorem gerekiyordu. Newton'un genel çekim kuramının yayınlanmasında 20 yıl gibi bir gecikme olmasının nedeni, hiç değilse bir ölçüde, bu teoremi kendi içine sindirecek biçimde tanıtlayamamış olmasıdır. Gerçekten Newton'un 1686'da *Principia* (Kitap 1, kesim XII, Teorem XXXI) içinde yayınladığı tanıtlama dikkat ve hünerli hesaplama yapıtıdır ve bildiğimiz tümlev hesabını kullanmadan aslında bir oylum tümlevi işlenişidir. Tanıtlama Gauss yasası üzerinde az önce verdiğimiz tartışmadan daha uzun ve daha ince uslamlama ile yapılmıştır. Görüyorsunuz ki Newton, bütün özgün düşünme yeteneğine ve matematiksel gücüne karşın, bir kez tanıtlayınca tanıtlama istemeyecek denli yalın görünen bu teorem elinde bulunmadığı için bunca sıkıntıya düşmüştür.



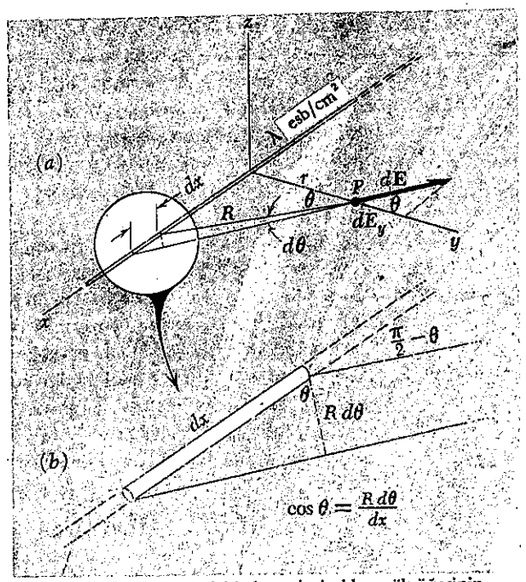
Şek. 1.20 Küresel bir yük kabuğunun içindeki alan sıfırdır.

* Birik : Unique

1.12 Doğrusal Bir Yük Dağılımının Alanı

Doğru biçimli yüklü uzun bir teli, kalınlığına göz yumarsak, uzunluk birimi başına taşıdığı yük tutarı ile belirleyebiliriz. Bu telin cm başına durgun elektrik birim ile ölçülen *çizgisel yük yoğunluğunu* λ ile gösterelim. Yük yoğunluğu sabit olan sonsuz uzun böyle bir yük çizgisinin uyardığı alan nedir? Bu probiemi iki yoldan işleyeceğiz; birincisi Coulomb yasasından yola çıkarak tümlemekle olacak.

Şek. 1.21'de görüldüğü gibi P noktasındaki alanı hesaplamak için, doğrusal yükün dx uzunluğundaki parçalarının tümünün birden alana katkılarını toplamak zorundayız. Ufak parçanın dq yükü $dq = \lambda\, dx$ ile verilir. x eksenimizi yük çizgisi boyunca yöneltirsek y eksenini P noktasından geçirebiliriz, böylece P noktası bu eksen üzerinde yüklü çizgiye r cm uzaklıkta bulunur. Hesaplamada dizgenin bakışımından yararlanmak iyi bir düşüncedir. Açıkca görülüyor ki, P noktasındaki alan y ekseni boyunca yönelmelidir, yani E_x ile E_z 'nin ikisi de sıfırdır. Elektrik alanının P noktasındaki bileşenine dq'nün katkısı,



Şek. 1.21 (a) P noktasındaki alan, çizgisel her yük öğesinin katkılarının yöngül toplamına eşittir. (b) a'nın ayrıntıları.

$$dE_y = \frac{dq}{R^2}\cos\theta = \frac{\lambda\, dx}{R^2}\cos\theta \qquad (24)$$

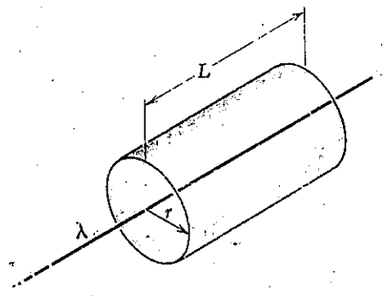
olur, burada θ , dq'nün alan yöngüsünün y ekseni ile yaptığı açıdır. Buna göre toplam y bileşeni,

$$E_y = \int dE_y = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\lambda\cos\theta}{R^2}\, dx \qquad (25)$$

olur, burada tümlev değişkeni olarak θ 'yı kullanmak uygundur. $R = r/\cos\theta$ ve $dx = d\theta/\cos\theta$ olduğuna göre tümlev

$$E_y = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\lambda\cos\theta\, d\theta}{r} = \frac{\lambda}{r}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos\theta\, d\theta = \frac{2\lambda}{r} \qquad (26)$$

olur. Görülüyor ki, sonsuz uzunlukta ve düzgün yoğunlukta bir yük doğrusunun oluşturduğu alan, gözönüne aldığımız noktanın bu doğruya olan uzaklığı ile ters oranlıdır. Doğrunun yükü artı ise alan ışınsal, dışa doğru, eksi ise içe doğru yönelmiştir.



Şek. 1.22 Bir çizgisel yükün alanını bulmak için Gauss yasasını kullanmak.

Gaus yasası kısa yoldan aynı sonuca götürür. Yüklü doğruyu Şek. 1.22'de olduğu gibi, r yarıçaplı ve L uzunluğunda dairesel bir silindir ile saralım ve bu yüzeyden geçen akıyı ele alalım. Daha önce belirttiğimiz gibi, *dizgenin bakışımlı oluşu alanın ışınsal olacağını sağlama bağlar, şöyle ki, kutu şeklindeki yüzeyin tabanlarından geçen akı sıfırdır.* Silindir yüzeyinden geçen akı ise yalnızca $2\pi rL$ kez E_r yani, yan yüzey ile bu yüzeydeki alan çarpımı kadardır. Bundan başka yüzeyin içinde bulunan bölgede kalan yük $4\pi \times \lambda L$'dir, böylece Gauss yasası, $2\pi rLE_r = 4\pi\lambda L$ şekline girer bundan

$$E_r = \frac{2\lambda}{r} \qquad (27)$$

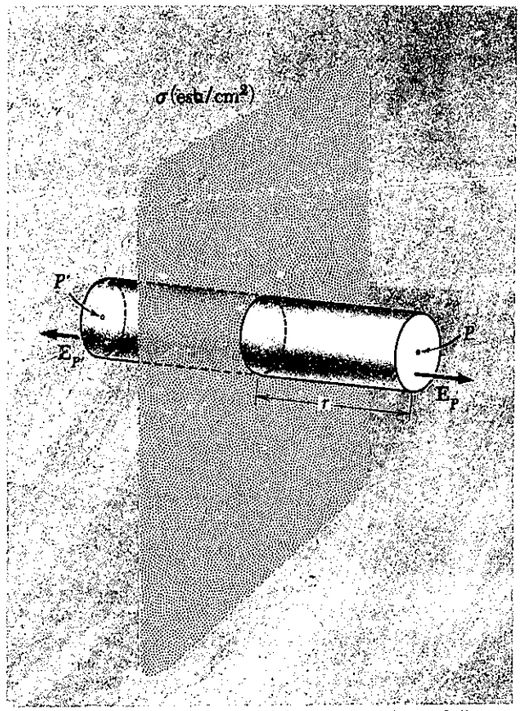
bulunur ki, bu az önce elde edilen Denk. 26'nın aynıdır.

1.13 Yassı Sonsuz Bir Yük Katmanının Alanı

Bir yüzeye dağılmış olan ince bir yük katmanına yüzeyce yük dağılımı denir. Sonsuz büyüklükte ince bir yük katmanının sabit sayılan yüzeyce yoğunluğu σ olsun. Bu katmanın her iki yanındaki elektrik alanı, değeri ne olursa olsun, katmanın yüzeyine kepkesin dik olacaktır; çünkü dizgede daha başka *"Birik"* (yani eşi bulunmayan) bir doğrultu yoktur. Yine bakışım dolayısıyle, yüzeyin iki yanında ve eşit uzaklıkta P ve P' noktalarındaki alanlar değerde ve karşıt yönde olacaklardır. Bu noktaları belirttikten sonra, Gauss yasası alan yeğinliğini hemen verebilir: Şek. 1.23'de olduğu gibi bir tabanı P'de öteki P' 'de olan A kesitli bir silindir çizelim. Bu kapalı yüzeyden akı yalnızca tabanlardan çıkacaktır, şöyle ki, P'deki alanın büyüklüğünü E_P ile ve P' 'deki alanı $E_{P'}$ ile gösterecek olursak çıkan akı $AE_P + AE_{P'} = 2AE_P$ olur. Bu yüzey içindeki yük σA'dır. O halde $2AE_P = 4\pi\sigma A$ ya da

$$E_P = 2\pi\sigma \qquad (28)$$

bulunur. Görüyoruz ki, alan yeğinliği** (şiddeti) aldığımız noktanın yüzeye olan r uzaklığına bağlı değildir. Denklem 28'in verdiği alan P noktasında yüklü katman üzerindeki bütün küçük parçacıkların uyardıkları alanların toplamını almakla daha uzun ve daha güç bir yoldan hesaplanabilirdi.



Şek. 1.23 Sonsuz genişlikte bir yük katmanının oluşturduğu alanı Gauss yasasından yararlanarak bulmak.

Sonsuz uzun yüklü bir doğrunun uyardığı alanın ele aldığımız noktanın doğruya olan uzaklığı ile ters oranlı olduğunu, oysa sonsuz geniş bir yük katmanının alanının yüzeyin uzaklığına bağlı olmadığını gördük. Bunların ikisi de, bir nokta yükün alanının uzaklığın karesi ile ters oranlı oluşunun bir sonucudur. Bu size yine de çok açık gelmiyorsa, bir de şu açıdan bakınız: Kabaca konuşarak, Şek. 1.21'deki P noktasında uyarılan alan üzerinde doğrusal yükün ancak bir kısmı, daha doğrusu noktadan aşağı yukarı r uzaklıkta bulunan yakın bölgesi bir katkıda bulunmuştur. Doğrusal yükün bu kısmını bir yere toplar ve gerisini atacak olursak $q \approx \lambda r$ kadar bir yük elde ederiz ki, bu q/r^2 ya da λ/r ile oranlı bir alan oluşturur. Yük katmanı halinde ise etkili yük tutarı, katmandan dışarı doğru gittikçe r^2 ile oranlı olarak artar, ve bu r^2 herhangi bir yük öğesinin uyardığı alanın $1/r^2$ ile oranlı oluşunu tam olarak karşılar.

---

* Sirik; Unique

Problemler

1.1 (a) İki elektron r aralığı ile duruyorlarsa aralarındaki elektrik itmesi ile kütle çekimini karşılaştırın. Bu kuvvetlerin tam olarak denkleşmesini istersek elektronun kütlesi ne olmalıdır? (Elektronun yükü ve kütlesi G genel çekim sabiti gibi evrensel sabitler kitap sonundaki çizelgelerde verilmiştir).

(b) Evrensel çekim yasasında (Cilt 1, S. 79) G, denel olarak bulunması gereken bir sabittir, çünkü bilindiği gibi kütle birimi olan gram bağımsız olarak tanımlanmıştır. CGS elektrik birimleri dizgesinde ise yük birimini tanımlamak için Coulomb yasasının kendisi kullanılır. Kütle biriminin de aynı biçimde tanımlandığını düşünerek kendi kütlenizin bu birim cinsinden ne olacağını hesaplayınız.

1.2 Kenarları b olan bir karenin merkezine bir birimlik artı yük konulduğuna ve karenin köşelerinde sıra ile q, $2q$, $-4q$ ve $2q$ gibi yükler bulunduğuna göre merkezdeki yüke etkiyen kuvvet ne tutar?

1.3 Helyum doldurulmuş eşit iki balon 5 gr'lık bir ağırlığa bağlanmış ve şekilde görüldüğü gibi denge hali sağlanmıştır. Her balonda Q kadar yük vardır. Q 'nün esb cinsinden değerini bulunuz.

Yanıt: 1660 esb.

1.4 Kenarları r olan bir eşkenar üçgenin köşelerine $-e$ yükleri yerleştirilmiş ve $Q > 0$ gibi bir yük de üçgenin ağırlık merkezine konulmuştur. Eksi yüklerden herhangi birine etkiyen kuvvetin sıfır olabilmesi için Q ne olmalıdır? Q 'ye etkiyen kuvvetin bakışım dolayısı ile hep sıfır olduğu açıktır. Dizge dayanıklı bir denge durumunda mıdır?

1.5 Üç yük şekilde görüldüğü gibi konulmuşlardır.
(a) Her yüke etkiyen durgun yük kuvvetini hesaplayınız.

(b) Bu yük düzenlenişinin toplam gizilgüç enerjisini hesaplayın.

1.6 Bir alfa parçacığı bir hidrojen molekülünün çekirdekleri eksenine dik olarak tam ortadan geçmektedir. Çekirdekler arasındaki uzaklık b'dir. Alfa parçacığı yörüngesi boyunca nerede en büyük kuvvetle karşılaşır? Alfa parçacığının geçtiği sırada atom çekirdeklerinin fazla yer değiştirmedikleri varsayılacak. (Alfa parçacıkların hızları büyük olduğu için bu varsayım geçerlidir). Problemi çözerken molekül içindeki elektronların elektrik alanı sayılmayacak. (Bu iyi bir yaklaşıklık değildir, çünkü hidrojen molekülünün orta bölgesinde oldukça yüksek bir eksi yük birikmesi olur).

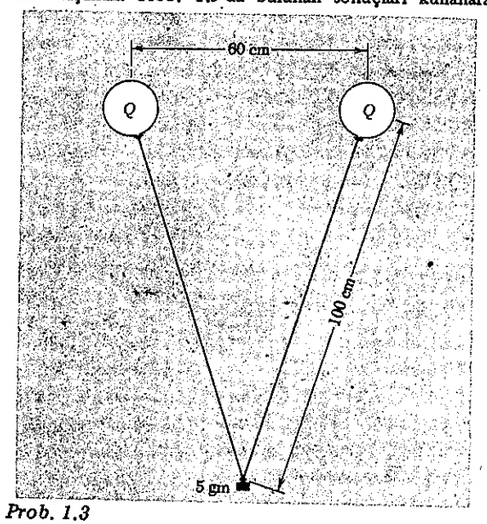
1.7 Bir proton ve iki elektrondan oluşmuş bir dizgenin gizilgüç enerjisinin tam olarak sıfır olması için gerekli geometrik düzenlemeyi bulun. Her üç parçacık aynı bir doğru üzerinde bulunursa bu gibi kaç düzenleme olabilir?

1.8 Bir boyutlu sonsuz bir iyon kristalinin, yani e yüklü eşit aralıklı ve imleri nöbetleşe değişerek giden tanelerden oluşmuş bir dizinin iyon başına gizilgüç enerjisini hesaplayınız. (İp ucu: In $(1 + x)$ ifadesinin diziye açılımı yararlı olabilir).

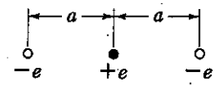
1.9 Yarıçapı a olan küresel bir hacım, sabit yoğunlukta yükle doldurulmuştur. Bu yük küresinin U gizilgüç enerjisini, yani onu bir yere getirmek için harcanan işi bulmak istiyoruz. Hesabı yapmak için küreyi kat kat kurduğunuzu düşünün. Ve bu sırada küresel bir dağılımın dışında bulunan bir noktadaki alanı, kürenin içindeki bütün yükler merkezinde toplanmış olduğu zamanki alanın aynı olduğunu hesaba katın. Kürenin r yarıçapına kadar kurulmuş olduğunu düşünün. Bu basamakta iken toplam yük ne tutar? Şimdi bu küreye sonsuz küçük dr kalınlığında bir kat ekleyin; bu kat içindeki yük tutarını sonsuzdan r yarıçapına getirmek için harcanan dU işi ne olacaktır? Şimdi bu bağıntıyı $r = 0$ dan $r = a$ya dek tümlevini alın. Elde ettiğiniz sonucu kürenin içindeki Q toplam yük cinsinden çıkarın.

Yanıt: $U = \frac{3}{5}(Q^2/a)$.

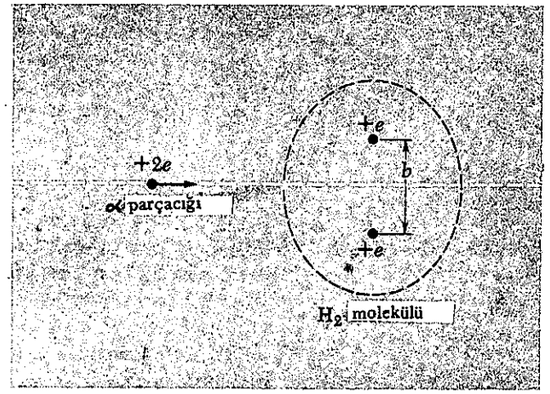
1.10 Bu yüzyılın başında, elektronun durgun kütlesinin tümcek elektriksel bir kaynaktan geldiği düşüncesi, özellikle özel göreliğin kütle ile enerjinin eşdeğerliğini ortaya koyduğu zamanlarda çok çekici idi. Elektronu yarıçapı r_0 olan oylumca yük yoğunluğun sabit bir yük yuvarlağı olarak düşünün. Prob. 1.9'da bulunan sonuçları kullanarak bu



Prob. 1.3



Prob. 1.5



Prob. 1.6

dizgenin gizilgüç enerjisini mc 'ye eşit kılın ve r_0 için ne bulduğunuza bakın. Taslamın bir kusuru ortatadır: Yükleri bir yerde tutmak için hiç bir önlem düşünülmemiştir.

1.11 Ağır atomların çekirdekleri elektriksel yapıları bakımından, oylumca yük yoğunluğu sabit ve 4×10^{28} esu/cm^3 olan madde topaklanması gibi düşünülebilir. Toplam yükü 92 e olan uranyum çekirdeği eşit yüklü ve eşit yarıçaplı iki parçaya bölünecek olursa, bu parçalar birbirlerinden iyice uzaklaştıklarına göre, dizgenin erg olarak ya da milyon elektron volt olarak elektriksel enerji değişimi ne tutar?

1.12 İki nokta yük x ekseni üzerinde yerleşmişlerdir, bunlardan $+1$ esb olanı $x = +2$ ve -4 esb olanı ise $x = -2$cm'dedir.

(a) y ekseni üzerinde (0,3,0) noktasında bu iki yükün uyardıkları alanları ve bu alanların bileşkesinin yönünü ve değerini bulun.

(b) Alanın sıfır olduğu bir nokta bulun. Alanı sıfır olan nokta sayısı birden çok mudur.

1.13 Çapı 10^{-2} cm olan bir su damlacığı eksi yüklüdür ve bu yük yüzünden yüzeyindeki elektriksel alanın yeğinliği 20 statvolt/cm'dir. Bu damlanın düşmesini önlemek için ne yeğinlikte bir düşey alanın etkisi altında bulunması gerekir?

1.14 Yer yüzünün dışında elektrik alanının ortalama değerinin sıfır olmadığı gözlenir. Çeşitli bölgelerde aynı zamanda yapılan birçok ölçüler sonucu, bu alanın yukarıya yönelmiş ve ortalama değerinin 10^{-3} din/esb olduğu bulunmuş olsun. Bu alan değerine göre yer yüzünün yük artığının cm başına elektron olarak ne tutarda olması gerekir?

1.15 Normal halinde bulunan ılın hidrojen atomu, *bazı bakımlardan* $+e$ değerinde bir nokta yük ile, yoğunluğu $-\rho(r) = Ce^{-2r/a_0}$ değerinde bir eksi yük yoğunluğu dağılımından oluşmuş gibi davranır. Burada a_0 "Bohr yarıçapıdır" ve değeri 0.53×10^{-8} cm 'dir; C ise toplam eksi yükü tam olarak e'ye eşit kılmak için gerekli bir sabit sayıdır. Buna göre a_0 yarıçaplı bir kürenin içindeki net yük ne tutar? Çekirdekten bu uzaklıkta bulunan bir noktadaki alan yeğinliği ne tutar?

1.16 İletken olmayan ince bir plastik çubuk 50 cm yarıçaplı tam bir daire oluşturacak biçimde bükülmüştür. Çubuğun uçları arasında 2 cm'lik bir aralık var. 1 esb'lik artı yük, çubuğa boylu boyunca düzgün olarak yayılmıştır. Dairenin merkezinde oluşan elektrik alanının değeri ve yönü nedir?

1.17 (a) Değeri q olan bir nokta yük, d kenarlı bir kübün merkezine yerleştirilmiştir. Kübün *bir yüzeyinden geçen* $\int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a}$'nın değeri nedir?

(b) q yükü kübün köşelerinden birine taşınmış ise yüzeylerinin her birinden geçen akı ne tutar?

1,18 Yüzeyce yük yoğunlukları $\sigma = 6$ esb/cm^2 ve $\sigma = -4$ esb/cm^2 olan sonsuz genişlikte iki düzlem yük katmanı 2 cm aralıkla koşut olarak durmaktadırlar. Bu dizgenin elektrik alanını tartışınız. Düzlemler koşut olacak yerde birbirlerini dik açı altında kessinler. Bu halde düzlemlerin uzayı böldüğü dört bölgenin her birindeki elektrik alanlarının aynı olduğunu gösteriniz.

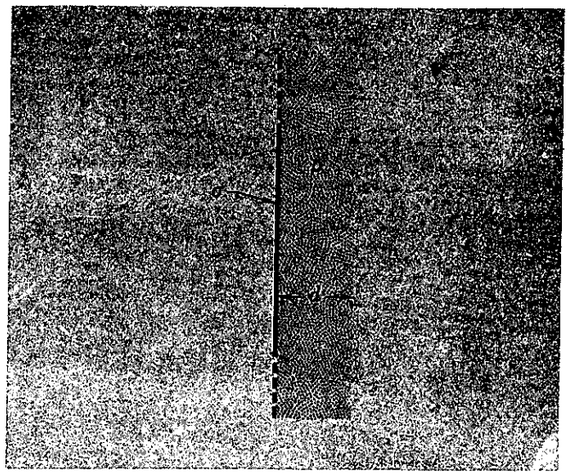
1.19 Sonsuz genişlikte bir düzlemin yüzeyce yük dağılımı σ olsun. Bu düzlemin hemen bitişiğinde d genişliğinde ve oylumca yük yoğunluğu ρ olan düzgün ve koşut bir katman bulunsun. Bütün yükler yerlerinde sabit olduğuna göre her yerdeki E alanını bulunuz.

1.20 Coulomb yasası içinde söylenen ilginç olgulardan biri şudur: Aynı imli yüklerin itiş kuvveti karşıt imlilerin çekiş kuvvetine tam eşittir. Bunun çok basit bir tanımlama konusu olmadığını ve bundan çıkan sonuçların neler olduğunu göstermek için, bizimkinden farklı ayrı bir dünya düşünelim. O dünyada yük birimi, aynı imli yükler arasındaki kuvvete dayanarak tanımlanmıştır. Artı iki yük 1 cm aralıkla dururlarken birbirlerini 1 din'lik bir kuvvetle itmektedirler; aynı şey eksi yükler için de doğrudur. Uzaklığın karesi ile

ters oranlılık yasası geçerlidir ve üstüste binme ilkesi de doğrudur. Ama bir birimlik artı yük ile bir birimlik eksi yük birbirlerini k dinlik kuvvetle çekmektedirler; burada $k < 1$'dir. O dünyada yoğun üç yükün hepsinin birbirini çektiği durumlar bulunabileceğini beklememiz gerektiğini gösteriniz. Bizim dünyamızda bu olabilir mi? O dünyada yük miktarı kavramının genelleştirilmek genelleştirilmesi gerekirmi? Elektrik alanı kavramı hakkında ne söylenebilir. Uzayda bir noktaya birisinin koyabileceği yüklü bir cisme etkiyen kuvveti önceden kestirebilmek için, sınama yükleri ile kaç tane farklı ölçü yapmamız gerekir? $k > 1$ için o dünyada olabilecek öyle bir durum öneriniz ki, bizimkinden açıkca farklı olsun.

1.21 Küresel bakışımlı bir yük dağılımının uyardığı elektrik alanı ile ilgili teoremin yani, kürenin dışındaki alanın bütün yük merkezde toplanmış iken uyarılan alanla aynı olduğunu ve içi boş bir yük dağılımının içindeki alanın sıfır olduğunu söyleyen teoremin, sonsuz uzunlukta, dairesel silindir bakışımlı bir yük dağılımı için de doğru olduğunu gösterin. Bu teoremi deyimleyin.

1.22 $r = 0$'dan $r = a$'ya kadar ρ yük yoğunluğu sabit olan küresel bir yük dağılımı alın. Yük yoğunluğu a'nın ötesinde sıfırdır. r'nin bütün değerleri için yani a'dan daha büyük ve daha küçük değerler için elektrik alanını bulun. $r = a$'da yük yoğunluğu yüzeyini geçtiğimiz zaman alanda bir kesiklilik var mıdır? $r = 0$ noktasında bir kesiklilik var mıdır?

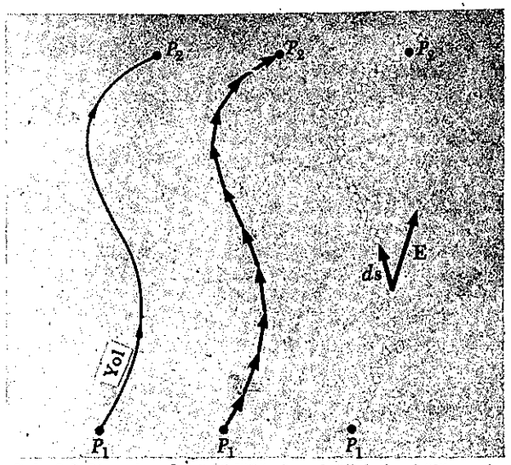


Prob. 1.19

Bölüm 2

Elektrik Gerilimi

2.1	Elektrik Alanının Çizgi Tümlevi	30
2.2	Gerilim Farkı ve Gerilim Fonksiyonu	31
2.3	Bir Sayıl Fonksiyonun Bayırgısı (Gradyenti)	32
2.4	Alanı Gerilimden Türetmek	34
2.5	Bir Yük Dağılımının Gerilimi	35
2.6	Biteviye Yüklü Bir Pulun Gerilimi ve Alanı	36
2.7	Bir Yüzey Yüküne Etkiyen Kuvvet	41
2.8	Bir Elektrik Alanına Bağlı Enerji	43
2.9	Bir Yöngü Fonksiyonunun Iraksaması	45
2.10	Gauss Teoremi ve Bunun Diferansiyel Yazılışı	46
2.11	Dik Konumluklarda Iraksamanın Hesabı	47
2.12	Laplace İşlemi	51
2.13	Laplace Denklemi	51
2.14	Fiziği Matematikten Ayırdetmek	52
2.15	Yöngü (Vektör) Fonksiyonunun Dönülü (Rotasyoneli)	54
2.16	Stokes Teoremi	56
2.17	Dik Konumluklar Çatkısında Dönül Hesabı	56
2.18	Dönülün Fiziksel Anlamı	59
	Problemler	64



Şek. 2.1.Bir yolun ds büyüklüğünde yol öğelerine bölünmesi.

2.1 Elektrik Alanının Çizgi Tümlevi

E alanının durgun bir yük dağılımının oluşturduğu alan olduğunu düşünelim. P_1 ve P_2 alan içinde iki konum olsun. **E** alanının verilen bu iki nokta arasındaki çizgi tümlevi, $\int_{P_1}^{P_2} \mathbf{E}\cdot d\mathbf{s}$ dir ve Şek. 2.1' de görüldüğü gibi P_1 'den P_2 'ye giden herhangi bir yol boyunca alınmıştır. Bunun anlamı şudur: Yolu küçük parçalara bölünüz, her parça uçuca birleşen bir yöngüyle gösterilsin; her yerde yol parçası yöngüsü (vektörü) ile **E** alanının sayıl çarpımını alınız; bütün yol için bu çarpımların toplamını bulunuz. Tümlev her zaman olduğu gibi, parçaların boylarını daha küçültüp sayılarını sonsuz olarak artırdığımız zaman bu toplamın vardığı erey değer olarak görülür.

Kesin bir örnek üzerinde çalışalım. Bunun için $E_x = Ky$ ve $E_y = Kx$, olan bir **E** elektrik alanı bulunsun; burada K bir sabittir. Bu olağan bir durgunelektrik alandır. (Az sonra bunun nasıl tanınabileceğini öğreneceğiz). Şekil 2.2 a alanın bazı çizgilerini göstermektedir. Çizimde görülen belirli bir ABC yolu üzerinde A noktasından C noktasına gidilirse **E** alanının çizgi tümlevinin aldığı değer neye eşittir? Bir yol öğesini gösteren yöngü,

$$d\mathbf{s} = \hat{\mathbf{x}}\,dx + \hat{\mathbf{y}}\,dy \qquad (1)$$

dır. Burada **E** yöngüsü,

$$\mathbf{E} = K(\hat{\mathbf{x}}\,y + \hat{\mathbf{y}}\,x) \qquad (2)$$

olduğuna göre, $\mathbf{E}\cdot d\mathbf{s}$ sayıl* çarpımı herhangi bir yol öğesi için

$$\mathbf{E}\cdot d\mathbf{s} = K(y\,dx + x\,dy) \qquad (3)$$

olur. Yolun A'dan B,ye giden kesimi üzerinde, $y = 2x$ ve $dy = 2\,dx$'dır. Buna göre:

$$\int_A^B \mathbf{E}\cdot d\mathbf{s} = K\int_A^B (y\,dx + x\,dy) = K\int_0^1 (2x\,dx + 2x\,dx)$$
$$= 4K\int_0^1 x\,dx = 2K \qquad (4)$$

bulunur. Yolun B'den C'ye giden kesimi üzerinde, $y = 2$ ve $dy = 0$ dır. O halde:

$$\int_B^C \mathbf{E}\cdot d\mathbf{s} = K\int_B^C (y\,dx + x\,dy) = K\int_1^2 2\,dx = 2K \qquad (5)$$

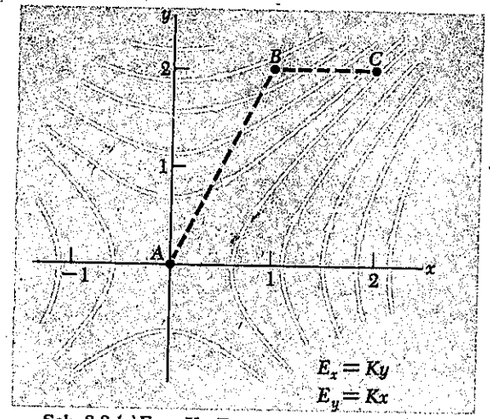
bulunur. Buna göre ABC yolu üzerindeki çizgi tümlevi $2K+2K$ veya $4K$ olur.

Bir nokta yükün elektrik alanı ışınsal olarak yönelmiştir ve büyüklüğü yalnızca r uzaklığına bağlıdır. P_1 ve P_2 noktaları bir nokta yükün alanı içinde bulunuyorlar ise, **E** alanının bu iki nokta arasındaki herhangi bir yol için çizgi tümlevinin aynı olduğu oldukça açıktır. Bu özellik, merkeze yönelmiş bir kuvvet alanı içinde devinen bir yük üzerinde yapılan iş ile ilgili olarak Kesim 1.5'de ve Şek. 1.5'deki ön tartışmadan doğrudan çıkar. Gerçekte bir q sınama yüküne etkiyen **F** kuvvetinin çizgi tümlevi ile, sınama yükünün içinde devindiği **E** alanının çizgi tümlevinden q çarpanı kadar farklıdır. Herhangi bir elektrik alanı Denk. 1.14 ve 1.15'de verildiği gibi bazı yüklerin oluşturdukları alanların üstüste gelmesi ile oluşmuştur. Bu nedenle böyle bir alan içindeki bütün kaynaklardan ileri gelen toplam **E** alanının çizgi tümlevi yola bağlı değildir:

> Bir durgun yük alanı içinde P_1 noktası ile P_2'yi birleştiren bütün yollar üzerinde alınan $\mathbf{E}\cdot d\mathbf{s}$ tümlevinin değeri hep aynıdır. (6)

* Sayıl : Skaler

Bir örnek olmak üzere Şek. 2.2 c'de A'dan C'ye giden ve (2,0) noktasından geçen bir yol boyunca çizgi tümlevini alalım; burada **E** alanı az önceki alandır. Yolun ilk kesimi boyunca, yani başlangıç noktası ile $x = 2$ noktası arasındaki x ekseninin üzerindeki yol boyunca alan yola dik olduğundan $\mathbf{E}\cdot d\mathbf{s}$ sıfırdır. İkinci kesimde ise, $E_y = Kx = 2K$ 'dır ve bu yolun uzunluğu 2 birim olduğu için çizgi tümlevi $4K$ eder; bu daha önce bulduğumuz değerin aynıdır. Aslında çizgi tümlevinin yola bağlı olmadığını bildiğimizden, bu tümlevi ABC gibi bir yol için yeniden hesaplamak boşunadır. Zaten bir çizgi tümlevi değerini bulmak durumu ile karşılaşmayacağız. Bu örneğin amacı çizgi tümlevinin ne demek olduğunu iyi anlamanızı sağlamaktır.



Şek. 2.2.(a) $E_x = Ky, E_y = Kx$ alanı içinde bir ABC özel yolu, Bazı alan çizgileri gösterilmiştir.

2.2 Gerilim Farkı ve Gerilim Fonksiyonu

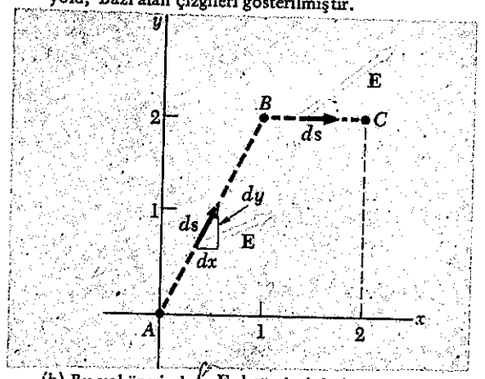
Durgun yük alanı içindeki çizgi tümlevi yola bağlı olmadığı için, bunu φ_{21} gibi bir sayıl nicelik tanımlamak için kullanabiliriz, şöyle ki,

$$\boxed{\varphi_{21} = -\int_{P_1}^{P_2} \mathbf{E}\cdot d\mathbf{s}} \qquad (7)$$

olsun. Denklemin her iki yanını $+1$ yükü ile çarpılmış gibi düşünsek ikinci yanı kuvvet tümleyi yani iş olur. Buna göre φ_{21} , bir **E** alanı içinde artı bir yükü P_1 'den P_2 'ye kadar götürmek için *yük birimi başına görülen iştir*. O halde φ_{21} niceliği P_1 ve P_2 gibi iki konumun tek değerli bir sayıl fonksiyonudur. Biz buna bu iki nokta arasındaki elektriksel *gerilim farkı* diyeceğiz.

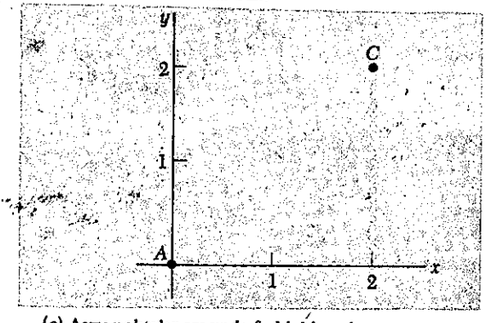
CGS takımında elektriksel gerilim farkları erg/esb ile ölçülür. Bu birimin statvolt diye kendine özgü bir adı vardır. ("stat" durgun elektrikten gelir). *Volt* MKS dizgesinde gerilim farkı birimidir*. Değeri 1/299,79 veya yaklaşıkça 1/300 statvolt'tur. 1 coulomb'luk bir yükü 1 volt'luk bir gerilim farkından aşırmak için 1 joule (10^7 erg)'lik iş görmek gerekir.

*Coulomb, ampere ve ohm gibi volt da pratik bir elektrik birimi olarak MKS elektrik birimlerinden çok önceleri de kullanılmakta idi.



(b) Bu yol üzerinde $\int \mathbf{E}\cdot d\mathbf{s}$ tümlevinin hesaplanması.

Denk. 3'den 5'e kadar bak.



(c) Aynı noktalar arasında farklı bir yol.

Tümlev hesabında P_1 noktasını belli bir gözlem konumunda tuttuğumuzu düşünelim. O zaman φ_{21} yalnızca P_2 'nin yani x, y, z uzay konumluklarının bir işlevi haline gelecektir. Buna göre φ 'nin değerini alt indisleri yazmadan yalınca $\varphi(x,y,z)$, şeklinde yazabiliriz, yeterki bu niceliğin tanımında belli P_1 noktası üzerinde anlaştığımızı anımsayalım. Bu halde φ, $\mathbf{E}$ yöngü alanı ile ilgili *gerilimdir*. Bu konumun bir sayıl fonksiyonudur veya bir sayıl alandır (İkisi aynı anlama gelir). Bir noktadaki değeri sadece bir sayıdır (yük birimi başına iş birimi cinsinden) ve yönelmiş bir nicelik değildir. Bir kez $\mathbf{E}$ alan yöngüsü verilmiş bir nicelik değildir. Bir kez $\mathbf{E}$ alan yöngüsü verilmiş ise, φ gerilim işlevi, P_1 noktasının isteğimize göre seçilmesinden ileri gelen bir sabit farkı ile belirlenmiştir.

Bir örnek olarak Şek. 2.2'de verilen elektrik alanı ile ilgili gerilimi bulalım. P_1 noktasını konumluklar başlangıcında, yani Şek. 2.2'de A ile gösterilen noktadan almak kolaylık sağlar.
Şimdi:

$$\int \mathbf{E}\cdot d\mathbf{s} \qquad (8)$$

tümlevinin bu imlenme noktasından genel bir (x,y) noktasına kadar değerini hesaplamak için Şek. 2.2 c'deki gibi (noktalı) bir yol üzerinden gitmek en kolaydır:

$$\varphi(x,y) = -\int_{(0,0)}^{(x,y)} \mathbf{E}\cdot d\mathbf{s} = -\int_{(0,0)}^{(x,0)} E_x\,dx - \int_{(x,0)}^{(x,y)} E_y\,dy \qquad (9)$$

daha önce belirttiğimiz gibi E_x alanı x ekseni boyunca sıfır olduğundan birinci tümlev sıfırdır. İkinci tümlev sabit x değeri üzerinden alınır ve $E_y = Kx$, olduğundan tümlev,

$$-Kx\int_0^y dy \qquad (10)$$

olur ve bunun değeri $-Kxy$'dir. O halde bu alan için gerilim

$$\varphi = -Kxy \qquad (11)$$

olur. Buna herhangi bir sabit eklenebilir. Bu eklemenin biricik anlamı kendisine sıfır gerilimi tanıdığımız gözlem noktasının başka bir yerde olduğudur. Aynı şekilde bir q nokta yükünün gerilimini hesaplıyarak

$$\varphi_{21} = -\int_1^2 \frac{q}{r^2}\hat{\mathbf{r}}\cdot d\mathbf{r} = q\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right)$$ buluruz. Gerilimin sıfır noktasını sonsuzda $(r_1 = \infty)$ alarak $\varphi = \frac{q}{r}$ çıkar.

Verilen bir $\mathbf{E}$ elektrik alanına bağlı φ *gerilimi* ile bir yükler dizgesinin *gerilim enerjisini* karıştırmamağa dikkat etmeliyiz. Bir yükler dizgesinin gizil güç enerjisi bu yükleri bir yere getirmek için harcanan toplam iştir. Örneğin Şek. 1.6'daki yükler dizgesinin U gizilgüç enerjisini Denk. 1.8 ile deyimledik. Şek. 1.6'daki alan ile ilgili $\varphi(x,y,z)$ elektriksel gerilimi, bir (birim) artı sınama yükünü sonsuzdan (x,y,z) noktasına kadar getirmek için bu sekiz yükden oluşan yapının alanı içinde yük birimi başına görülen iş olurdu.

2.3 Bir Sayıl Fonksiyonun Bayırgısı (Gradyenti)*

Elektrik alanı verilmiş ise elektriksel gerilim fonksiyonunu bulabiliriz. Ama zıt yönde de gitmek olasıdır; gerilim bilindiğine göre bundan alan türetilebilir. Denk. 7'de görülebileceği gibi alan gerilim fonksiyonunun bir anlamda *türevidir*. Bu düşünceyi kesinleştirebilmek için konumun sayıl bir fonksiyonunun bayırgı kavramını* ortaya atacağız. Bunun için $f(x,y,z)$ nin konumluklara göre sürekli ve diferansiyeli alınabilen bir fonksiyon olduğunu düşünelim. Uzayın her noktasında bu fonksiyonun $\partial f/\partial x$, $\partial f/\partial y$ ve $\partial f/\partial z$ tikel diferansiyelleri ile bir yöngü kurabiliriz ki, bu yöngünün x, y, z bileşenleri yukarda verilen tikel diferansiyellere eşit olsun*. İşte bu yöngüye f'nin bayırgısı diyoruz bayır f veya ∇f şeklinde yazıyoruz:

$$\boxed{\nabla f = \hat{\mathbf{x}}\frac{\partial f}{\partial x} + \hat{\mathbf{y}}\frac{\partial f}{\partial y} + \hat{\mathbf{z}}\frac{\partial f}{\partial z}} \qquad (12)$$

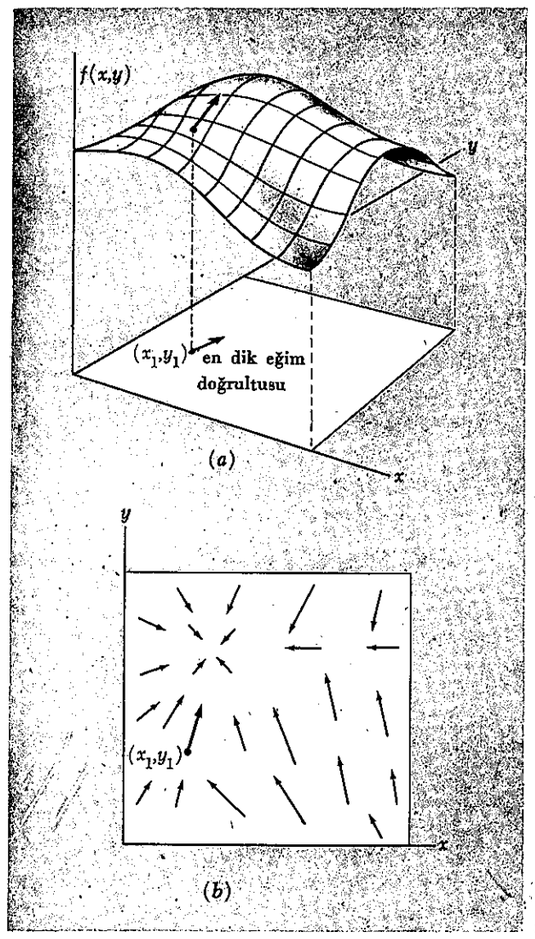
*Okuyucuya hatırlatalım ki x, y ve z'nin bir f fonksiyonunun x'e göre $\partial f/\partial x$, şeklinde yazılan tikel diferansiyeli, öteki iki değişken sabit kaldığına göre fonksiyonunun x'e bağlı olarak değişim hızını verir. Daha kesin olarak:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \operatorname*{crey}_{\Delta x\to 0} \frac{f(x+\Delta x,y,z) - f(x,y,z)}{\Delta x}$$

dır. Örneğin $f = x^2yz^3$ ise,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xyz^3 \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = x^2z^3 \qquad \frac{\partial f}{\partial z} = 3x^2yz^2 \text{ dır.}$$

*Bayırgı, kısaltılmışı "bayır"; Gradyent



Şek. 2.3 $f(x,y)$ sayıl fonksiyonu bir yüzeyle gösterilmiştir (a).(b) halindeki oklar bayır f yöngü fonksiyonunu gösterir.

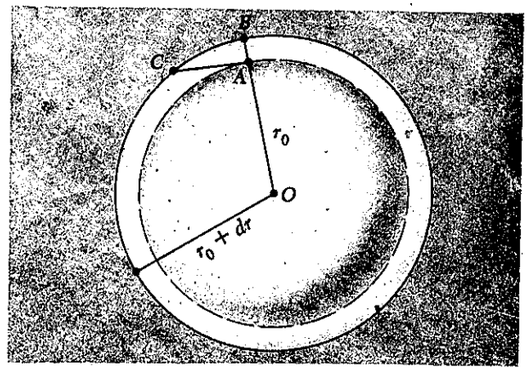
İşte bu ∇f, f fonksiyonunun bir noktanın yakınlarında nasıl değiştiğini söyleyen bir yöngüdür. Yöngünün x bileşeni f fonksiyonunun x'e göre tikel* diferansiyelidir ve bu f fonksiyonunun x doğrultusunda ilerlediğimiz zaman değişme çabukluğunun ölçüsüdür. ∇f yöngüsünün herhangi bir noktadaki yönü, f fonksiyonunda en dik bir artış gözlemek için bu noktadan yola çıkarak gitmemiz gereken yöndür. Sadece x ve y değişkenlerine bağlı bir fonksiyonla uğraştığımızı düşünelim; şöyle ki, fonksiyon 3 boyutlu uzay içinde bir yüzeyle gösterilsin. Bu yüzey üzerinde bir noktada durunca, yüzeyin bir doğrultuda yükseldiğini zıt doğrultuda ise alçaldığını görürüz. Bu arada öyle bir doğrultu bulabiliriz ki, bu doğrultuda kısa bir adım attığımız zaman herhangi başka bir doğrultudan daha yukarı çıkarız. Bir fonksiyonun bayırgısı doğrultusu en dik yükselmeğe raslayan bir yöngüdür ve bu yöngünün büyüklüğü fonksiyonun bu doğrultuda ölçülen eğimine eşittir.

Şekil 2.3 bunu gözünüzde canlandırmaya yardım edebilir. Bu x ve y konumluklarına bağlı bir özel fonksiyon olsun ve Şek. 2.3 a'da gösterilen $f(x,y)$ yüzeyi ile gösterilmiş bulunsun. Bu yüzey (x_1,y_1) noktasında artı x doğrultu ile 80° 'ye yakın bir açı altında en dik olarak yükselir. Fonksiyonun bayırgısı, dediğimiz ∇f, x ve y'nin bir yöngü fonksiyonudur. Bu fonksiyonun nasıl olduğu Şek. 2.3 b'de, (x_1,y_1). noktasını da içeren, iki boyutlu uzay içinde bir takım noktalarda çizilmiş yöngülerle gösterilmiştir. Denk. 12 ile tanımlanan ∇f yöngü fonksiyonu bu düşüncenin üç boyutlu uzay içine genişletilmesinden başka bir şey değildir. (Şek. 2.3 a'nın gösterdiği yüzeyi üç boyutlu gerçek bir xyz uzayı ile karıştırmamaya çalışalım; şekildeki üçüncü konumluk $f(x,y)$. fonksiyonunun değerinden başka bir şey değildir.)

Üç boyutlu uzay içindeki bir fonksiyona örnek olmak üzere f'nin yalnız r'nin fonksiyonu olduğunu düşünelim; burada r sabit bir noktaya uzaklıktır. Merkezi O'da olan r_0 yarıçaplı bir küre üzerinde $f = f(r_0)$ sabittir. Yarıçapı birazcık daha büyük, yani $r_0 + dr$ olan bir küre yüzeyi üzerinde fonksiyon yine sabittir, bu kez değeri $f = f(r_0 + dr)$'dir. Şimdi $f(r_0)$ 'den,

* Tikel: kısmi.

$f(r_0 + dr)$ 'ye bir değişim sağlamak istersek, bunun için en kısa yol, Şek. 2.4'de görüldüğü gibi, A'dan C'ye giden değil, yarıçap boyunca A'dan B'ye gidendir. Yani f fonksiyonunun 'eğimi'' yarıçap doğrultusunda en diktir; herhangi bir noktada f'nin yöngüsü yarıçap boyunca yönelmiş bir yöngüdür. Gerçekten bu halde $\nabla f = \hat{r}(df/dr)$ yazılabilir; burada $\hat{r}$, herhangi bir noktada ışınsal doğrultuda yönelen birim yöngüyü gösterir.



Şek. 2.4. f nin belli bir değişimi için en kısa adım, f sadece r'nin fonksiyonu ise, AB ışınsal adımıdır.

2.4 Alanı Gerilimden Türetmek

Şimdi f sayıl fonksiyonu ile ∇f yöngü fonksiyonu arasındaki bağıntının, bir (–) im* ayırımı ile, φ gerilimi ile $\mathbf{E}$ alanı arasındaki bağıntının aynı olduğunu görmek çok kolaydır. Bunun için φ 'nin yakın iki (x,y,z) ve $(x+dx, y+dy, z+dz)$ noktalarındaki değerlerini ele alalım. Bu noktalardan birinciden ikinciye gidince φ'deki değişim

$$d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz \qquad (13)$$

olur. Öte yandan φ 'nin tanımlanmasına dayanarak aynı değişim,

$$d\varphi = -\mathbf{E} \cdot ds \qquad (14)$$

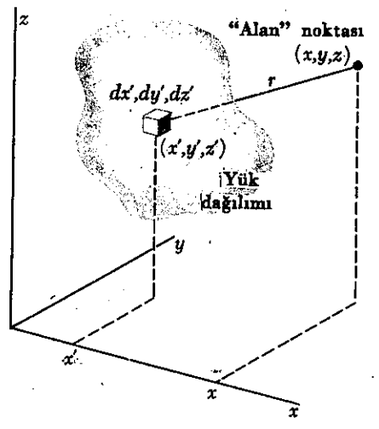
şeklinde deyimlenir. Buradaki sonsuz küçük ds yer değiştirmesinin değeri $\hat{x}\,dx + \hat{y}\,dy + \hat{z}\,dz$ 'dir. Böylece $\mathbf{E}$ ile $-\nabla\varphi$ 'yi birbiri ile özdeşlersek Denk. 13 ve 14 özdeş olurlar. Öyleyse elektrik alanı gerilim bayırgısının eksi imlisidir.

$$\boxed{\mathbf{E} = -\nabla\varphi} \qquad (15)$$

Araya bir eksi girmesinin nedeni elektrik alanının artı gerilimlerden eksi gerilimlere doğru yönelmiş olmasıdır: Oysa, $\nabla\varphi$ yöngüsü artan φ 'lere doğru yönelmiş bir yöngü olarak tanımlanmıştır.

Bunun nasıl işlediğini göstermek için Şek. 2.2'deki alan örneğine dönelim. Denk. 11'in verdiği gerilim yazımından yola çıkarak $\varphi = -Kxy$ olduğuna göre Kes 2.1'deki elektrik alanını elde edebiliriz:

$$\mathbf{E} = -\nabla(-Kxy) = -\left(\hat{x}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{y}\frac{\partial}{\partial y}\right)(-Kxy) = K(\hat{x}y + \hat{y}x) \qquad (16)$$



Şek. 2.5. $\rho(x',y',z')$ yük dağılımının her öğesi (x,y,z) noktasındaki φ gerilimine bir katkıda bulunur. Bu noktadaki gerilim bütün katkıların toplamına eşittir. (Denk. 17).

2.5 Bir Yük Dağılımın Gerilimi

Bir tek nokta yükle ilgili gerilimin ne olduğunu biliyoruz, zira Denk. 3 ile bir yükü başka bir yükün yakınına getirmek için gerekli işin ne kadar olduğunu hesapladık. Yalıtılmış bir q yükünün alanı içinde bulunan herhangi bir noktadaki gerilim, sadece q/r-dir; r ele aldığımız noktanın q kaynak yüküne olan uzaklığını gösterir; kaynaktan sonsuz uzakta bulunan bir noktanın gerilimini sıfır saydık.

Üstüste gelme ilkesi alanlar için olduğu kadar gerilimler için de işlemelidir. Eğer birçok gerilim kaynağınız var ise, bunların hepsinin gerilim fonksiyonu, kaynaklardan her biri yalnız ikenki gerilim fonksiyonlarının toplamına eşit olur: yeter ki, her halde geri limin sıfırı için tutarlı bir seçim yapmış olalım. Eğer kaynakların hepsi sonlu bir bölge içinde toplanmış iseler, böyle tutarlı bir sıfır yeri bulunabilir ve genel olarak en basit seçim, sıfır gerilimi sonsuz uzakta almaktır. Bu kuralı benimseyince herhangi bir yük dağılımının gerilimi,

$$\varphi(x,y,z) = \int_{\substack{\text{Tüm}\\ \text{kaynaklar}}} \frac{\rho(x',y',z')\,dx'\,dy'\,dz'}{r} \qquad (17)$$

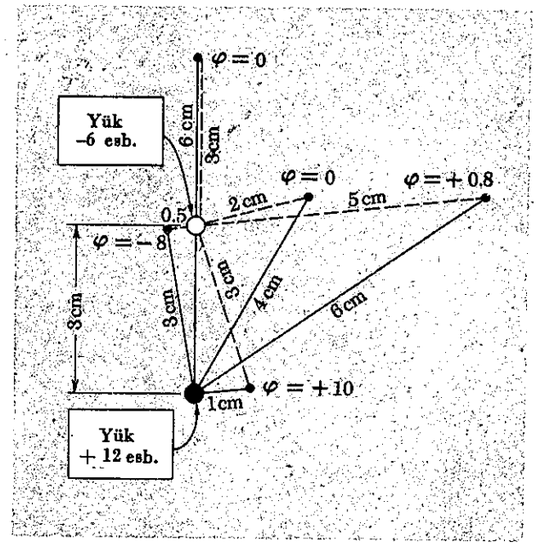
tümlevi ile verilebilir, burada r, $dx'\,dy'\,dz'$ hacım öğesinden gerilimini hesapladığımız (x,y,z) noktasına uzaklığı göstermektedir (Şek. 2.5). Yani

$$r = [(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2]^{1/2}.$$

Bu eşitlikle, bir yük dağılımının alanını veren Denk. 1.15'in tümlevi arasındaki farka dikkat ediniz. Burada paydada r değil, r^2 vardır ve tümlev bir yöngü değil bir sayıldır. $\varphi(x,y,z)$ sayıl gerilim fonksiyonundan, Denk. 15'e göre eksi bayırgı almakla elektrik alanını elde edebiliriz.

İki Nokta Yükün Gerilimi

Şek. 2.6'da gösterilen iki nokta yükten kurulu çok yalın dizgenin gerilimine bakalım. Burada 12 esb'lik artı bir yük –6 esb'lik eksi yükden 3 cm uzakta yer almıştır. Uzayın herhangi bir noktasındaki gerilim her iki yükden ileri gelen gerilimlerin toplamına eşit olacaktır. Yörenin kimi seçili noktalarındaki gerilimler çizimde gösterilmiştir. Gerilim hesabında



Şek. 2.6. İki nokta yükün oluşturduğu bir dizgenin üç şitli noktalarındaki elektriksel gerilim. Sonsuz uzaklıkta φ sıfıra gider. φ statvolt veya yük birimi başına erg olarak verilmiştir.

sayıl niceliklerin sadece cebirsel toplamı alınmaktatır ve hiçbir yöngül toplam işe karışmaz. Örneğin, sağ ileride artı yükden 6 cm ve eksi yükden 5 cm uzaklıkta bulunan bir noktanın gerilimin değeri

$$\frac{+12}{6} + \frac{-6}{5} = +0{,}8 \text{ olur. Burada ölçü birimi}$$

esb/cm gelmektedir ki bu erg/esb veya *statvolt* ile aynıdır. Gerilim sonsuz uzaklıkta sıfıra yaklaşmaktadır. Artı bir birim yükü sonsuzdan $\varphi = 0{,}8$ statvolt olan bir noktaya getirmek için harcanması gereken iş 0,8 erg olacaktır. Şekil üzerinde gösterilen noktaların ikisinde $\varphi = 0$ olduğuna dikkat ediniz. Herhangi bir yükü bu noktalardan birine getirmek için yapılacak net iş sıfır olmalıdır. Sonsuz sayıda bu gibi nokta bulunduğunu kolayca görebilirsiniz ve bunlar uzayda eksi yükü saran bir yüzey oluştururlar. Aslında φ 'nin belirli bir değerini alan noktaların geometrik yeri bir *eş gerilim* yüzeydir ve bu yüzey iki boyutlu şeklimizde bir eğri ile gösterilir.

Yüklü Uzun bir Telin Gerilimi. Denk. 17'nin kullanılmasında sınırlıyız: bütün kaynaklar uzayın sonlu bir bölgesine toplanmış değil ise bu denklem işe yaramaz. Bu güçlüğü gösteren basit bir örnek, Kesim 1.12'de $\mathbf{E}$ elektrik alanını incelediğimiz, sonsuz uzun, yüklü bir telin yük dağılımıdır. Bu dizgede uzak noktaların gerilimine sıfır der ve bu yük dağılımı için Denk. 15'in vereceği tümlevi hesaplamağa kalkarsak, tümlevin ıraksaklaştığını ve sonsuz bir değer verdiğini görürüz. Böyle bir sıkıntıya düşeceğimizi beklememiz gerekirdi, çünkü bu halde "sonsuz" da, yani gerilim fonksiyonunu bulmak istediğimiz bölgeden çok uzakta yalnız telden uzak noktalar değil, telin büyük bir kısmı da vardır. Sonsuz uzun bir telin elektrik alanını bulmakta bu gibi bir güçlükle karşılaşmayız. Çünkü yüklü telin parçalarının alana katkıları uzaklıkla çok hızlı azalır. Yükleri sonsuza doğru giden bir bölge içinde dağılmış bir dizgenin geriliminin sıfır değerini, eve yakın bir yerde almak daha doğru olur. O zaman Denk. 7 temel deyimini kullanarak seçilmiş bu başvuru noktası ile genel bir (x,y,z) noktası arasındaki φ_{21} gerilim farkını hesaplamak gibi basit bir işe ineriz.

Bunun sonsuz uzun yüklü bir tel halinde nasıl yürüyeceğini görmek için P_1 başvuru noktasını dilediğimiz r_1 uzaklığında alalım. Buna göre bir yükü P_1 'den, telden r_2 uzaklıkta bir P_2 noktasına götürmek için yük birimi başına görülmesi gerekli iş,

$$\varphi_{21} = -\int_{P_1}^{P_2} \mathbf{E}\cdot d\mathbf{s} = -\int_{r_1}^{r_2}\left(\frac{2\lambda}{r}\right)dr$$

$$= -2\lambda \ln r_2 + 2\lambda \ln r_1 \qquad (18)$$

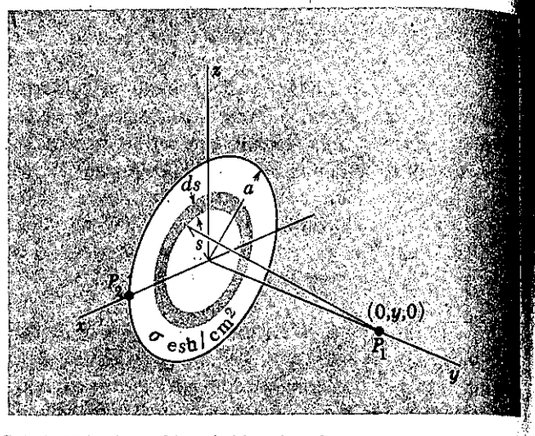
olur. Bu bize sonsuz uzunlukta, yüklü telin elektrik gerilimi için

$$\varphi = -2\lambda \ln r + \text{sabit} \qquad (19)$$

yazımının alınabileceğini gösterir. Bu halde $\mathbf{E}$ elektrik alanını gerisin geri hesaplamak için $-$bayırφ 'nin alınmasında $2\lambda \ln r_1$ 'in bir etkisi olmaz. Böylece

$$-\nabla\varphi = -\hat{\mathbf{r}}\frac{d\varphi}{dr} = \frac{2\lambda\hat{\mathbf{r}}}{r} \qquad (20)$$

bulunur.



Şek. 2.7. Biteviye yüklenmiş bir pulun eksen üzerinde P_1 noktasındaki gerilimini bulmak.

2.6 Biteviye Yüklü Bir Pulun Gerilimi ve Alanı

Belirli bir örnek olarak biteviye yüklü bir pulun çevresindeki elektriksel gerilim ve alanı hesaplayatek. Bu Kes. 1.13'de tartışılan yük dağılımına benzeyen ama boyutları sınırlı olan bir haldir. Şek. 2.7'deki a yarıçaplı yassı pul, yüzeyi üzerine dağılmış sabit σ esb/cm^2 yoğunluğunda artı yüklüdür. (Bu iki yüzeyde iki yük katmanı değil, sonsuz ince bir yük katmanıdır. Başka bir deyişle dizge üzerindeki toplam yük $\pi a^2\sigma$ 'dir.) İleride yüzeyce yük dağılımına özellikle metal iletkenler yüzeylerinde çok raslayacağız. Bununla birlikte az önce anlattığımız cisim bir iletken değildir; eğer bu bir iletken olsaydı, az sonra göreceğimiz gibi yükler cismin üzerinde biteviye dağılmış kalamaz, kıyılara doğru daha çok birikirdi. Aldığımız örnek bir plastik yaprak gibi yalıtkan bir puldur ve üzerine, her santimetre kareye, sabit ve eşit tutarda yük düşecek şekilde serpilmiş olduğu ve yaprağın bu yükleri tuttuğu varsayılmaktadır.

Hesaba başlamak için y ekseni olarak seçtiğimiz bakışım ekseni üzerinde bulunan P_1 noktasındaki gerilimi bulalım. Pulun aynı merkezli halka biçimli bir parçası üzerindeki yük öğelerinin tümü P_1'den aynı uzaklıktadırlar. Halka biçiminde böyle bir parçanın yarıçapı s ve eni ds ise yüzölçümü $2\pi s\,ds$ olur. Buna göre halka üzerinde bulunan dq yükü $dq = \sigma\cdot 2\pi s\,ds$ olur. Bu halkanın bütün parçaları P_1'den aynı uzaklıkta, yani $r = \sqrt{y^2+s^2}$ uzaklığında oldukları için P_1 'deki gerilimin değerine katkıları dq/r veya $2\pi\sigma s\,ds/\sqrt{y^2+s^2}$ olur. Bütün pulun uyardığı gerilimi bulmak için bu halkalar üzerinde tümlemek gerekir:

$$\varphi(0,y,0) = \int\frac{dq}{r} = \int\frac{2\pi\sigma s\,ds}{\sqrt{y^2+s^2}}$$

$$= 2\pi\sigma\left[\sqrt{y^2+s^2}\right]_{s=0}^{s=a} \qquad (21)$$

Bu yalın bir tümlevdir; bir değişken değişikliği yaparak $u = y^2+s^2$ alacak olursak $\int u^{-1/2}\,du$ biçimini alır, sınırlarını belirleyerek

$$y>0 \text{ için } \varphi(0,y,0) = 2\pi\sigma\left[\sqrt{y^2+a^2}-y\right] \qquad (22)$$

elde ederiz.

Burası küçük bir yorum ister: Denk. 22'de verilen sonuç artı y ekseni üzerinde bulunan bütün noktalar için doğrudur. Dizgenin fiziksel yapısı bakımından bakışımlı oluşu yüzünden (pulun bir yüzü tekinden farksızdır) gerilim artı ve eksi y 'ler için aynı değerde olmalıdır, aslında bu durum, içinde y^2 bulunan Denk. 21'e yansımaktadır.
Ama Denk. 22'yi yazarken y^2 'nin kare kökünde bir imleme seçimi yaptık ve çıkan sonuç yalnız artı y'ler için geçerli oldu. $y<0$ için doğru yazım kare kökün öteki seçimi için elde edilir, yani

$$\varphi(0,y,0) = 2\pi\sigma\left[\sqrt{y^2+a^2}+y\right], \quad y\leq 0 \text{ için} \qquad (23)$$

bulunur. Bu sonuca bakarak, $\varphi(0,y,0)$ fonksiyonunun $y=0$ için bir kesiklilik göstermesine şaşmayalım. Gerçekten eksen üzerindeki gerilimi y'nin fonksiyonu olarak gösteren Şek. 2.8'de belirdiği gibi $y=0$ noktasında fonksiyonun eğiminde keskin bir değişiklik var. Pulun merkezindeki gerilim $\varphi(0,0,0) = 2\pi\sigma a$'dır. Artı bir birim yükü sonsuzdan herhangi bir yol boyunca devindirmek pulun merkezine getirip bırakmak için bu $2\pi\sigma a$'lık iş görülmesi gerekir.

$\varphi(0,y,0)$ fonksiyonunun çok büyük y'ler için davranışı ilginçdir. Denk. 22, $y \gg a$ için aşağıdaki yaklaşık biçime girer:

$$\sqrt{y^2+a^2}-y = y\left[\sqrt{1+\frac{a^2}{y^2}}-1\right]$$

$$= y\left[1+\frac{1}{2}\left(\frac{a^2}{y^2}\right)\cdots -1\right]\approx\frac{a^2}{2y} \qquad (24)$$

O halde

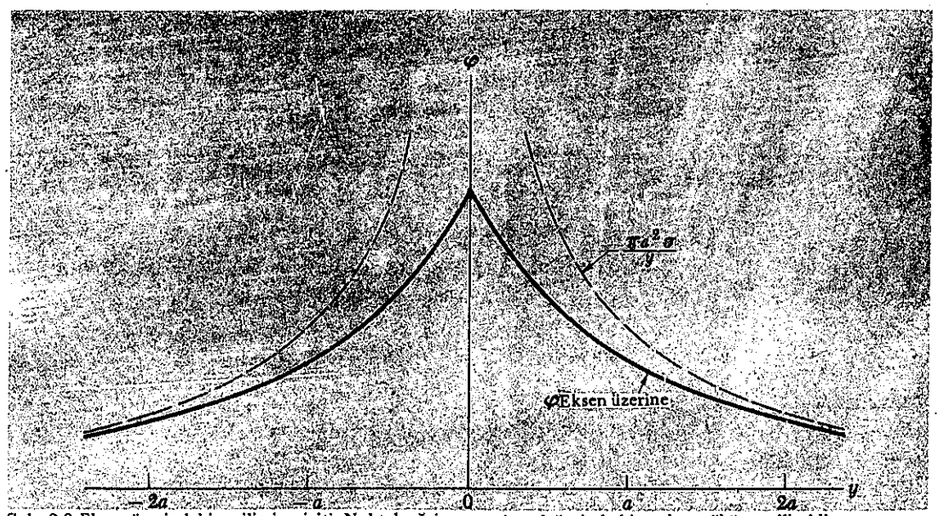
$$\varphi(0,y,0)\approx\frac{\pi a^2\sigma}{y} \qquad y\gg a \text{ için} \qquad (25)$$

olur. Bu yazımdaki $\pi a^2\sigma$ pul üzerindeki toplam q yüküdür ve Denk. 25 bunca bir nokta yükün uyardığı gerilimin yazımıdır. Beklemek gerektiği gibi, pulun çapına bakınca oldukça büyük bir uzaklıkta bir noktadan görülen yük dağılımının biçimi fazla etkili olmamaktadır; ilk yaklaşıklıkla yalnızca toplam yük etkilidir. Şek. 2.8'de $\pi a^2\sigma/y$ fonksiyonu noktalı bir eğri ile gösterildi. Burada eksen üzerindeki gerilim fonksiyonunun kavuşmaz* değerine oldukça çabuk yanaştığı görülmektedir.

Bakışım ekseninin dışında bulunan bir nokta için gerilim yazımını çıkarmak böyle kolay değildir, zira, sınırlı tümlev kolay değildir. Elipsel tümlev denilen bir fonksiyon çıkar. Bu fonksiyonlar iyi incelenmiş ve değerleri çizelgeler halinde düzenlenmiştir*; ama burada özel bir probleme özgü matematiksel ayrıntıların ardından gitmenin bir yararı yok. Yeterince yalın ikinci bir hesap öğretici olabilir. Örneğin, aldığımız pulun tam kıyısında bulunan P_2 gibi bir noktanın gerilimini bulabiliriz (Şek. 2.9).

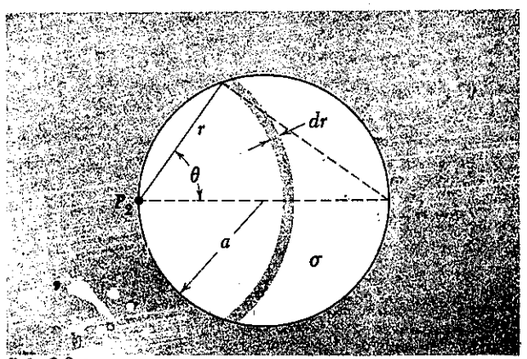
*Cilt I'de basit sarkacın tam olarak incelenmesinde buna değinilmişti (Cilt I, Böl 7 İleri Konular (sayfa 227).

** Kavuşmaz: asimptotik



Şek. 2.8. Eksen üzerindeki gerilimin çiziti. Noktalı eğri $q = \pi a^2 \sigma$ değerinde bir nokta yükün gerilimidir.

P_2 noktasındaki gerilimi hesaplamak için P_2 de merkezlenmiş halka parçalarını ele alalım. Şek. 2.9'da görebileceğiniz gibi bu parça üzerindeki yük $dq = \sigma \cdot 2\pi\theta\, dr$. dir. Bunun P_2 'deki gerilime katkısı $dq/r = 2\sigma\theta\, dr$ olur. Şek. 2.9'daki dik açılı üçgenin geometrik özelliklerine dayanarak $r = 2a \cos\theta$, dolayısıyla $dr = -2a \sin\theta\, d\theta$ yazabiliriz. Bu şekil θ'yı tümlev değişkeni olarak kullanma kolaylığı sağlar. Eğer $\theta, \pi/2$ 'den 0'a kadar değişirse bütün pulu taramış oluruz. Böylece



Şek. 2.9. Biteviye yüklenmiş pulun kıyısında bulunan P_2 noktasındaki gerilimi bulmak.

$$\varphi = \int \frac{dq}{r} = \int_{\pi/2}^{0} 2\sigma\theta(-2a \sin\theta\, d\theta)$$

$$= \int_0^{\pi/2} 4\sigma a\theta \sin\theta\, d\theta$$

$$= 4\sigma a \Big\lfloor \sin\theta - \theta\cos\theta \Big\rfloor_0^{\pi/2} = 4\sigma a \qquad (26)$$

bulunur. ($\int \theta \sin\theta\, d\theta$ yı tikel tümlev ile hesaplayın veya çözümü çizelgeden arayın).

Bulunan sonuç pulun merkezindeki $2\pi\sigma a$ gerilimi ile karşılaştırılırsa gerilimin beklediğimiz gibi merkezden pulun kıyısına doğru düştüğü görülür. Bu nedenle pul düzlemi içindeki elektrik alanının *dışa doğru yönelmiş* bir bileşeni vardır. Bu yüzden daha önce belirttiğimiz gibi yükler özgür olsalardı pulun çevresine doğru kayarak farklı bir dağılım hali seçerlerdi. Başka türlü söylemek gerekirse, biteviye yüklenmiş pulumuz bir sabit gerilim yüzeyi değildir. Oysa iletken herhangi bir yüzey, yükler devinebildikçe sabit gerilim yüzeyi olmak zorundadır*.

Bakışım eksenindeki elektrik alanı gerilim fonksiyonundan doğrudan hesaplanabilir:

$$E_y = -\frac{\partial\varphi}{\partial y} = -\frac{d}{dy} 2\pi\sigma[\sqrt{y^2 + a^2} - y] \qquad (27)$$

Bundan $y > 0$ için

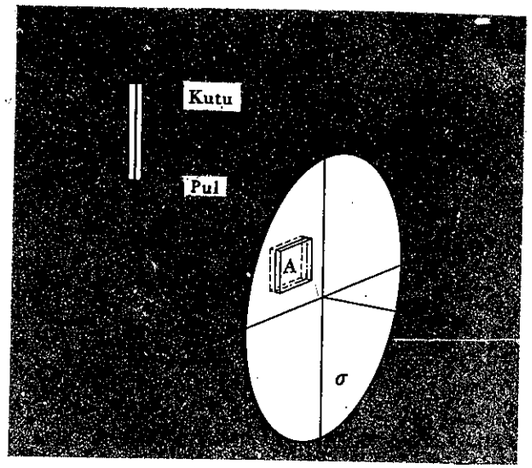
$$E_y = 2\pi\sigma\left[1 - \frac{y}{\sqrt{y^2 + a^2}}\right] \qquad (28)$$

bulunur. (Eksen üzerinde bulunan noktalar için E_y-nin doğrudan hesaplanmasının güç olmadığı açıktır). y'nin değeri artı yandan gelerek sıfıra doğru yaklaşırsa E_y, $2\pi\sigma$ 'ya yaklaşır. Pulun eksi y'ler yanında yani arka kısmında, E zıt doğrultuda yönelmiştir ve bunun y bileşeninin E_y değeri $-2\pi\sigma$'dır. Bu, Kesim 1.13'de sonsuz genişlikte ve σ yoğunluğunda bir yük katmanının uyardığı alanın aynıdır. Bunu doğal karşılamak gerekir; zira pulun merkezine yakın noktalar için dışta ve çevrede bulunan yüklerin varlığı ya da yokluğu büyük bir ayrım yaratmaz. Başka bir deyişle, çok yakından bakılan bir katman sonsuz genişlikte görünür. Gerçekten E_y yalnız merkezde değil pulun her yerinde $2\pi\sigma$ değerindedir. Bunu göstermek için Kes. 1.13'de yaptığımız gibi Gauss yasasını kullanabiliriz, ama bu kez pulun herhangi bir noktasındaki elektrik alanının, genel olarak yüzeyine dik olmayışı dolayısiyle uyanık bulunmak gerekir.

Şimdi pulun Şek. 2.10'da görüldüğü gibi ince ve yassı bir kutu içinde kalan A yüzölçümlü bir parçasını düşünelim. Bu parçanın hemen önündeki elektrik alanının y bileşenini E_{y+} ile, hemen arkasındaki y bileşenini ise E_{y-} ile gösterelim.
Bu kutudan çıkan akı,

$$\Phi = AE_{y+} - AE_{y-} + \text{(yan yüzeylerden geçen akı)} \qquad (29)$$

olur. Akı yazımında ikinci terimin eksi oluşu kutunun arka yüzeyini gösteren yöngünün eksi y ekseni doğrultusunda yönelmesindendir. Kutuyu istediğimiz kadar yassılaştırmak ile yan yüzeyden çıkan akıyı istediğimiz kadar küçültebiliriz*. Bu işlem, içerde kalan σA yükünü değiştirmez. Şimdi sınıra yaklaşırsak Gauss yasası



Şek. 2.10. Yüklü Pula Gauss yasasını uygulamak.

$$AE_{y+} - AE_{y-} = 4\pi\sigma A \qquad (30)$$

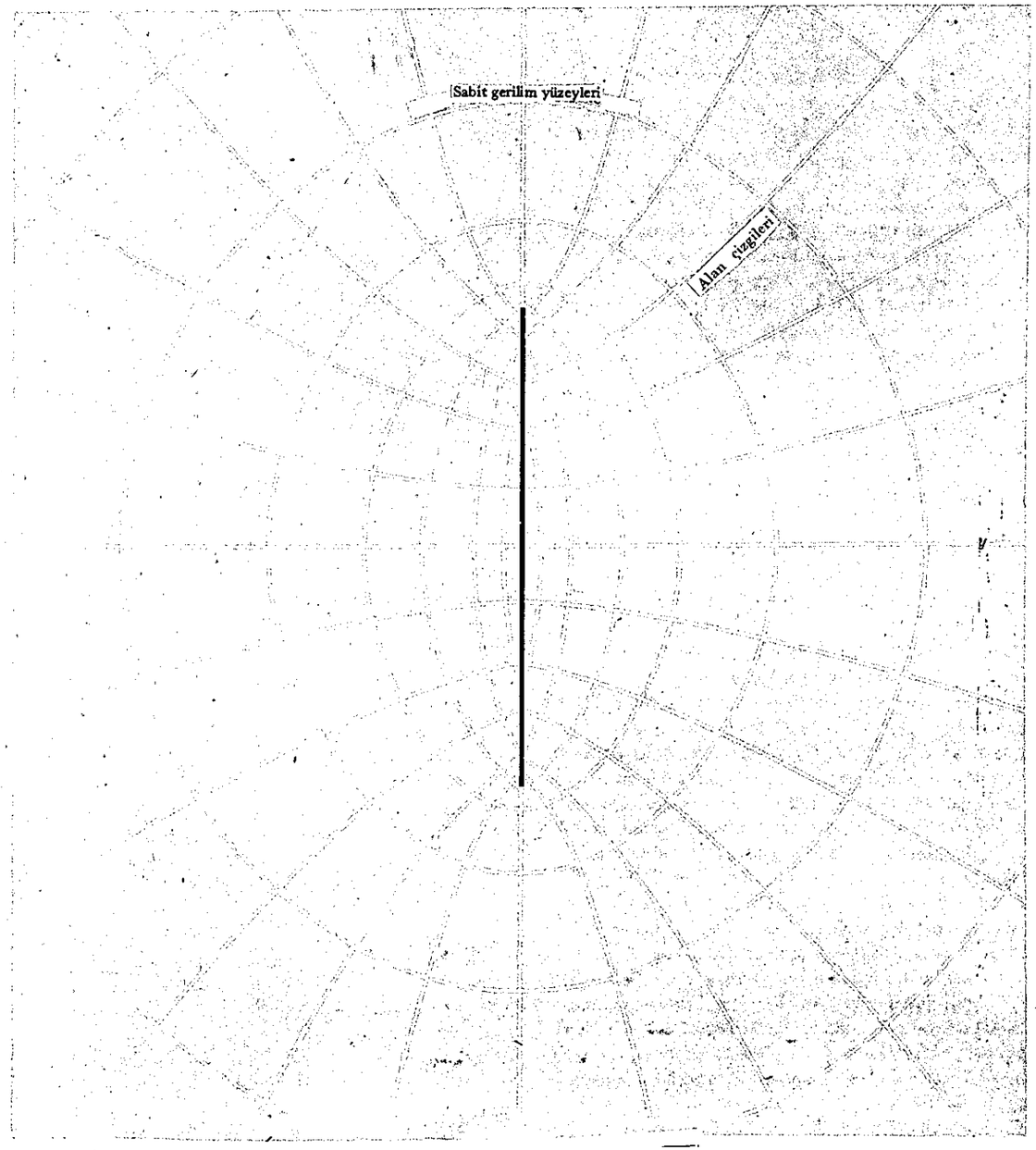
ya da

$$E_{y+} - E_{y-} = 4\pi\sigma \qquad (31)$$

verir.

*İletken yüzeylerin eşgerilim olması gerektiği Böl. 3.'de tam olarak incelenecektir.

*Işınsal elektrik alanı sonsuz olmadığı sürece bu güvenli bir deyimdir. Pul'un üzerinde hemen her yerde ışınsal alanın sonlu olduğunu, çünkü merkez ile kıyı arasında sadece sonlu bir gerilim farkı bulunduğunu biliyoruz. Aslında ışınsal alanın sonsuza doğru arttığı bir yer vardır ki o da pulun çevresidir. Gauss kutusunu bu kıyıdan nasıl olsa uzak tutacağız, zira burası E_{y+} ve σ değerleri bakımından da bir süreksizlik gösterir.



Şek. 2.11. Biteviye yüklü pulun elektrik alanı. Dolu eğriler alan çizgileridir. Noktalı eğriler ise sabit gerilim yüzeylerinin şekil düzlemi ile kesitleridir.

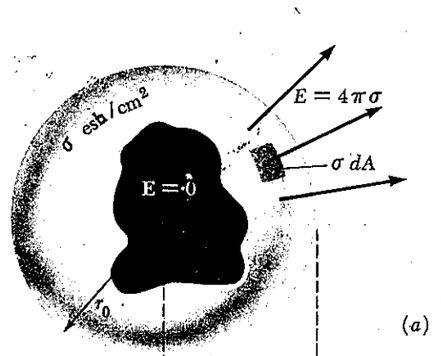
Denk. 31 ile düzgün olan ya da olmayan bir yük dağılımı için geçerli bir sonuç elde ettik. Buna göre herhangi bir yüzey yük katmanının bir yerdeki yoğunluğu σ ise o yerde E elektrik alanının yük katmanına dik bileşeninde keskin bir değişim veya süreksizlik olur. Değişimin büyüklüğü $4\pi\sigma$ 'dır. İncelediğimiz problem halinde σ pul yüzeyince sabittir. Bundan başka katmanın her iki yanındaki alanlar bakışımlı olmak zorunda olduklarından, yakında başka bir alan kaynağı bulunmadığına göre bütün pul boyunca $E_{y+} = -E_{y^-}$ 'dir. Şöyleki $E_{y+} = E_{y^-} = 2\pi\sigma$ olur.

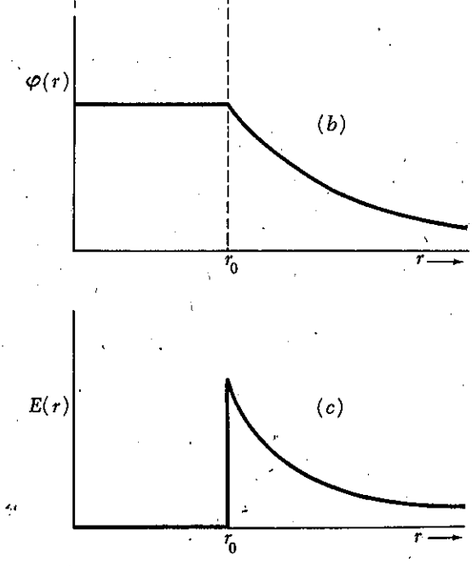
Şek. 2.11'de bu dizgenin alan çizgilerinden bazılarıyla (dolu çizgiler), sabit gerilim yüzeylerinin (yz) düzlemiyle kesitleri (noktalı çizgiler) gösterilmiştir. Eşgerilim yüzeyler pulun merkezine yakın bölgelerde mercek biçimini andırdıkları halde, a'dan büyük uzaklıklarda nokta yükün çevresindeki eşgerilim yüzeyler gibi küresel şekle yaklaşırlar.

Şekil. 2.11 alan çizgilerinin ve eşgerilim yüzeylerin genel özelliklerini göstermektedir. Herhangi bir noktadan geçen alan çizgisi ile eşgerilim yüzey diktirler; tıpkı dağlık bir arazinin haritası üzerinde düzey eğrileriyle en büyük eğim eğrilerinin birbirine dik olması gibi. Bunun böyle olması gerekir, zira herhangi bir noktada elektrik alanının eşgerilim yüzeye paralel bir bileşeni olsaydı bir sınama yükünü bu yüzey üzerinde devindirmek için iş yapmak gerekirdi.

2.7 Bir Yüzey Yüküne Etkiyen Kuvvet

Yarıçapı r_0 olan bir kürenin sabit σ yoğunluğu ile yüklenmesiyle elde olunan yalın ve bakışımlı yük dağılımından bir şey daha öğrenebiliriz (Şek. 2.12 a). Kürenin toplam Q yükü $4\pi r_0^2\sigma$'ya eşittir. Kürenin dışındaki gerilim Q/r'ye yani bütün yük merkezde toplanmış gibi bulunan gerilime, içindeki gerilim ise Q/r_0 'a eşittir. Bildiğimiz gibi sabit bir gerilimin bayırgısı sıfırdır, daha önce böyle içi boş küresel bir yük kabuğunun içindeki alanın sıfır olacağı sonucuna varmıştık. Şekil 2.12 b ve c, φ geriliminin ve E elektrik alanının büyüklüğünün r'ye bağlı olarak nasıl değiştiğini çizit olarak göstermektedir.





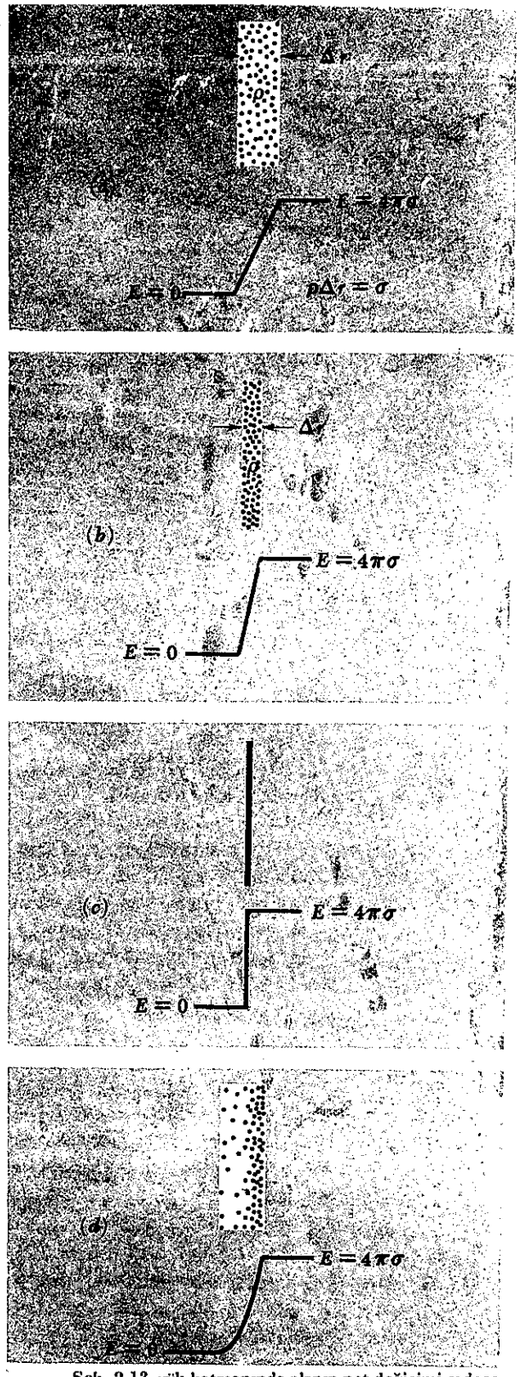
Şek. 2.12 Küresel bir yüzey yükünün elektrik gerilimi ve elektrik alanı. (a) Kürenin kesik bir parçasının görünüşü. (b) φ 'nin r fonksiyonu olarak değişimi (c) E'nin r fonksiyonu olarak değişimi.

Şimdi yüzey üzerinde $\sigma\, dA$ gibi bir yük öğesine, bütün öteki yük öğelerinin etkiledikleri itmeler yüzünden ne gibi bir kuvvet etkisi olduğunu merak edebiliriz. Kürenin hemen yüzeyi dışındaki elektrik alan şiddetinin ne olduğunu biliyoruz: $E_{\text{dış}} = Q/r_0^2 = 4\pi\sigma$ Oysa $E_{\text{iç}} = 0$dır. Yüke etkiyen kuvveti bulmak için hangi değeri kullanalım?

Doğru yanıt $\frac{1}{2}(E_{\text{dış}} + E_{\text{iç}})$'dir. Bunun doğru olduğunu görmenin bir yolu, yüzey yüklerini sıfır kalınlıkta bir katman olarak değil, küçük ama sonlu Δr kalınlığında oylumsal dağılım halinde düşünmektir; bu oylum yükü içinde ρ yük yoğunluğunun sabit ve öyle bir değerde olduğu varsayılır ki katmanın herhangi bir santimetre karesinde bulunan yük tutarı σ'ya eşit olsun. Başka bir deyişle Δr ne olursa olsun ρ'yu o değerdealıyoruzki$\rho \cdot \Delta r = \sigma$ olsun .Şimdi Gauss yasasını kullanarak kolayca tanıtlayabileceğimiz gibi bu katmanın iç yüzeyindeki alan yeğinliği sıfırdır. ve katman içinde çizgisel bir artışta dış yüzeyde $4\pi\sigma$ değerini bulur. Yüzeyin eğriliği fonksiyonun tam çizgisel oluşunu biraz zedeler; ama her zaman $\Delta r \ll r_0$ alacağımız için ele aldığımız küçük bölge içinde pratikçe düz bir yüzey karşısında bulunuyoruz demektir.) Yüklü katmanda deki ortalama alan yeğinliği ve dolayısiyle bu katman içinde kalan yük birimine etkiyen ortalama kuvvet, açıkca görülüyor ki, $\frac{1}{2}(E_{\text{iç}} + E_{\text{dış}})$'dır ve uğraştığımız özel hal için $E_{\text{iç}} = 0$olduğuna göre kuvvet $\frac{1}{2}E_{\text{dış}}$'a ya da $2\pi\sigma$'ya eşittir.

Şekil 2.13 *a-c* yüklü katmanın kalınlığını birim yüzeydeki yük tutarını sabit tutarak küçültecek olursak durumun nasıl değiştiğini gösteriyor. Bu sırada olağanüstü bir şey yoktur sadece alan değişikliği daha dar bir aralıkta olur ve oylumsal yük yoğunluğu sonsuza doğru büyür.

Katman içindeki yük yoğunluğu Şek. 2.13 d'de olduğu gibi biteviye olmasa bile katmanın bir yüzünden ötekine geçişte E'deki net değişim aynı kalır. Böyle bir katman üzerinde birim yüzeye etkiyen kuvvet yine $\frac{1}{2}(E_{\text{iç}} + E_{\text{dış}})$ defa birim yüzeydeki yük tutarı olduğu ve bunun, alan değişimi çizgisel olmadığı zaman da doğru kaldığı bir gerçektir. Problem 1.29 bu



Şek. 2.13. yük katmanında alanın net değişimi sadece yüzey birimindeki toplam yük tutarına bağlıdır.

durumun yalın bir özel halde nasıl sınanabileceği üzerin de yol göstermektedir. Genel bir sınama ile ilgilenirseniz Prob. 1.30 size gerekli hızı verecektir.

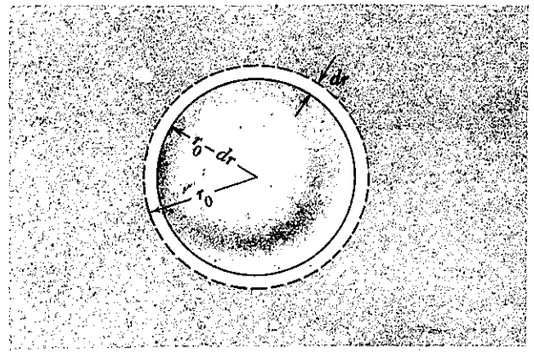
Gerçek yüzey yükleri sıfır kalınlıkta ve sonsuz yoğunlukta olmayacaktır; bu bakımdan ara şekliniz sınır halinde daha gerçekcidir. Örneğin bir metalin yüzeyinde bulunan yük birçok angströmlük bir katman halindedir. Önemli olan nokta şudur ki, yük katmanının kalınlığı dizgenin öteki boyutları yanında küçük kaldıkça biz ona, büyük ölçekteki özelliklerin hesaplanması bakımından, her yerdeki yoğunluğu yüzey birimi başına yük olarak belirlenen sıfır kalınlıkta bir katman gözü ile bakabiliriz. Bundan başka gerçek yük dağılımının derinlikçe değişimi, bir ara yüzeyden, bir maddeden ötekine elektron geçmesi gibi yüzey altı atomsal olaylarda önemli olabilir.

Demek ki dq gibi bir yüzey yükü öğesine etkiyen kuvvet $2\pi\sigma \cdot dq$'dür ve yüzölçümü dA olan bir yüzey parçası üzerindeki yük tutarı $dq = \sigma\, dA$ olduğuna göre bu yüzey parçasına etkiyen kuvvet

$$dF = 2\pi\sigma^2\, dA \tag{32}$$

olur. Buna göre yüzey birimi başına kuvet $2\pi\sigma^2$'dir. Bu, yüklerin itişmesinden ileri gelen dışa dönük bir kuvvettir. Yükler yüzeyden kurtularak uçup gidemezse, bu kuvvet, denklemimizde bulunmayan atomsal yada molekülsel başka kuvvetlerce dengelenerek ,yük taşıyıcılarının kürenin yüzeyinde kalmasını sağlamak gerekir.

Lastikten bir balonu yükleyince hesapladığımız yüzey birimi başına $2\pi\sigma^2$ elektriksel itme kuvveti balonu şişirmeğe çalışır. Bunun tersine böyle bir yük dağılımının üzerindeki yükü sabit tutarak yarıçapını küçültmek istersek dizgeye karşı iş görmek gerekir. Böyle bir balonun Şek. 2.14'de görüldüğü gibi yarıçapını r_0'dan $r_0 - dr$'ye düşürmek isteyelim. *Bütün öteki kuvvetleri unutarak yapacağımız işin sadece elektrik kuvvetlerine* karşı görüleceğini düşünürsek, yüzeyin her santimetre karesine içeri yönelmiş $2\pi\sigma^2$'lık bir kuvvet uygulamak gerekecektir. Bu kuvvet bir dr uzaklığı boyunca etki gösterir ve böylece bu dış kuvvetlerin dizge üzerinde gördüğü iş



Şek. 2.14.Küresel bir yük kabuğunun ya da yüklü bir balonun büzülmesi.

$$dW = (4\pi r_0^2)(2\pi\sigma^2)\, dr = 8\pi^2\sigma^2 r_0^2\, dr \tag{33}$$

olur.Buişi $Q = 4\pi r_0^2\sigma$ olduğuna göre Q toplam yük cinsinden yazabiliriz:

$$dW = \frac{Q^2\, dr}{2r_0^2} \tag{34}$$

2.8 Bir Elektrik Alanına Bağlı Enerji

Dikkat ederseniz kurenin yüzeyinin büzülmesinin elektrik alanı bakımından bir sonucu, $r_0 - dr$ ve r_0 yarıçaplı küreler arasındaki katmanda $4\pi\sigma$ yeğinlikli bir elektrik alanı oluşturmaktır. Daha önce bu bölgede alan yeğinliği sıfır idi, uzayın bütün öteki bölgelerinde elektrik alanı hiç değişmemiş, eskisi gibi kalmıştır. Denilebilir ki, bu bölgede uyarılan alan dW işi pahasına oluşmuştur. Sayıları karşılaştırmakla, dW işini alanın kapladığı yeni dv oylumu cinsinden verebiliriz:

$$dW = \frac{E^2}{8\pi}\, dv \tag{35}$$

Bu şimdi tanıtlamağa çalışmayacağımız genel bir teoremin deyimidir: *Bir yük dizgesinin U gizilgüç enerjisi, yani, bu dizgeyi bir yere getirmek için harcanan iş, elektrik alanı yardımı ile kolayca hesaplanabilir. Bunun için, her oylum ögesine* $(E^2/8\pi)\, dv$ *kadar enerji tanımak, ve bunu alanın bulunduğu bütün uzay boyunca tümlemek yetişir:*

$$\boxed{U = \frac{1}{8\pi}\int_{\substack{\text{Tüm}\\ \text{alan}}} E^2\, dv} \qquad (36)$$

Kuşkusuz burada E^2 bir sayıl niceliktir: $E^2 \equiv \mathbf{E}\cdot\mathbf{E}$. Şekil 2.14'deki küresel yük kabarcığını oluşturmak için harcamamız gereken işi şöyle hesaplayabilirdik: $r > r_0$ için $E = Q/r^2$, $r < r_0$ için $E = 0$, olduğuna göre

$$U = \frac{1}{8\pi}\int E^2\, dv = \frac{1}{8\pi}\int_{r_0}^{\infty}\frac{Q^2}{r^4}\cdot 4\pi r^2\, dr = \frac{Q^2}{2r_0} \qquad (37)$$

aynı sonucu Denk. 34'ü kullanarak kabarcığın sonsuz yarıçaptan r_0 yarıçapına kadar büzülmesini sağlamak için harcanan işi hesaplamak ile de bulabilirdik:

$$U = \int_{\infty}^{r_0} -\frac{Q^2\, dr}{2r^2} = \int_{r_0}^{\infty}\frac{Q^2\, dr}{2r^2} = \frac{Q^2}{2r_0} \qquad (38)$$

Kimileri bu enerjinin alan içinde "depolanmış" olduğunu düşünmeyi severler. Dizge korunumlu olduğuna göre toplam enerji yüklerin birbirinden ayrılıp uzaklaşmasını sağlamakla geriye alınabilir, bunun için enerjinin bu arada "bir yerde" bulunduğunu düşünmek rahattır. Enerjinin uzay içinde $E^2/8\pi$ erg/cm^3 yoğunluğu ile depolanmış olduğunu düşünmek hesap dengelemine uygun gelir. Böyle düşünmekte bir zarar da yoktur; ama uzayın belirli bir cm^3 'ünde birikmiş enerjiyi başka şeylerden tümcek bağımsız olarak tanımak olanağı yok. Fiziksel olarak ancak toplam enerji ölçülebilir, yani, yüklerin bir ilk düzenlenişten başka bir son düzenlenişe geçerken ortaya konan tüm iş ölçülebilir. Nasıl ki, elektrik alanı kavramı, yüklerin davranışını anlatabilmek için Coulomb yasası yerine kullanılıyorsa, bir durgun yük dizgesinin toplam gizilgüç enerjisini deyimlemek için Denk. 1.9 yerine Denk. 36'yı kullanmakla farklı bir defter tutma şekline gidiyoruz demektir. Ama bir görüşün değişmesi, bu bir defter tutma şeklinin değişmesi halinde bile olsa, yeni düşünceler doğmasına ve daha derin bir anlayış edinilmesine yardım eder.

Bağımsız bir varlık olarak elektrik alanı kavramı, yüklü madde parçacıklarının devinik özelliklerini ve elektromıknatısal ışınımları incelediğimiz zaman kendini daha belli biçimde ortaya koyacaktır.

Buraya kadar elektriksel gizilgüç enerjiden ve elektriksel gerilimden söz etmekte idik. Bunların farklı şeyler olduğunu hiç unutmayın. Durgun bir yük dizgesinin U gizilgüç enerjisi, o dizgenin parçalarından yola çıkarak bir yere getirmek için harcanan iştir, ve toplanan bu dizge içine depolanmış bir enerji gibi düşünülebilir. Bu bir tek sayıl niceliktir ve *bütün halinde* ki dizgenin bir özelliğidir. Dizgenin φ elektrik gerilimi ise, verilen bir yük dağılımı için uzaydaki konumun bir fonksiyonudur. Bu nicelik erg/esb ya da statvolt birimleri ile ölçülür. Uzayın iki noktasındaki φ değerleri arasındaki fark, yüklü bir taneyi bir noktadan ötekine götürmek için, yük birimi başına görülen işe eşittir.

Bu iki φ ve U nicelikleri arasındaki ayrımı belirtmek için Denk. 36'yı $\mathbf{E}$ cinsinden olacak yerde φ cinsinden yazalım.
$\mathbf{E} = -\nabla\varphi$ olduğuna göre,

$$U = \frac{1}{8\pi}\int_{\substack{\text{Tüm}\\ \text{uzay}}} |\nabla\varphi|^2\, dv \qquad (39)$$

bulunur.

Depolanmış enerjiyi hesaplamak için bir yol daha vardır. Daha önce Böl. 1'de q_1 ,.....,q_j ...gibi bir takım yükleri bir yere getirmek için gerekli enerji tutarının,

$$U = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N}\sum_{k\neq j}\frac{q_j q_k}{r_{jk}} \qquad (40)$$

olduğunu görmüştük (Denk. 19). Bu eşitliği

$$U = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N} q_j\left[\sum_{k\neq j}\frac{q_k}{r_{jk}}\right] \qquad (41)$$

şeklinde yazalım; köşeli ayraç içindeki toplam terimlerinin her biri, yüklerden birinin q_j 'nin bulunduğu yerdeki φ elektrik gerilimine katkısıdır; böylece φ_j ile gösterebileceğimiz toplam, *bütün öteki yüklerin* q_j 'de oluşturduğu gerilimi verir. Bu yoldan U enerjisini,

$$U = \frac{1}{2}\sum_j q_j\varphi_j \qquad (42)$$

biçiminde deyimleyebiliriz. Nokta yükler yerine, $\rho(x,y,z)$ gibi sürekli bir yük dağılımı ile uğraşıyorsak, Denk. 42'deki toplam yerine bir tümlev alabiliriz:

$$\boxed{U = \frac{1}{2}\int \rho\varphi\, dv} \qquad (43)$$

Burada artık φ 'nin *bütün öteki* yüklerden ileri geldiğini düşünme gereği yoktur; zira q_j gibi bir yük öğesinin yerini artık $\rho\, dv$ gibi sonsuz küçük bir yük tutarı almıştır. O halde Denk. 43'deki φ bütün dizgenin elektrik gerilimidir ve $\varphi(x,y,z)$, olarak uzay konumluklarının fonksiyonudur. Denklem 43'ün Denk. 39 ve Denk. 36'ya eşdeğer olduğu açıktır.

2.9 Bir Yöngü Fonksiyonunun Iraksaması*

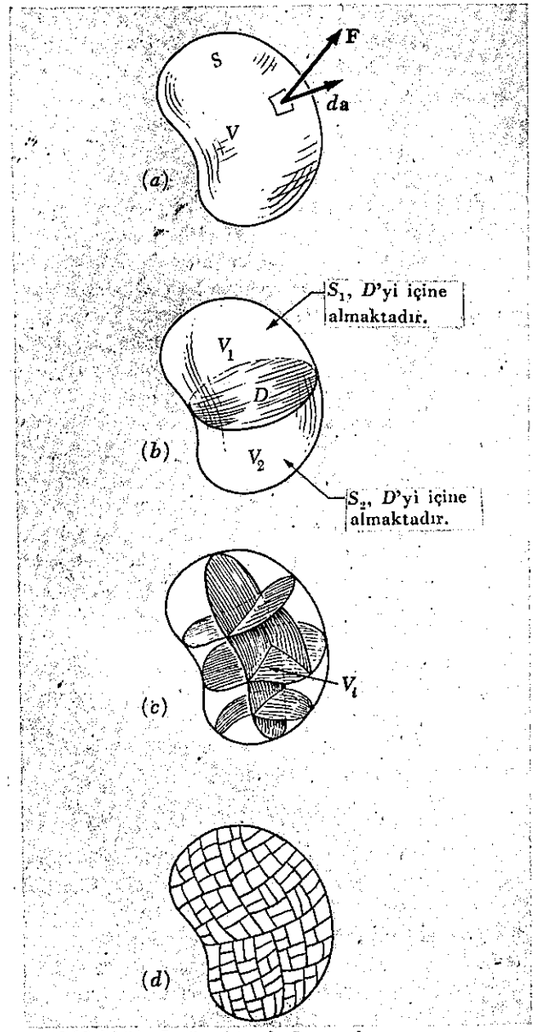
Elektrik alanının her noktada belirli bir değeri ve belirli bir doğrultusu vardır. Bu, konumluklarının bir yöngü fonksiyonudur ki, bu özelliğini çoğu kez $\mathbf{E}(x,y,z)$ yazarak deyimledik. Şimdi söyleyeceklerimiz yalnızca elektrik alanı için değil herhangi bir yöngü fonksiyonu haline uygulanabilir. Bu durumu anımsatmak için bu kez $\mathbf{F}(x,y,z)$ simgesini kullanacağız. Başka bir deyişle, bir ara fizikle değil matematikle uğraşacağız ve $\mathbf{F}$'ye genel bir yöngü fonksiyonu diyeceğiz. Bununla birlikte yine üç boyutlu uzaya bağlı kalmaktayız.

Yüzeyini S ile gösterdiğimiz, herhangi biçimde, sonlu bir V oylumu ele alalım. Bu S yüzeyinden geçen toplam Φ akısı kavramı ile alışık durumdayız. Bu $\mathbf{F}$ yöngünün bütün S yüzeyi üzerinde alınan yüzey tümlevinin değeridir:

$$\Phi = \int_S \mathbf{F}\cdot da \qquad (44)$$

Tümlev simgesi altındaki da büyüklüğü, S'nin küçük bir öğesinin yüzölçümüne eşit olan ve Şek. 2.15 a'da görüldüğü gibi bu küçük parçanın normali boyunca dışa doğru yönelmiş sonsuz küçük bir yöngüdür.

Şimdi Şek. 2.15 b'de görüldüğü gibi S balonunu ortadan ikiye bölen bir D yüzeyi ile V oylumunu iki bölgeye ayıralım. V'nin bu iki parçasını V_1



Şek. 2.15.(a) Bir S yüzeyi tarafından sınırlanmış bir oylum küçük parçalara ayrılmıştır. (b) S_1 ve S_2 nin sardığı iki parçaya ayrılma. Bu parçalanma (c) ve (d)'de olduğu gibi ne kadar ileri giderse gitsin, bir $\mathbf{F}$ yöngü fonksiyonunun ayrı ayrı parçaların yüzeyleri üzerinde alınan yüzey tümlevleri toplamı, ilk S yüzey üzerinde alınan yüzey tümlevine eşittir.

* Iraksama: Diverjans, Kısaltılmışı: Irak.

ve V_2 ile gösterelim ve bunları farklı hacımlar gibi görerek herbirinin yüzey tümlevini ayrı ayrı hesaplayalım. V_1 hacmının S_1 sınırı D yüzeyini içine alır, aynı şey S_2 için de doğrudur. Bu iki yüzey tümlevinin toplamı, açıkça

$$\int_{S_1} \mathbf{F} \cdot da_1 + \int_{S_2} \mathbf{F} \cdot da_2 \tag{45}$$

olur, ve bu, Denk. 44'de verilen ve bütün yüzey üzerindeki tümleve eşittir. Bunun nedeni D üzerindeki bir yüzey parçasının ilk tümlevde bir imle, ötekinde ise aynı değerde ve zıt imle katkıda bulunmasıdır; zira bir haldeki dış doğrultu öteki için iç doğrultudur. Başka bir deyimle V_1 'den D yolu ile çıkan akı V_2 'ye aynı yoldan giren akıdır. Yüzeyin geriye kalanı ilk tüm oylumunun ki ile aynıdır.

Dikkate aldığımız oylumu $V_1, \ldots V_i, \ldots V_N$ gibi büyük sayıda küçük parçalara ayırmayı sürdürelim ve bu parçaların yüzeyleri S_1 ,....S_i ....S_N olsun. Bu parçalamada nereye kadar gidersek gidelim biliyoruz ki,

$$\sum_{i=1}^{N} \int_{S_i} \mathbf{F} \cdot da_i = \int_S \mathbf{F} \cdot da = \Phi \tag{46}$$

dır. Bütün bu işlem sırasında izlediğimiz soru şudur: oylumu ayırdığımız parçaların N sayısı çok büyük bir değer alırsa, özel bir küçük bölgenin veya daha ileri gidince bir nokta yöresinin belirtkin bir özelliğini tanımak olasımıdır? Şimdi

$$\int_{S_i} \mathbf{F} \cdot da_i \tag{47}$$

yüzey tümlevi böyle küçük bir bölgede bize aradığımız bir nicelik veremez; zira, bunu yeniden ikiye böler ve N sayısını $2N$'ye çıkarırsak tümlev de iki terime bölünür ve bunların toplamı sabit kaldığına göre bu terimlerden herbirisi bir öncekininkinden daha küçük olur. Başka bir deyişle, aynı bölgede gittikçe daha küçük oylumlar ele alacak olursak, böyle bir küçük oylumu üzerinde alınan yüzey tümlevi de daha küçülecektir. Ama unutmayalım ki, bölgeyi küçük parçalara ayırdıkça oylum da küçük parçalara ayrılır ama bu oylumların toplamı başlangıçtaki oylumu verir. Bu durum bize, parçaladığımız uzay içinde bir yüzey tümlevinin değerinin o parçanın oylumuna

$$\frac{\int_{S_i} \mathbf{F} \cdot da_i}{V_i} \tag{48}$$

oranını alırsak belirli bir nicelik elde edebileceğimiz umudunu verir.

Gerçekten N sayısı yeterince büyütülürse, yani yeterince ufalmış bir parçalanmaya gittiğimizi düşünürsek, oylumu her kez yarıladığımız da yüzey tümlevi de yarılanacak ve bu oranın bir ereye doğru yaklaşmasını beklemek akla yakın olacaktır. Eğer bu doğru ise elde ettiğimiz erey değer $\mathbf{F}$ yöngü fonksiyonunun bu bölgedeki belirtkin bir özelliği olacaktır. Buna $\mathbf{F}$'nin ıraksaması (diverjansı) diyeceğiz ve ırak $\mathbf{F}$ şeklinde yazacağız. O halde ırak $\mathbf{F}$'nin herhangi bir noktadaki değeri:

$$\text{ırak}\,\mathbf{F} \equiv \underset{V_i \to 0}{\text{erey}} \frac{1}{V_i} \int_{S_i} \mathbf{F} \cdot da_i \tag{49}$$

şeklinde tanımlanabilir; burada V_i gözönüne alınan noktayı içeren bir hacım, S_i ise V_i oylumunu sınırlayan ve üzerinde yüzey tümlevi hesaplanan yüzeydir. Burada böyle bir sınırın var olduğunu ve bizim uzayı bölme yöntemimizden bağımsız olduğunu varsayıyoruz. Bunun matematikte tanıtlanmış olduğunu düşünerek geçeceğiz.

Irak $\mathbf{F}$'nin anlamı şu şekilde deyimlenebilir. Irak $\mathbf{F}$ sonsuz küçük V_i oylumundan çıkan akının oylum birimi başına düşen tutarıdır. Açıkca görüldüğü gibi bu bir sayıl niceliktir. Bunun değeri yerden yere değişebilir, (x,y,z) gibi herhangi özel bir yerdeki değeri, bu noktayı saran bir V_i oylumu, noktanın çevresinde gittikçe küçülen değerler alacak şekilde parçalanacak olursa, Denk. 49'un aldığı erey değerdir. O halde ırak $\mathbf{F}$ yalnızca konumluklarının bir sayıl fonksiyonudur.

2.10 Gauss Teoremi ve Bunun Diferansiyel Yazılışı

Konumlukların sayıl bir fonksiyonu olan bu ırak $\mathbf{F}$ fonksiyonunu biliyorsak geriye bir işlemle geniş bir oylum üzerinde alınan yüzey tümlevine dönebiliriz: bunun için önce Denk. 46'yı şöyle yazalım:

$$\int_S \mathbf{F} \cdot da = \sum_{i=1}^{N} \int_{S_i} \mathbf{F} \cdot da_i = \sum_{i=1}^{N} V_i \left[\frac{\int_{S_i} \mathbf{F} \cdot da_i}{V_i} \right] \tag{50}$$

$N \to \infty, V_i \to 0$ ereyine doğru gidildiği zaman köşeli ayraç içindeki terim $\mathbf{F}$'nin ıraksaması haline gelir ve toplam oylum tümlevine gider:

$$\boxed{\int_S \mathbf{F} \cdot da = \int_V \text{ırak}\,\mathbf{F}\, dv} \tag{51}$$

Denklem 51'e Gauss Teoremi veya Iraksama Teoremi denir. Denk. 49'un bir ereyi var olduğu sürece bu teorem herhangi bir yöngü alanı için doğrudur.

Şimdi teoremin $\mathbf{E}$ elektrik alanı için ne anlattığını görelim.
Önce Gauss yasası geçerliktedir ve bize

$$\int_S \mathbf{E} \cdot da = 4\pi \int_V \rho\, dv \tag{52}$$

bağıntısını verir. Iraksama teoremi herhangi bir yöngü alanı için doğruysa herhalde $\mathbf{E}$ alanı için de doğrudur:

$$\int_S \mathbf{E} \cdot da = \int_V \text{ırak}\,\mathbf{E}\, dv \tag{53}$$

Denk. 52 ve Denk. 53 istenilen şekil veya istediğimiz yerde bulunan seçebileceğimiz herhangi bir oylum için doğrudur. Bu eşitlikleri karşılaştırarak bunun, her noktada,

$$\boxed{\text{ırak}\,\mathbf{E} = 4\pi\rho} \tag{54}$$

koşulunu yerine getirmekle olabileceği görülür. Bundan böyle ıraksama teoremini matematik araçlarımızdan sayacağız Denk. 54'e Gauss yasasının ayrı bir yazımı gibi bakabiliriz. Bu Gauss yasasının diferansiyel şeklidir ve yük yoğunluğu ile elektrik alanı arasında bölgesel bir bağıntı halinde deyimlenmiştir.

2.11 Dik Konumluklarda Iraksamanın Hesabı

Denk. 49 ıraksamanın hiç bir konumluk dizgesine bağlı olmayan temel tanımını vermekte ise de, bir yöngü fonksiyonu, verildiği zaman onun ıraksamasını hesaplayabilmek gerekebilir. Bir $\mathbf{F}$ yöngü fonksiyonu x, y ve z dik gözlem çatkısında yazılmış olsun. Böylece $F_x(x,y,z)$, $F_y(x,y,z)$, ve $F_z(x,y,z)$ gibi üç sayıl fonksiyonumuz var demektir. Uzayda diktörtgen yüzlü kutu şeklinde bir V_i bölgesi ele alalım ve bunun köşelerinden biri Şek. 2.16 a'da görüldüğü gibi (x,y,z) noktasında bulunsun ve kenarları Δx, Δy ve Δz olsun. Başka biçimde bir oylum alındığı zaman aynı erey değerin elde edilip edilemeyeceği sorusu ile daha sonra karşılaşacağız.

Kutunun karşılıklı iki yüzeyini, örneğin, $\hat{\mathbf{z}}\,\Delta x\,\Delta y$ ve $-\hat{\mathbf{z}}\,\Delta x\,\Delta y$ yöngüsü ile gösterebileceğimiz alt ve üst yüzeylerini ele alalım. Bu yüzeylerden geçen akı $\mathbf{F}$'nin yalnız z bileşenini işe karıştırır ve akı üzerine net katkı üst yüzdeki F_z ile alt yüzdeki F_z arasındaki farka, daha kesin söylersek F_z'nin kutunun üst yüzeyi üzerindeki ortalaması ile alt yüzey üzerindeki ortalaması farkına bağlıdır. Küçük niceliklerde ilk basamakla yetinirsek bu fark $(\partial F_z/\partial z)\,\Delta z$ dir. Şek. 2.16 b bu bağıntıyı açıklamaktadır. F 'nin kutunun alt yüzeyindeki ortalama değeri, bu küçük dörtgen içinde F_z 'nin yalnız birinci basamaktaki değişikliklerini dikkate alırsak dörtgenin merkezindeki değeridir. Bu değer ilk basamak hatası ile Δx ve Δy cinsinden*

$$F_z(x,y,z) + \frac{\Delta x}{2}\frac{\partial F_z}{\partial x} + \frac{\Delta y}{2}\frac{\partial F_z}{\partial y} \quad \text{olur.} \tag{55}$$

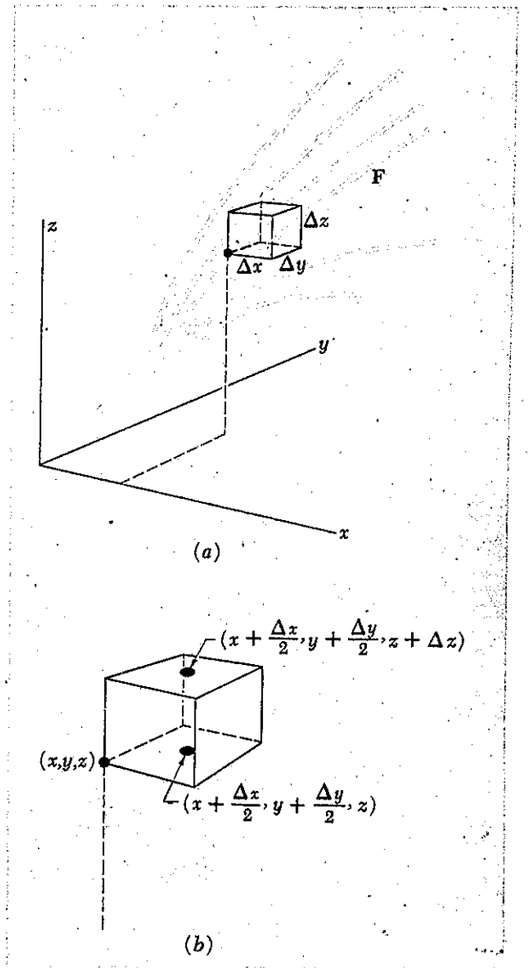
F_z 'nin üst yüzey üzerindeki ortalama değer için bunun üst yüzeyin merkezindeki değerini alırız; bu da yine ilk basamakla yetinmek üzere

$$F_z(x,y,z) + \frac{\Delta x}{2}\frac{\partial F_z}{\partial x} + \frac{\Delta y}{2}\frac{\partial F_z}{\partial y} + \Delta z \frac{\partial F_z}{\partial z} \tag{56}$$

olur. Her birinin yüzölçümü $\Delta x, \Delta y$ olan bu iki yüzeyden çıkan net akı

$$\underbrace{\Delta x\,\Delta y \left[F_z(x,y,z) + \frac{\Delta x}{2}\frac{\partial F_z}{\partial x} + \frac{\Delta y}{2}\frac{\partial F_z}{\partial y} + \Delta z \frac{\partial F_z}{\partial z} \right]}_{\text{(kutunun üst yüzeyinden giren akı)}}$$
$$- \underbrace{\Delta x\,\Delta y \left[F_z(x,y,z) + \frac{\Delta x}{2}\frac{\partial F_z}{\partial x} + \frac{\Delta y}{2}\frac{\partial F_z}{\partial y} \right]}_{\text{(kutuya alt yüzeyden giren akı)}} \tag{57}$$

*Bu F_z sayıl fonksiyonun (x,y,z) yakınlarında bir Taylor açınımının başlangıcından başka bir şey değildir, yani: $F_z(x+a,\ y+b,\ z+c) = F_z(x,y,z) +$
$\left(a\frac{\partial}{\partial x} + b\frac{\partial}{\partial y} + c\frac{\partial}{\partial z}\right)F_z + \cdots + \left(\frac{1}{n!}\right)\left(a\frac{\partial}{\partial x} + b\frac{\partial}{\partial y} + c\frac{\partial}{\partial z}\right)^n$
F_z +...türevlerinin hepsinin (x,y,z) noktasında hesaplanması gerekir. Bizim halimizde $a = \Delta x/2$, $b = \Delta y/2$, $c = 0$ 'dır ve açınımda daha yukarı basamaktaki terimleri savsıyoruz.



Şek. 2.16. $\Delta x \Delta y \Delta z$ oylumlu bir kutunun akısını hesaplamak.

olur, ve toplam akı $\Delta x\, \Delta y\, \Delta z\, (\partial F_z/\partial z)$ değerini alır. Açıkca görülüyor ki öteki yüzey çiftleri için de benzer yazımlar bulmamız gerekir. Yani kutunun yz düzlemine paralel yüzeylerinden çıkan net akı $\Delta y\, \Delta z\, \Delta x\, (\partial F_x/\partial x)$ olacaktır. Burada da $\Delta x\, \Delta y\, \Delta z$ çarpımının işe karıştığına dikkati çekelim. Böylece küçük kutudan çıkan toplam akı:

$$\Phi = \Delta x\, \Delta y\, \Delta z \left(\frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}\right) \tag{58}$$

olur. Kutunun hacmı $\Delta x\, \Delta y\, \Delta z$ olduğundan akının oylu-

ma oranı $\dfrac{\partial F_x}{\partial x} + \dfrac{\partial F_y}{\partial y} + \dfrac{\partial F_z}{\partial z}$ 'dır ve bu yazım için-

de kutunun hiç bir boyutu bulunmadığına göre kutunun oylumunu küçülterek ereye doğru gittiğimiz zaman elde ettiğimiz erey değer olacaktır. Akının hesabında $(\Delta x)^2$, $(\Delta x\, \Delta y)$ v.b. ile oranlı terimleri alakoymuş olsaydık bunlar ereye doğru giderken kaybolacaklardı.

Şimdi bu ereyin kutunun biçimine niçin bağlı olmadığını araştırabiliriz. Açıkca görüldüğü gibi bu erey dörtgen yüzlü kutunun ölçülerine bağlı değildir, ama bu bize fazla bir şey söylemiyor. Gerçekten herhangi bir oylum çin bu ereyin aynı olacağını

görmek için herhangi büyüklükte ve biçimde dörtgen yüzlü kutuları birbirine yapıştırdığımızı düşünebiliriz. Şek. 2.17a'daki iki kutuyu ele alalım. Kutu 1'den çıkan Φ_1 akısı ile Kutu 2'den çıkan Φ_2 akısı toplamı, bu iki kutunun ara çeperini kaldırarak bir tek kutu haline getirmekle hiç bir değşikliğe uğramaz; zira bu çeperden geçen akı ne olursa olsun, kutulardan biri için eksi ise öteki için artıdır. Böylece sonucu değiştirmeksizin Şek. 2.17c'de görülen garip şekle kadar gidebiliriz. Bu genelleştirmeyi daha öteye götürmeyi okuyucuya bırakıyoruz. Şek. 2.18'deki gibi bir üçgen pramidin dört yüzeyinin yüzey yöngüleri toplamının sıfır olduğunu tanıtlarsanız yukarki genellemeyi yapmak için eğik yüzeyler de işlenmiş olur.

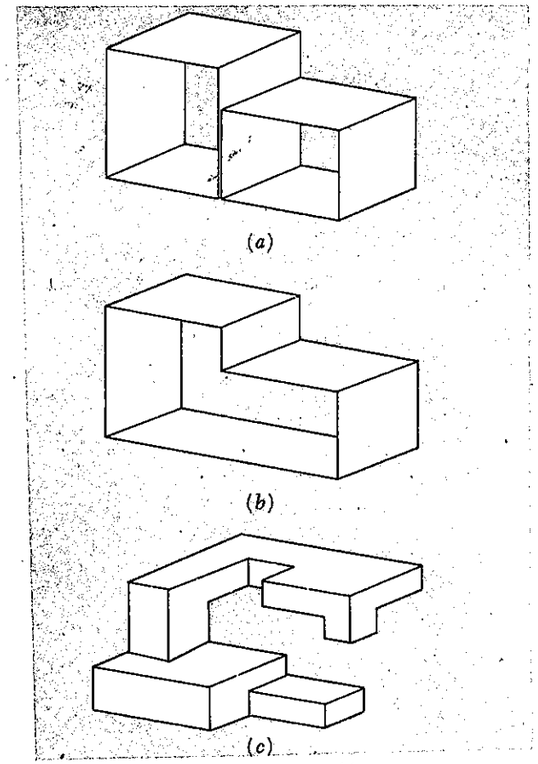
O halde F_x, F_y, F_z fonksiyonlarının diteransiyellerinin alınabileceğini düşünerek bir erevin var olduğunu ve

$$\text{ırak } \mathbf{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \tag{59}$$

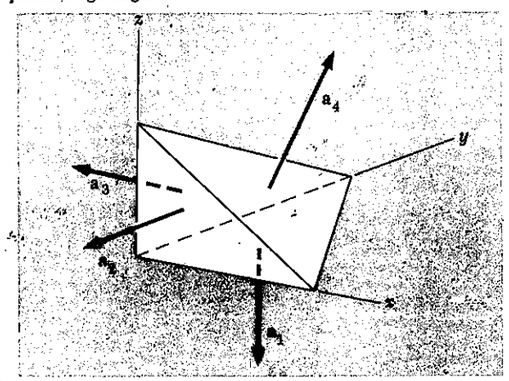
ile verildiği sonucuna varırız.

Herhangi bir noktada ırak $\mathbf{F}$ artı ise ve $\mathbf{F}$ bir hız alanı ise bu bölgede dışa bir net akış buluruz. Örneğin bir P noktası için Denk. 59'daki üç tikel türev artı ise Şek. 2.19'un belirttiğine benzer bir yöngü alanı var demektir. Ama alan oldukça değişik görünümde, ve yine de ıraksaması artı olabilir; çünkü, ırak $\mathbf{G} = 0$ koşulunu yerine getiren herhangi bir yöngü fonksiyonu, asıl yöngü alana katılabilir. Böylece üç tikel türevden biri ya da ikisi eksi olabildiği halde ırak $\mathbf{F} > 0$ kalabilir. Iraksama yöngü alanın uzay içindeki değişiminin yalnız bir yüzünü anlatan bir niceliktir.

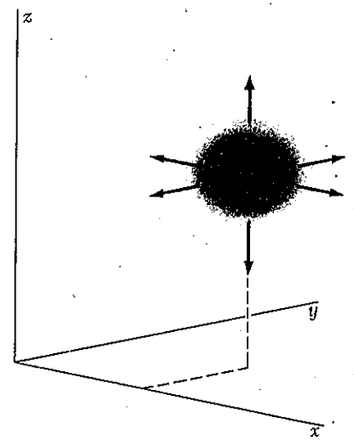
Dediklerimizi gözümüzde canlandırılması kolay bir elektrik alanına uygulayalım. Sonsuz uzunlukta a yarıçaplı dairesel kesitli bir silindirin ρ yoğunluklu bir artı yük dağılımı ile doldurulmuş olduğunu düşünelim. Silindirin dışında elektrik alanı eksen boyunca yerleşmiş bir yük çizgisininki ile aynıdır. Bu, büyüklüğü $1/r$ ile oranlı bir ışınsal alandır. İçerideki alan $r < a$ yarıçaplı bir silindire Gauss yasası uygulanarak bulunur. Bunu kolay bir problem olarak çözebilirsiniz. İçerdeki alanın r ile doğru oranlı ve de



Şek. 2.17. Akının hacma oranının ereyi kutunun şekline bağlı değildir.



Şek. 2.18. $\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3 + \mathbf{a}_4 = 0$ olduğunu tanıtlayabilirsiniz.



Şek. 2.19. P noktası yakınlarında ırakşaması sıfır olmayan bir alanı göstermek.

ışınsal olduğunu göreceksiniz. Bu alanların tam değerleri

$$\begin{aligned} E &= \frac{2\pi\rho a^2}{r} && r > a \quad \text{için} \\ E &= 2\pi\rho r && r < a \quad \text{için} \end{aligned} \tag{60}$$

olur. Şekil 2.20 silindirin eksenine dik bir kesittir. Dik Gözlem eksenleri burada en uygun seçim olmasa da Denk. 59 ile biraz alışkanlık edinmek için bunları kullanmakta devam edeceğiz. Buna göre $r=\sqrt{x^2+y^2}$ olduğunu gözönünde tutarak alan bileşenleri aşağıki biçiminde deyimlenir:

$$\begin{aligned} E_x = \left(\frac{x}{r}\right)E = \frac{2\pi\rho a^2 x}{x^2+y^2} && r > a \quad \text{için} \\ = 2\pi\rho x && r < a \quad \text{için} \\ E_y = \left(\frac{y}{r}\right)E = \frac{2\pi\rho a^2 y}{x^2+y^2} && r > a \quad \text{için} \\ = 2\pi\rho y && r < a \quad \text{için} \end{aligned} \tag{61}$$

kuşkusuz E_z sıfırdır.

Yüklü silindirin dışında ırak $\mathbf{E}$

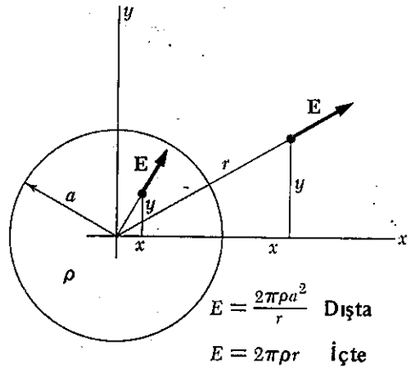
$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} = 2\pi\rho a^2\left[\frac{1}{x^2+y^2} - \frac{2x^2}{(x^2+y^2)^2}\right.$$

$$\left. + \frac{1}{x^2+y^2} - \frac{2y^2}{(x^2+y^2)^2}\right] = 0 \tag{62}$$

olarak sıfır değerdedir. Silindirin içinde ise ırak $\mathbf{E}$

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} = 2\pi\rho(1+1) = 4\pi\rho \tag{63}$$

olur. Bu sonuçların ikisini de beklemekteydik. Hiç bir yük bulunmayan silindirin dışındaki bölgede büyük ya da küçük herhangi bir hacımdan çıkan akı sıfırdır ve akı/boylum oranı kesin olarak sıfırdır. Silindirin içinde ise temel bir bağıntı deyimleyen Denk. 54'ün



$E = \frac{2\pi\rho a^2}{r}$ Dışta

$E = 2\pi\rho r$ İçte

Şek. 2.20. Silindir biçimli düzgün bir yük dağılımının içindeki ve dışındaki alan.

2.12 Laplace İşlemi

Buraya dek elektrik alanına bağladığımız gerilim fonksiyonu ve ırak $\mathbf{E}$ gibi iki sayıl fonksiyon tanıdık. Dik konumluklarda bunlar arasındaki bağıntılar

$$\mathbf{E} = -\text{bayır}\,\varphi = -\left(\hat{\mathbf{x}}\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \hat{\mathbf{y}}\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \hat{\mathbf{z}}\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right) \tag{64}$$

$$\text{ırak}\mathbf{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \tag{65}$$

şeklinde ifade edilir. Denklem 64 $\mathbf{E}$'nin x bileşeninin $E_x = -\partial\varphi/\partial x$ olduğunu gösterir. Bunu E_y ve E_z 'nin benzer yazımlarını Denk. 65 içine taşıyacak olursak ırak $\mathbf{E}$ ile φ arasında bir bağıntı elde ederiz:

$$\text{ırak}\,\mathbf{E} = -\text{Irak-bayır}\,\varphi = -\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}\right) \tag{66}$$

Denk. 66 eksi imi farkı ile, φ üzerinde bir işlem yapıldığını anlatır ki biz bunun adına "ırak bayır" ya da "falan fonksiyonun bayırgısının ıraksamasını almak" deriz. Bu işlemi anlatan simge ∇^2 şeklindedir ve adına *Laplace* işlemi veya yalnız *laplasiyen*† denir. Burada görülen

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

yazımı dik konumluklarda Laplace işleminin reçetesidir.

Burada kullanılacak yeni ∇^2 simgesi şöyle açıklanır. Bayırgı işlemi çoğu zaman ∇ ile gösterilir ve adına "del" denir. Bunu dik konumluklarda

$$\nabla = \hat{\mathbf{x}}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{\mathbf{y}}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{\mathbf{z}}\frac{\partial}{\partial z} \tag{67}$$

biçiminde yazabiliriz. Bu yazım bir yöngü gibi işlem görürse bunun karesi

$$\nabla\cdot\nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \tag{68}$$

olur. Bu ise dik konumluklarda Laplace işlemi yazımıdır. Böylece bu işleme çoğu kez "del-kare φ" denir. Uyarı: başka konumluk dizgelerinde örneğin küresel kutupsal konumluklarda bayırgı işlemi ile Laplace işlemi yalınca bağlı değillerdir. İyi anımsatmalıyız ki Laplace işleminin temel tanımı "falan işlevin bayırgısının ıraksaması"dır.

Şimdi bir noktadaki yük yoğunluğu ile bunu saran bölgedeki gerilim işlevi arasında yerel bir bağıntı yazabiliriz. Gauss yasasının ırak$\mathbf{E} = 4\pi\rho$ diferansiyel biçiminden

$$\boxed{\nabla^2\varphi = -4\pi\rho} \tag{69}$$

çıkar. Yük yoğunluğunu gerilimin ikinci türevlerine bağlayan bu denkleme bazen *Poisson Denklemi* denir. Denklemi dik konumluklarda yazarsak

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = -4\pi\rho \tag{70}$$

bulunur. Bu denkleme, yakın ya da uzak kaynakların bir noktadaki geriliminin bir toplam tümlev alarak nasıl bulunacağını bildiren Denk. 17'nin diferansiyel yazımı diye bakılabilir*

2.13 Laplace Denklemi

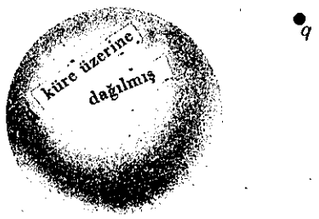
Yük yoğunluğunun $\rho = 0$ olduğu heryerde, yani elektrik yükü bulunmayan bütün uzay bölgelerinde elektrik gerilim

$$\boxed{\nabla^2\varphi = 0} \tag{71}$$

denklemine uymak zorundadır. Buna *Laplace Denklemi* denir. Bu denkleme, fiziğin pek çok dallarında rastlarız. Gerçekten matematiksel bir görüşle ele alınan klasik alanlar kuramı, bu denklemin çözümlerinin incelenmesidir denilebilir. Laplace denklemine uyan

*Gerçekten Denk. 70'in, Denk. 17'nin matematiksel eşdeğeri olduğu gösterilebilir. Bu demektir ki Laplace işlemini Denk. 17'deki tümleve uygulayacak olursanız sonunda $-4\pi\rho$ bulursunuz. Bunun nasıl olduğunu göstermeğe kalkışmayacağız; ya bize inanın, ya da bunu kendiniz tanıtlayın.

†İşlev: Fonksiyon



Şek. 2.21.Bir q' yükünü yakına getirerek onu bir küre üzerine yaymak için gerekli iş, q'den ileri gelen φ geriliminin küre üzerindeki ortalaması ile q' yükünün çarpımına eşittir.

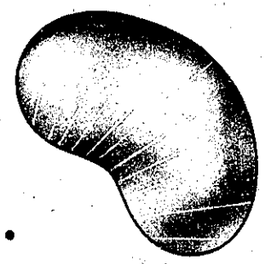
fonksiyonlar sınıfına *harmonik fonksiyonlar* denir. Bu fonksiyonların çarpıcı bazı özellikleri vardır; bunlardan biri şudur: *eğer* $\varphi(x,y,z)$ *Laplace denklemini doğruluyorsa, fonksiyonun herhangi bir kürenin (kürenin küçük olması koşulu yok) yüzeyi üzerindeki ortalama değeri* φ *'nin küre merkezindeki değerine eşittir.* Bunu, *içinde yük bulunmayan bölgelerdeki* φ elektrik gerilimi için doğru olması gerektiğini kolayca tanıtlayabiliriz. Şek. 2.21'de olduğu gibi bir q nokta yükünün alanı içinde bulunan bir S küresi alalım. Bu kürenin yüzeyine q' kadar bir sınama yükü düzgün olarak serpilmiş olsun. Bu q' yükünü sonsuzdan getirerek kürenin yüzeyine düzgünce serpmek için gerekli iş q yükünün geriliminin küre yüzeyindeki ortalama değeri ile q' yükünün çarpımına eşittir. Ama q' sınama yükü önce yerinde ve q yükü sonradan sonsuzdan getirilmiş gibi düşünülürse işin aynı olduğunu biliyoruz; ve yine biliyoruz ki bu iş, q' yükü kürenin yüzeyine serpilecek yerde merkezinde toplanmış olsa yine aynı olacaktır. Bu bize bu hal için yukarki özelliğin doğru olduğunu gösterir. Bir çok kaynakların gerilimleri toplanabildiğine göre tanıtladığımız özelliğin S küresi dışında bulunan herhangi bir kaynak dizgesi için doğru olması gerekir.

Gerilimin bu özelliği, sizi düş kırıklığına uğratabilecek şu olguya sıkıca bağlıdır; yüklü bir parçacığı boş uzayda dayanıklı denge içinde tutabilecek bir durgun yük alanı oluşturulamaz. Bu özel "olmazlık" teoremi fizikteki başka benzerleri gibi verimsiz çabaları ve düşünsel kuruntuları önleme bakımından yararlıdır. Şimdi bu teoremin niçin doğru olduğunu görelim. Bunun için teoremin tersine, artı yüklü bir parçacığın dayanıklı denge halinde bulunabileceği bir P noktası olan bir elektrik alanının var olduğunu düşünelim. Bunun anlamı parçacığın bu P noktasından küçük herhangi bir yer değiştirme ile öyle bir yere gelmiş olması gerekir ki, elektrik alanı onu, geriye P'ye doğru itecek şekilde etkilesin. Ama bu, P çevresindeki küçük bir kürenin yüzeyinin heryerinde içe dönük bir $\mathbf{E}$ alanının bulunması demektir. Ama bu Gauss yasasına aykırıdır, zira bu bölge içinde eksi kaynak yük yoktur. (Bizim sınama parçacığımız hesaba katılmaz; zaten onu artı saydık.) Başka bir deyimle elektrik alanının toptan içeriye veya toptan dışarıya doğru olduğu bir boş (yüksüz) bölge bulunamaz; oysa dayanıklı denge için böyle bir alan gerekir. Aynı olguyu elektrik gerilimi ile anlatmak isterseniz, yüklü bir parçacık için dayanıklı bir denge konumu φ geriliminin, parçacık artı yüklü ise çevresindeki bütün noktalardan daha aşağı, parçacık eksi yüklü ise çevresindeki noktalardan daha yüksek olması gerekir. Açıkca görüldüğü gibi bir küre yüzeyindeki ortalaması merkezindeki değere eşit olan bir fonksiyon için bu iki halden hiçbiri gerçekleşemez.

Yüklü bir parçacığın durgun yük alanı içinde etkilendiği kuvvet sıfır olduğu için dengede kalması olağandır. Şek. 1.10'daki $\mathbf{E} = 0$ olan nokta böyle bir yerdir. Eşit iki artı yükün tam orta konumu; ister artı ister eksi olsun üçüncü bir yük için denge yeridir. Ama denge dayanıklı değildir. (Üçüncü yükün denge konumundan biraz uzaklaşınca ne olacağını düşünün.) Bu arada elektrik yüklü bir parçacığın zamana bağlı olarak değişen bir elektrik alanı içinde yakalanarak sürekli biçimde tutulabileceğini belirtelim.

2.14 Fiziği Matematikten Ayırdetmek

Son birkaç kesimde matematiksel bağıntılarla uğraştık gerçekleri yeni bir biçimde söylemeğe çalıştık. Eğer elektrik kuvveti kare ile ters oranlı bir kuvvet olmayıp da sonlu ulaşımlı bir kuvvet olsa idi



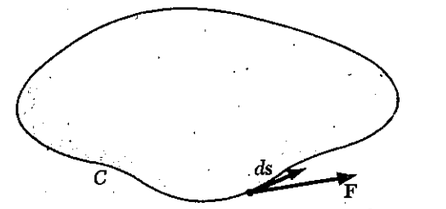
Şek. 2.22.Uzaklığın karesi ile ters oranlı olmayan bir alanda, kapalı bir yüzeyden geçen akı sıfır değildir.

örneğin,

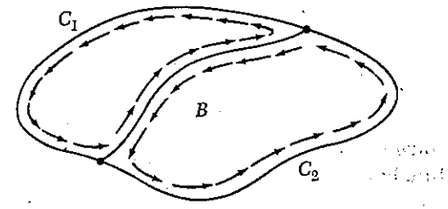
$$\frac{e^{-\lambda r}}{r^2} \tag{72}$$

yazımınca değişse idi ne olurdu? Bunu anlamağa çalışırsak, fiziği matematikten, tanımları yasalardan ayırt edebiliriz. Bu halde Denk. 52'de deyimlenen Gauss yasası geçerli olmaz, çünkü bazı kaynakları saran çok büyük bir yüzey alırsak, bu yüzey üzerinde yok denecek kadar zayıf bir alan buluruz. Yüzey büyüdükçe, akı sabit kalmaz, sıfıra doğru gider. Yine de uzayda her noktada bir alan tanımlayabiliriz. Bu alanın ıraksamasını hesaplayabiliriz ve herhangi bir yöngü alanının matematiksel bir özelliğini belirten Denk. 53 yine geçerlidir. Bunda bir çelişme var mı? Hayır, çünkü Denk. 54 geçerli değildir. Alanın ıraksaması kaynak yoğunluğuna artık eşit olmaz. Bunu şöyle anlayabiliriz: Eğer alan sonlu ulaşımlı ise kaynaksız küçük bir oylumdan, oylumun dışındaki bir kaynak etkisiyle net bir akı geçebilir. Şek. 2.22'de gösterildiği gibi hacım içine kaynağa yakın taraftan daha fazla akı girer fakat uzak yanından bunun daha azı çıkar.

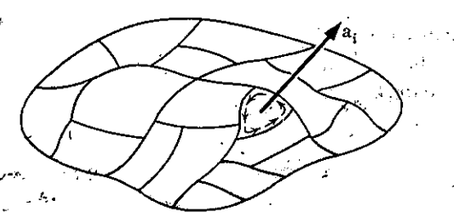
Böylece Denk. 52 ve 54'ün aynı *fiziksel* yasayı, yani Coulomb'un yüklü cisimler arasındaki kuvvetlerin uzaklığın karesiyle ters oranlı oluşu yasasını deyimlediğini söyleyebiliriz. Denk. 53 ise bir matematik teoremin deyimlenişidir yasanın diferansiyel biçimini



(a)



(b)



(c)

Şek. 2.23.Kendi üzerine kapalı parçalara ayrılmış kapalı bir eğrinin bu parçaları üzerindeki Γ_i dolanımlarının toplamı, ilk C eğrisi üzerindeki Γ dolanımına eşittir.

tümlev biçime sokmağa ya da bunun tersini yazmağa yarar.

Elektrik yüklerinin peltemsi sürekli bir yapıda olmayıp içlerini pek az tanıdığımız parçacıkların üzerinde toplandığı bir evrende kaynaklar ve alanlar arasındaki diferansiyel bağıntılar nasıl bağdaşabilirler? Aslında Denk. 69'un deyimlediği Poisson denklemi gibi bir bağıntı yalnız kaba ölçekte geçerlidir. Küçük ama sonlu ve içinde birçok parçacıklar bulunan bir oylumda ρ yük yoğunluğu bir ortalama olarak düşünülmelidir. Yani ρ fonksiyonu bir matematikçinin isteyeceği gibi sürekli olamaz. Gauss yasasını diferansiyel şekli ile elde ettiğimiz sırada V_i oylum öğesini küçültürken fiziksel olarak gerektiğinden daha öteye gidemeyiz. Garip de olsa gerçek odur ki, büyük ölçekteki elektrik dizgelerinde sürekli ortam modeli iyi işler. Atomlar evreninde temel parçacıklar ve boşluklar vardır. Parçacıklar için Coulomb yasası geçerli olsa bile, orada başka olaylar da vardır. Durgun yük söz konusu olunca boşluk Laplace denklemine uyar. Yine de boşluk içinde bile sıfır ereyine geçişin *fiziksel* bir anlamı olacağına güvenemeyiz.

2.15 Yöngü (Vektör) Fonksiyonunun Dönülü (Rotasyoneli)

Yöngül alanın yerel bir özelliği olan ıraksama kavramını, geniş kapalı bir yüzey üzerinde alınan yüzey tümlevinden yola çıkarak geliştirdik. Aynı anlayışla $\mathbf{F}(x,y,z)$ gibi bir yöngü alanının kendi üzerine kapalı ilmek halinde bir C eğrisi boyunca hesaplanan çizgi tümlevini ele alalım. Bu C eğrisi, üzerine gerili bir S yüzeyinin sınırı gibi görülebilir. Böyle kapalı bir yol boyunca alınan çizgi tümlevini belirttiği için buna uygun bir ad *dolanım* terimidir; dolanımı göstermek için Γ (büyük gamma) harfini kullanacağız

$$\Gamma = \int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} \qquad (73)$$

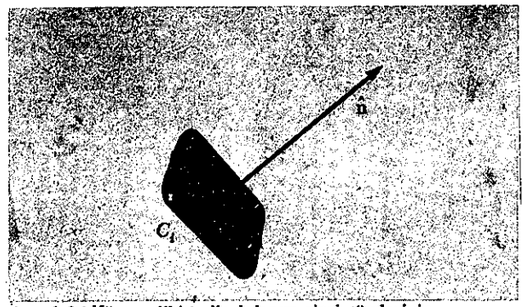
tümlev simgesi içindeki $d\mathbf{s}$ yol öğesi, C eğrisine her noktasında teğet olan sonsuz küçük bir yöngüdür (Şek. 2.23*a*). C'nin üzerinde dolanabileceğimiz iki yönden $d\mathbf{s}$ için birini seçeriz. C eğrisinin bir düzlem içinde bulunması gerekmez, bu istediğiniz gibi bükülmüş bir eğri olabilir.

Şimdi bu C eğrisi üzerine B gibi bir köprü atarak C_1 ve C_2 gibi iki ilmek oluşturalım; B, bu iki bölüğün ortak bir parçasıdır (Şek. 2.23 *b*). Bunların ikisi boyunca aynı yönde giderek çizgi tümlevlerini alalım. Kolayca görüleceği gibi yeni eğriler boyunca alınan Γ_1 ve Γ_2 dolanımları toplamı, ilk eğri boyunca alınan dolanıma eşittir: Bunun nedeni her iki tümlev almada köprüden zıt yönlerde geçilmesidir; geriye çizgi tümlevine katkıda bulunan sadece C eğrisi parçaları kalır. İlmeklerin daha fazla $C_1,\ldots, C_i,\ldots,C_N$ gibi parçalara ayrıldığını düşünürsek toplamda yine bir değişiklik olmaz:

$$\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} = \sum_{i=1}^{N} \int_{C_i} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s}_i \quad \text{ya da} \quad \Gamma = \sum_{i=1}^{N} \Gamma_i \qquad (74)$$

Burada da yeni köprüler ile ilmekleri daha küçük parçalara ayırmayı sürdürebilir, ve böylece ereyde $\mathbf{F}$ alanı için yerel belirtgen bir niceliğe varmaya çalışabiliriz. İlmekleri ufak parçalara ayırarak dolanımı daha küçük ilmekler üzerinde elde ederken yüzeylerini de birlikte küçültüyoruz. O halde Kesim 2.9'da *akının oyluma* oranını aldığımız gibi burada da ilmek çevresindeki *dolanımın ilmeğin yüzölçümüne* oranını aramamız doğaldır. Ama bu kez durum biraz ayrıdır, zira C_i üzerine gerilmiş olan a yüzeyi aslında bir yöngüdür; çünkü bir yüzeyin uzayda bir yönelişi vardır. Oysa bir sayıl niceliğin bir yöngüye oranını alamayız! Gerçekte ise, bir bölgedeki ilmekleri küçülttükce, istediğimiz doğrultuda bir ilmek elde edecek şekilde davranabiliriz. (Unutmayın ki, C eğrisi üzerine oturtulan yüzey bakımından herhangi bir koşulla bağlı değiliz.) O halde erey değere farklı yollardan gidebiliriz, ve sonucun bu durumu yansıtmasını beklemeliyiz.

Şimdi bir yüzey parçasını bölünmenin son basamağına doğru giderken belli bir yönelişi seçmiş olduğumuzu düşünelim. Bu yüzey parçasının birim



Şek. 2.24. Yüzey dikiti ile dolanım çizgi tümlevinin alınış doğrultusu arasındaki sağ vida kuralı.

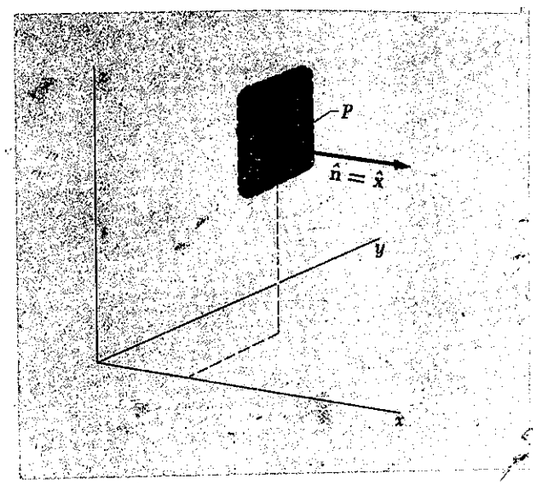
yöngüsü $\hat{\mathbf{n}}$ olsun, bu yöngü yüzeyin dikitini gösterecektir ve özel bir P noktasını saran parçanın büyüklüğü sıfıra doğru giderken sabit kalması gerekecektir. *Dolanımın, parça yüzeyine oranının* erey değeri,

$$\operatorname*{erey}_{a_i\to 0} \frac{\Gamma_i}{a_i} \quad \text{yada} \quad \operatorname*{erey}_{a_i\to 0} \frac{\int_{C_i} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s}}{a_i} \qquad (75)$$

biçiminde yazılacaktır. Burada benimseyeceğimiz bir imleme kuralına göre, $\hat{\mathbf{n}}$'nin doğrultusu ile çizgi tümlevi alınırken C_i üzerindeki dolanma yönü, Şek. 2.24'de olduğu gibi sağ vida kuralı ile bağlı olsun. Bu şekilde elde edilen erey değer alanın P *noktasına ve doğrultusuna bağlı* bir sayıl niceliktir. $\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}}, \hat{\mathbf{z}}$ gibi bağımsız üç doğrultu seçer ve üç ayrı sayı elde edebilirdik. Sonunda bu üç sayının bir yöngünün bileşenleri gibi görülebileceği ortadadır. Bu yöngünün adına *dönül* diyoruz, dön $\mathbf{F}$ yazıyoruz*. Bu demektir ki, $\hat{\mathbf{n}}$'nin özel bir doğrultusu için erey değer olarak bulduğumuz sayı, dön $\mathbf{F}$ yöngüsünün bu doğrultudaki bileşenidir. Bunu denklem halinde söylemek gerekirse,

$$(\text{dön } \mathbf{F})\cdot\hat{\mathbf{n}} = \operatorname*{erey}_{a_i\to 0} \frac{\Gamma_i}{a_i} = \operatorname*{erey}_{a_i\to 0} \frac{\int_{C_i} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s}}{a_i} \qquad (76)$$

yazılabilir. Örneğin Şek. 2.25'de olduğu gibi $\hat{\mathbf{n}} = \hat{\mathbf{x}}$ alınırsa, dön $\mathbf{F}$'nin x ekseni bileşeni elde edilir. P'yi saran ilmek küçülürken onu x eksenine dik bir doğ-



Şek. 2.25. Yüzey parçası P çevresinde büzülürken dikiti x doğrultusunda kalıyor.

düzlemde tutuyoruz. Genel olarak dön $\mathbf{F}$ yöngüsü yerden yere değişir. Başka bir noktaki yüzey parçasını küçülterek sıfıra doğru götürürsek, $\mathbf{F}$ yöngü fonksiyonunun yapısına göre, dolanımın yüzeye oranı farklı çıkabilir. Bu demektir ki, dön $\mathbf{F}$'nin kendisi konumlukların bir yöngüsel fonksiyonudur. Bu yöngünün doğrultusu, o noktada en büyük dolanımı veren düzleme diktir. Değeri ise, gözönüne aldığımız noktada, bu şekilde belirlenen düzlemin içindeki birim yüzey başına düşen dolanıma eşittir.

Bu yaptığımız tanımlanan niceliğin bir yöngü olduğunu ileri sürmektir; bu bakımdan bir şey tanıtlamış değiliz. Bu tanıma yaraşabilmek için, tanımlanan bileşenlerin her bakımdan bir yöngü bileşenleri gibi davranmaları gerekir. Denk. 76'ya göre x, y, ve z bileşenleri için bir takım değerler bulduğumuzu düşünelim. Şimdi eğer $\hat{\mathbf{n}}$ için ayrı dördüncü bir doğrultu seçersek, Denk. 76'nın verdiği sonuç, öteki üç sayı ile bağdaşmalıdır, çünkü bir yöngüyü üç bileşen tam olarak tanımlar. Bu konuyu biraz yakından incelemek isterseniz, Problem 2.24 Denk. 76'nın gerçekten bir yöngünün bileşenlerini tanımladığını tanıtlayan bir yol gösterecektir.

*Dönül: Rotasyonel; kısaltılmışı dön

2.16 Stokes Teoremi

Sonsuz küçük bir yüzey parçasının çevresinde alınan dolanımdan, büyük C ilmeğinin çevresindeki dolanıma gidebiliriz:

$$\Gamma = \int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} = \sum_{i=1}^{N}\Gamma_i = \sum_{i=1}^{N} a_i\left[\frac{\Gamma_i}{a_i}\right] \qquad (77)$$

Son basamakta yalnız a_i ile böldük ve a_i ile çarptık. Şimdi N sayısının çok büyük bir değer aldığını yani a_i'lerin küçüldüğünü düşündüğümüz zaman eşitliğin sağ yanının ne hale geleceğini görelim. Köşeli ayraç içindeki nicelik (**dönül F**). $\hat{\mathbf{n}}_i$ olur; burada $\hat{\mathbf{n}}_i$ 'i'inci parçanın yüzeyine dikilen birim yöngüdür. Böylece toplamın sağ yanında C eğrisi üzerine oturan S yüzeyinin parçaları üzerinde alınan "parça yüzeyi çarpı dönül F'nin dik bileşeni"nin bütün parçalar için toplamı bulunmaktadır. Bu dön $\mathbf{F}$ yöngüsünün S yüzeyi üzerinde alınan *yüzey tümlevinden* başka bir şey değildir:

$$\sum_{i=1}^{N} a_i\left[\frac{\Gamma_i}{a_i}\right] = \sum_{i=1}^{N} a_i(\text{dön }\mathbf{F})\cdot\hat{\mathbf{n}}_i \to \int_S da\cdot\text{dön }\mathbf{F} \qquad (78)$$

O halde:

$$\boxed{\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} = \int_S \text{dönül }\mathbf{F}\cdot d\mathbf{a}} \qquad (79)$$

bulunur.

Denk. 79'un dediği Stokes teoremi denilen matematiksel bağıntıdır. Bunun yapı bakımından Gauss teoremine, ne kadar benzediğine bakalım. Stokes teoremi, bir yöngünün çizgi tümlevini o yöngünün dönülünün yüzey tümlevine çevirmektedir. Gauss teoremi ise (Denk. 51), bir yöngünün yüzey tümlevini o yöngünün ıraksamasının hacım tümlevine çevirir. Stokes teoremi bir yüzey ve o yüzeyi çeviren bir eğri ile ilgilidir. Gauss teoremi ise bir oylum ve o oylumu sınırlayan yüzeyi ilgilendirir.

2.17 Dik Konumluklar Çatkısında Dönül Hesabı

Denklem 76 dön $\mathbf{F}$'nin hiçbir özel konumluklar dizgesine başvurmaksızın temel tanımını vermektedir. Bu bakımdan bu yazım bir ıraksamanın temel tanımını veren Denk. 49'a benzer. Orada olduğu gibi, $\mathbf{F}(x,y,z)$ fonksiyonu belirli biçiminde verildi ise dön $\mathbf{F}$'yi nasıl hesaplayacağımızı bilmek isteriz. Hesaplama kuralını bulabilmek için Denk. 76'da verilen tümlevi alacağız ama bunu, Şek. 2.26'daki gibi xy düzlemine koşut dörtgen biçiminde bir yüzey parçasını çeviren çok yalın bir yol üzerinden alacağız. Yani burada $\hat{\mathbf{n}} = \hat{\mathbf{z}}$ alıyoruz. İmler üzerinde yaptığımız anlaşmaya göre, yüzey çevresi boyunca alınan tümlev, $\hat{\mathbf{n}}$ doğrultusunda bakan biri için, saat iğneleri yönünde olmalıdır. Şek. 2.27'de bu dörtgene yukarıdan bakıyoruz.

Böyle bir yol boyunca bir $\mathbf{A}$ yöngüsünün çizgi tümlevi A_x'in y ile ve A_y'nin x ile değişimine bağlıdır. çünkü A_x'in Şek. 2.27'deki çerçevenin üst kıyısı boyunca ortalama değeri alt kıyı boyunca ortalama değerine eşit olsa idi, bu iki parçanın bütün çizgi tümlevindeki katkıları birbirini giderirdi. Buna benzer bir düşünüş yan kıyılar için de doğrudur. A_x'in $y+\Delta y$ konumluğunda bulunan üst kıyı boyunca ortalama değeri ile y konumluğunda bulunan alt kıyı üzerindeki ortalama değeri arasındaki fark Δx ve Δy küçük nicelliklerinin birinci basamağına kadar

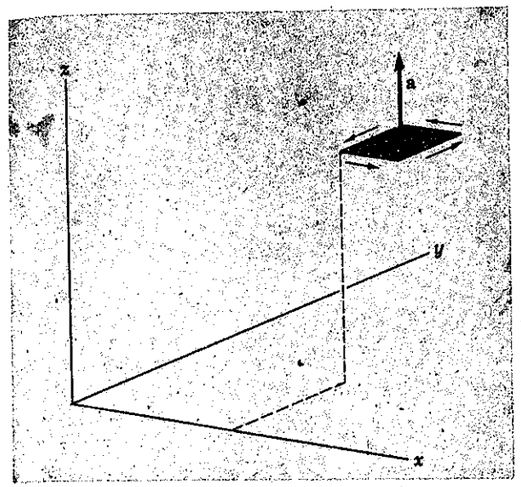
$$\left(\frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\Delta y \qquad (80)$$

olur. Buradaki düşünüş Şek. 2.16 b'dekinin özdeşidir.

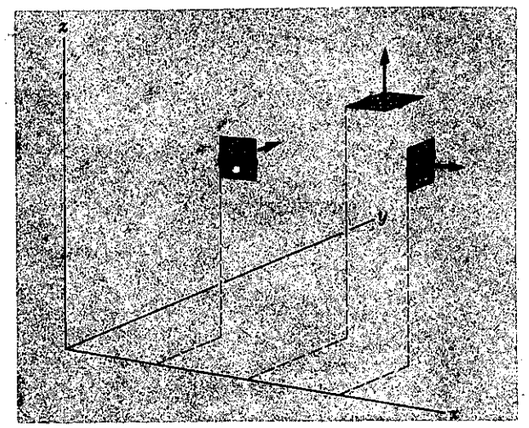
$$A_x = A_x(x,y) + \frac{\Delta x}{2}\frac{\partial A_x}{\partial x}\left(\begin{array}{l}\text{çerçeve tabanının}\\ \text{orta noktasında}\end{array}\right) \qquad (81)$$

$$A_x = A_x(x,y) + \frac{\Delta x}{2}\frac{\partial A_x}{\partial x} + \Delta y\frac{\partial A_x}{\partial y}\left(\begin{array}{l}\text{çerçeve tabanının}\\ \text{orta noktasında}\end{array}\right)$$

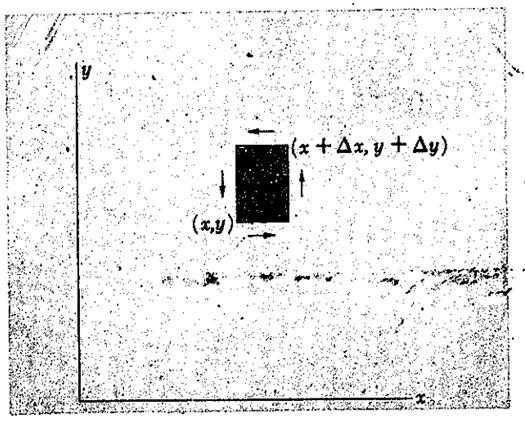
Bunlar Taylor açılımında birinci basamaktan terimlerle yetinildiğinde kalan ortalama değerlerdir.



Şek. 2.26 $\hat{\mathbf{n}} = \hat{\mathbf{z}}$ ile, dörtgen bir parça çevresindeki dolanım.



Şek. 2.28. Her yönelme için *dolanım/yüzölçümü* oranının ereyi dön A yöngüsünün bu noktadaki bir bileşenini verir; dön A yöngüsünün herhangi bir noktadaki bütün bileşenlerini bulmak için, bütün yüzey parçaları bu noktayı sarmış olmalıdır; Şekilde bu parçalar kolay görülsün diye birbirlerinden ayrılmışlardır.



Şek. 2.27. Şek. 2.26'daki parçanın üstten görünüşü

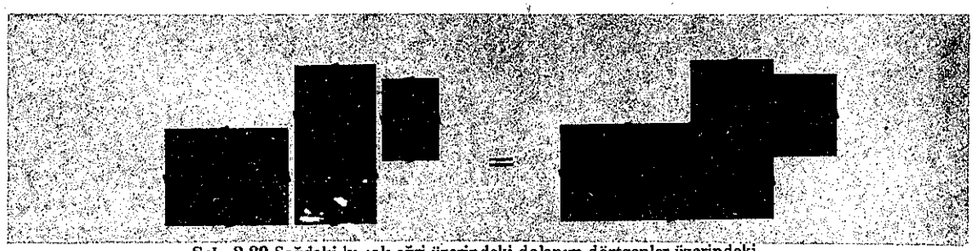
Bu değerlerin farkı ile Δx yol parçasının çarpımı dolanıma olan net katkıyı verir. Bu katkı $-\Delta x\,\Delta y\,(\partial A_x/\partial y)$ dir. Burada eksi çıkmasının nedeni, üst kıyıda sola doğru tümlev alışımızdır, şöyle ki, A_x üst yanda daha artı ise, dolanıma tüm katkısı eksi olur. Yanların katkıları ise $\Delta y\,\Delta x\,(\partial A_y/\partial x)$ dir ve burada im artıdır, çünkü A_y sağ tarafta daha artıdır ve dolanıma artı bir katkı halinde girer.

O halde Δx ve Δy 'nin daha yüksek üslü terimlerinin saysayarak bütün dörtgen çevresindeki çizgi tümlevi

$$\int_{\square}\mathbf{A}\cdot d\mathbf{s} = (-\Delta x)\left(\frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\Delta y + (\Delta y)\left(\frac{\partial A_y}{\partial x}\right)\Delta x$$

$$= \Delta x\,\Delta y\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right) \qquad (82)$$

olur.



Şek. 2.29. Sağdaki kapalı eğri üzerindeki dolanım dörtgenler üzerindeki dolanımların toplamına eşittir, ve sağdaki yüzey, dörtgenlerin yüzölçümlerinin toplamına eşittir. Bu çizim *dolanım/yüzölçümü* oranının biçime niçin bağlı olmadığını gösterir.

Şimdi $\Delta x\,\Delta y$ (bizim) z doğrultusunda bir yöngüyle gösterdiğimiz dörtgenin sınırladığı yüzeyin yüzölçümüdür. O halde

$$\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \tag{83}$$

yazımı

$$\frac{\text{küçük yüzey çevresindeki çizgi tümlevi}}{\text{parçanın yüzölçümü}} \tag{84}$$

oranı parçacığın yüzeyi sıfıra doğru giderken aldığı erey değerdir. Eğer dörtgen şeklindeki çerçevenin dikiti artı y doğrultusuna koşut gelecek şekilde yönelmiş olsa idi, bu halde oran için

$$\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \tag{85}$$

yazımını elde ederdik; çerçeve Şek. 2.28 sağ tarafta görülen dörtgen gibi dikiti x doğrultusuna koşut biçimde yönelmiş ise oran

$$\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \tag{86}$$

bulunurdu.

Burada yalnız dörtgen biçimindeki yüzeyler üzerinde düşünmüş olmamıza karşın, elde ettiğimiz sonuçlar ıraksama teoremindeki tümlevlerin hesabında olduğu gibi, küçük yüzeyin ve onu çevreleyen dörtgenin biçimine bağlı değildir. Böylece bir çok dörtgenleri yan yana getirerek istediğimiz bir şekil ortaya çıkarabiliriz, ve yan yana gelen iki dörtgenin ortak kıyıları üzerindeki çizgi tümlevleri birbirini giderdiği için sonuçta bir değişiklik olmaz (Şek. 2.29).

O halde sonuç olarak, yönelme ne olursa olsun, dolanımın yüzeye oranı, ele aldığımız yüzey parçasının biçimine bağlı değildir. $\mathbf{F}$ yöngüsü (x,y,z)'nin bir fonksiyonu olarak verilirse **dönül F** yöngüsünün bileşenleri için şu genel yazımı elde ederiz:

$$\textbf{dönül } \mathbf{F} = \hat{\mathbf{x}}\left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}\right) + \hat{\mathbf{y}}\left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}\right) + \hat{\mathbf{z}}\left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right) \tag{87}$$

Aşağıda vereceğimiz kural bu formülün kendisinden daha kolay anımsanabilir: Şöyle bir belirtken hazırlayınız:

$$\begin{vmatrix} \hat{\mathbf{x}} & \hat{\mathbf{y}} & \hat{\mathbf{z}} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} \tag{88}$$

Bunu belirtken kurallarına göre açınız; Denk. 87'nin verdiği **dönül F**'yi elde edersiniz. Şu noktaya dikkat ediniz: **dönül F**'nin x bileşeni F_z'nin y doğrultusundaki değişim hızı ile, ve F_y'nin z doğrultusundaki değişim hızının eksi işaretlisine bağlıdır. Öteki bileşenler için de benzer kurallar söylenebilir.

Dönül için $\nabla\times$ simgesi kullanılır ve del-çapraz diye okunur, burada ∇ bir yöngü olarak yorumlanır;

$$\hat{\mathbf{x}}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{\mathbf{y}}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{\mathbf{z}}\frac{\partial}{\partial z} \tag{89}$$

yazımı çoğu zaman dönül yerini tutar. Eğer $\nabla\times\mathbf{F}$ yazar ve iki yöngünün çarpımı kurallarını izlersek, doğrudan dönül $\mathbf{F}$ yöngüsünü elde ederiz. Böylece dön $\mathbf{F}$ ve $\nabla\times\mathbf{F}$ **özdeş anlama gelir.**

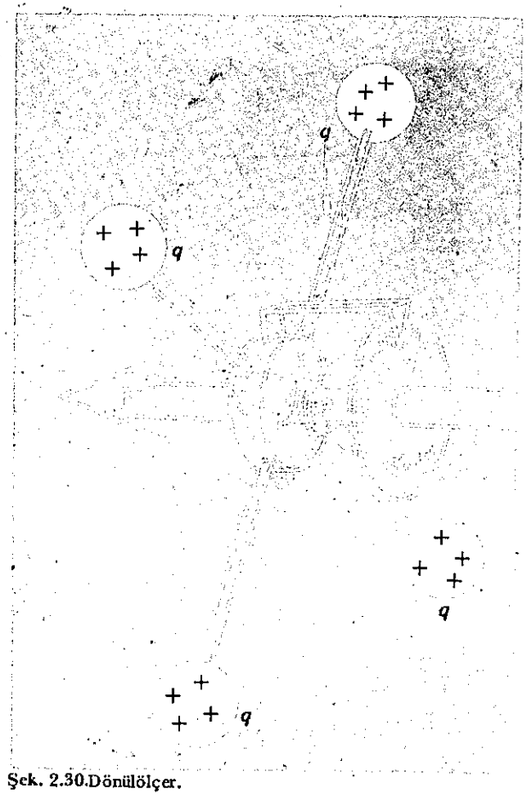
2.18 Dönülün Fiziksel Anlamı

"Dönül" sözü bize, dönülü sıfırdan farklı bir yöngü anımsatır. dolanımı veya döndürücülüğü bulunduğunu hatırlatır. Maxwell bunun için dönül (rotasyonel) sözünü kullandı ve bu terim birçok ülkelerde halâ kullanılmaktadır. $\mathbf{G}$ gibi bir hız yöngü alanının dön $\mathbf{G}$'sinin sıfırdan farklı olduğunu düşünelim. Bu alan içindeki hızın aşağı-yukarı $\uparrow\rightleftarrows\downarrow$ ya da $\downarrow\rightleftarrows\uparrow$ niteliğinde olduğu ileri sürülebilir; bunun üzerine bir doğrultuda genel bir akışın katılması da olasıdır. Örneğin bir banyo küvetinden akan suyun hız alanı bir dolanım kazanır. Yüzeyin büyük kısmı üzerinde dönül sıfırdan farklıdır. Suyun üzerinde bir cisim yer değiştirirken aynı zamanda bir dönme devinimi yapar (Bak. Prob. 2.16 ve 2.26). Alışkanlar mekaniğinde akışkanlar akımı fiziğinde bu kavram büyük önem taşır.

Elektrik alanı için de hiç değilse düşsel bir dönülölçer yapmak üzere, Şek. 2.30'da görüldüğü gibi yalıtkan çubuklar ucuna kürecikler tutturalım ve bunları artı yükleyelim. Böyle bir düzenekle bir elektrik alanını incelemek için, **dönül E**'nin sıfırdan farklı olduğu bütün bölgelerde tekerlek mil çevresinde dönme eğilimi gösterir. Bu dönmeyi önleyen bir yay kullanılırsa, yayın üzerinde okuduğumuz burulma; **dönül E** yöngüsünün mil doğrultusundaki bileşeni ile oranlı bir döngü* verir. Bu döngüyü ni saat iğneleri yönünde en büyük değerini almasını sağlayan doğrultuya yöneltirsek bu **dönül E** yöngüsünün doğrultusu olur. (Tekerleğin boyutları içinde büyük ölçüde değişen bir alan için doğaldır ki, dönül ölçere pek inanamayız:).

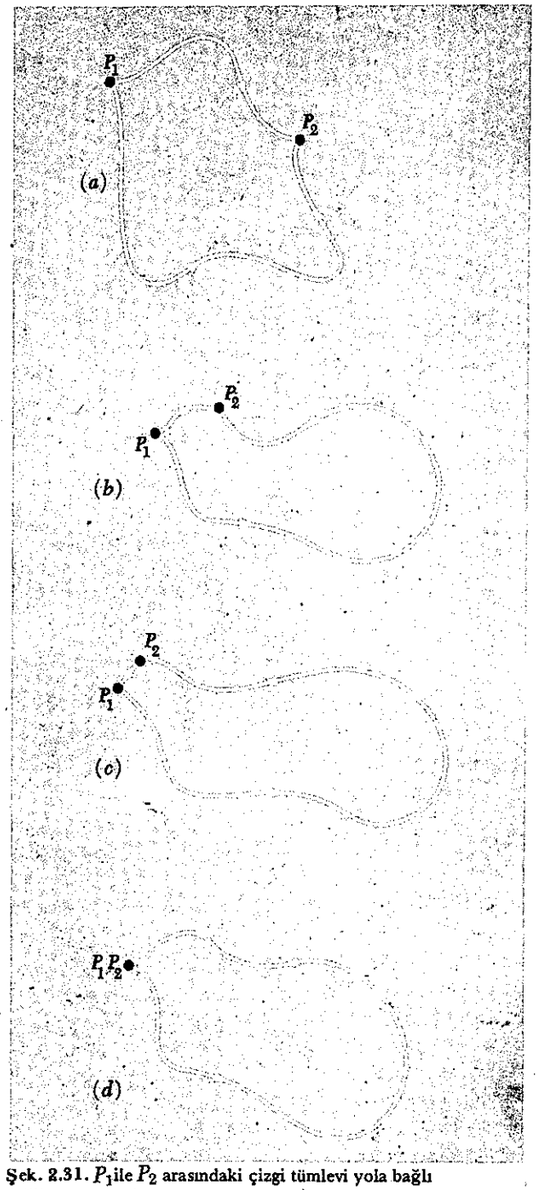
Bütün bunların ışığı altında $\mathbf{E}$ durgunyük alanı üzerine ne diyebiliriz? Çıkarılabilecek sonuç

* Döngü: Moment



Şek. 2.30. Dönülölçer.

yalındır. Dönülölçer her zaman sıfırı gösterecektir! Bu öğrenmiş bulunduğumuz bir konunun, yani $\mathbf{E}$ durgunyük alanının herhangi kapalı bir yol boyunca alınan çizgi tümlevinin sıfır oluşunun sonucudur. Çünkü $\mathbf{E}$'nin Şek. 2.31'deki P_1 ve P_2 gibi iki nokta arasındaki çizgi tümlevi yola bağlı değildir. P_1 ve P_2 noktalarını birbirine yaklaştıracak olursak şekildeki kısa yol üzerinde alınan tümlevin küçülerek kaybolacağını anımsayalım; yeterki son konum bir nokta yükün bulunduğu yer gibi, bir ayrık nokta olmasın; bu hali



Şek. 2.31. P_1ile P_2 arasındaki çizgi tümlevi yola bağlı değilse, kapalı bir halka boyunca alınan çizgi tümlevinin sıfır olması gerekir.

zaten biz de hesaptan çıkardık. Böylece Şek. 2.31 d'deki kapalı ilmek üzerinde alınan çizgi tümlevi sıfır olmalıdır. Ama dolanım kapalı bir yül üzerinde sıfır ise, Stokes teoremine göre dön **E**'nin herhangi büyüklükte, herhangi şekilde ve yerde bir yüzey parçası üzerindeki yüzey tümlevi sıfır olacaktır. Ama o zaman dön **E**'nin heryerde sıfır olması gerekir,çünkü bir yerde sıfırdan farklı olursa bu yakınlarda düzenlenen bir yüzey parçası sonucu bozar. Bütün bunlar **E** durgun yük alanı için

$$\text{dönül } \mathbf{E} = 0 \qquad (\text{her yerde}) \qquad (90)$$

sonucunu verir.

Şimdi bu sonucu ters çevirerek, Denk. 90'nın koyduğu koşulun, bir alanın korunumlu olması için yeterli olduğunu yani **E**'nin bir gerilim fonksiyonunun bayırgısı ile anlatımı için yeterli birkoşul,olduğunu söyleyebiliriz.

Bunu sınamak kolaydır. Şek. 2.2'deki yöngü fonksiyonunun bir durgunyük alanı göstermesi olasılığı bulunduğu söylenmişti. Bu alanın bileşenleri $E_x = Ky\ E_y = Kx$olarak verilmiş olsun;üç boyutlu uzay içinde bu alanın anlatımı için bunlara $E_z = 0$ koşulunu eklemeliyiz. Bu alan için dön **E**'nin hesabı:

$$(\text{dön}\,\mathbf{E})_x = \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = 0$$

$$(\text{dön}\,\mathbf{E})_y = \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} = 0 \qquad (91)$$

$$(\text{dön}\,\mathbf{E})_z = \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = K - K = 0$$

verir. Bu bize **E**'nin bir sayıl gerilimin bayırgısı olduğunu anlatır. Bu arada, bu **E** özel alanının sıfır ıraksamalı olduğu yani

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0 \qquad (92)$$

eşitliğinin doğru olduğu kolayca görülebilir. Bu nedenle bu alan yüksüz bir bölgede bulunan bir durgunyük alanı demektir.

Bundan başka $F_x = Ky;\ F_y = -Kx;\ F_z = 0$ ile tanımlanan aynı derecede yalın bir yöngü fonksiyonunun dönülü sıfır

değil, $(\text{Dönül } \mathbf{F})_z = -2K \qquad (93)$

değerine eşittir. Bu yüzden hiçbir durgun yük alanı bu tipte olamaz. Bu alanın biçimini kabaca çizerseniz bunun bir dolanımı bulunduğunu hemen görebilirsiniz.

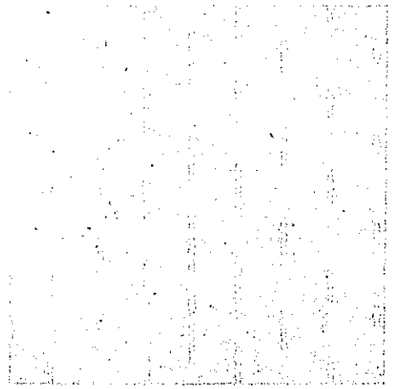
Yöngü fonksiyonlarının bu görünüşleri üzerine anlayışımızı geliştirebilmek için Şek. 2.32'de çizilen iki boyutlu alanları inceleyebilirsiniz. Bu alanların dördünde yöngü fonksiyonunun ıraksaması çizimde verilen bölge içinde sıfırdır. Bu dört alanı tanımaya çalışın. Iraksama incelenen bölgeye bir net akı girmesini veya oradan akı çıkmasını ister. Kimi alan desenlerinde bunu tanımak kolaydır. Kimilerinde ise ıraksamanın sıfır olduğunu hemen görebilirsiniz. Şekildeki alanların üçünde yöngü fonksiyonunun dön'ü, gösterilen bölge içinde sıfırdır. Bu üç şekli, kapalı bir yol boyunca alınacak çizgi tümlevinin sıfır olup olmayacağını şekiller üzerinde sınayarak tanımaya çalışınız. Dön'ün özü budur. (Bu şekilleri inceledikten sonra düşünme yolunuzu ve vardığınız sonuçları az ileri Şek. 2.34'de verilen açıklama ile karşılaştırmazdan önce bu sorunlar üzerinde iyice düşünün.)

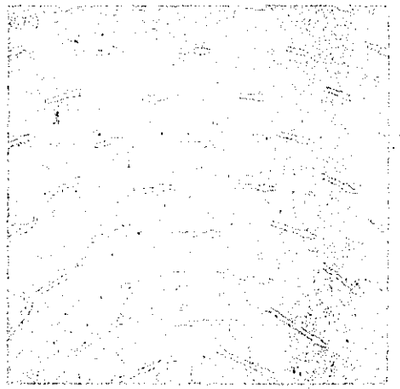
Bir yöngü alanının dönülü kavramı daha ileride dön'ü sıfır olmayan elektrik vemıknatısalalanlarla uğraştığımız zaman çok yararlı bir araç olduğu görülecektir. Biz bunu hemen burada inceledik, zira bu kavramdaki düşünceler ıraksamadakilere çok yakındır. Burada bir yöngüsel alanın iki çeşit türevi ile karşılaştığımızı söyleyebiliriz. Bunlardan birincisi ıraksamadır ve yöngü bileşenlerinin $\partial F_x/\partial x$ vb. gibi kendi doğrultusundaki değişme hızları ile ilgilidir. Öteki ise dönüldür ve F'nin y ve z doğrultusunda gidince değişim hızı ile ilgilidir ve "yanlamasına türev" gibi bir anlam taşır.

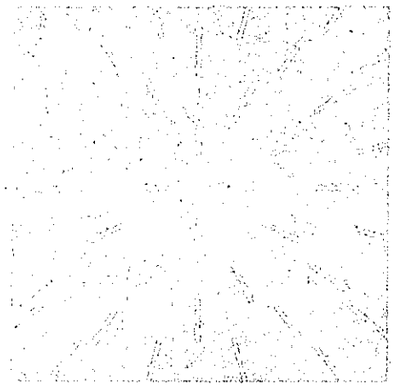
Gauss teoremi, Stokes teoremi denilen bağıntılar Şek. 2.33'de özetlenmişlerdir. Sayıl gerilim fonksiyonu ve bunun bayırgısının çizgi tümlevi arasındaki bağıntı da bu teoremler soyunun bir üyesi olarak görülebilir ve bu üçüncü kolonda verilmiştir.

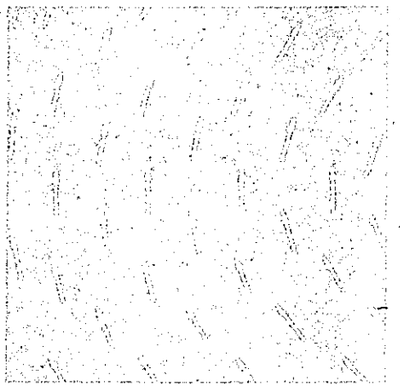


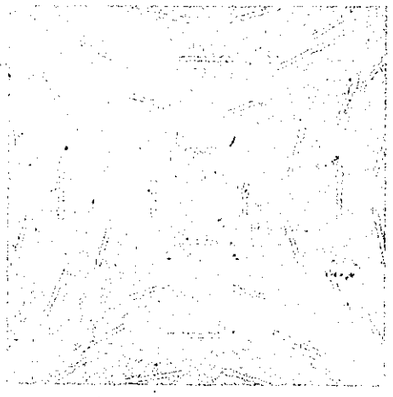
Şek. 2.33. Bazı yöngü bağıntılarının özeti

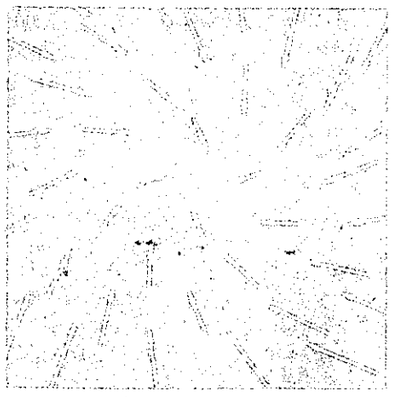












Şek. 2.32. Bu yöngü alanlarının dördünün ıraksaması sıfırdır. Üçünün dönülü sıfırdır. Bunları tanıyabilir misiniz?

Yönglinin gösterdiği doğrultuda ilerleyince değerinin değişmediğine dikkat ediniz. Yani $\frac{\partial F}{\partial y} = 0$ ve $F_x = 0$ dır. O halde ırak $F = 0$ dır. Noktalı eğri boyunca çizgi tümlevinin sıfır olmadığına dikkat ediniz.



ırak $F = 0$ dönül $F \neq 0$

F'nin gösterdiği doğrultuda gidince F'nin değerinde birinci basamaktan bir değişim yoktur; bu ırak $F = 0$ için yeterlidir. Çizilen yol boyunca dolanım sıfır olabilir.



Zira F uzun kıyı boyunca ötekinden daha zayıftır. Gerçekten bu F nin r ile oranlı olduğu bir durgun alandır. Burada r şekil dışında kalan bir noktaya uzaklıktır.

ırak $F = 0$ dönül $F = 0$



Bir merkezsel alandır, yani F ışınsaldır; r'nin sabit bir değeri için alan sabittir. Merkezsel bir alanın dön'ü sıfırdır; kapalı bir eğri boyunca dolanım sıfırdır.

ırak $F \neq 0$ dönül $F = 0$



Yukarıdaki nedenle ırak $F = 0$ 'dır. Burada F'nin büyüklüğü her yerde aynı olduğu için uzun kıyı boyunca çizgi tümlevi daha kısa kıyıyı karşılayamaz. Dolanım sıfır değildir.

ırak $F = 0$ dönül $F = 0$

Çizilen yerler üzerinde dolanım sıfır olabilir. Bu Şek. 2.2'deki alandır; ve bir durgun elektrik alan olabilir.



Yalnız bu şekle göre ırak $F = 0$ diyemeyiz. Ama sıfır olduğunu da görebilirsiniz.

ırak $F = 0$ dönül $F = 0$

Açıkça görüldüğü gibi noktalı yol boyunca dolanım sıfır değildir. Yöngü alanı merkeze doğru toplandığına göre ıraksaması da sıfır değildir



ırak $F \neq 0$ dönül $F = 0$

DİK KONUMLUKLARDA

$$\text{ırak } \mathbf{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$$

$$= \nabla \cdot \mathbf{F}$$

$$\text{dönül } \mathbf{A} = \hat{\mathbf{x}}\left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right) + \hat{\mathbf{y}}\left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)$$

$$\text{bayır } \varphi = \hat{\mathbf{x}}\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \hat{\mathbf{y}}\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \hat{\mathbf{z}}\frac{\partial \varphi}{\partial z}$$

$$= \nabla \varphi$$

$$+ \hat{\mathbf{z}}\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)$$

$$= \nabla \times \mathbf{A}$$

$$\nabla = \hat{\mathbf{x}}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{\mathbf{y}}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{\mathbf{z}}\frac{\partial}{\partial z}$$

Problemler

2.1 Aşağıdaki yöngü fonksiyonu bir durgun yük alanını gösterebilir mi? $E_x = 6xy \qquad E_y = 3x^2 - 3y^2 \qquad E_z = 0$

E'nin $(0,0,0)$ noktasından yola çıkıp $(x_1,0,0)$'dan geçerek $(x_1,y_1,0)$ noktasına giden bir yol boyunca çizgi tümlevini hesaplayınız. Dörtgenin $(0,y_1,0)$ noktasından geçen öteki iki kıyısı boyunca benzer bir hesap yapınız. Alan gerçekten durgun yük alanı ise aynı sonuca varmamız gerekir. Böylece $\varphi(x,y,z)$ gerilim fonksiyonunu elde etmiş oluyorsunuz. Bu fonksiyonun bayırgısını alarak verilen alan bileşenlerini yeniden bulabileceğinizi görünüz.

2.2 Şekil 2.6'da verilen iki yüklü dizgeyi ele alınız. İki yükün üzerinde bulundukları doğru z eksini ve artı yükün bulunduğu yer $z = 0$ olsun. Dizgenin geriliminin bu çizgi boyunca değişimini $z = -5$'den $z = 15$'e kadar z'ler santimetre ve φ leri stat-volt alarak bir çizitle gösteriniz.

2.3 Yarıçapı r olan küçük bir küre R yarıçaplı daha büyük bir kürenin merkezine yerleştirilmiştir. Küreler yüzeylerine düzgün olarak serpilmiş q ve Q yüklerini taşımaktadırlar. Aralarındaki gerilim farkını hesaplayınız. Eğer q artı ise iç kürenin gerilimi dış küreninkinden daha büyük olacaktır. Bu yüzden küreler bir telle bağlanırlarsa q yükü, dış kürenin Q yükü ne olursa olsun tümcek dış küreye akacaktır.

2.4 İnce bir çubuk z ekseni boyunca $z = a$'dan $z = -a$'ya kadar uzanmaktadır. Çubuk boylu boyunca santimetresi başına λ esb'lik sabit bir yük taşımaktadır. x ekseni üzerinde $x > 0$ olan bütün noktalar için gerilimi hesaplayınız.

2.5 Konumlukları $x = -a$, $x = 0$ ve $x = a$ olan sonsuz üç düzlemden herbiri üzerinde aynı σ yük yoğunluğunda düzgün bir yüzey yükü vardır. $x = 0$ için $\varphi = 0$ alarak bütün uzaydaki elektrik alanını ve gerilimi hesaplayınız.

2.6 Şek. 2.20'deki sabit yük yoğunluklu silindir hali için:

(a) Silindirin içinde bulunan alan yazımının Gauss yasasına uyduğunu gösteriniz.

(b) Silindirin içinde ve dışındaki φ geriliminin r'nin fonksiyonu olarak değerini çıkarınız.

(c) φ fonksiyonunun r'ye bağlı değişimini serbest ölçekli bir çizitle gösteriniz. $r = a$'daki özelliğin yapısı nedir?

2.7 $y = 0$ ve $y = b$ düzlemleri arasındaki uzay, yoğunluğu sabit olan yük ile doludur ve başka hiç bir yerde yük yoktur. Bu dizgenin her yerindeki elektrik alanını bulunuz. Bu alanın gerilimini bulunuz ve her yerde Poisson denklemine uyduğunu gösteriniz.

2.8 Şekil 2.7'deki dizge halinde pulun kenarından geçen eş gerilim yüzeyini çiziniz. Bu yüzeyin bakışım eksenini kestiği noktayı bulunuz.

2.9 Kenarları 1 Å olan ve merkezinde bir proton bulunan bir eşkenar dörtgen prizmasının köşelerine dört elektron toplayabilmek için gerekli enerjiyi Denklem 2.42'yi uygulayarak bulunuz. Enerjinin imine bakarak bir elektrona etkiyen bileşke kuvvet hakkında ne söyleyebilirsiniz?

2.10 Özdeş r yarıçaplı iki küre $d \gg r$ gibi bir aralıkla durmaktadırlar. Bir Q yükü kürelerin yüzeylerine bölüştürülmek istenmektedir.

(a) Her küreye $Q/2$ kadar yük verecek olursak dizgenin gizilgüç enerjisi ne olur?

(b) Bütün yük bir küre üzerine dağıtılır ve ötekinde hiçbir şey bulunmazsa gizilgüç enerji ne olur?

(c) Her kürenin (a) ve (b) hallerindeki elektrik gerilimleri nedir?

(d) Küreler (b) halinde iken ince bir tel ile bağlanıp yüklerin birinden ötekine akması sağlanırsa sondaki yük bölüşümü ne olur? Enerjinin korunumuna ne olur?

2.11 Prob. 2.1'de verilen yöngü fonksiyonu için nin bileşenlerini hesaplayarak bunun bir durgun yük alanı olabileceğini gösteriniz. (O problemi çözmüş iseniz bu özelliği bayırgısı olan sayıl fonksiyon bularak başka bir yoldan tanıtlamış bulunuyorsunuz.) Bu alanın ıraksamasını hesaplayınız.

2.12 $f(x,y) = x^2 + y^2$ fonksiyonu iki boyutlu Laplace denklemine uymakta mıdır? $g(x,y) = x^2 - y^2$ fonksiyonu için bu bakımdan ne söyleyebiliriz? Bu son fonksiyonun çizitini çiziniz. Bu fonksiyonun $(x=0, y=1)$; $(x=1, y=0)$; $(x=0, y=-1)$ ve $(x=-1, y=0)$ noktalarındaki bayırgısını hesaplayınız, ve küçük oklarla bu bayırgı yöngülerinin nasıl yöneldiklerini gösteriniz.

2.13 $\mathbf{A} = -y\hat{\mathbf{x}} + x\hat{\mathbf{y}}$ yöngü fonksiyonunu xy düzlemi içindeki alan çizgilerini çiziniz. A'nın dönülünü hesaplayınız ve bunun doğrultusunu gösteren bir yöngü çiziniz. Bu yöngüyle ilgili

$$\oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}$$

tümlevini $x^2 + y^2 = 1$, $z = 0$ apalı eğrisi üzerinde hesaplayınız. Bu eğrinin sınırladığı bir yüzey boyunca $\nabla \times \mathbf{A}$'nın yüzey tümlevini hesaplayarak Stokes teoreminin doğru olduğunu gösteriniz.

2.14 Aşağıdaki yöngü alanlarının her biri için dönülü ve ıraksamayı hesaplayınız. Eğer dönül sıfır ise bayırgısı yöngü alanı olan bir φ sayıl fonksiyonu bulmaya çalışınız:

(*a*) $F_x = x + y$; $F_y = -x + y$; $F_z = -2z$.

(*b*) $G_x = 2y$; $G_y = 2x + 3z$; $G_z = 3y$.

(*c*) $H_x = x^2 - z^2$; $H_y = 2$; $H_z = 2xz$.

2.15 Eğer $\mathbf{A}$, türevi sürekli herhangi bir yöngü alanı ise ıra(dön $\mathbf{A}$) $= 0$ ya da "del" yazılışını kullanarak $\nabla(\nabla \times \mathbf{A}) = 0$ olur. Bu teoreme sonra gereksinim duyacağız. Şimdiki işimiz bunu tanıtlamaktır. İşte bunun için iki yol:

(a) (Bir *konumluk dizgesinde, esinlenme istemeyen doğrudan hesap*) : ∇'in dik konumluklardaki yazımını kullanarak $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A})$'nın gerektirdiği ikinci tikel türevleri bulma yolunu tutunuz.

(b) (*hiçbir konumluk istemeyen ıraksama teoremi ve Stokes teoremi ile) : Kapalı C eğrisinin sınırladığı iki parça halinde* bölünmüş bulunan balon biçimli bir S yüzeyini gözönüne alınız. Herhangi bir yöngü alanının C gibi bir eğri boyunca alınan bir çizgi tümlevini düşünün. Sonra uygun bir düşünüşle Stokes ve Gauss'ı anımsayın.

2.16 $\mathbf{v}(x,y,z)$ yöngü fonksiyonu bir akışkan içinde herhangi bir noktadaki hızı göstersin. Akışkanın sıkışamaz olduğu, yani yoğunluğunun her yerde bir olduğu varsayılmıştır. Bunun anlamı küçük bir çerçevenin sınırladığı sabit bir yüzeyden birim zamanda akan madde tutarının $\mathbf{v}$ ile orantılı olduğudur; böylece $\mathbf{v}$ herhangi bir noktada sabit ve madde korunumlu ise ıra $\mathbf{v}$ heryerde sıfır olmalıdır. Niçin? Bu nokta salt bir raslantı olabilir; bu problem daha çok dön $\mathbf{v}$ ile ilgilidir. Zamana bağlı olmayan özel öyle bir akış deseni ele alalım ki, akış bir eksene göre bakışımlı olsun ve $\mathbf{v}$ yöngüsü çevre boyunca yönelmiş bulunsun. Yani $\mathbf{v}$'nin herhangi bir noktadaki değeri, bu nokta ile ekseni içine alan düzleme diktir. Problemin eksen bakışımı göstermesi, z, r ve φ gibi silindirsel kutupsal konumluklarını uygun kılar. Başka bir sınırlayıcı koşul olarak $\mathbf{v}$'nın yalnız r'nin fonksiyonu olduğu düşünülüyor. Bu durumda böyle bir akış $\mathbf{v} = \hat{\boldsymbol{\varphi}} v(r)$ fonksiyonu ile anlatılabilir. Burada $\hat{\boldsymbol{\varphi}}$; $\hat{\mathbf{r}}$'ye $\hat{\mathbf{z}}$'ye dik olan bir birim yöngüyü göstermektedir. Şimdi dön $\mathbf{v}$'nin, küçük bir yüzey parçasını saran çevre boyunca çizgi tümlevi olarak tanımlandığı temel düşünceden yola çıkarak böyle özel bakışım gösteren bir yöngü alanı için yalınca

$$\text{dönül } \mathbf{v} = \hat{\mathbf{z}}\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(rv(r)\right)$$

olduğunu gösteriniz. Bunu özel bir $v(r)$ fonksiyonuna rastlayan aşağıdaki haller için inceleyiniz:

(a) Akışkanın, x ekseni çevresinde ω açısal hızı ile katı bir cisim gibi devindiğini düşününüz. Bu halde dön $\mathbf{v}$ neye eşittir?

(b) Akışkan dön $\mathbf{v} = 0$ olacak şekilde devinmektedir. Bu her yerde doğru olabilir mi? $v(r)$ fonksiyonu nedir? Akışı bir çizge ile göstermeye çalışınız.

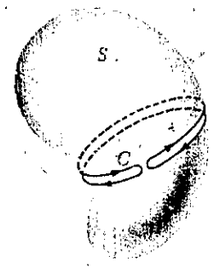
(c) Akışkan devinimi öyle olsun ki $v(r)$ Kepler'in gezegenlerin dairesel yörünge yasasına uygun olsun. dön $\mathbf{v}$ nedir? Saturnun halkalarının devinimi böyle olabilir mi?

2.17 Denk. 36 ve ona eşdeğer olan Denk. 39'u tanıtlamadan verdik. Ama Denk. 43'ü başından sonuna dek tanıtladığımızı ileri sürebiliriz. Buna göre Denk. 39'un Denk. 43'den çıkabileceğini tanıtlamaya çalışalım. Bunu aşağıdaki araçlarla yapabilmeniz gerekir:

(a) Tanıtlanması güç olsa da doğru olarak alabileceğiniz $\nabla \cdot (f \nabla f) = (\nabla f)^2 + f \nabla^2 f$

(b) Poisson denklemi

(c) Iraksama teoremi



Bölüm 3

İletkenler Çevresindeki Elektrik Alanları

3.1	İletkenler ve Yalıtkanlar	68
3.2	Durgun Elektrik Yükü Alanında İletkenler	68
3.3	Genel Durgun Yük Problemi; Biriklik (ya da eşsizlik) Teoremi	72
3.4	Kimi Yalın İletken Dizgeleri	76
3.5	Sığa ve Sığaçlar	79
3.6	Birçok İletkenin Yükleri ve Gerilimleri	82
3.7	Bir Sığaçta Biriken Enerji	84
3.8	Sınır Değer Probleminin Başka Görünüşleri	85
	Problemler	87

BÖLÜM 3 İLETKENLER ÇEVRESİNDEKİ ELEKTRİK ALANLARI

3.1 İletkenler ve Yalıtkanlar

Elektrikle uğraşan ilk deneyciler cisimlerin "Elektriklenme halini" koruma özelliği bakımından farklı olduğunu gördüler. Bazı maddeler sürtme ile kolayca elektriklenebiliyorlar ve elektrikli halde kalıyorlardı; ötekiler ise, bu yolla elektriklenemiyorlar veya belki bu "niteliği" kazansalar bile onu koruyamıyorlardı. Ondokuzuncu yüzyılın başlarında deneyciler cisimleri "elektrikli" ve "elektriksiz" diye sınıflayan listeler düzenlemişlerdi. 1730 yıllarına doğru İngiltere'de Stephen Gray'ın yaptığı önemli bir deneyle "elektriksel halin", yatay bir telle, metrelerle aralıklı duran bir cisimden ötekine geçirilebildiğini gösterdi, yeter ki tel aralıklı 'ipek iplerle bir yere değmeyecek şekilde asılmış bulunsun.* İletmek ile iletmemek arasındaki ayırım bir kez anlaşılınca günün elektrikçileri, "elektriksiz" olan maddelerin bile bir cam üzerine oturtulunca veya ipek iple asılınca şiddetle elektriklenebildiklerini gördüler. O günlerde herkesin hoşuna giden bir elektriklenme gösterisi, ipek iplerle asılı birinin elektriklenmesi idi ki, böyle bir insanın saçları ayağa kalkıyor ve burnunun ucundan kıvılcım çıkarılabiliyordu.

Gray'in ve çağdaşlarının çalışmalarından sonra *elektrikli* ve *elektriksiz maddelerin* listeleri düzenlenmeğe, maddenin elektriksel yalıtkan ve elektriksel iletken halinde ayrımlanmasına başlandı. Bu ayrım doğanın gösterdiği en göz alıcı ve en geniş aykırılıklardan biridir. Metaller gibi iyi iletkenler, elektrik iletkenlikleri bakımından, cam ve plastik gibi bildiğimiz yalıtkanlardan 10^{20} basamağında bir çarpan kadar farklıdırlar. Gray ve Benjamin Franklin gibi onsekizinci yüzyıl deneycilerinin anlayabilecekleri dilde söylemek gerekirse, bir metal ayak üzerine oturmuş bir metal kürenin yükünü saniyenin milyonda biri kadar bir zaman içinde kaybedeceği, oysa aynı küre cam bir ayak üzerinde oturtulacak olursa "yüklenme niteliğini" yıllarca koruyabileceği söylenebilir. (Bu son düşünceyi doğrulayabilmek için onsekizinci yüzyıl laboratuvarlarının olanaklarını aşan tedbirler almak gerekir. Bunların kimini belirtebilir misiniz?)

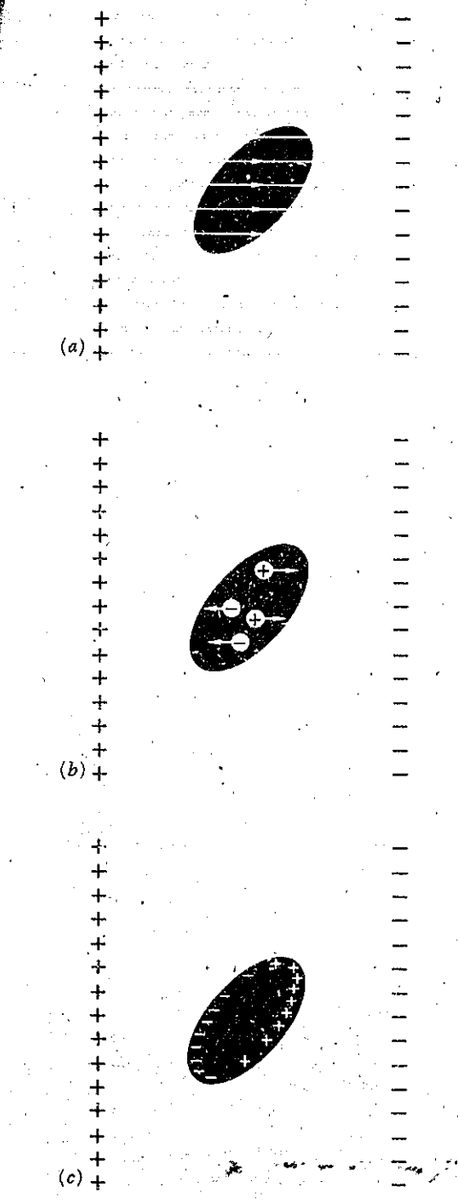
İyi bir elektrik iletkeniyle iyi bir yalıtkan arasındaki ayrım sıvı ile bir katı arasındaki mekaniksel ayrım ölçüsünde geniştir bu durum tam bir raslantı sayılamaz. Her iki özellik atomsal parçacıkların devingenliğine de bağlıdır: elektrik iletkenliği halinde bu, elektronlar ve iyonlar gibi yük taşıyıcılarının devingenliğidir; mekanik özellikler halinde ise maddenin yapısını oluşturan moleküllerin ve atomların devingenliği önemlidir. Bu benzerliği biraz daha ileri götürmek için akışkanlığı katılarla sıvılar arasında bulunan zift veya dondurma gibi maddeler bulunduğunu anımsayalım. Gerçekten bazı maddeler, sıcaklığın birkaç yüz derece alçaltılması ile sürekli olarak bir akışkan halinden esnemez (rijid) " bir katı haline geçerler; cam bunun iyi bir örneğidir. Elektrik iletkenliğinde de "iyi iletken"den "iyi yalıtkan"a kadar giden çok geniş bir örnekler dizisi, ve aynı bir maddenin iletkenliğini sıcaklık gibi koşullara bağlı olarak aynı geniş ölçüde değiştirebilen örnekler buluruz. Çok yararlı ve çekici özellikleri olan yarı iletkenler adındaki madde sınıfı bu özelliklere ve daha başka ilgi çekici özelliklere sahiptir.

Bir maddeye katı veya sıvı deyişimiz, zaman ölçeğine, ve işe karışan uzaklık ölçeğine bağlıdır. Doğal asfalt parçası yeterince katı özelliği gösterir. Bunu jeolojik olarak görecek olursanız, yeraltı kaynaklarından fışkıran hattâ göller oluşturan bir sıvıdır. Benzer nedenlerle bir maddenin bir yalıtkan mı yoksa bir iletken mi olduğu ilgilendiğimiz olayın zaman ölçeğine bağlı olarak belirlenebilir. Yalın ve genel bir olaylar sınıfı için uzaklığın büyüklüğü değil, yalnız zaman ölçeğinin uygun bir ölçüt olduğunu göreceğiz. Bununla birlikte şu andaki amaçlarımız için aradaki ayrımı kesinlikle deyimlemek gerekmez.

*Gray'in kullandığı "paket ipliği" bir metal tele bakınca oldukça kötü bir iletken de olsa durgunyükle yüklerin göçmesine olanak verecek kadar iyi bir iletkindi. Bundan başka Gray ince bakır telin bir iletken olduğunu gördü, ama büyük uzunluklar için paket ipliği kullandı.

3.2 Durgun Elektrik Yükü Alanında İletkenler

Önce iletkenlerin de bulunduğu durgunyük dizgelerine göz atalım Şu anda iletkenlerin bir alan içine girmekle taşıdıkları yüklerin yeniden düzenlenişi ile oluşan *kararlı hal* ile ilgilenmek istiyoruz. Dizge içinde bulunabilecek bir yalıtkanın, gerçek olmasa bile, tam bir yalıtkan olduğu düşünülmektedir. Düşündüğümüz dizgeler için tipik bir örnek verelim. Birbirinden ve bütün çevresinden yalıtılmış yüklü iki metal küreyi birbirine yaklaştırarak oldukça yakın konumlarda tutalım. Kürelerin çevresinde ve arasında bulunan uzay içindeki bileşke alan nedir? Her küre üzerindeki yükler nasıl bir dağılım içine girerler? Daha genel bir soru olarak, yükler kararlı hale girdikten sonra iletken madde içindeki alan üzerine ne söyleyebiliriz.



Şek. 3.1 (a) Buradaki cisim yüksüz ve yalıtkan bir maddedendir. Bunun içindeki artı ve eksi yüklerin her ikisi de devinimsizdir. (b) halinde yükler özgür kalmış ve devinime geçmişlerdir. Bu yükler (c)'de görülen son durum sağlanıncaya değin devinirler.

Durgun hal için yük deviniminden söz edilemez. Buna bakarak iletken içindeki elektrik alanının sıfır olduğunu söylemeğe kalkışabilirsiniz. Diyebilirsiniz ki alan sıfır olmazsa özgün yük taşıyıcıları bir kuvvet etkisi altında kalarak devinime geçerler ve dolayısıyla durgun hal sağlanamamış olur. Böyle bir düşünüş, yüklü taneciklere etkiyerek elektrik kuvvetlerini denkleştirebilecek ve kararlı bir durum doğmasını sağlayabilecek daha başka kuvvetlerin varlığını gözden kaçırmaktadır. Bunun için ağırlığı bile anımsamak yeter. Bir artı iyonun ağırlığı vardır; bir kütle çekim alanı içinde sürekli bir kuvvet etkisi altındadır; aynı şey elektron için de doğrudur; bundan başka bu iki tanenin etkilendikleri kuvvetler eşit değildir. Bu bir bakıma anlamsız bir örnektir. Zira atomlar ölçeğinde kütle çekimi kuvvetlerinin tümünce göz yumulacak denli küçük olduğunu biliyoruz. Ama bunlardan başka kabaca "kimyasal" diye adlandırdığımız kuvvetler işe karışır. Bir batarya içinden canlı gözeye kadar pek çok kimyasal tepkimin oluştuğu yerlerde yüklü tanecikler bazen elektrik alana *karşı* devinirler; böyle davranışın nedeni bu sırada yüklü tanenin, alanı yenmesi için gerektiğinden daha fazla enerji veren bir tepkimin gelişmesidir. Bu kuvvetlere elektriksel kuvvetler demekte duraksanır; çünkü, atomların ve moleküllerin yapısını göz önüne alırsak bunlar arasındaki kuvvetin Coulomb yasası ve kuantum mekaniği ile aydınlanabileceğini varsayarız. Yine de, *klasik* elektrik kuramına göre bunlar biraz değişikişlem görmelidirler. Çünkü kuramın dayandığı, uzaklığın karesi ile ters oranlı yasasından çok ayrı bir davranış içindedirler. Bu anlamda, elektriksel ol-

Tepkim: reaksiyon.

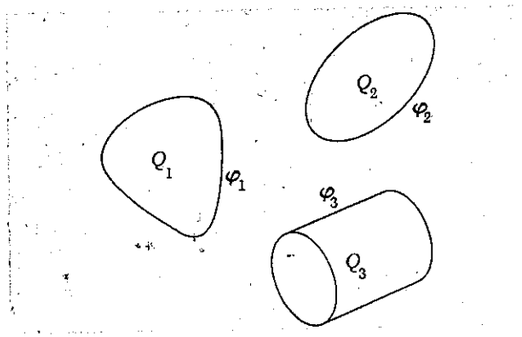
mayan kuvvetlere gereksinim, uzaklığın karesi ile ters oranlı yasasının, dayanıklı durgun yapıların kurulmasına yetmeyeceğini gördüğümüz Bölüm 2'de anlaşılmıştı.

Önemli sorun kısaca şudur: bazı hallerde, iletken ortamın içinde, yüklü parçacıklara etkiyen Coulomb dışı dengelenmemiş kuvvetlerle karşılaşmağa hazır olmalıyız. Bu gibi durumlarda, iletkenin içinde nereden gelirse gelsin, bu kuvvetleri tam karşılayacak kadar bir elektrik alanı bulunduğu zaman ancak durgun yük durumu sağlanabilir.

Bu uyarmadan sonra, bu gibi kuvvetlerin *bulunmadığı* türdeş, eşyönlü* bir iletken madde gibi her zaman karşılaşacağımız bir hale dönüyoruz. Böyle bir iletkenin içinde, durgun halde, elektrik alanının sıfır olması gerektiğini çekinmeden söyleyebiliriz** Eğer böyle olmasa idi yükler devinimde olurdu. Yüklerin devinimsiz oluşundan iletkenin içinin ve bu arada yüzeyinin hemen altındaki noktaların aynı gerilimde olması gerektiği sonucu çıkar. Buna göre iletkenin içi ile dışı arasında gerilim birden sıçrayacaktır (bak. Prob. 3.21). Oysa ele aldığımız türdeş ve eşyönlü bir iletken halinde gerilim atlaması iletkenin her yerinde aynı olacaktır. İletkenin dışında ise alan sıfır değildir. İletkenin yüzeyi bu alanın bir eşgerilim yüzeyi olmalıdır.

Bir maddeyi, yalıtkan halden iletken hale isteğimizce geçirebildiğimizi düşünelim. (Bu olanaksız değildir cam ısıtılmakla iletken olur; herhangi bir gaz X - ışınları ile iyonlanır.) Şek. 3.1 *a* yüksüz yalıtkan bir maddeyi sabit iki yük katmanının oluşturduğu bir elektrik alanı içinde göstermektedir. Elektrik alanı cismin içinde ve dışında aynıdır. Şimdi bir yolunu bularak cisim içinde yüklü tanecikler (veya iyonlar) doğmasına yol açtığımızı ve cismi böylece iletken hale getirdiğimizi düşünelim. Şek. 3.1 *b*'de görüldüğü gibi artı iyonlar alan tarafından bir doğrultuda eksi iyonlar ise zıt doğrultuda sürüklenirler. Bunlar iletkenin yüzeyinden öteye geçemezler. Yüzey üzerinde birikim, cismin içinde ilk alanı karşılayan bir alan uyarmağa başlarlar ve gerçekten yüklerin devinimi ilk alan tam olarak karşılanıncaya dek sürer. Şek. 3.1 *c*'de görülen son yük dağılımı öyledir ki, iletkenin içinde oluşan alan ile dış kaynakların oluşturduğu alan *sıfır* bileşke versin. Bu davranış bütün iletkenler içinde "kendiliğinden" gerçekleştiğinden dış alanlarla ilgilendiğimiz zaman iletkenlerin yalnız yüzeylerini gözönüne almakla yetinebiliriz.

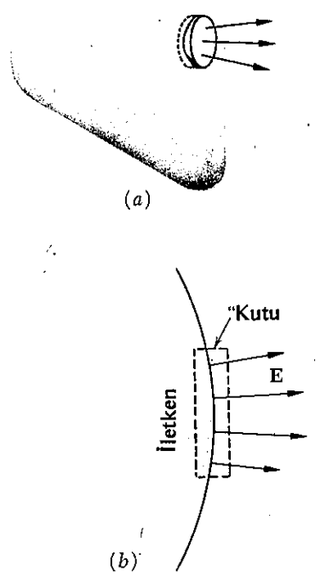
Şimdi bu özelliği aklımızda tutarak, boş uzay içinde ayrımlı yüklenmiş iletkenlerden oluşan bir dizge üzerinde ne söylenebileceğini araştıralım. Şek. 3.2'de görülen cisimler isterseniz katı metal parçaları olsun. Bu cisimlerin yer değiştirmeleri, görülmeyen yalıtkanlar ve belki Stephan Gray'in ipek iplikleri ile önlenmiştir. Her cismin net toplam yükünü sabit alıyoruz, çünkü yük kaçma ya da yeni yükler gelme yolları kapalıdır. Bu net yük örneğin, k'ıncı iletken için Q_k olsun. Bundan başka her cisim



Şek. 3.2 Üç iletkenli bir dizge. Burada Q_1 iletken 1'in yükü φ_1 ise gerilimidir, v b

* Eşyönlü: izotrop.

**Madde içinde elektriksel alandan söz edilirken maddenin atomiu yapısının ayrıntılarına bakınca çok geniş bir bölgedeki ortalama alanı düşünüyoruz. Biliyoruz ki bütün maddelerde, hatta iyi iletken olanlarda bile, atom çekirdeği yakınlarına kadar girecek olursak çok kuvvetli alanlar vardır. Gerçekte Rutherford ve arkadaşları alfa saçılması deneylerini yaptıkları zaman alfaları saçan çekirdek çevresindeki bu alan idi. (Bak Cilt I Böl. 15). Genel olarak çekirdek elektrik alanları, ortalama alana fazla katkıda bulunmazlar, çünkü bu alan çekirdeğin bir yanında bir yönde öteki yanında zıt yöndedir. Ama bu ortalama alanın nasıl tanımlanabileceği ve nasıl ölçülebileceği şimdilik yanıtlanabilecek sorular değildir.



Şek. 3.3 (a) Gauss yasası bir iletkenin yüzeyindeki elektrik alan şiddetini yüzey yük yoğunluğuna bağlar (Denk. 2) (b) İletken yüzeyinin ve kutunun kesiti.

φ gerilim fonksiyonunun φ_k özel değeri ile belirtilebilir. Böylece iletken 2 " φ_2 geriliminde"dir. Şekildeki cisimlerin hiç biri sonsuza doğru uzanmadığına göre sonsuz uzakta bulunan noktalara sıfır gerilimi tanımak uygundur. Bu halde φ_2, küçük bir sınama yükünü sonsuzdan iletken 2 üzerinde bir yere getirmek için yük birimi başına görülen iştir (sınama yükü Kes. 1.7'de belirtildiği gibi küçük tutuluyor).

Şek. 3.2'deki iletkenlerden herhangi birinin yüzeyi bir sabit gerilim yüzeyi olacağından bayır φ'ye eşit olan elektrik alanı, yüzeyin her noktasında bu *yüzeye dik olmak* zorundadır. İletkenin içinden dışa doğru geçilirse, yüzey üzerinde alanın keskin bir değişimi ile karşılaşırız: $\mathbf{E}$ yüzeyin dışında değil, ama içinde sıfırdır. Yüzeyde $\mathbf{E}$'nin süreksizlik göstermesi σ'ca bir yüzey yük yoğunluğu bulunmasından ileri gelir, ve bu nicelik $\mathbf{E}$'ye Gauss yasası ile doğrudan bağlanabilir. Bunu göstermek için, Kes. 2.6'da olduğu gibi küçük bir yüzey parçasını içeren yassı bir kutudan yararlanabiliriz (Şek. 3.3). Burada kutunun "tabanı" iletkenin içinde kaldığı için hiç bir akı geçirmez ve E_n, elektrik alanının yüzeye dik bileşenini gösterdiğine göre yasanın uygulanması $E_n = 4\pi\sigma$ sonucunu verir. Bu halde alan yüzeye hep dikey olduğundan başka bir bileşeni yoktur. Yüzey yüklerinin tümü Q_k toplam yükünü verecektir. Yani σ'nın bütün iletken boyunca alınan yüzey tümlevi Q_k'ya eşit olmalıdır. Özetlersek, biçimleri ve düzenlenişleri ne olursa olsun, böyle bir iletken dizgesi için aşağıdaki deyimi kullanabiliriz:

(1) k inci iletkenin yüzeyinde bulunan bütün noktalarda $\varphi = \varphi_k$

İletkenin hemen dışındaki bir noktada $\mathbf{E}$ yüzeye diktir ve σyerel yüzey yük yoğunluğu olduğuna göre $E = 4\pi\sigma$'dır. (2)

$$Q_k = \int_{S_k} \sigma \, da = \frac{1}{4\pi} \int_{S_k} \mathbf{E} \cdot da \qquad (3)$$

Yukarıdaki (2) deyimi $\mathbf{E}$ alanını yalnızca σ'ya yani yerel yüzey yük yoğunluğuna bağladığına göre $\mathbf{E}$'nin kaynağının yalnız σ olduğunu düşünebilirsiniz. Bu doğru değildir. $\mathbf{E}$ alanı, dizgede bulunan yakın ya da uzak bütün yüklerin oluşturduğu bir alandır. İletkenin üzerindeki yüzey yükleri (2) bağıntısı sağlanıncaya kadar kendilerini düzenlemek zorundadırlar. Başka yüzey yük dağılımlarının tersine iletkenin, özel bir hal oluşu Şek. 3.4'deki karşılaştırma ile belli olur.

Şek. 3.5 daha önce belirttiğimiz basit bir dizge hali için yük dağılımını ve alanı vermektedir. Burada iki iletken küre vardır; bunlardan biri birim yarıçaplı ve tüm yükü +1 esb'dir, öteki ise tüm yükü sıfır olan daha büyük yarıçaplı bir küredir. Yüzeyce yük yoğunluğunun iletkenlerin her ikisinde de biteviye olmadığını unutmayın. Yükü sıfır olan sağdaki kürenin,

soldaki küreye bakan yüzünde bir eksi yük yoğunluğu, öteki yüzünde ise artı yük yoğunluğu vardır. Şek. 3.5'deki noktalı eğriler eşgerilim yüzeyleri, daha doğrusu eşgerilim yüzeylerin şekil düzlemi ile kesitlerini gösterirler. Dizgenin dışına epey uzaklara gidecek olursak, eşgerilim yüzeylerin hemen hemen küresel, alan çizgilerinin ise hemen hemen ışınsal hale geldiklerini ve alanın, dizgenin net yükü olan $+1$ esb değerinde bir nokta yükün alanına benzemeğe başladığını görürüz.

Şek. 3.5 bu dizge için beklediğimiz birtakım sonuçları hiç değilse nitel olarak vermektedir. Ama bu örneği alışımızın başka nedeni var. Dizge bu denli basit olduğu halde bu haile ilgili matematiksel problemin tam çözümü doğrudan ve kolayca bulunamaz. Bu şeklimiz yaklaşık bir çözümden çıkarılmıştır. Gerçekte iletkenlerin üç boyutlu uzay içinde, yakın bir matematiksel çözüme elverişli geometrik düzenlenişlerinin sayısı üzülecek kadar azdır. Öte yandan uygun düzenlenmiş birkaç örnek dizgenin çözümleri üzerinde uğraşıp durmakla fazla fizik öğrenilmiş olmaz. Onun yerine, böyle bir dizgeyle ilgili matematiksel problemin genel içeriğinin ne olduğunu anlamağa çalışalım.

3.3 Genel Durgun Yük Problemi: Biriklik (ya da Eşsizlik) Teoremi

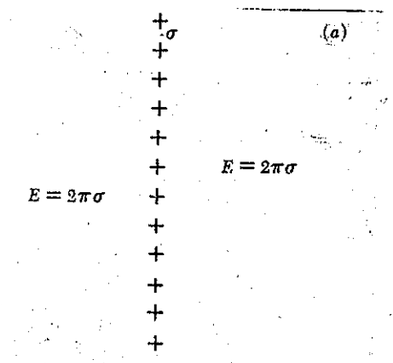
Biz bu problemi φ gerilim fonksiyonu cinsinden söyleyebiliriz; zira φ bulunursa bundan $\mathbf{E}$'yi hemen elde edebiliriz. İletkenin dışında bulunan bütün noktalar için, φ Böl. 2'de tanıdığımız Laplace denklemini yani $\nabla^2\varphi = 0$ tikel diferansiyel denklemini doğrulamak zorundadır. Dik konumluk çatkısında Laplace denklemi,

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = 0 \qquad (4)$$

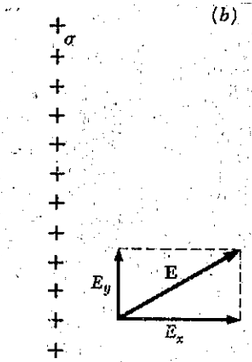
şeklindedir. O halde problemimiz, Denk. 4'ü doğrulayan ve aynı zamanda iletkenlerin yüzeyi ile ilgili koşulları yerine getiren bir fonksiyon bulmaktır. Bu koşullar çeşitli yollardan verilmiş olabilir. İletkenlerden herbirinin gerilimi φ_k gibi bilinen bir değerde tutulmuş olabilir. (Gerçek bir dizgede gerilim bu cisimleri bataryalara veya güç kaynaklarına bağlayarak sürekli sabit tutulabilir.) O zaman $\varphi(x,y,z)$ çözümü yüzeylerin herbiri üzerinde ve bütün noktalarda uygun değeri almak zorundadır. Bu yüzeyler, bütünü ile φ 'nin tanımlandığı bölgeyi *sınırlarlar*, yeterki bunlara, φ 'nin sıfıra yaklaştığı "sonsuzdaki" büyük bir yüzey de katılmış olsun. Bazen ilgilendiğimiz bölgenin bütünü iletken bir yüzeyin içinde kalır; o zaman biz bu iletkeni bir gerilimde tutar ve onun dışındaki her şeye gözyumabiliriz. Her iki halde de tipik bir *sınır değeri problemi* karşısındayız demektir. Böyle bir problemde fonksiyonun sınır üzerinde alacağı değer bütün sınırlar için önceden belirtilmiştir.

Bunun yerine iletkenlerden herbiri üzerinde bulunan net Q_k yükü verilebilir. (Bütün yükleri ve gerilimleri istediğimize göre belirleyemeyiz, çünkü bu problemi fazla sınırlamak olur.) İletkenlerin üzerindeki yükler belirtilecek olursa, bayır φ 'nin her iletkenin üzerinde alınacak yüzey tümlevinin değerini saptamış oluyoruz demektir. Bu, matematiksel probleme biraz ayrı bir görünüş kazandırır. Başka bir yol da iki çeşit sınır koşulunu "karıştırmak" olabilir.

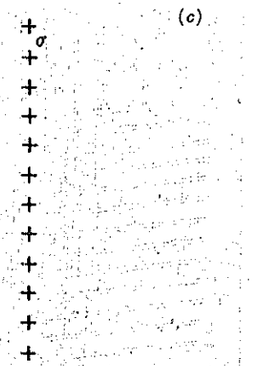
Oldukça ilgi çekici genel bir soru şu olurdu: Sınır koşulları bir ya da başka biçimde verildiğine göre, problemin yalnız bir çözümü mü vardır? Yoksa hiç bir çözüm bulunamaz mı? Bu soruyu, alabileceği bütün biçimler için yanıtlamaya çalışmak istemiyoruz; ama önemli bir hal böyle bir sorunun nasıl işlenebileceğini ve nasıl yararlı sonuçlar verebileceğini gösterir. İletkenlerden herbirinin φ_k geriliminin belirtilmiş olduğunu ve bununla birlikte φ'nin sonsuz uzaklıkta ya da dizgeyi saran bir iletken üzerinde sıfır değerine yaklaşacağını düşünelim. Şimdi bu sınır koşulu probleminin birden fazla çözümü olmadığını tanıtlayalım. Böyle bir problemin bir çözümü olduğu fiziksel bir gerçek olarak oldukça açık görülmektedir, zira, iletkenleri istenilen biçimde düzenledikten sonra sonsuz ince tellerle uygun gerilim kaynaklarına bağlayacak olursak, dizgenin belli bir halde karar kılacağı doğaldır. Bununla birlikte böyle bir çözümün her zaman var olduğunu matematikçe tanıtlamak ayrı bir sorundur, ve burada bu işe girişmeyeceğiz. Bunun yerine bir $\varphi(x,y,z)$ çözümünün var olduğunu düşünecek ve bunun birik yani bir "tek" olduğunu, ikinci bir"



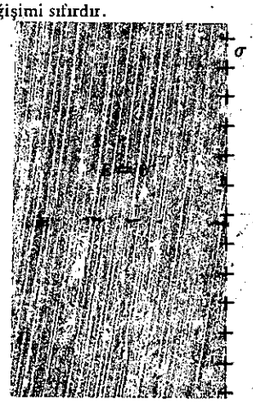
Şek. 3.4 (a) Yalıtılmış yalın bir yüzey yük katmanı. Bu, Şek. 1.23'de işlenmişti. Alanın yeğinliği bakışım nedeniyle yüzeyin iki yanında da $2\pi\sigma$ olarak hesaplanmıştı.



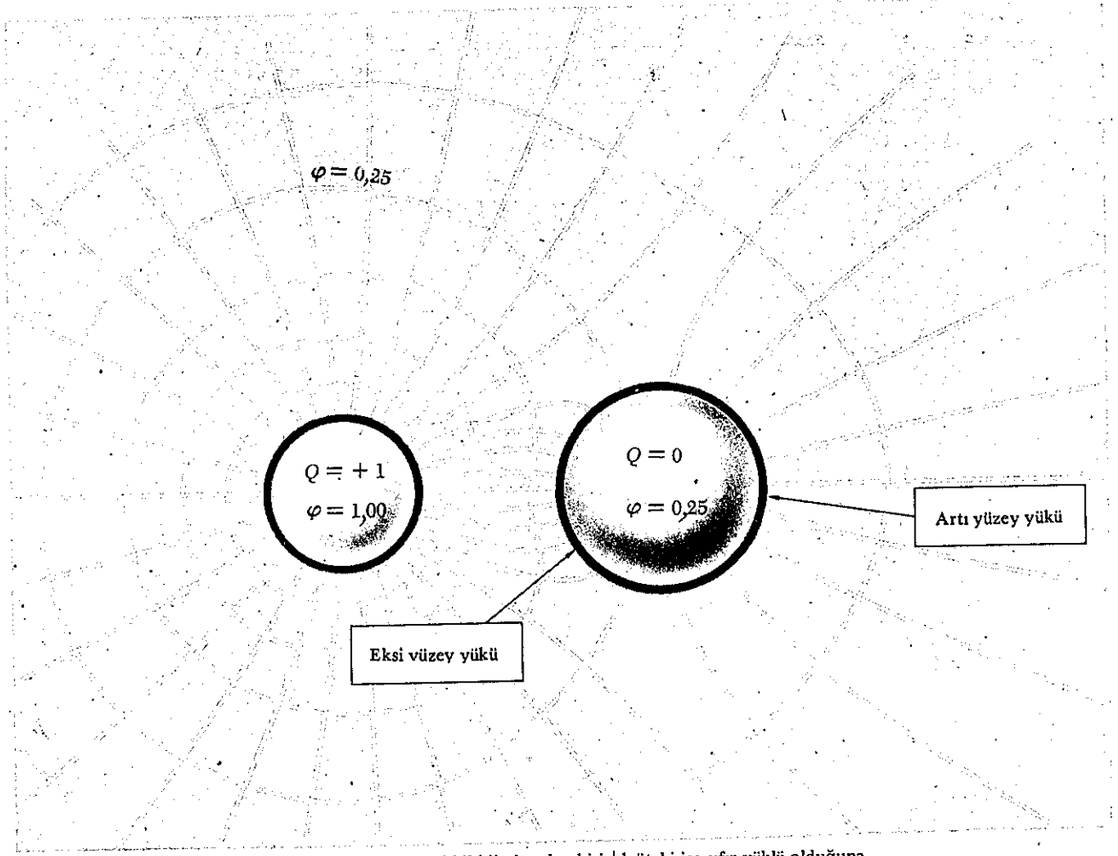
(b) Eğer dizgede başka yükler varsa, $\overline{E_x}$'in yüzeyden geçerken değişimi $4\pi\sigma$ olduğu halde $\bar{E}y$'nin değişimi sıfırdır.



(a) Yukardaki (a) alanından ayrı bir çok alanlar bu özellikte olabilirler. Böyle ikisi (b) ve (c)'de görülüyor.



(d) Yüzeyin bir yanındaki ortam bir iletken ise, öte yanında E'nin yüzeye dik ve değerinin $E = 4\pi\sigma$ olduğunu biliyoruz.



Şek. 3.5 Küre şeklindeki iki iletkenden biri+1 öteki ise sıfır yüklü olduğuna göre, çevrelerindeki elektrik alanı. Noktalı eğriler eşgerilim yüzeylerin şekil düzlemi ile kesitleridir. Sıfır gerilim yeri sonsuzdadır.

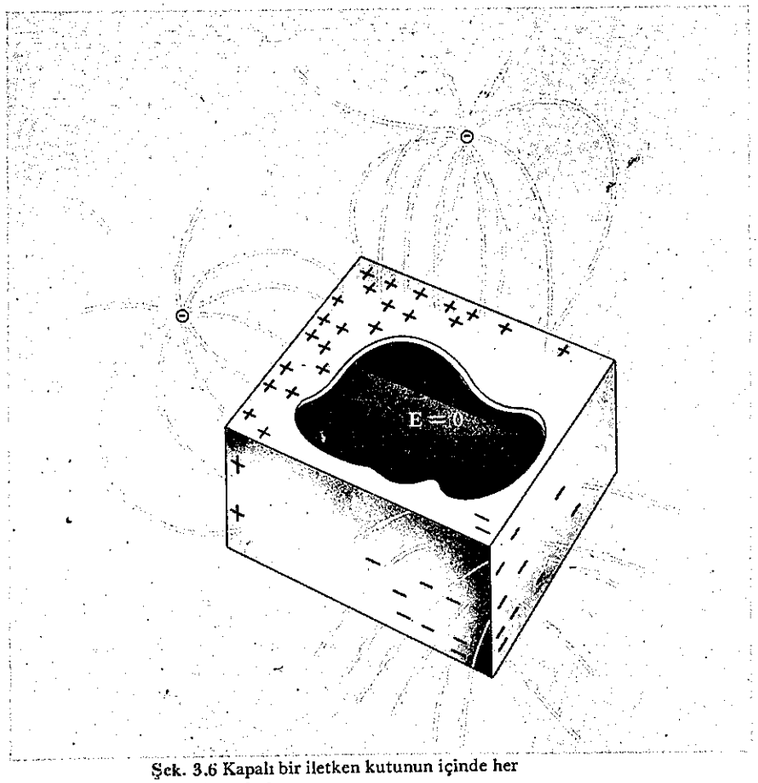
"eşi" bulunmadığını göstereceğiz. Bu gibi tanıtlamalarda bir düşünüş şekli aşağıda verilmiştir.

Başka bir $\psi(x,y,z)$ fonksiyonunun aynı sınır koşullarını yerine getiren bir çözüm olduğunu düşünelim. Laplace denklemi çizgiseldir. Yani φ ve ψ, Denk. 4'ü doğrulamakta iseler, bunların $\varphi+\psi$ gibi veya $c_1\varphi+c_2\psi$ gibi bir çizgisel birleştirimi de bu denklemi doğrularlar; burada c_1 ve c_2 sabit sayılardır. Özellikle bu iki çözümün $\varphi - \psi$ farkı da, Denk. 4'ü doğrulamalıdır. Bu ayrım fonksiyonu W ile gösterelim:

$$W(x,y,z) = \varphi(x,y,z) - \psi(x,y,z) \qquad (5)$$

olur. Bu W fonksiyonunun sınır koşullarını doğrulamadığı açıktır. Çünkü φ ve ψ fonksiyonları, örneğin k numaralı iletkenin yüzeyi üzerinde aynı φ_k değerini aldıklarına göre W bütün iletkenlerin üzerinde sıfır olmak zorundadır. Bu nedenle W başka bir durgunyük problemin, ayni iletkenlerden kurulmuş ama bütün bu iletkenler üzerindeki gerilimlerin sıfır olduğu bir problemin çözümü olur. Ama bu böyle ise, W'nin uzayın bütün noktalarında sıfır olması gerektiğini ileri sürebiliriz. Eğer böyle değilse, bu fonksiyonun bir yerde bir doruğu* ya da bir oyluğu** bulunmalıdır; zira unutmayalım ki, W sınırlarda yani iletken yüzeylerinde olduğu kadar sonsuzda da sıfırdır. O halde W'nin bir P noktasında bir uçdeğeri varsa, bu noktada merkezlenmiş bir küre üzerinde, Laplace denklemini

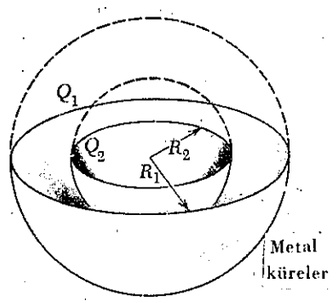
* Doruk: maksimum**Oyluk : minimum.



Şek. 3.6 Kapalı bir iletken kutunun içinde her yerde alan sıfırdır.

doğrulayan bir fonksiyonun ortalamasının Böl. 2'de gördüğümüz gibi, merkezindeki değerine eşit olması gerekir. Oysa merkez bir doruk ya da bir oyluk noktası ise, bu doğru olamaz. Demek ki, W bir doruk ya da oyluk değer alamaz; yani bu fonksiyon her yerde sıfır olmalıdır. Bundan her yerde $\psi = \varphi$ olması gerektiği, yani Denk. 4'ün konulan sınır koşullarını doğrulayan bir tek* çözümü bulunduğu sonucunu çıkarırız.

Şimdi **ilginç** başka bir olguyu tanıtlayabiliriz. *Biçimi ne olursa olsun koğuk bir iletkenin sardığı uzayın içinde hiç bir yük yok ise, elektrik alanı sıfırdır. Bu dediğimiz iletkenin dışında bulunan alanın değeri ne olursa olsun doğrudur. Daha* önce, küre biçimli yalıtılmış düzgün bir yük kabuğu içindeki alanın, tıpkı küresel koğuk bir kütle kabuğu içindeki kütle çekimi alanı gibi sıfır olduğunu biliyoruz. Belirttiğimiz bu teorem, bir bakıma daha şaşırtıcıdır. Şek. 3.6'da bir kısmı kesik görünen kapalı metal kutuyu ele alalım. Kutunun yakınlarında yükler vardır ve dışındaki alan yaklaşıkça şekilde görüldüğü gibidir. Kutunun yüzeyi üzerinde hiçte düzgün olmayan bir yük dağılımı bulunmaktadır. Şimdi uzaydaki *ve bu arada kutunun iç bölgesindeki* elektrik alanı, bu yük dağılımı ile, dış kaynaklardan gelen alanın toplamına eşit olacaktır. Kutunun yüzeyindeki elektrik yüklerinin çok ustaca bir düzenlenişe girerek, içeride her noktada oluşturdukları alanlarla dış alanı tam olarak karşılayıp yok ettiklerine inanmak



Şek. 3.7 Küresel kabuklar üzerinde verilen Q_1 ve Q_2 yükleri için, iç kabuğun gerilimi Denk. 6 ile verilir.

insana güç gelir. Ama, bir iki tümce içinde göstereceğimiz gibi, olan da budur.

Kutunun içinde, $\varphi(x,y,z)$ gerilim fonksiyonu Laplace denklemini doğrulamak zorundadır. Bu bölgenin bütün sınırları ve bu arada kutunun kendisi bir eşgerilim yüzeyidir, yani sınır üzerindeki her noktada $\varphi = \varphi_0$ bir sabittir. O halde bütün hacim boyunca geçerli çözümlerden biri $\varphi = \varphi_0$'dır. Ama bizim "eşsiz" lik veya "birik olma" teoremimize göre ancak bir tek çözüm vardır ve o da yukarki çözümdür. "$\varphi =$ sabit" $\mathbf{E} = 0$ olmasını gerektirir, zira $\mathbf{E} = -$ bayır φ'dir.

İletken bir kılıfın içinde elektrik alanı bulunmayışı hem işe yarar, hem de kuramca ilginçtir. Bu elektriksel perdelemenin temelidir. Birçok işler için perdelemenin tümden deliksiz olması gerekmez. Çeperler üzerinde küçük delikler bulunması veya bir tel örgü kullanılması ile içerdeki alan çok zayıflatılır, yeterki bu deliklere pek yakın bulunmayalım. İki ucu açık olan bir metal borunun boyu, çapının bir kaç katı ise, uçlarına yakın olmayan noktalarda çok etkili bir perdeleme sağlar. Burada yalnız durgun alanı ele aldığımıza kuşku yoktur; ama dediklerimiz yavaş değişen elektrik alanları için de doğrudur.

* İm: işaret.

3.4 Bazı Basit İletken Dizgeleri

Bu kesimde özellikle basit olan bazı iletken düzenlenişlerini inceleyeceğiz. İşe, yarıçapları R ve R_2 olan, Q_1 ve Q_2 gibi yükler taşıyan aynı merkezli iki metal küre ile başlıyoruz (Şek. 3.7). Bu düzenleniş güç bir problem değildir. Gerçekte bakışım dolayısı ile yükler kürelerin üzerine düzgün olarak dağılmışlardır ve bu, aslında Böl. 1 için bir örnektir. Büyük kürenin dışında alan Q_1+Q_2 değerinde bir nokta yükün alanının aynıdır, şöyleki, dış kürenin gerilimi

$$\varphi_1 = \frac{(Q_1 + Q_2)}{R_1}$$

olur. İç kürenin gerilimi ise,

$$\varphi_2 = \frac{Q_1 + Q_2}{R_1} + \int_{R_1}^{R_2} -\frac{Q_2}{r^2}\,dr =$$

$$\frac{Q_1}{R_1} + \frac{Q_2}{R_1} + \frac{Q_2}{R_2} - \frac{Q_2}{R_1} = \frac{Q_1}{R_1} + \frac{Q_2}{R_2} \qquad (6)$$

ile verilecektir. Bu φ_2, iç kürenin sardığı bütün bölgenin gerilimidir. Burada elde ettiğimiz

$$\varphi_2 = (Q_1/R_1) + (Q_2/R_2)$$

deyimini üstüste gelebilme ilkesi ile doğrudan bulabilirdik: Zira Q_1/R_1 büyük kürenin yalnız iken gerilimini, Q_2/R_2 ise iç küre yalnız iken içinin gerilimini verir. Küreler eşit ve zıt imli* $Q_1 = -Q_2$ yükleri taşısa idiler, yalnız onların arasındaki bölgede sıfırdan farklı bir elektrik alanı bulunurdu.

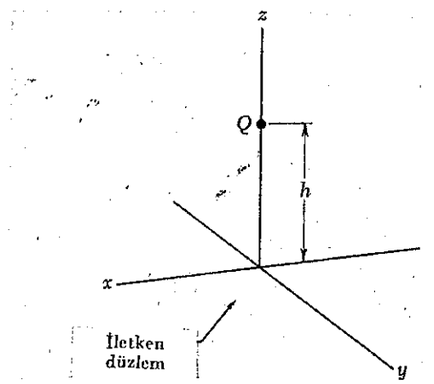
Yalın başka bir dizge, yüklerin devingenliğinin açıkca görüldüğü bir iletken düzlemle, yakınında bulunan bir nokta yükün oluşturduğu düzendir. Sonsuza dek uzandığını varsaydığımız düzlem iletkenin yüzeyi xy düzlemi olsun. Bu düzleme sıfır gerilimi tanıyalım. Şimdi bu düzlemin yakınına Şek. 3.8 a'da görüldüğü gibi z ekseni üzerinde düzlemden h uzaklıkta bir artı Q yükü getirirsek Simdi nasıl bir alan ve ne gibi bir yük dağılımı bekleyebiliriz? Getirdiğimiz Q artı yükü iletkendeki eksi yükleri çekecektir, ama bu eksi yükierin Q 'den inilen dikmenin ayağında birikmelerini beklemek doğru değildir. Niçin? Üstelik, elektrik alanının iletkenin yüzeyine dik olacağını anımsayalım. Sonra Q nokta yükünün çok yakınında iletket bir yaprağın bulunması yükün alanı bakımından çok büyük bir ayrım oluşturmaz; alan çizgileri Q 'den başlayarak dışa doğru ışınsal giderler. Böylece nitel olarak Şek. 3.8 b'dekine benzer, bazı ayrıntıları belirsiz bir alan çizgeleri düzeni elde ederiz. Dizgenin tümünün z ekseni çevresince bakışımlı olması doğaldır.

Ama bu problem gerçekte nasıl çözülür? Sorunun yanıtı, problemin hem öğretici hem de çok kullanışlı bir oyunla çözüleceğidir. Bunun için çözümü kolay bir problem buluyoruz ve problemin tümünün ya da parçasının çözümünü elimizdeki probleme uygun düşmesini sağlıyoruz. Burada kolay problem Q ve $-Q$ gibi zıt imli iki yükün oluşturduğu dizgedir. Bu iki yükü birleştiren doğruyu ortasından dik olarak kesen ve Şek. 3.8 c'de AA çizgisi ile gösterilen bakışım düzleminin her noktasında alan çizgileri yüzeye diktir. Q yükünü düzlemden h uzaklığında alırsak, Şek. 3.8 c'nin üst yarısı bizim bütün aradıklarımızı karşılar: Alan iletken düzleme diktir ve Q 'nün yakınlarında, bir nokta yükün alanına yaklaşır.

Buradaki sınır koşulları geçen kesimdeki eşsizlik (biricik olma) teoremi içinde verilmiş olanların tam aynı değildir. İletkenin gerilimi saptanmıştır, ama dizgede bir nokta yük vardır ki, bu yükte gerilim sonsuza yaklaşmaktadır. Biz nokta yüke, üzerindeki Q toplam yükü sabit olan küçük bir küresel iletkenin ereyi gibi bakabiliriz. Bu "karışık" sınır koşulları için –kimi yerlerde gerilim verilmiştir ve kimilerinde toplam yük verilmiştir– eşsizlik teoremi de doğru kalabilir. "Ödünç" aldığımız çözüm bu kadar uygun düştüğüne göre bu *çözüm* olmalıdır.

Şekil 3.9 düzlemin üst yanındaki alan için son çözüm ile buna uygun yüzey yük yoğunluğunu göstermektedir. Alanın herhangi bir noktadaki doğrultusunu ve yeğinliğini Şek. 3.8'deki iki yük problemine dönerek ve Coulomb yasasını kullanarak hesaplayabiliriz. Yüzey üzerinde başlangıç noktasından r uzaklıkta bir nokta dikkate alalım. Bu noktanın Q 'den uzaklığının karesi $r^2 + h^2$ dir ve Q'nün bu noktadaki alanının z bileşeni $-Q\cos\theta/(r^2+h^2)$'dir. Düzlemin alt yanındaki $-Q$ görüntü yükü, alanın z bileşenine aynı değerde bir katkıda bulunur. Böylece bu

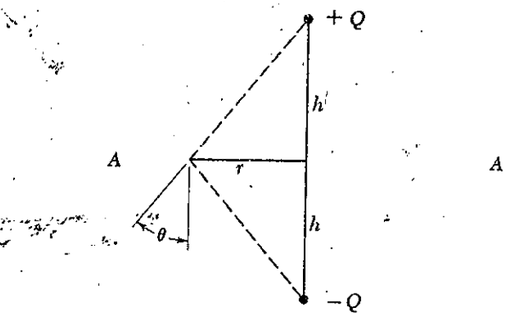
* Yeğinlik: Şiddet.



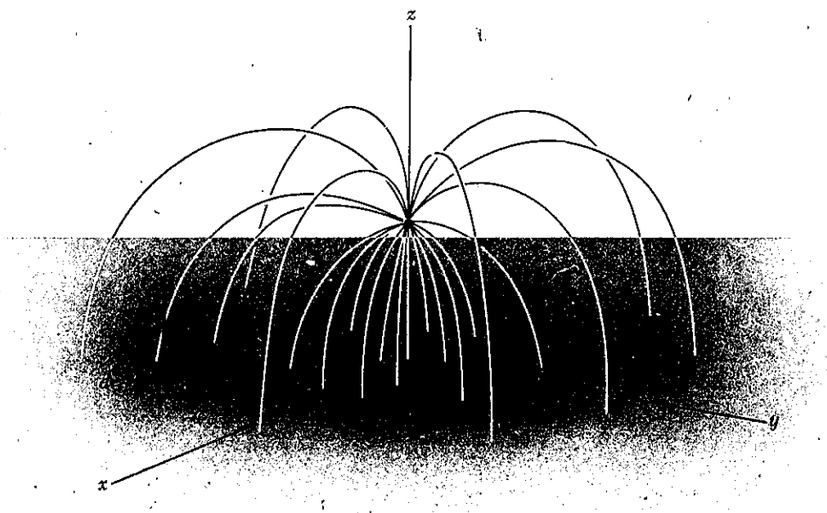
Şek. 3.8 (a) Sonsuz bir düzlem iletkenin üst yanında bulunan bir Q yükü.



(b) Alan buna benzer bir şey olmalıdır.



(c) Zıt imli bir yük çiftinin alanı.



Şek. 3.9 Düzlemin üzerinde bulunan yükün alan çizgilerinden bazıları. Yüzey üzerindeki alan yeğinliğinin Denk. 7 ile verilen değeri σ yüzey yük yoğunluğunu belirler.

noktadaki elektrik alanı:

$$E_z = \frac{-2Q}{r^2 + h^2}\cos\theta = \frac{-2Q}{r^2 + h^2}\cdot\frac{h}{(r^2 + h^2)^{1/2}} = \frac{-2Qh}{(r^2 + h^2)^{3/2}} \qquad (7)$$

ile verilir. Bu bize σ yüzey yük yoğunluğunun değeri olarak:

$$\sigma = \frac{E_z}{4\pi} = \frac{-Qh}{2\pi(r^2 + h^2)^{3/2}} \qquad (8)$$

değerini verir. Bu yüzey üzerindeki toplam yük $-Q$'yü bulmalıdır. Bu sonucu *sınamış olmak için bütün* yüzey üzerinde tümlev alacak olursak:

$$\text{Toplam yüzey yükü} = \int_0^\infty \sigma \cdot 2\pi r\, dr = -Q\int_0^\infty \frac{hr\, dr}{(h^2 + r^2)^{3/2}} = -Q \qquad (9)$$

buluruz.

Burada kullanılan çözüm yoluna, *görüntü yöntemi* denilegelmiştir. Düzlemin alt yanında ve h uzaklığında bulunan yalancı eksi yükün, Q nokta yükünün bir aynanın gerisinde vereceği sanal görüntü gibi bir "görüntü" sayılabileceği ve alan çizgilerinin oraya doğru toplandığı düşünülür. Yüzey yüklerinin Q yüküne etkiledikleri çekme kuvveti, görüntü konumundaki $-Q$ yükünün etkidiği kuvvete eşit olacaktır. Gerçekte bu kuvvetin kaynağı yüzey yükleridir.

Bununla birlikte, ayna benzerliği gerçeğe çok yakın değildir ve çok ta yararlı olamaz. Bu yöntemi, "sınırları probleme uydurmak" diyebileceğimiz daha genel bir yanaşımın örneği sayarak daha iyi anlayabiliriz. Bununla ne demek istediğimizi göstermek için, Şek. 3.10 a'da görülen eşit ve zıt işaretli iki nokta yükün uyardığı alanın eşgerilim yüzeylerine bakalım. Düzlem bunlardan yalnız biridir. Öteki ler ise, hiç biri küre olmayan kapalı yüzeylerdir, ve gerekirse yalın bir hesapla bunların yerlerini bulabiliriz. Şimdi bu yüzeylerden *herhangi ikisini* alsak ve tam onlar biçiminde metal yüzeyler hazırlasak, onlar

gibi yerleştirsek böyle iki iletkenin oluşturduğu durgun yük alanı için tam çözüm elimizde hazır bulunurdu (Şek. 3.10 b). Bunlar iki-yük dizgesinin alanına uyan birer parça olurlardı. Ne yazıkki, çözüm yöntemi ararken kimse bu şekilde elektrotlar yapma hevesine düşmemektedir, ve yaklaşık bir çözüm olarak küresel elektrotlar alma düşüncesi daha çok ilgi çeker.

Daha kullanışlı olabilecek örnekler aramakla başka yalın dizgelerin eşgerilim yüzeylerini incelemeyi sürdürebiliriz. Bu yönteme belki "bir problem için hazır çözüm" yöntemi denilebilirdi. Bunun kullanışlılığı Prob. 3.22'de güzel bir örnek halinde incelenmiştir. Maxwell bu durumu iyi anlatmıştır:
" Böylece görülüyor ki, bizim ters problemimizin karşıtı, gerilim verildiğine göre bu gerilimi oluş turacak iletkenlerin biçimlerinin bulunması, iletkenlerin şekli verildiğine göre gerilimin bulunmasından daha kolay işlenebilir bir problemdir*.

3.5 Sığa ve Sığaçlar**

Birbirine benzer yassı iki iletken yaprak Şek. 3.11 a'da görüldüğü gibi s aralıkla koşut duracak biçimde düzenlenmişlerdir. Yaprakların yüzölçümü A olsun ve biri üzerinde Q yükü, ötekinde ise $-Q$ yükü bulunsun. Yaprakların herbirinin de gerilimi φ_1 ve φ_2 olsun. Şek. 3.11 b dizgedeki alan çizgilerinin kesitini gösteriyor.

Yaprakların arasında kıyılardan uzaktaki bölgede hemen hemen düzgündür. Alan düzgün işlemi görünce büyüklüğü $(\varphi_1 - \varphi_2)/s$'ye eşit olmalıdır. Yaprakların birinin iç yüzeyinde bu alanı tutan yük yoğunluğu,

$$\sigma = \frac{E}{4\pi} = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{4\pi s} \qquad (10)$$

olacaktır. Yapraklar arasında E alanının değişimi ve dolayısı ile σ 'nin kıyılara doğru gidince uğradığı değişime göz yumarsak, yaprakların toplam yükünü basitçe yazabiliriz:

$$Q = A\frac{(\varphi_1 - \varphi_2)}{4\pi s} \quad \text{(kıyı etkisi savsanıyor)} \qquad (11)$$

Yaprakların s aralığının yüzey boyutlarına oranı ne denli küçük ise Denk. 11'in o derece sağlıklı olmasını beklemeliyiz. Buradaki durgunyük problemini özel bir yaprak biçimi, kıyılar ve her yer için tam olarak çözmek gerekirse, Denk. 11 yerine tam bir yazım almak zorunda bulunuruz. Denk. 11'in yaklaşıklık derecesinin ne olduğunu göstermek için, iletken yapraklar aralığı değişebilen bir dizge halinde bu denklemin verdiği Q yükünün gerçek değerlerden ne denli ayrı olduğunu gösteren f düzeltme katsayısının değerleri Şek. 3.12'deki çizelgede verilmiştir. Toplam yük, Denk. 11'in öngördüğü yüklerden her zaman biraz daha büyüktür. Şek. 3.11 b'ye bakacak olursak bu düzeltme akla yakın gelmektedir, zira kıyılarda fazla bir yük birikmesi olabileceği gibi dış yüzeylere bir parça yük kaçabilir.

Şimdi burada bu gibi düzeltmelerin ayrıntıları ile ilgilenmeyip iki iletkenden oluşmuş bir dizgenin genel özellikleri ile uğraşmaktayız. Bu iletken yapraklar çifti elektrik dizgelerinde çok kullanılan ve adına *sığaç (Kondansatör)* denilen bir düzenek örneğidir. Sığaç değişik gerilimlerde bulunan ve farklı yükler taşıyan birbirine pek yakın iki iletkenden başka bir şey değildir. Şimdi bu iletkenlerden biri üzerindeki Q yükü ile iletkenler arasındaki gerilim farkını bağlayan bir bağıntı kuralım. Denk. 11'in uygulanabildiği özel bir dizge halinde $Q/(\varphi_1 - \varphi_2)$ oranının değeri $A/4\pi s$ 'ye eşittir. Bu bağıntı yaklaşık bile olsa, doğru yazımın yaprakların büyüklüğünü ve geometrik düzenlenişine bağlı olacağı açıktır. Başka bir deyişle sabit bir iletken çifti için yükün gerilim farkına oranı bir sabit olacaktır. Bu sabitin adına sığacın *sığası* diyeceğiz ve C ile göstereceğiz.

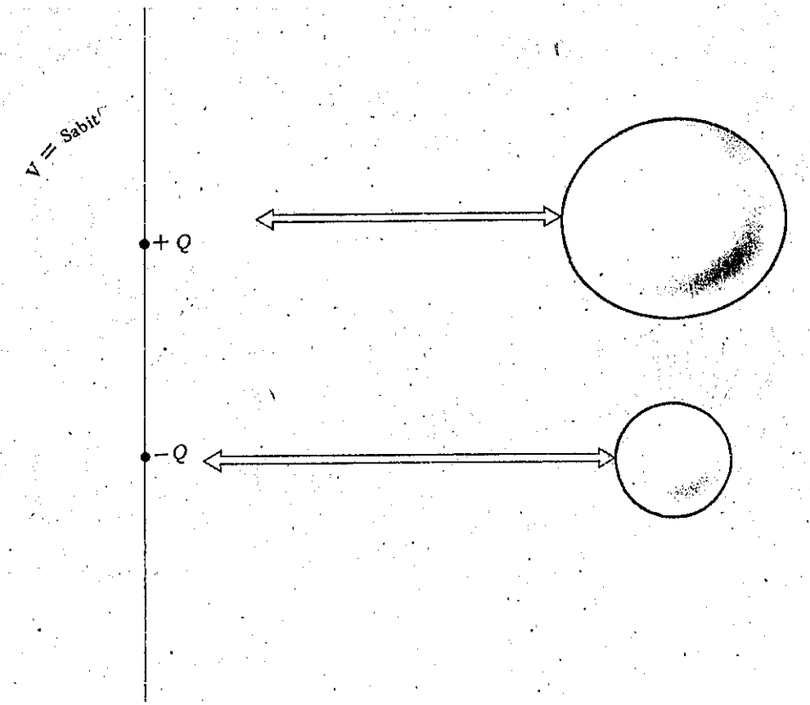
$$Q = C(\varphi_1 - \varphi_2) \qquad (12)$$

Böylece kıyı alanları savsanan koşut yapraklı bir sığacın sığası

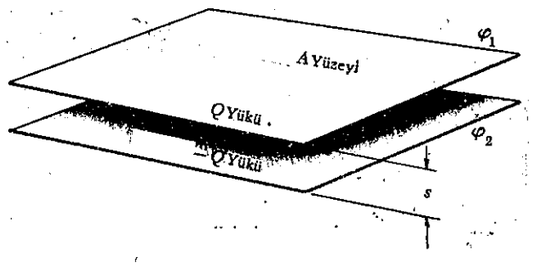
$$C = \frac{A\ (\text{cm}^2)}{4\pi s\ (\text{cm})} \qquad (13)$$

*James Clerk Maxwell, Treatise on Electricity and Magnetism Cilt I Bölüm 7 (3d. ed. Oxford University Press, *1891*; reprint ed., Dover, New York, 1954). Her fizik öğrencisi bir fırsatını bulup Maxwell'in kitabını incelemelidir. Kitabın Bölüm 7'si, içinde bulunduğumuz konu bakımından derinlemesine incelenecek bir yerdir. Cilt I'in sonunda bazı elektrik alanlarının çok güzel çizimlerini bulacaksınız; az ilerde Maxwell'in bu şekilleri niçin verdiği anlaşılacaktır. Yazarın bunları çizerken yapılarının inceliğinden hoşlandığı düşünülebilir

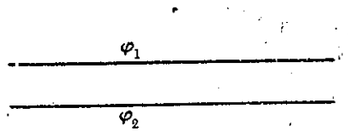
** Sığaç: Kondansatör.



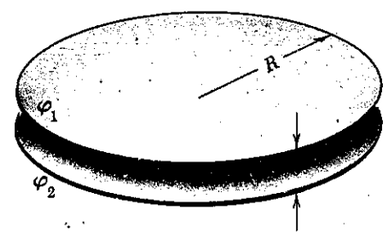
Şek. 3.10 (a) Eşit ve zıt işaretli iki nokta yükün eşgerilim yüzeylerinin kesiti. (b) Böyle iki eşgerilim yüzeyin bir metal tarafından maddeleştirilmesi. Tam bu biçimde olan ve bu aralıkta duran iletkenlere Q ve $-Q$ yükleri verilecek olursa çevrede tam aynı alanı oluştururlar.



Şek. 3.11 (a) Koşut yapraklı sığaç.



(b) a'nın alan çizgilerini gösteren kesit.



Şek. 3.12 Dairesel koşut iki yapraktan oluşmuş bir sığacın gerçek sığası ile Denk. 11'in verdiği değerlerin aralık, yarıçap oranları için karşılaştırılması.

Kıyı etkisi düzeltmesini Q yükünü

$$Q = \frac{A(\varphi_1 - \varphi_2)}{4\pi s} \cdot f$$

yazarak belirtebiliriz. Dairesel levhalar için f,s/R'ye aşağıdaki biçimde bağlıdır.

s/R	f
0,2	1,286
0,1	1,167
0,05	1,094
0,02	1,042
0,01	1,023

ile verilir.

Kullanmakta olduğumuz CGS birimleri dizgesinde yükler esb ve gerilimler statvolt ile ölçüldüğünden sığa uzunluk boyutunda çıkar ve sığa birimi basitçe santimetre adını alabilir. Herbirinin yüzölçümü 100 $c\pi$,^{2} aralıklara 1 mm olan bir sığacın sığası

100/(4π) (0,1) cm ya da 79,5 cm olur.

Alışık olmamız gereken öteki birim dizgesinde yani "kılgın" dizgede elektrik yük birimi coulomb ya da ampere-saniye, potansiyel-birimi ise volt'dur. Bu dizgedeki birim sığa, yaprakları arasında bir voltluk gerilim farkı oluşunca yapraklarından her birinde 1 coulomb'luk yük biriken sığadır. Bu birimin adına *farad* denir. Farad'ı CGS sığa birimine yani santimetreye bağlamak için 1 volt = 1/300 statvolt ve 1 coulomb= 3×10^9esb olduğunu anımsayarak

$$1 \text{ farad} = \frac{1 \text{ coulomb}}{1 \text{ volt}} = \frac{3 \times 10^9 \text{ esb}}{(1/300) \text{ statvolt}}$$

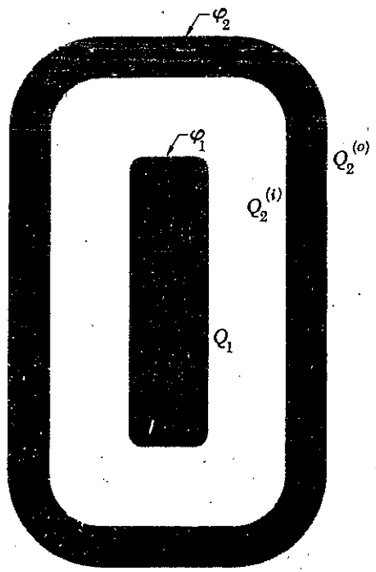
$$= 9 \times 10^{11} \frac{\text{esb}}{\text{statvolt}} = 9 \times 10^{11} \text{ cm}.$$

bulunur. Bir farad'lık bu sığaç dev büyüklükte olurdu. Böyle bir sığacın 1 mm aralıklı düzlem yapraklardan yapılmasını istersek, her yaprağın yaklaşık olarak 100 km^2 olması gerekirdi*. Bu "kılgın" (pratik) birimlerin pek de uygun olmayan büyüklükte ortaya çıktığı bir yerdir, bu nedenle sığa birimi olarak *mikrofarad* (μF) ve *mikro mikro farad* ($\mu\mu$F) kullanılır. Bu, 10^{-12} farad'a eşit olan sonuncu birime pikofarad'a (kısaca pf) denir. Bunun CGS dizgesindeki sığa birimi ile yaklaştıkça eşit büyüklükte olduğunu belirtelim.

Biçimi ve düzenlenişi ne olursa olsun herhangi bir iletken çifti bir sığaç olarak görülebilir. Bu arada koşut yapraklı sığaçlar sığa hesabı çok kolay olduğu için çok kullanılan düzeneklerdir. Şek. 3.13 biri ötekini tümcek saran iki iletkeni gösteriyor. Bu düzenlenişe de bir sığaç diyebiliriz. Böyle bir dizgede içteki iletkenin bir yere oturması gerekirse de burada bununla uğraşmıyoruz. Bundan başka iletkenlere elektrik yükleri vermek veya yük almak için bir de iletken bağlantılar gerekir. İçteki 1 numaralı iletkene giden bir telin iletkenler arasındaki uzaydan geçeceği için bu bölgedeki elektrik alanında bir karı-

* Kılgın: Pratik.

*Kuşkusuz yüksek sığalı derli toplu bir sığaç yapmak için başka yollar vardır! Bir elektrikçiden alacağımız 1 mikrofaradlık bir sığacı cebimize sığdırabiliriz. Biyolojik maddelerde bir gözenin çeperleri gözenin içi ile dışta bulunan sıvıyı ayıran elektrikçe yalıtkan bir katman oluşturur. Bu zar elektrik bakımından zarın santimetre kare yüzeyi başına 1 μF'lik bir sığa oluşturur. Böyle bir sığa için "aralık" ne olmalıdır? (Gerçekte sığa aynı zamanda dielektrik sabitine yani yapraklar arasındaki ortamın elektriksel kutuplanabilme yatkınlığına bağlıdır. Bu Böl. 9'da tartışılacaktır.



Şek. 3.13 Bir iletkenini ötekinin sardığı bir sığaç.

şıklığa yol açar. Bunu olabildiğince azaltmak için iletken teli çok ince aldığımızı düşünebiliriz. Başka bir düşünce de gerilimleri ölçmezden önce iletken tellerin çekildiğini varsaymaktır.

Bu dizge içinde üç yük ayırdedebiliriz: İç iletkendeki tüm yükü Q_1 ile, dış iletkenin iç ve dış yüklerini de $Q_2^{(i)}$ ve $Q_2^{(o)}$ ile gösterelim. Önce $Q_2^{(i)}$'nin $-Q_1$'e eşit olması gerektiğini görelim: Şek. 3.13'de noktalı çizgi ile gösterilen kapalı S yüzeyi her iki yükü sarmaktadır ve bu yüzeyden geçen akı sıfırdır. Akı sıfırdır çünkü S yüzeyi tümünce bir iletkenin içinde kaldığı için her yerindeki elektrik alanı sıfırdır.

O halde Q_1 yükü iki iletken arasındaki elektrik alanının ve dolayısiyle $\varphi_1 - \varphi_2$ gerilim farkının tek belirleyicisidir. Bu yüzden, yaprak biçimli iki cisimden olma bir sığaçta yalnız Q_1 veya onun karşılığı olan sığanın değerini belirler. Buna göre sığa:

$$C = \frac{Q_1}{\varphi_1 - \varphi_2} \qquad (14)$$

olur; φ_2'nin bağlı olduğu $Q_2^{(o)}$ burada bir önem taşımaz. Gerçek odur ki bir iletkenin öteki iletkence büsbütün sarılması sığanın dışarda bulunan hiç bir şeye bağlı olmamasını sağlar. Eğer bu basit hal yerine, birbirini sarmayan ve bakışımlı olmayan sığaç yaprakları olsa idi —diyelim Şek. 3.14'dekine benzer bir durum,— şöyle bir soru ile karşılaşırdık: sığayı tanımlaması gereken Q_1 yükünün görevini burada hangi yük alacaktır? Bunun yanıtı, "iletkenlerin gerilimlerini eşitlemeğe yol açacak şekilde iletken 1'den iletken 2'ye taşınması gereken yük" (iki iletkendeki yükler toplamı sabit) olmalıdır.

3.6 Birçok İletkenin Yükleri ve Gerilimleri

Buraya kadar daha genel bir problemin yani istenilen sayıda iletkenin belirli bir düzen içinde bulunduğu zaman, yüklerle gerilimler arasındaki bağıntıyı bulma probleminin çevresinde dolaştık. İki iletkenli sığaç yalnız bir özel haldir. Genel hal üzerine söylenecek işe yarar bir şey bulunmadığını duymak sizi şaşırtabilir. Bu problemi ele almakta kullanabileceğimiz bütün araçlar "birik olma" veya "eşsizlik" teoremi ile üstüste gelebilme ilkesidir. Kafamızda belirli bir örnek canlandırabilmek için Şek. 3.15'deki gibi tümü iletken bir kılıf içine kapanmış üç ayrı iletken ele alalım. Bu kılıfın gerilimini sıfır alabiliriz; bu başvuru gerilimine göre dizgenin bu üç iletkeninin belli bir haline rastlayan gerilimler φ_1, φ_2 ve φ_3 olsun. Biricik oluş teoremi φ_1, φ_2 ve φ_3 verildiğine göre bütün dizge içindeki elektrik alanının belirli olmasını sağlama bağlar. Sonuç olarak her üç iletkenin Q_1, Q_2 ve Q_3 yükleri "biricik" şekilde belirlenmiş olurlar.

Bütün iletkenleri saran dış kabuğun iç yüzeyindeki yüklerin hesabını tutmak zorunda değiliz, çünkü bu, herzaman $-(Q_1+Q_2+Q_3)$'e eşit olacaktır. İsterseniz bu kılıfın dışa doğru sonsuz olarak genişlediğini ve "sonsuz'un yerini aldığını düşünebilirsiniz. Yine de şeklimizde kılıfı bulunduğu yerde alıkoyduk, zira bazıları, bağlanacak bir yer bulunduğunu görmekle yük göçürümünü daha kolay izlediklerini düşünürler.



Şek. 3.14 bakışımlı olmayan bir sığaç.

Bu dizgenin olabilir hallerinden biri φ_2 ve φ_3'ün ikisinin de sıfır olmasıdır. Bunu sağlamak için iki ve üç numaralı iletkenleri sıfır gerilimli kabuğa Şek. 3.15 a'da görüldüğü gibi bağlayabiliriz. Yine bağlama tellerinin çok ince olduğunu ve üzerlerinde kalacak yükün savsanacak kadar az olduğunu düşünebiliriz. Belirlenmiş koşulların nasıl sağlandığı yolunda bir şey söylemenin yararlı olmadığını düşünüyoruz. Hal No 1 diye adlandırdığımız bu halde bütün dizgenin elektrik alanı ve her iletken üzerindeki yük yalnız φ_1'in değeri ile belirlenmiştir. Bundan başka φ_1 iki katına çıkarılırsa bu her yerdeki alanın iki katına çıkmasını ve Q_1, Q_2 ve Q_3 yüklerinin herbirinin de iki katına çıkmasını gerektirir. Başka bir deyişle $\varphi_2 = \varphi_3 = 0$ olduğu için üç yükten herbiri φ_1 ile oranlı olur. Matematikçe söylemek gerekirse

$$\left.\begin{array}{l}\text{Hal } I \\ \varphi_2 = \varphi_3 = 0\end{array}\right\} \quad Q_1 = C_{11}\varphi_1; \quad Q_2 = C_{21}\varphi_1; \quad Q_3 = C_{31}\varphi_1 \qquad (15)$$

olur. Buradaki C_{11}, C_{21} ve C_{31} sabitleri yalnız iletken cisimlerin biçimlerine ve düzenlenişlerine bağlıdır.

Aynı şekilde φ_2 ve φ_3'ün sıfır oldukları bir hali çözümleyebiliriz. Bu koşula Hal 11 diyelim (Şek. 3.15 b). Sıfır olmayan biricik φ_2 gerilimi ile iletkenlerin yükleri arasında çizgisel bir bağıntı bulmalıyız:

$$\left.\begin{array}{l}\text{Hal } II \\ \varphi_1 = \varphi_3 = 0\end{array}\right\} \quad Q_1 = C_{12}\varphi_2; \quad Q_2 = C_{22}\varphi_2; \quad Q_3 = C_{32}\varphi_2 \qquad (16)$$

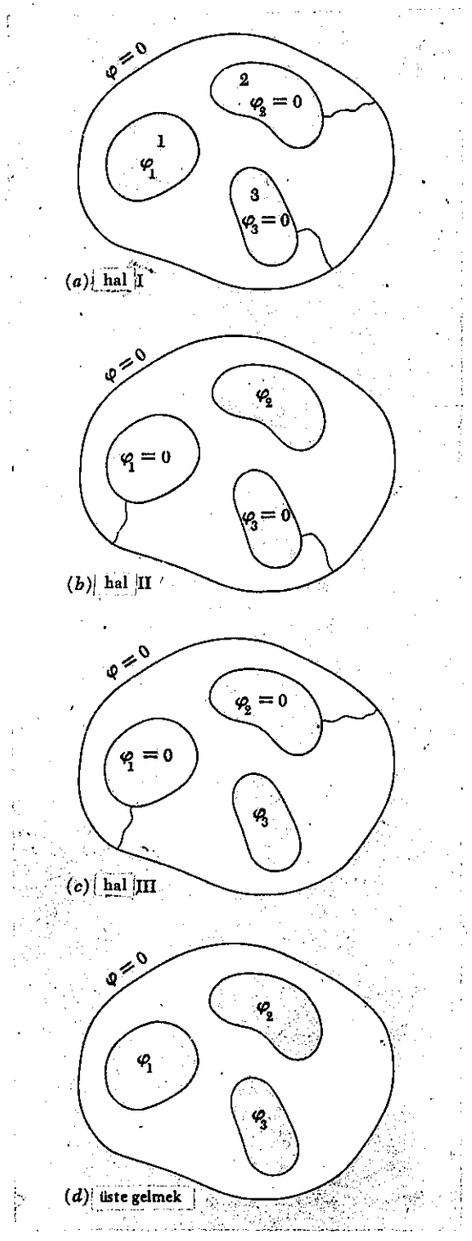
Son olarak φ_1 ve φ_2 sıfırda tutulur; bu kez alanlar ve yükler φ_3 ile oranlı olur:

$$\left.\begin{array}{l}\text{Hal } III \\ \varphi_1 = \varphi_2 = 0\end{array}\right\} \quad Q_1 = C_{13}\varphi_3; \quad Q_2 = C_{23}\varphi_3; \quad Q_3 = C_{33}\varphi_3 \qquad (17)$$

Şimdi bu I, II ve III hallerinin bir yere gelmesde, yani üstüste gelme ilkesini kullanarak bulunacak bir hal de yine olagandır. Yani herhangi bir noktadaki elektrik alanı üç haldeki alanların yöngül (vektörel) toplamına ve bir iletken üzerindeki yük ise her üç haldeki yüklerin toplamına eşittir. Bu yeni halde φ_1, φ_2 ve φ_3 gerilimlerinin hiç birinin sıfır olması gerekmez. Kısacası tam bir genel hal içindeyiz demektir. Yükleri ve gerilimleri bağlayan bağıntı Denk. 15'den 17'ye dek olan eşitlikleri toplamakla basitçe elde edilir.

$$\begin{aligned} Q_1 &= C_{11}\varphi_1 + C_{12}\varphi_2 + C_{13}\varphi_3 \\ Q_2 &= C_{21}\varphi_1 + C_{22}\varphi_2 + C_{23}\varphi_3 \\ Q_3 &= C_{31}\varphi_1 + C_{32}\varphi_2 + C_{33}\varphi_3 \end{aligned} \qquad (18)$$

Görüldüğüne göre bu dizgenin elektriksel davranışı C_{11}, C_{12}, ..., C_{33} gibi dokuz sabitle belirlenir. Aslında dizgenin belirlenmesi için yalnız altı sabit gereklidir, çünkü herhangi bir dizgede $C_{12} = C_{21}$, $C_{13} = C_{31}$ $C_{23} = C_{32}$ olduğu tanıtlanabilir. Bunun niçin böyle olduğu açıkca görünmüyor. Problem 3.27 enerjinin korunumu ilkesine dayanan bir tanıt ileri sürmektedir, Ama bunun için Kesim 3.7'de geliştirilen bir düşünceye gereksinmemiz olacaktır. Denk. 18'deki C'lere sığa



katsayıları denir. Bu tartışmanın herhangi bir sayıda iletken haline genişletilebileceği açıktır. Bu arada iki yapraklı sığacın sığası diye daha önce tanımladığımız nicelik C_{11} 'in (veya C_{22} ya da C_{12} 'nin) aynı değildir, ama onlara bağlı bir sayıdır.

Denklem 18 gibi bir eşitlikler takımı Q 'ler yerine φ 'ler cinsinden çözülebilir, yani bu eşitliklere eşdeğer,

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= P_{11}Q_1 + P_{12}Q_2 + P_{13}Q_3 \\ \varphi_2 &= P_{21}Q_1 + P_{22}Q_2 + P_{23}Q_3 \\ \varphi_3 &= P_{31}Q_1 + P_{32}Q_2 + P_{33}Q_3 \end{aligned} \qquad (19)$$

bir denklem takımı elde edilebilir. Burada P'lere gerilim katsayıları denir ve bunlar C'lerden hesaplanabilir ve doğal olarak bunun tersi de doğrudur.

Burada, *çizgisel* bir fiziksel dizgeyi yönetmesini beklediğimiz bir bağıntı karşısında bulunuyoruz. Bu gibi bağıntılar, mekanik yapıların incelenmesinde (zorlama-yük bağıntısı), elektrik çevrimlerin* çözümlenmesinde (gerilim-akım bağıntısı), ve genel olarak üstüste gelebilme ilkesinin uygulanabildiği her yerde karşımıza çıkacaktır.

3.7 Bir Sığaçta Biriken Enerji

Sığası C ve yapraklar arasındaki gerilim farkı φ_{12} olan bir sığaç ele alalım. Sığacın Q yükü $C\varphi_{12}$ ye eşittir. Bunun bir yaprağı üzerinde $-Q$ öteki üzerinde Q yükü vardır. Şimdi Q yükünü bu değerinden $Q+dQ$ ye çıkaralım ve bunun için dQ kadar artı yükü sığacın eksi yaprağından artı yaprağına φ_{12} gerilim farkına karşı iş görerek taşıyalım. Bunun için gerekli iş
$dW = \varphi_{12}\, dQ = Q\, dQ/C$ dir.

Buna göre sığacı yüksüz halinden başlayarak son değerine kadar yüklemek için gerekli iş

$$W = \frac{1}{C}\int_{Q=0}^{Q_f} Q\, dQ = \frac{{Q_f}^2}{2C} \qquad (20)$$

olur. Bu, sığaç içinde "biriktirilmiş" olan U enerjisidir. Bu enerji $U = \frac{1}{2}C{\varphi_{12}}^2$ (21)

Şek. 3.15 Bu dizgenin bir genel hali a'dan c'ye kadar giden üç halinin üstüste gelmesi ile çözümlenebilir (d hali); bu ara hallerin herbirinde iletkenlerden birinin dışında tümünün gerilimi sıfırdır.

* Çevrim: devre

biçiminde yazılabilir.

Yüzölçümü A ve yapraklar aralığı s olan düzlem koşut bir sığaç sığasının $C = A/4\pi s$ ve içindeki elektrik alanının $E = \varphi_{12}/s$ olduğunu gördük. O halde Denk. 21

$$U = \frac{1}{2}\left(\frac{A}{4\pi s}\right)(Es)^2 = \frac{E^2}{8\pi}\cdot As = \frac{E^2}{8\pi}\cdot \text{oylum} \qquad (22)$$

yazımına eşdeğerdir. Bu, elektrik alanı içinde biriktirilen enerjiyi veren Denk. 2.36 genel denklemine uymaktadır*.

3.8 Sınır Değer Probleminin Başka Görünüşleri

Laplace'in sınır değer problemini işlemeğe yarayacak başka yollar bulunmadığı izlenimini edinmek yanlış olur. Bu soruyu daha öteye götüremesek mümkün olmasa da ilerki fizik veya uygulamalı matematik öğreniminde karşılaşabileceğimiz kullanışlı ve ilginç üç işleniş biçimine değinmeliyiz.

Bunlardan birincisi karmal değişkenli fonksiyonlar kuramına dayanan uydurumlu çizitlem (conformal mapping) denilen zarif çözümleme yöntemidir. Ne yazık ki bu yöntem sade iki boyutlu dizgelere yani φ 'nin yalnız iki değişkene, örneğin, x ve y değişkenlerine bağlı ve bütün sınır iletkenleri genel olarak z eksenine koşut olan silindir gibi yüzeylere uygulanabilir. Bu halde Laplace denklemi,

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = 0 \qquad (23)$$

biçimine iner; bunun sınır değerleri xy düzlemi içinde bazı çizgiler ve eğrilerle belirlenmiştir. Kılgın değeri olan birçok dizge buna benzer biçimdedir ya da yöntemi buna benzer biçimdedir; kaldı ki yöntemin matematik değeri de ayrı bir ilgi konusudur. Örneğin koşut uzun iki şeridin gerilimi için tam çözüm, uyumlu çizitlem yöntemi ile bulunabilir. Alan çizgileri ve eşgerilim yüzeyler Şek. 3.16'da bir kesit düzlemi içinde gösterilmişlerdir. Bu, koşut yapraklı herhangi bir sığaç, kıyıları, yapraklar aralığına bakınca çok uzun olursa alanın kıyılardaki durumunu verir. Şek. 3.11 b'de gösterilen alan böyle bir çözümden geçirilmiştir. Bu yöntemi ileri bir matematik öğreniminde karmal değişkenli fonksiyonları incelediğiniz zaman uygulayabilirsiniz.

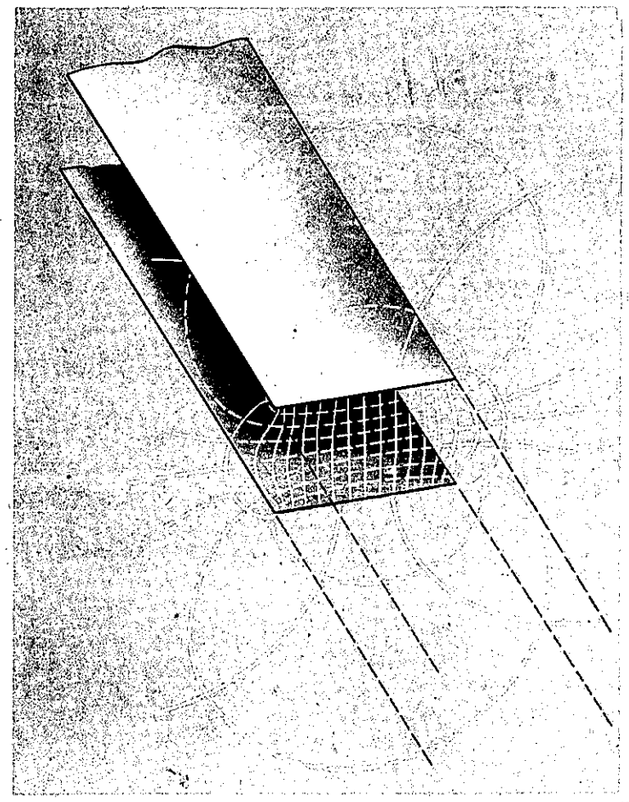
İkinci yol ise, verilen sınır değerlere uyan bir durgun yük geriliminin yaklaşık çözümünü sayısal yöntemle bulmaktır. Şaşılacak kadar yalın olan ve heryerde uygulanabilen bu yöntem harmonik fonksiyonların bildiğimiz şu özelliğine dayanır: Fonksiyonun bir noktadaki değeri bu nokta yöresinde alınan ortalamasına eşittir. Bu yöntemde φ gerilim fonksiyonu, sınırlar üzerinde alınacak ayrık noktaları da içeren bir ayrık noktalar dizisindeki değerlerle gösterilir.

Sonra sınır üzerinde bulunmayan noktaların gerilimlerinin herbiri, yakındaki noktalara verilen değerlerin ortalamasına eşit olacak biçimde düzeltilir. Demek ki bu, çok sayıda denklem dizgelerini, yani alınan nokta sayısı kadar denklemlerden oluşmuş dizgeleri çözerek elde edilebilirdi. Ama yaklaşık bir çözüm, her noktadaki gerilim değerini komşu noktaların ortalamasına uydurmak ve bu işlemi değişimler savsanacak ölçüde küçülünceye değin dizgeli biçimde değiştirerek çok daha yalın biçimde bulunabilir. Bunun adına *gevşeme yöntemi* denir. Yöntemin tek sınırı hesap yapanın gösterebileceği sabırdır ve bu da, gevşeme yöntemine çok uyan hızlı bilgi sayarlarla giderilmiştir. Bunun nasıl yürüdüğünü görmek istersenız Prob. 3.29 ve 3.30 dan yararlanabilirsiniz.

Sınır değer problemlerinin çözümü için üçüncü bir yaklaşık yol *değişimsel yöntemidir*. Bu yöntemde fiziğin Newton dinamiğinden optiğe ve kuantum mekaniğine dek giden birçok kesiminde

*Bunların hepsi yapraklar arası boş sığaçlardan başka bir şey olmayan "boşluklu sığalara" uygulanır. Laboratuvardan da bildiğiniz gibi elektrik devrelerinde kullanılan sığaçların çoğu bir yalıtkan veya "dielektrik" ile doldurulmuştur. Bunun etkisinin ne olduğunu Böl. 9'da inceleyeceğiz.

** Uydurumlu çizitlem: Conformal mapping.



Şek. 3.16 Sonsuz uzun iletken yapraklar arasındaki alan çizgileri ve eşgerilimler.

karşılaşacağımız bir düşünce bulunmaktadır. Durgunyükte bu ilke şu biçimde görülür: Bildiğimiz gibi bir durgunyük alanına bağlı toplam enerji

$$U = \frac{1}{8\pi} \int E^2 \, dv \qquad (24)$$

denklemi ile verilebilir. Eğer Prob. 2.19'u çözmüş iseniz, iki küreden oluşan yalın bir halde, iletkenler bir tel ile bağlı iken dizgeye verilen belli bir yükün bütün alanda biriken enerjiye en küçük değerini verecek biçimde düzenlendiğini görmüşsünüzdür. Genel olarak bu hep böyledir. Yani farklı gerilimlerde bir iletkenler dizgesinin yükleri, her iletken üzerinde öyle bir düzenlenişe varır ki, alan içinde biriken enerji olabildiğince küçük olsun. Alan içinde biriken toplam enerjinin her azalışına karşı, yüklerin akmasını sürlayan bir enerjinin özgür hale geçeceğini düşünürsek bu özelliğin apaçık olduğunu görürüz*. Bir bardaktaki su yüzeyinin düzlem oluşu aslında aynı nedendendir.

Şimdi verilen gerilimlerde sınırlarla sarılmış bir bölgedeki $\varphi(x,y,z)$ gerilim işlevini alalım. *Doğru* φ işlevi yani $\nabla^2\varphi = 0$ denkleminin verilen sınır gerilimlerine uyan çözümü, ona bağlı enerjinin, aynı sınır koşullarına uyan, ama Laplace Denklemini doğrulamayan $\psi(x,y,z)$ fonksiyonu için hesaplanan, enerjiden daha az olması ile ayrılır. Enerjiyi Denk. 2.38'de yaptığımız gibi φ cinsinden yazarsak .

$$U = \frac{1}{8\pi} \int |\nabla\varphi|^2 \, dv \qquad (25)$$

olur.

Şimdi sınır koşulu problemini Laplace işlemine değinmeden yeni bir yoldan deyimleyebiliriz. Buna göre aranan gerilim fonksiyonu, *aynı sınır koşullarına uyan herhangi bir fonksiyona bakınca Denk. 25 tümlevine en küçük değerini veren fonksiyondur.* Böylece verilen bir sınır değer probleminin hiç değilse yaklaşık bir çözümünü elde etmek için tutulacak yol, sınırlar üzerinde istenen değerleri alabilen birçok fonksiyon deneyerek bunlardan U enerjisine en küçük değeri vereni almaktır. Başka bir tutum da, içinde değişebilen değiştirgenleri bulunan bir fonksiyonu denemek ve bu matematiksel düğmeleri (değiştirgenleri) U'ya en küçük değeri verecek biçimde döndürmektir. Bu yöntem enerjinin kendi değeri üzerinde bilgi edinmek için özellikle uygundur, çünkü enerjinin kendisi, bilinmeyen niceliklerin en önemlisidir. U enerjisi φ'nin doğru değeri için oyluk olduğuna göre φ'nin doğru değerden sapmasına karşı duyarlı değildir. Problem 3.32 değişimsel yöntemin duyarlığını ve basitliğini gösterecektir.

Değişimsel yöntemin hesaplarda kullanışlı oluşundan daha anlamlı bir olgu, bunun durgunyük alanının temel yasası için *farklı bir deyimlemeyi simgelemesidir.* Fiziksel yasaların burada olduğu gibi yeniden deyimlenmesi çoğu kez çok verimli ve aydınlatıcı olmuştur. Bu yolda kendi parlak çalışmaları ile tanınmış olan Profesör R. P. Feynman, *The Feynman Lectures on Physics* Cilt II Böl. 19'unda değişimsel düşüncelerinin yalın ama canlı bir açıklamasını vermiştir.

*Koguyu bu şekilde ortaya koymakta bir enerji yitiği ile ilgili bazı yük devinimlerinin bulunduğunu düşünüyoruz. Çoğu kez bu böyledir. Böyle değilse, başlangıçta denge halinde bulunmayan bir dizge denge haline erişebilmek için enerji yiteremez. Bu durumda ne olacağını düşünüyorsunuz?

Problemler

3.1 Elinde E elektrik alanını ölçmeye yarayan bir aleti bulunan bir gözlemci sabit bir nokta yükden belli bir uzaklıkta bulunuyor. Yüklenmemiş kısa bir metal boru parçası yalıtkan bir iple sarkıtılarak nokta yükü büsbütün saracak bir konuma getiriliyor. Bu durum uzakta bulunan deneycinin ölçtüğü elektrik alanını ne biçimde etkiler? Açıklayınız. Büyük bir bakır kutu içinde bulunan bir laboratuvarda iseniz, dışta bir takım yükler gezdirildiğini bilebilirmisiniz? Açıklayınız.

3.2 Küresel bir A iletkeni içinde küre biçiminde iki koğuk vardır. İletkendeki toplam yük sıfırdır. Bununla birlikte koğuklardan birinin merkezinde q_b, ötekinin merkezinde ise q_c yükleri bulunmaktadır. Oldukça uzakda q_d gibi bir yük daha bulunsun. Buradaki A, q_b, q_c ve q_d cisimlerine etkiyen kuvvetler nelerdir? Yanıtlardan hangisi, eğer varsa, sadece yaklaşıktır ve oldukça büyük olan r'ye bağlıdır?

3.3 Şek. 3.1 c'de görülen koşullar sağlandıktan sonra cismin yükler yerlerinde donup kalacak biçimde yeniden yalıtkan hale getirildiğini düşünelim. Sonra ilk elektrik alanını uyaran artı ve eksi yükler kaldırılmış olsun. Bu durumda cismin içinde ve dışında kalan elektrik alanı neye benzer?

3.4 Fen üzerine yazılmış düşsel kitaplarda görülen ve fen bilmeyen keşifçilerin kafasında yaşayan bir özenti, elektrik alanını "perdeleyen" metal yaprak gibi, ağırlığı (kütle çekimini) "perdeleyen" bir ağırlık perdesi bulmaktır. Ağırlık kaynakları ile elektrik kaynakları arasındaki farkı düşününüz. Şek. 3.6'daki kutunun çeperlerinin dışta bulunan kaynakların alanını perdelemediğini sadece yüzey yüklerinin karşılayıcı bir alan yarattığını düşününüz. Ağırlık için de bu gibi bir etki niçin bulunamaz? Bunu sağlamak için ne gerekirdi?

3.5 Şek. 3.9'daki düzlemin üst yanındaki nokta yükün alanı içinde, nokta yükten çıkan ve yatay doğrultuda yani düzleme koşut giden bir alan çizgisini izleyecek olursanız bu çizgi iletkenin yüzeyine nerede kavuşur? (Gauss yasasına ve yalın bir tümleve gereksinmeniz vardır).

3.6 Nokta yük ve düzlem iletken problemini çözmekle, aslında bundan yola çıkarak üstüste gelebilme ilkesini uygulayarak kurabileceğimiz bütün problemleri çözmüş olduk. Örneğin santimetresi boyunca 10^3 esb birlik yük taşıyan düzgün yüklü bir doğru telin 5 m yüksekte yeryüzüne koşut durduğunu düşünün. Telin hemen altına gelen kısmında yer yüzeyindeki alan yeğinliği nedir? Telin birim boyuna etkiyen elektrik kuvveti ne tutar? Bu bilgilerden yararlanarak başka bir durgun yük düzenlenimi kurulabilir mi?

3.7 Bir Q yükü Şek. 3.8 a'da görüldüğü gibi iletken bir düzlemden h cm yukarda bulunmaktadır. Bir öğrenciye bu yükü düzlemden sonsuz uzaklıkta bir yere götürmek için gerekli işin ne olduğu sorulduğunda, bu işin başta $2h$ aralıkla duran Q ve $-Q$ gibi iki yükün aralarını sonsuza çıkaracak şekilde uzaklaştırmak için gerekli iş kadar, yani $W = Q^2/2h$

olduğu yanıtını vermiştir. Başka bir öğrenci ise yükdevinirken etkilendiği kuvveti hesaplamakta ve Fdx'in tümlevini alarak farklı bir sonuca varmaktadır. İkinci öğrenci ne bulmuştur ve hangisi doğrudur?

3.8 Üç iletken yaprak şekilde görüldüğü gibi koşut durmaktadırlar. Dış yapraklar bir tel ile bağlanmışlardır. İç yaprak ise yalıtılmış olup 10 esb/cm^2 yükü taşımaktadır. Bu yük, yaprağın üst ve alt yüzeylerinde hangi σ_1 ve σ_2 yük yoğunlukları ile bölüşülür?

3.9 Her birinin değeri $+q$ olan iki yükle $-q$ olan iki yük bir karenin köşelerine aynı imli yükler karşı karşıya gelecek biçimde yerleştirilmişlerdir. Bu dizgenin eşgerilim yüzlerinden ikisinin düzlem olduğunu gösteriniz. Bir nokta yükü bir metal yaprağı dik açı yapacak şekilde bükerek elde olunan köşenin içine bakışım ekseni üzerine yerleştirince elde olunan elektrik alanını nitel olarak çiziniz. Bu yoldan giderek hangi düzlem ve nokta yük düzenlenişleri için çözümler verilebilir, hangilerininki verilemez? 120° 'lik açı yapan iki iletken düzlemin açı ortayı üzerinde bulunan bir nokta yük için ne söylenebilir?

3.10 İnce bir metal parçası koşut yapraklı bir sığacın yaprakları arasına koşut duracak biçimde yerleştirilmiştir. Bu yaprak sığayı nasıl etkiler? Yaprak sığacın bir yaprağına bir telle bağlanırsa ne olur?

3.11 100-pFlik bir sığaç 100 voltla yüklenmiştir. Yükleyen batarya ayrıldıktan sonra bu sığaç başka bir sığaca koşut olarak bağlanmıştır. Son gerilim 30 volt ise ikinci sığacın sığası ne kadardır? Bu arada ne kadar enerji kaybolmuştur ve bu enerji ne olmuştur?

3.12 İçtekinin yarıçapı r_1 dıştakininki r_2 olan aynı merkezli küresel iki kabuktan oluşmuş bir sığacın C sığası neye eşittir? Bulduğunuz sonucu $r_2 - r_1 \ll r_1$ sınır haline rastlayan düzlem koşut bir sığaç için sınayınız.

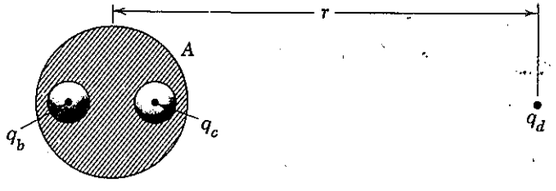
3.13 Geçen problemdeki küresel sığacın yaprakları arasındaki gerilim farkı φ_{12} olsun. Elektrik alanını yarıçapa bağlı olarak veren bir yazım bulunuz. Sığacın $\int (E^2/8\pi)\, dv$ ile verilen tüm enerjisini hesaplayınız ve bunun $\frac{1}{2}C\varphi_{12}^2$ 'ye eşit olduğunu gösteriniz.

3.14 Tek ve yalıtılmış bir iletkenin sığası deyimi ile iletkenin yükünün gerilimine oranını anlıyoruz; sonsuz uzakta bulunan noktanın gerilimi sıfır sayılmıştır. Küre şeklinde bir iletkenin sığasının santimetre olarak değerinin kürenin tam yarıçapı kadar olduğunu gösteriniz. Yer küresinin sığası kaç mikrofarad eder?

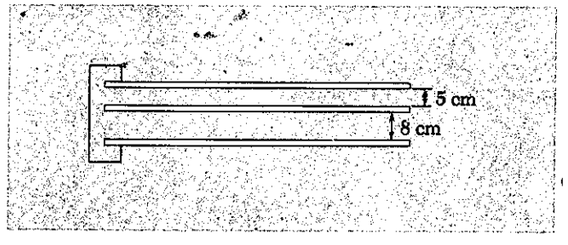
3.15 Problem 3.12 de anlatılana benzer bir küresel sığacın yer küresi çevresinde bir uydu gibi dolandığını düşünelim. Bunun iç ve dış kabukları arasında mekaniksel bir bağlantı yoktur. Boşluk kusursuzdur ve dış küre üzerinde sürtünme gecikmesi savsanacak kadar azdır. Başka bir deyimle kusursuz bir "sıfır $-g$" durumundayız. İç kürenin net bir yüke sahip olduğunu ve kürenin dış küre ile aynı merkez üzerinde bulunduğunu düşünelim. Bu dayanıklı bir durum mudur? (İç küre merkezden kaçacak olursa dizgenin enerjisinin nasıl değiştiğini dikkate alınız. Değişimin imini önceden kestirebilmek için iç küreyi dıştakinin çok yakınına getirdiğiniz zaman sığanın nasıl değişebileceğini düşününüz).

3.16 Koşut yapraklı bir sığacın bir yaprağına etkiyen kuvveti hesaplayınız. Sığacın yaprakları 20 cm kenarlı kare biçimli, aralıkları 3 cm'dir ve 10 statvolt gerilim farkı ile yüklenmişlerdir, yapraklar yükleri değişmeyecek şekilde yalıtılmış iseler, bunların bir yere gelmesi ile ne kadar dış iş görülmüş olur. Bu iş elektrik alanında birikmiş enerjiye eşit midir?

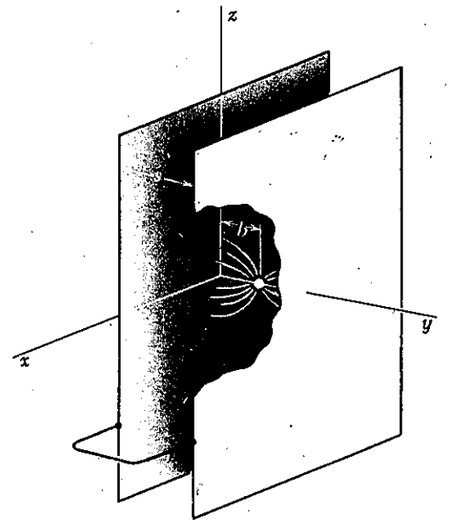
3.17 Koşut iki yaprak bir telle bağlanarak aynı gerilimde tutuluyorlar. Yapraklardan biri xz düzlemi ile çakışmakta ve ötekı $y = s$ konumundadır. Yapraklar arasındaki s aralığı yaprakların boyutlarına bakınca çok küçüktür. Q değerinde bir nokta yük yapraklar arasında ve $y = b$ konumundadır. (Şekle bak). Her yaprağın iç yüzeyi üzerindeki toplam yük ne kadardır? Her iki iç yüzey üzerinde bulunan yüklerin



Prob. 3.2



Prob. 3.8



Prob. 3.17

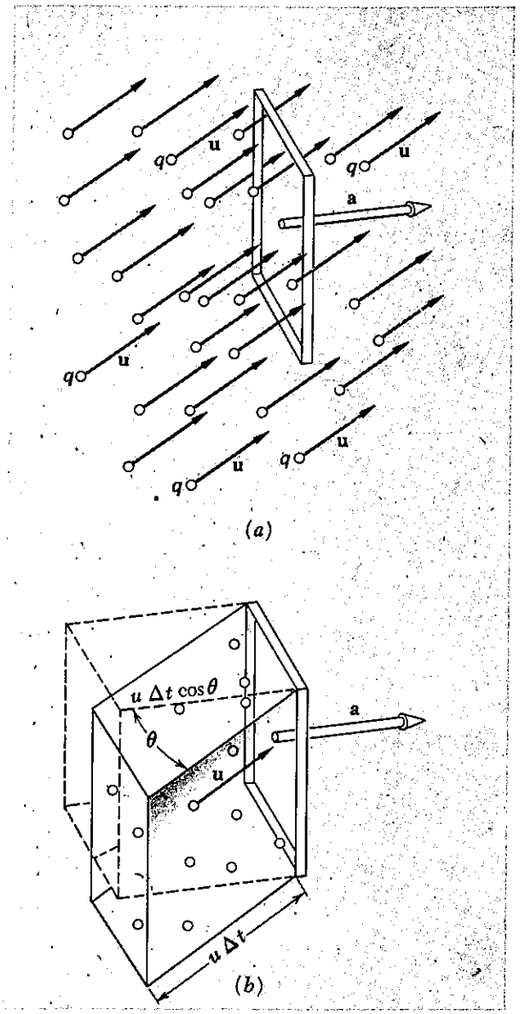
toplamının $-Q$ 'ye eşit olması gerekir, niçin? Bunun büyük kısmının yakın yaprak üzerinde bulunduğunu bilebiliriz. Oradaki yük sol yaprağa çok yakın olsa idi, $b \ll s$ sağdaki yaprağın bulunması fazla bir şey değiştirmezdi. Bununla birlikte yüklerin nasıl bölüşüldüğünü kesinlikle bilmek istiyoruz. Eğer "görüntü" yönteminden yararlanmak isterseniz berberlerin karşılıklı aynalarında olduğu gibi her iki doğrultuda uzanan sonsuz bir görüntü zinciri ile karşılaşacaksınız. Yüzeylerden herhangi birinin üzerindeki bileşke alanı hesaplamak kolay değildir. Yine de ortaya atılan soru üstüste gelebilme ilkesine dayanan yalın bir hesapla yanıtlandırılabilir. (İpucu: Aşağıki anımsatma size yeterince sağlam bir ipucu verebilir. $y = b$ düzlemi üzerinde herhangi bir yere bir Q yükünün katılması her yaprak üzerindeki yüzey yüklerini iki katına çıkaracaktır; gerçekten yeni gelen yüklerin bu düzlem üzerinde etkiyle oluşturduğu toplam yük bu yüklerin yerlerine bağlı değildir. yalnız bu düzlem üzerinde tekdüze bir yük katmanı olsaydı elektrik alanı yalın olur ve Gauss yasasını kullanmak için bir yolunu bulurduk. Buradan yola çıkınız.)

Bölüm 4

Elektrik Akımları

4.1	Yük Taşınması ve Akım Yoğunluğu	92
4.2	Kararlı Akımlar	93
4.3	Elektrik İletkenliği ve Ohm Yasası	95
4.4	Elektrik İletkenliği Taslamı	96
4.5	Ohm Yasasının İşlemediği Yerler	100
4.6	Metallerin Elektriksel İletkenliği	102
4.7	İletkenlerin Direnci	103
4.8	Çevrimler ve Çevrim Öğeleri	107
4.9	Akımda Enerji Yitiği	109
4.10	Elektromotor Kuvvet ve Volta Pili	110
4.11	Sığaçlarda ve Dirençlerde Değişken Akımlar	114
	Problemler	116

BÖLÜM 4 ELEKTRİK AKIMLARI



Şek. 4.1. (a) Hepsi aynı u hızı ile devinen bir yüklü parçacıklar kümesi. Çerçevenin yüz ölçümü a'dır. Gelecek Δt saniyelik süre içinde çerçeveden geçecek parçacıklar, (b)'deki eğik prizma içinde bulunanlardır. Prizmanın taban yüzölçümü a ve yüksekliği $u\ \Delta t\ \cos\theta$ dır. o halde, hacmı $au\ \Delta t\ \cos\theta$ ya da $a.u\ \Delta t$'dir.

4.1 Yük Taşınması ve Akım Yoğunluğu

Elektrik akımı yüklü taneciklerin devinimiden ileri gelir. Bir tel içindeki akım, telin bir noktasından birim zamanda akan yük tutarının ölçüsüdür. Kullanmakta olduğumuz birimlerce akım saniyede esb olarak verilmelidir. Kılgın birim ampere'dir ve saniyede akan bir coulomb yük değerindedir. Bir ampere'lik akım 3×10^9 esb/s'lik akıma eşittir ki bu da saniyede 6.2×10^{18} tane elektron akması demektir. Kuşkusuz sayılması gereken net yük taşınmasıdır ve imler uygun biçimde ele alınmalıdır. Ilın bir cismin devinimi çok hem de pek çok büyük tutarda yükün (bir gram madde için 10^5 coulomb kadar) taşınması ile birlikte olsa da burada bir akım söz konusu değildir, çünkü tam eşit sayıda artı ve eksi temel parçacıklar tam aynı ortalama hız ile devinmektedirler.

Daha genel bir akım yada yük taşınması, üç boyutlu bir hacım içinde yüklerin yer değiştirmesi şeklinde olur. Bunu anlatabilmek *akım yoğunluğu* kavramı ister. Burada ortalama nicelikleri ele almak zorundayız, zira yüklü tanecikler tek tek parçacıklardır. Daha önce ρ yük yoğunluğunun tanımlanmasında olduğu gibi, burada da, uzunluk ölçeği, öyledir ki, ortalama almak istediğimiz küçük bir bölge, ilgilendiğimiz parçacık sınıfından çok büyük sayıda tane alabilsin.

Önce santimetre kübünde n tane özgür parçacık bulunan özel bir hal ele alalım, bu parçacıkların ortalama ayni bir $\mathbf{u}$ hızı ile devindiklerini ve herbirinin q yükü taşıdıklarını düşünelim. Şimdi Şek. 4.1 a'da görüldüğü gibi belli biçimde yönelmiş, yüzölçümü a olan küçük bir çerçeveden Δt zaman aralığı içinde kaç tane parçacık geçer? Eğer Δt, Şek. 4.1 a ve b'nin gösterdiği anlarda başlarsa, Δt saniye içinde çerçeveden geçmesi gereken parçacıklar şu anda Şek. 4.1 b'deki eğik prizma içinde kalan parçacıklardır. Bu prizmanın tabanı dörtgen çerçeve yüzeyidir ve kıyısının boyu parçacıklardan herhangi birinin Δt süresi içinde aldığı yola eşit yani $u\ \Delta t$'dir. Bu prizmanın dışında bulunan parçacıklar ya pencereye varamayacaklar ya da dışından geçeceklerdir.

Prizmanın hacmı, *taban* × *yükseklik* ya da $au\ \Delta t\ \cos\theta$'dır bu da $\mathbf{a}\cdot\mathbf{u}\ \Delta t$ şeklinde yazılabilir. Böyle bir oylum içinde bulunan parçacıkların ortalama sayısı, $n\mathbf{a}\cdot\mathbf{u}\ \Delta t$ olacaktır. Öyleyse çerçeveden geçen parçacıkların ortalama *akış yeğinliği*, yani geçen taneciklerin ortalama sayısı, başka bir deyişle çerçeveden geçen $I(a)$ akımı:

$$I(a) = \frac{q(n\mathbf{a}\cdot\mathbf{u}\ \Delta t)}{\Delta t} = nq\mathbf{a}\cdot\mathbf{u} \tag{1}$$

olur.

Şimdi ilgilendiğimiz bölgede yükleri değişik hızları ayrı, ya da her ikisi de ayrı birçok yük kümelerinin uçuştuğunu düşünelim. Bunlardan herbiri a'dan geçen akıma bir katkıda bulunacaktır. Bir kümedeki nicelikleri k simgesi ile gösterirsek bu kümedeki bir parçacığın yükü q_k hızı $\mathbf{u}_k$ ve cm^3 oylum içindeki ortalama sayısı yani ortalama nüfus yoğunluğu n_k olacaktır; buna göre çerçeveden geçen akım:

$$I(a) = n_1q_1\,\mathbf{a}\cdot\mathbf{u}_1 + n_2q_2\,\mathbf{a}\cdot\mathbf{u}_2 + \cdots = \mathbf{a}\cdot\sum_k n_kq_k\mathbf{u}_k \tag{2}$$

biçiminde yazabiliriz. Denk 2'de a'nın çarpıldığı yöngül niceliğin adına $\mathbf{J}$ *akım yoğunluğu diyoruz.* $\mathbf{J}$ saniyede cm^2 başına esb birimi ile söylenebilir. Yük birimi coulomb olan kılgın birim dizgesi kullanılacak olursa, akım yoğunluğu cm^2 başına ampere olarak verilir.

$$\mathbf{J} = \Sigma n_kq_k\mathbf{u}_k \tag{3}$$

Bir çeşit yüklü tanecik, örneğin elektronlar değişik hızlarla devinebildiklerine göre, bunların akım yoğunluğuna olan katkılarının ne olduğunu görelim. Bir iletken içinde, elektronların hızları hemen hemen gelişigüzel dağılmış olacak, ve bunların değerlerinde ve doğrultularında geniş ayrımlar bulunacaktır. Bütün hızlardaki elektronların birim oylumdaki toplam sayısını N_e ile gösterelim. Bu elektronları aynı hızda (aynı değer ayni doğrultuda) birçok kümelei halinde ayırabiliriz. Bu durumda elektronların *ortalama hızı*, herhangi bir ortalamada olduğu gibi, her hıza o küme içindeki ağırlığını vererek, yani hızı, kümedeki elektron sayısı ile çarpıp küme sayısınca toplamını aldıktan sonra, toplam tane sayısına bölerek bulunur. Bu demektir ki ortalama hız

$$\bar{\mathbf{u}} = \frac{1}{N_e}\sum_k n_k\mathbf{u}_k \tag{4}$$

olur. Burada $\bar{\mathbf{u}}$'nun üstündeki çizgi bir dağılım üzerinde ortalama alındığını anlatır. Bunu Denk. 3 ile bir yere getirirsek, elektronların akım yoğunluğuna olan katkıları, elektron hızı cinsinden yalınca yazılabilir. Elektronlar için $q = -e$ olduğunu anımsayacak ve bu tanecik ile ilgili bütün nicelikleri belirtmek için e alt simgesini kullanarak,

$$\mathbf{J}_e = -eN_e\bar{\mathbf{u}}_e \tag{5}$$

yazabiliriz.

Bu belki açıkca görülebilir, ama biz adım adım giderek çıkardık ki, çerçeveden geçen akımın yalnız yüklü taneciklerin *ortalama hızına* bağlı olduğu, bu ortalama hızın ise tanelerin her yöne doğru gelişigüzel hızlarının çok küçük bir bölüntüsü olduğu anlaşılsın. Unutmayınız ki, Denk. 4 bir yöngü ortalamasını anlatır; bu demektir ki, hızların değeri ne olursa olsun, bütün doğrultular eşit olasılık ile alınabilen bir hız dağılımı karşısında isek, ortalama sıfır olacaktır.

4.2 Kararlı Akımlar

Tel gibi uzun bir iletkenin taşıdığı akım, $\mathbf{J}$ akım yoğunluğunun telin kesiti boyunca alınan tümlevine eşittir. Gerçekten herhangi bir S yüzeyinden akan I akımı,

$$I = \int_S \mathbf{J}\cdot d\mathbf{a} \tag{6}$$

yüzey tümlevi ile verilir. Burada I, $\mathbf{J}$ yöngüsü ile ilgili "akı"dır ve bu adlandırma akı kavramına uygundur.

$\mathbf{J}$ akım yoğunluğu yöngüsü zamanla her yerde sabit kalıyorsa, kararlı ya da durgun bir akım dizgesinden söz ederiz. Kararlı akımlar yük korunumu yasalarına uymak zorundadır. Balon gibi bir S yüzeyi ile sarılmış bir bölgeyi ele alalım. $\mathbf{J}$'nin bütün S üzerinde alınan yüzey tümlevi, bu yüzeyin sınırladığı oylumdan,

birim zamanda çıkan yük tutarını, yani yüklerin ayrılma hızını verir. Eğer artı yükler bu yüzeyden çıkıyor ya da eksi tanecikler bu yüzeye giriyor ise bu tutar artı olacaktır; zıt yöndeki devinimler için ise eksi olacaktır. Bu yük devinimi böylece sürüp gitse idi, hacım sonunda yüksüz kalacaktı; yeter ki, içerde yeni yükler yaratılmış olmasın. Bir cins yük yaratımı ise olacak şey değildir. Bu nedenle gerçekten zamandan bağımsız bir akım dağılımı için, $\mathbf{J}$'nin herhangi kapalı bir yüzey üzerinde alınan yüzey tümlevi sıfır olmak zorundadır. Bu dediğimiz uzayın her noktasında,

ırak $\mathbf{J} = 0$ (zamandan bağımsız yük dağılımı) (7)

yazımına eşdeğerdir. Bu eşdeğerliği değerlendirebilmek için, Gauss teoremini ve ıraksamanın temel tanımını anımsayınız (Böl. 2,9).

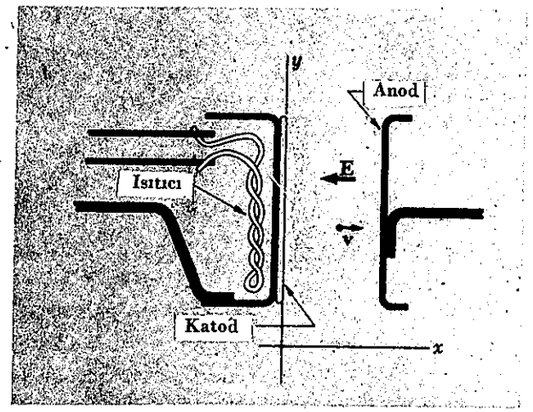
Denk. 7'den daha genel bir yazım verebiliriz. Bunun için $\mathbf{J}$'nin kararlı olmadığını yani hem t'nin hem de x, y ve z'nin işlevi olduğunu düşünelim. Buna göre, $\int_S \mathbf{J}\,da$ tümlevi yüklerin kapalı oylumdan, ayrılma hızının bir andaki değerini verir; oysa $\int_V \rho\, dv$ herhangi bir anda oylum içinde bulunan yük tutarını göstermektedir, buna göre

$$\int_S \mathbf{J}\cdot da = -\frac{d}{dt}\int_V \rho\, dv \qquad (8)$$

olur; ele aldığımız oylum, herhangi bir (x,y,z) noktası çevresinde sıfıra doğru küçültecek olursak, Denk. 8 eşitliği

ırak $\mathbf{J} = -\dfrac{\partial \rho}{\partial t}$ (zamana bağlı yük dağılımı) (9)

durumuna girer*. Burada yoğunluğunun zamana göre tikel türevi alınmıştır. Zira ρ genel olarak, zamanın olduğu kadar uzay konumluklarının işlevidir. Denklem 8 ve 9 yük korunumunu anlatır: Hiç bir yük, bir yerdeki yük tutarında azalmaya neden olmadan akıp gidemez.



Şek. 4.2. Katodu ve anodu koşut düzlem olan bir diod lamba.

Kararlı bir akım dağılımı için öğretici bir örnek iki elektrotlu bir elektronik tüp olan diyod lambadır. Elektrodlardan biri katottur, ve ısıtılınca büyük tutarda elektron püsküren bir madde ile kaplanmıştır. Anot denilen öteki elektrot ise, bir metal yapraktan oluşur. Bir batarya yardımı ile anot, katoda karşı artı bir gerilimde tutulur. Elektronlar ısıtılmış katottan çok alçak hızlarla püskürülürler, ama anotla katot arasındaki elektrik alanı tarafından artı anoda doğru hızlandırırlar, ve bu aradaki bölgede elektrik akımı devinimdeki bu elektronlarla sağlanır. Dış devre iletkenlerden geçen elektronlarla, belki bataryanın içindeki artı iyonlarla ve benzeri daha başka düzeneklerle kapanır ki, biz burada bunlarla uğraşmıyoruz. Diyodun içinde herhangi bir yerdeki bölgesel ρ yük yoğunluğu, sadece $-ne$'dir, burada n bir yerdeki elektron yoğunluğudur ve elektron sayısı/cm^3 olarak ölçülür. Buna göre $\mathbf{J}$ yerel akım yoğunluğu ρv olacaktır; burada v elektronların bu yerdeki hızını göstermektedir. Düzlem paralel diyodda $\mathbf{J}$'nin y veya z bileşenleri olmadığını düşünebiliriz (Şek. 4.2). Eğer koşullar kararlı hale gelmişse, J_x'in x'den bağımsız olması gerekir; zira Denk. 7'nin dediği gibi

*Denk. 8 ile 9 arasındaki adım pek açık görünmüyorsa, Böl. 2'de verdiğimiz ıraksama tanımını bir daha gözden geçiriniz. Oylum küçülürken, ρ'yu sağ yandaki oylumsal tümlevin dışına alabiliriz. Oylum tümlevinin belli bir an için hesaplanması gerekir. Bu bakımdan bunun zamanca türevi, t anında ve $t+dt$ anında alınan oylum tümlevleri arasındaki farka bağlıdır. Burada tek fark ρ'nun değişiminden ileri gelir, çünkü hacmın sınırları aynı kalmıştır.

ırak $\mathbf{J} = 0$ ve eğer $J_y = J_z = 0$ ise $(\partial J_x/\partial x)$ sıfır olmak zorundadır. Bu oldukça açık olan bir şeyi tanıtlamaya çalışmaktır. yalnız x doğrultusunda devinen kararlı bir elektron akımı karşısında isek, anotla katot arasındaki ara düzlemlerin herhangi birinden saniyede özdeş sayıda elektron geçmelidir. Bundan çıkaracağımız sonuç ρv'nin sabit olduğudur. Ama unutmayın ki, v *sabit değildir;* elektronlar alan içinde hızlandırıldıkları için v hızı x'e bağlıdır. Öyleyse ρ'da sabit olamayacaktır. Bunun yerine eksi yük yoğunluğu katoda yakın bölgelerde yüksek, anoda yakın bölgelerde ise alçak olacaktır; tıpkı bir yol üzerindeki araba sayısının, hızın düştüğü kavşak noktalarına doğru yoğunlaştığı, ve büyük hızla devinilen yerlerde ise seyreldiği gibi.

Bir diyod içindeki akım ilginç bir etki ile sınırlanmış olabilir: Bu etki eksi yük yoğunluğunun ("uzay yükü") elektrik alanı üzerine, dolayısı ile, elektronların ivmeleri ve hızları üzerine etkisidir; dolayısı ile çevrimi tamamlamış olmak için, bu etki sonunda yük yoğunluğunu da etkileyecektir. Problem 4.25 "uzay yük ile sınırlı" koşulları içinde işleyen diyodun davranışını incelemekte ve bunu yöneten gerilim-akım bağıntısının nasıl elde edileceğini göstermektedir. Bu bağıntı elektronikte diyodların yalnız tasarlanmasında* ve yapılmasında değil, katot ışınları tüplerinin ya da benzer aygıtların elektron tabancalarının tasarlanmasında da önemlidir.

4.3 Elektrik İletkenliği ve Ohm Yasası

Yükleri devindirmek için birçok yol vardır; bunlar arasında yüklü taneciklerin "madde ile taşınması" sekli de bulunur. Van de Graaff'ın durgun yük üretecinde (Bak Prob. 4.3) yalıtılmış bir şerit üzerine elektrik yükleri verilir, ve şerit bu yükleri bir elektroda götürür. Bunu devinimli merdivenlerin insan taşımasına benzetebiliriz. Bu da düpedüz bir akımdır. Atmosfer içinde ağırlıkları dolayısı ile yere doğru düşen yüklü su damlacıkları, yer yüzündeki akım dizgesinin bir kısmıdır. Şimdi bu kesimde çok görülen bir yük taşınması ile, yani yüklü bir taneye elektrik alanının etkilediği kuvvetten ileri gelen yük taşınması ile ilgilenceğiz. Elektrik alanı yüklü tanecikleri devinmeğe ve böylece bir elektrik akımı oluşturmağa zorlar. Akım oluşup oluşmaması *ortam* dediğimiz, elektriksel alanın etki göstereceği dizgenin fiziksel yapısına bağlıdır.

*Tasar: Plan.

Madde içindeki elektrik akımları üzerine ilk denel buluşlardan biri Ohm yasası içinde özetlenebilir, bu:

$$I = \frac{V}{R} \qquad (10)$$

dır. Telden geçen I akımı uçları arasındaki V gerilim farkı ile oranlıdır. Biz elektrik gerilimi için φ simgesini kullandık, ve $(\varphi_1 - \varphi_2)$ veya φ_{12} gerilim farklarını gösterdi. Ama bu bölümde temel fiziğin elektrik çevrimlerinde çok kullanılan ve volt ya da voltaj sözünden gelen V harfini kullanacağız. (Buraya değin V'den kaçındık çünkü V harfi oylum gibi, hız gibi, voltaj gibi pek ayrı yerlerde kullanılmıştır.)

Verilen bir tel parçasının her yeri aynı sıcaklıkta tutulduğunda R direnci, yani Denk. 10'daki oranlılık katsayısı, akan akımın şiddetine, yani birim zamanda geçen yük tutarına bağlı değildir. Direnç açıkça iletkenin boyuna ve kesitine bağlıdır; daha kesin söylersek, iletkenin L boyu ile oranlı ve kesitinin A yüzölçümü ile ters oranlıdır. Direnç aynı zamanda iletkenin yapılmış olduğu maddeye bağlı olduğundan

$$R = \rho\frac{L}{A} \qquad (11)$$

yazımı ile deyimlendiği açıktır. Burada ρ'nun adına maddenin hacımca dirençliliği ya da özdirenci denir. Genel olarak direnç *ohm* ile ölçülür, ve bu birim, akım şiddetlerini ölçtüğümüz birim (yani ampere) ile gerilim farklarını ölçtüğümüz birime (yani volta), Ohm yasası ile bağlıdır. Buna uygun düşen özdirenç birimi, eğer uzunluk birimi olarak cm alınmışsa ohm-cm'dir, ve çizelgelerde özdirenç genel olarak bu birimle verilir. Elektrik mühendisleri Denk. 10 ve Denk. 11'i elektrik çevrimlerinin ya da bunların bir kesiminin dirençlerinin hesaplanmasında ve bu çevrimlerdeki gerilim-akım bağıntısının bulunmasında kullanırlar. Fizikçi, elektrik aygıt tasarları geliştirilmesi görevi ile karşılaşmadıkça bu bağıntılara, maddenin en göze çarpan ve en genel bir özelliğini yansıtan bağıntılar diye bakar; bu da fizikçinin anlama çabası içinde en önemli görevidir. *Denklemler birlikte ele alınacak olursa yansıt-*

tıkları temel olgu şudur: Katı ve türdeş maddeler içinde, herhangi bir noktadaki akım yoğunluğu elektrik alanı ile oranlıdır ve aradaki oranlılık katsayısı sadece maddeye bağlıdır ve örneğin iletkenin biçimine bağlı değildir. Öyleyse

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} \tag{12}$$

yazabiliriz, burada σ maddenin belirtkin bir sabitidir. Çoğu iletkenlerin içinde, birbirine dik üç konut doğrultusu fizikçe eşdeğerdir. Örneğin, bakır halinde atom örgüsü küblü dizgededir (yüzey merkezli kübik). Ama atomsal düzenleniş küblü olmasa da bir metal parçası gelişigüzel yönelmiş küçük kristallerden oluştuğu için büyük ölçekte alınan bir ortalama için, bütün doğrultuların eşdeğer olması sonucu çıkar. Bütün bu gibi maddelerde seçkin bir doğrultu bulunmadığına göre, **J** yöngüsü, **E** ile aynı doğrultuda olacak ve σ sabiti yalın bir sayıl olacaktır*. Biz bunun adına maddenin *elektriksel iletkenliği* diyoruz. Buradaki σ iletkenliği, ρ** özdirencinin tersidir. Şekil 4.3 bu basit bağıntıları özetler ve Denk 10 ile Denk. 11'in, Denk. 12'nin bir sonucu olduğunu gösterir.

Şimdi burada birimler ve boyutlar üzerinde bir sözümüz olacaktır. İletkenlik için her yerde kullanılan birim kılgın direnç birimi olan ohm'dan türemiştir. Bildiğiniz gibi ohm, ampere başına bir volt demektir. İletkenlik, akım yoğunluğu/alan şiddeti olduğuna göre, bunun için kılgın birim $\frac{\text{ampere}/\text{cm}^2}{\text{volt}/\text{cm}}$ ya da $(\text{ohm-cm})^{-1}$ olurdu, bunu ohm-cm'nın "tersi" diye okuyabiliriz. Çoğu kez çizelgelerde iletkenliğin tersi olan ve adına dirençlilik ya da *özdirenç* dediğimiz nicelik verilir. Bunun için kılgın birim ohm–cm'dir ve kullanılan simge de ρ 'dur. İyi bir iletkenin oda sıcaklığındaki özdirenci genel olarak 1 ohm-cm'nin milyonda birkaçı kadardır. Örneğin saf bakırın oda sıcaklığındaki özdirenci $1{,}7\times10^{-6}$ ohm-cm ya da bunun iletkenliği $5{,}8\times10^{5}\ (\text{ohm-cm})^{-1}$'dir.

Durgunyük CGS birimlerinde iletkenlik ve özdirenç birimleri için özel terimler yoktur; ama bu birim dizgesi de cm, gram ve saniye'ye dayandığına ve bundan başka temel birimler bulunmadığına göre, bu birimler temel birimlerin bir birleştirimi ile oluşacaktır. Örneğin özdirencin boyutu nedir dersek,

$$\text{Özdirenç} = \frac{\text{alan şiddeti}}{\text{akım yoğunluğu}} = \frac{\left(\frac{\text{yük}}{\text{cm}^2}\right)}{\left(\frac{\text{yük}/\text{s}}{\text{cm}^2}\right)} \tag{13}$$

eder ki, bu da sonunda saniyeye indirgenir. Öyleyse bu birim dizgesinde özdirencin boyutu zamandır, ve ona uygun düşen birim saniye olmalıdır! Öyleyse bu birim dizgesinde bakırın özdirenci 10^{-17} s'dir, oda sıcaklığında bulunan camın özdirenci ise 10^{3} s basamağındadır. Daha ilerde *zaman* ile *madde* arasındaki bu tuhaf ortaklığın akla yakın bir fiziksel yorumlaması görülecektir.

4.4 Elektrik İletkenliği Taslamı

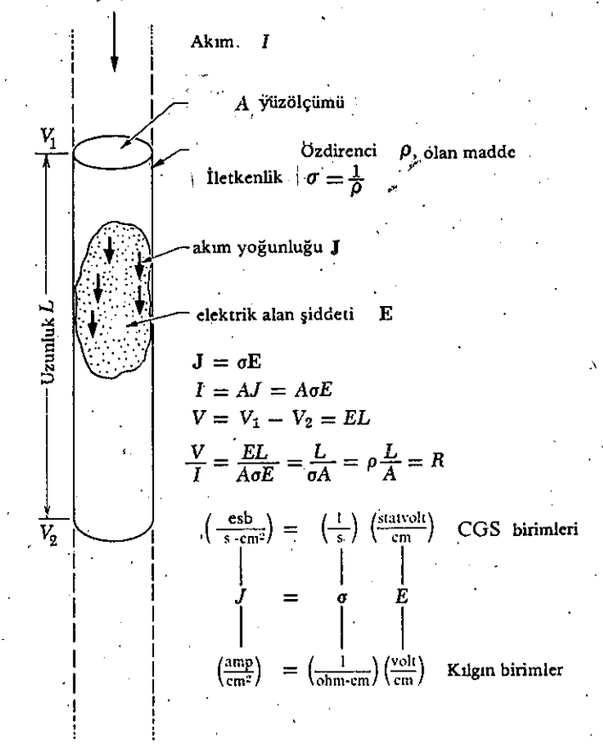
Denklem 12 ençok kullanılan maddeler üzerinde yapılan gözlemlere dayanılarak bu maddelerin davranışlarının ne olduğunu anlatır. Bunu elektrik alanının temel yasalarından *türetemeyiz*. Eşitliğin ne demek istediğini anlamak için, belli bir maddeye elektrik alanı uygulandığı zaman geçen olayları anlamak gerekir ki, bunlar da, ayrı maddelerde çok ayrı olabilir. Ohm yasasının gerçekten ilginç yanı, bu yasaya, pek çeşitli maddelerce, çok değişik alan şiddetleri içinde oldukça sağlıklı olarak uyulmasıdır. (Bazı hallerde yasa yürümemektedir ve yürümemesi de gerekir ki bunun nedenlerini sırası ile açıklayacağız.) Şimdi iletkenlik olayının ayrıntılarını bir taslam* üzerinde anlatmağa çalışacağız. Bu geniş bir elektrik iletkeni sınıfı için oldukça tipik bir örnek olacak ama bütün maddeleri kapsamayacaktır.

Genellikle iki yöngü arasında çizgisel bir bağıntı bir gergi ise karıştırır. Önemli bir gergi örneğine Böl. 9'da rastlayacağız. Bazı maddelerde iletkenlik ayrı doğrultularda ayrı değerler gösterir ve bir gergi gibi işlem görmesi gerekir; ama biz buna burada aldırış etmeyeceğiz.

** Burada ρ ve σ harfleri özdirenç ve öziletkenlik için kullanılacaktır; aynı harflerin daha önce gördüğümüz gibi oylumca yük yoğunluğu ve yüzeyce yük yoğunluğu olarak kullanılması buna engel olmaz. Alfabeler her şeyi ayrı harfle gösterecek kadar zengin değildir.

* Sayıl : Skaler, Gergi: Tensor.

* Taslam : Model.



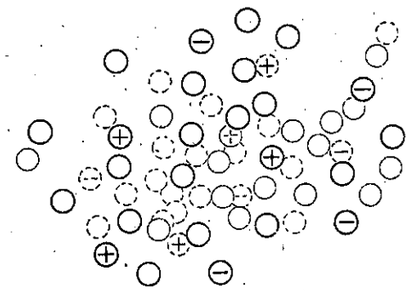
Şek. 4.3. Bir iletkenden akım geçişi. **J** akım yoğunluğu ile **E** elektrik alanı arasındaki temel bağıntı V=IR Ohm yasasını gerektirir.

Olayı açıklamak için yüklü taneler gerekir, öyleyse her santimetre kübünde eşit N sayıda artı ve eksi yüklü taneler bulunan bir ortam düşünelim. Artı yüklü taneler, M_+ kütleli ve e yüklü artı iyonlar ve eksi yüklü taneler ise M_- kütleli ve $-e$ yüklü eksi iyonlar olsun. Dizgede ki **J** akım yoğunluğu bu yüklü tanelerin ortalama hızı ile belirlenecektir.

Bu dizgeye zamanla sabit düzgün bir **E** elektrik alanı uygulanmıştır. Yani her yüklü tane bir kuvvet etkisindedir. Elektrik alanı içinde *devinimli* bir yüke bir kuvvet etkimesini ilk kez ele alıyoruz. Bu soruyu Böl. 6'da işleyeceğiz. Aslında, buradaki kuvvet, yüklü taneler durgun bulunduğu zamankinin aynıdır ve bu durum Kitap I'de kullanılmıştı. Bu demektir ki, q yüklü her tane, devinimi ne olursa olsun $q\mathbf{E}$ gibi sabit bir kuvvete etkisindedir.

Burada bir an durarak Ohm yasasına yine de uyulduğuna şaşmalıyız. Zira sabit bir kuvvet, yüklü bir özgür taneye etkiyince ona sabit bir ivme kazandırmalıdır. Ama sabit bir akım yoğunluğu sabit bir ivme ile değil, sabit bir *hızla* sağlanabilir. Eğer dizgemiz gerçekten Ohm yasasına uyuyorsa, bu, yüklü tanelerimizin ortalama *hızlarının kuvvetle* oranlı olışundandır. Bu da yüklü tanelerin özgürce devinemediğini gösterir; demek ki elektrik kuvvetinin neden olduğu devinime karşı koyan bir şey bulunmalıdır.

Devinimi engelleyici sürtünme kaynaklarını bulmak için çok uzaklara bakmağa ne gerek: bu, yüklü tanelerin birbirleri ile çarpışmalarından veya o ortamda yerleşmiş başka parçacıklarla çarpışmalarından ileri gelir.



Şek. 4.4. Ilın atomlar arasında artı ve eksi iyonlar.

Ama bunun nasıl işleyeceği taslamlarımızın ayrıntılarına bağlı olacaktır. Düşüncemizi biraz kesinleştirelim ve ılın atomlardan, artı iyonlardan, eksi iyonlardan oluşmuş normal gaz yoğunluğunda, yani kabaca $10^{19}\ \frac{\text{atom}}{\text{cm}^3}$ lük yoğunlukta bir gaz halini düşünelim (Şek. 4.4) Ortam içinde ılın atomlar baskın sayıda olsun ve bunlar arasına serpilmiş artı ve eksi iyonlar bulunsun. İster ılın ister yüklü olsun, parçacıklar arasındaki uzaklıklar, atomların veya iyonların çaplarından çok daha büyük olduğu için, bir iyonun zamanının büyük kısmını, yakından bir çarpışma dışında geçirdiği düşünülüyor.

Elektrik alanı yokluğunda atomlar ve iyonlar, hızları sıcaklıkları ile belirli, her yana yönelmiş, gelişigüzel bir devinim içindedirler. Gazların devimsel kuramı, bir parçacığın ortalama devimsel enerjisi ile sıcaklığı arasındaki bağıntıyı verebilir: Belirli bir iyonu belirli bir anda, diyelim $t = 0$ anında görebilseydik onu $\mathbf{u}$ gibi bir hızla devinir görürdük. Bundan sonra ne olacaktır? İyon bir doğru boyunca sabit hızla devinecek ve bir atoma iyice yaklaşma olanağı çıkıncaya kadar gidecektir. Bu çarpışmada, iki cismin toplam devimsel enerji ve toplam momentumu korunacak, ama iyonun uçuş doğrultusu ve hızı değişecek, daha doğrusu, yeni bir $\mathbf{u}'$ değeri alacak şekilde, az çok değişecektir. Sonra yeni bir çarpışma olur ve hıza $\mathbf{u}''$ değerini kazandırır ve bu böylece sürer gider. Aynı şekilde, uzakta bulunan başka bir iyon, önceki iyonumuzla uzak-ulaşımlı Coulomb kuvvetleri etkileşmesine girerek onun yolunu değiştirebilir. İyonlar arasında önemli olabilen bu uzak-ulaşımlı karşılaşmalar da hızı gelişigüzel, küçük değişimlere uğratır, ama etki tümünce özdeştir.

Etkileşimlerinin özdeşliği her iyonun $t = 0$ anındaki $\mathbf{u}$ hızı ile belli bir süre sonundaki hızı arasında, büyüklük ve doğrultu bakımından, bulunabilecek herhangi bir bağımlılığı siler; ve bu bizim problemimizin kilit noktasıdır. Bu demektir ki, iyonun hız yöngüsünün, $t = 0$ anındaki doğrultusu ne olursa olsun $t = \tau$ gibi bir süre sonunda uzayda herhangi bir başka doğrultuya yönelmiş bulunacaktır. İyon, başlangıçtaki devinim doğrultusunu "unutmuştur". Başka türlü söylemek gerekirse, yatay olarak güneye doğru devinen 10000 iyon seçecek ve herbirini τ saniye izleyecek olursak, bunların son hız doğrultuları hiç yön seçmeksizin bir küre yüzeyi üzerine dağılmış olacaktır. Doğrultu "belleğinin" çoğunu silmek için birçok çarpışmalar gerekeceği gibi, bu birkaç çarpışma ile de sağlanabilir; bunun tümü çarpışmalardaki etkileşimlerin yapısına bağlı olacak ve büyük ya da küçük momentum değişikliklerinin çok veya az oluşuna göre kendini gösterecektir. Bu bakımdan bir sınır hal, sert esnek kürelerin çarpışmasıdır ki, bu bir tek çarpışmada doğrultuyu büsbütün değiştirir. Bu farklar üzerinde fazla kaygılanmaya değmez. Önemli nokta şudur ki, çarpışmanın yapısı ne olursa olsun, verilen bir dizge için τ saniyelik belirgin bir süre sonunda bir iyonun, ilk hız doğrultusu ile son hız doğrultusu arasındaki *bağlılaşım* (correlation) kaybolacaktır*. Bu belirtgin τ zamanı iyonun, ortalama çevresinin yapısına bağlı olacaktır; çarpışmaların sayısı arttıkça bu zaman kı-

* İlk ve son doğrultular arasındaki bağımlılık için nicel bir ölçü vermekle, genel bir dizge halinde τ'yu daha kesinlikle tanımlamak olasıdır. Bu farelerin doğumdaki ağırlıkları ile, olgunluk çağındaki ağırlıklarını birbirine bağlayan olasılık ölçüsünü bulmak gibi istatistik bir problemidir. Ama burada yaptığımız çözümlemeyi tamamlamak için genel bir nicel tanıma gerek yok.

salacaktır, zira bu gaz dizgemizde çarpışmalar arasında iyona hiç bir şey olmaz.

Şimdi dizgeye düzgün bir $\mathbf{E}$ elektrik alanı uygulamak için hazır durumdayız. Doğrultu belleğini büsbütün yitirmenin, sert küreler halinde olduğu gibi bir tek çarpışma ile sağlandığını düşünürsek olayın anlatılması kolaylaşacaktır. Ama aslında buradan çıkaracağımız sonuç bu varsayıma bağlı değildir. Bir çarpışmadan hemen sonra bir iyon gelişigüzel bir doğrultuda gider. Çarpışmadan hemen sonraki hızını $\mathbf{u}^c$ ile gösterelim. İyona etkiyen $\mathbf{E}e$ elektrik kuvveti ona sürekli olarak momentum kazandırır. Bir t zamanı sonunda iyonun, alandan kazanarak, ilk $M\mathbf{u}^c$ momentumuna yöngül olarak eklenen momentum artışı $\mathbf{E}et$'dir. O halde t süresi sonundaki momentumu $M\mathbf{u}^c + \mathbf{E}et$ olur. Momentum artışı $M\mathbf{u}^c$ yanında küçük ise, hız çok fazla etkilenmeyecek ve gelecek çarpışma elektrik alanı yokluğunda hangi süre sonunda olacak idiyse yine öyle olacaktır. Başka bir deyişle çarpışmalar arasındaki $\bar{t}$ ile göstereceğimiz ortalama zaman, $\mathbf{E}$ alanı çok kuvvetli değilse bu alandan bağımsızdır.

Alandan kazanılan momentum aynı doğrultuda bir yöngüdür, Ama bu yöngü, her çarpışmada devinim doğrultusu önceki doğrultu ne olursa olsun gelişigüzel değiştiği için etkisini yitirir.

O halde tüm artı iyonların verilen bir andaki ortalama momentumu nedir? Soruya aşağıdaki açıdan bakarsak şaşılacak kadar kolay yanıt verilebilir: Söz konusu anda saati durdurarak her iyona geçen çarpışmadanberi nekadar zaman geçtiğini sormuş olalım. İyon 1'den t_1 yanıtını almış olduğumuzu düşünelim. Buna göre bu iyonun momentumu, son çarpışmadan çıktığı zamanki $M\mathbf{u}_1{}^c$ momentumuna $e\mathbf{E}t_1$ momentumunun katılması ile elde edilen değer kadardır. Buna göre artı bütün N iyonlarının ortalama momentumu,

$$M\bar{\mathbf{u}}_+ = \frac{1}{N}\sum_j (M\mathbf{u}_j{}^c + e\mathbf{E}t_j) \qquad (14)$$

olur. Burada $\mathbf{u}_j{}^c$, j numaralı iyonun son çarpışmadan hemen sonraki hızıdır. Bu $\mathbf{u}_j{}^c$ hızları doğrultu bakımından gelişigüzel yönelmişlerdir ve ortalamaya etkileri sıfırdır. Denklemin ikinci terimi ise $\mathbf{E}e$ ile t_j'nin *ortalamasının yani son çarpışmadan beri geçen ortalama zamanın çarpımıdır.* Bu sonraki çarpışmaya değin geçecek sürenin ortalaması ile aynı olmalıdır ve bunların ikisi de çarpışmalar arasındaki $\bar{t}$ ortalama zamanına eşittir*. Buradan, bu artı iyonun sürekli bir $\mathbf{E}$ elektrik alanı içindeki ortalama hızının

$$\bar{\mathbf{u}}_+ = \frac{\mathbf{E}e\bar{t}_+}{M_+} \qquad (15)$$

olduğu sonucuna varırız. Bu, yüklü bir taneciğin ortalama hızının ona uygulanan kuvvetle oranlı olduğunu gösterir. Eğer biz yalnız ortalama hızı gözlersek, içinde devindiği ortamın devinime hızla oranlı bir kuvvetle karşı koyar gibi davrandığını görürüz. Bu bir çeşit sürtünme direncidir ki, koyu bir şurubu kaşıkla karıştırmak istediğimiz zaman duyduğumuz ağdalılık direncine benzer. Yüklü tanecikler bu durumla karşılaşınca Ohm yasasına benzer bir hal beklemeliyiz.

Denklem 15'de $\bar{t}_+$ gibi bir imiyle koymamızın nedeni çarpışmalar arasındaki ortalama zamanın artı ve eksi iyonlar için farklı olabileceğidir. Eksi iyonlar zıt yönde bir hız kazanırlar, ama eksi yük taşıdıkları için $\mathbf{J}$ akım yoğunluğuna katkıları artı iyonlarınkine doğrudan eklenir. Böylece iki cins iyon ele alındığına göre Denk. 4.5'in eşdeğeri

$$\mathbf{J} = Ne\left(\frac{e\mathbf{E}\bar{t}_+}{M_+}\right) - Ne\left(\frac{-e\mathbf{E}\bar{t}_-}{M_-}\right) = Ne^2\left(\frac{\bar{t}_+}{M_+} + \frac{\bar{t}_-}{M_-}\right)\mathbf{E} \qquad (16)$$

* Çarpışmalar arasındaki ortalama zamanın, *son çarpışmadan beri geçen ortalama zaman ile gelecek çarpışmaya kadar olan ortalama zamanın toplamına eşit* olması gerektiğini düşünebilirsiniz. Eğer çarpışmalar tümcek düzgün aralıklarla olsa idi, bu doğru idi, ama iş böyle değildir. Bunlar birbirinden bağımsız gelişigüzel sürelerdir, ve böyle olduğu için de, yukardaki deyim çelişik gibi gelse de doğrudur. Bunu düşününüz. Bu bulduğumuz temel sonucu değiştirmez, ama problemi kurcalayacak olursanız istatistik üzerindeki anlayışınız artacaktır. (İp ucu: Eğer bir çarpışma başka bir çarpışma olasılığını etkilemezse, bu bağımsız demektir, —saati dilediğiniz bir anda ya da bir çarpışma anında işletmeye başlatmış olmanız bir şey değiştirmez).

olur.

Geliştirdiğimiz kuram dizgenin Ohm yasasına uyacağını bildirir, çünkü Denk. 16'daki nicelikler ortamın belirtgin bir sabiti olduğuna göre **J** ile **E** arasında çizgisel bir bağıntı bulunduğunu gösterir. Denk. 16'yı Denk. 12 ile karşılaştırınız. Buradaki

$$Ne^2\left(\frac{\bar{t}_+}{M_+}+\frac{\bar{t}_-}{M_-}\right)$$

sabiti σ iletkenliği yerinde görünmektedir.

Bu dizgi üzerine özel sayılacak birçok varsayımlar aldık; ama geriye dönüp bakılınca bunların **E** ile **J** arasındaki çizgisel bağıntı bakımından pek de önemli olmadığını görürüz. Yüklü özgür taneciklerin devinimleri sabit yoğunluklu herhangi bir dizge içinde, çarpışmalar ya da daha başka etkileşimlerle sık sık yeniden "düzensizleştirilirse", **E** alanı çok kuvvetli olmadıkça bu taneler Ohm yasasına uymak zorundadırlar. Burada ortamın σ iletkenliğini veren **J**'nin **E**'ye oranı, yüklü tane sayısı ile ve yön bağlılaşımının* yitirilme zamanı olan belirtkin τ süresi ile oranlı olacaktır. Çarpışma olaylarının karışık ayrıntıları probleme yalnız bu son nicelikle girer. Verilen herhangi bir dizgedeki yük taşıyıcılarının sayısı bilindiğine göre, ayrıntılı bir iletkenlik kuramı geliştirilmesi τ için bir kuram geliştirmek demektir. İşlediğimiz özel örnekte bu nicelik yerine $\bar{t}$ alınmış ve σ iletkenliği için iyice belirli bir sonuç kestirilebilmiştir. Daha genel bir τ niceliği alınır ve artı ve eksi yük taşıyıcılarının farklı sayıda olabileceği hesaba katılırsa geliştirdiğimiz kuramı şöylece özetleyebiliriz:

$$\sigma \approx e^2\left[\frac{N_+\tau_+}{M_+}+\frac{N_-\tau_-}{M_-}\right] \qquad (17)$$

Burada $\approx$ imini kullanmamızın nedeni, τ için kesin bir tanım vermeyişimizdir. Ama bunu da yapabiliriz.

Elektrik iletkenliğinin, yüklü taneciklerin gelişigüzel devinimlerine eklenen hafif ve sürekli sürüklenmesinden ileri geldiğini açıkca belirtmek için Şek. 4.5'de, uğraştığımız dizgenin ne olduğunu göstermek üzere minil sayılan uydurma bir resim çizdik. Burada artı iyonlar beyaz noktalarla, eksi iyonlar ise daireciklerle gösterilmiştir. Bu sonuncuların elektronlar olduğu ve kütleleri çok küçük olduğu için artı iyonlardan çok daha devimli oldukları, artı iyonların ise büsbütün devinimsiz kaldıkları varsayılmıştır. Şek. 4.5 *a*'da parçacıkların ve elektronların hızlarının tam gelişigüzel dağılımını görüyoruz. Bu şeklin çizilebilmesi için parçacıkların yerleri ve imleri gelişigüzel sayılar çizelgesi ile bulunmuştur. Elektron hız yöngüleri de, aynı biçimde, bu gaz moleküllerinin hız düzenini veren "Maxwell" dağılımına göre çizilmişlerdir. Şek. 4.5 b'de aynı konumlar kullanılmıştır, ama bu kez hızların hepsi sağa yönelmiş küçük bir artış kazanmışlardır. Yani, Şek. 4.5b eksi yüklerin sağa doğru net bir akış halinde bulunduğu bir iyonlu madde görünüşüdür, bu ise sola doğru bir artı akıma eşdeğerdir. Şek. 4.5 a ise sıfır ortalama hız halindeki durumu göstermektedir.

Şek. 4.5 a'daki 46 elektronun ortalama hızlarının tam sıfıra eşit olmasını beklemememiz gerektiği açıktır, zira bunlar olasılıkca bağımsız niceliklerdir. Bu demektir ki bir elektron ayrı bir elektronun davranışını hiç bir şekilde etkileyemez. Öyleyse hiç bir elektrik alanı bulunmadığı sürece elektron hızlarının yöngüsel toplamındaki olası dalgalanmalar yüzünden gelişigüzel dalgalanan bir elektrik akımı bulunacaktır. Kendiliğinden dalgalanan bu akım ölçülebilir. Bütün elektrik devrelerindeki "gürültü"nün kaynağı budur ve çoğu kez zayıf elektrik iminin yüze çıkarılması için yapılan aygıtların duyarlığını sınırlar. Bu dersin Cilt V'inde bu konu üzerinde daha fazla bilgi edineceksiniz.

*Bağlılaşım: Korelasyon Minil: Mikroskopik

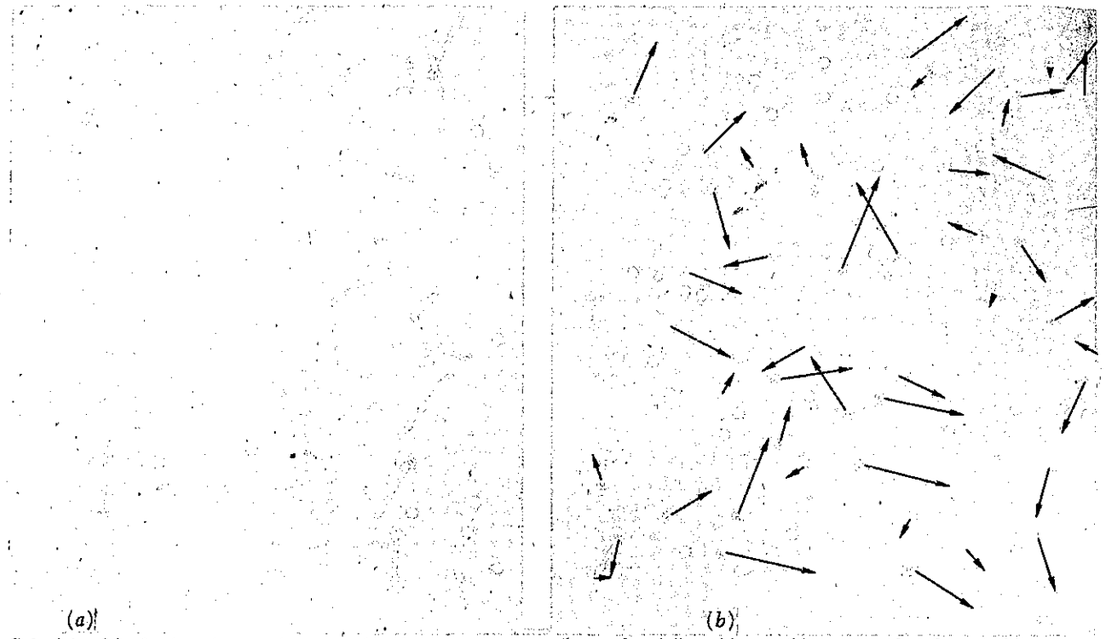
4.5 Ohm Yasasının İşlemediği Yerler

Şimdi Ohm yasasının nasıl işlemez hale geleceğini göreceğiz. **E** elektrik alanı öyle yeğin olsunki bir iyon çarpışmalar arasında ortalama ısıl hızı ile ölçüşebilecek bir hız artışı kazansın. Bu hal, çarpışmalar arasındaki, Denk. 16'ya giren $\bar{t}_+$ veya $\bar{t}_-$ ortalama sürelerini oldukça etkileyecektir. Bu zamanlar artık sabit değil, **E**'ye bağlıdır ve Denk. 16 artık çizgisel değildir. Bu demektirki, $\bar{t}$ de **E** ile değişirse **E** alan yeğinliğini iki katına çıkarmak **J** akım yoğunluğunu iki katına çıkarmaz. Bunun tipik bir halde nerede kendini göstereceğini görelim. Taslamımız zayıf iyonlaşmış bir gaza benzemektedir. Normal yoğunlukta bir gaz içindeki bir iyonun ortalama özgür yolu 10^{-6} cm basamağındadır. Gelişigüzel devinimin ortalama devinsel enerjisi, k gazların kinetik kuramında ortaya çıkan Boltzmann sabiti olduğuna göre, kT büyüklüğündedir. Öyleyse hız ölçütümüz şöyle deyimlenebilir: İyonun çarpışmalar arasında alan yüzünden kazandığı devimsel enerji kT ile ölçüşebilecek değeri bulursa başımız dertde demektir. Bu iki enerjiyi yaklaşık olarak eşitlersek,

$$eE,10^{-6}\text{ cm} \approx kT \qquad (18)$$

buluruz. Sayıları yerlerine koyarak $E \approx 80$ statvolt/cm yani 24 kilovolt/cm gibi laboratuvarlarda kolayca elde edilebilecek ılımlı bir alan yeğinliği çıkar. Kuşkusuz bu sınır doğrudan özgür yola bağlıdır. Alçak basınçlardaki iyonlaşmış gazlarda özgür yol çok uzun olduğundan Ohm yasasından ayrılık zayıf alanlarda da kendini gösterebilir.

Çok yeğin elektrik alanları yüklü taneciklerin sayısının artması gibi daha sert değişimlere yol



Şek. 4.5. (a) Sayıları hemen hemen eşit olan artı iyonların ve elektronların gelişigüzel bir dağılımı. Elektron hızları yöngüler ile gösterilmiştir ve (a) halinde bunlar tümünce gelişigüzel yönelmiştir. (b) halinde ise sağ tarafa doğru bir sürüklenme vardır, bu sürüklenme siyah yöngülerle belirlenmiştir. Bu hız elektronların ilk hızlarına alt sol köşedeki elektron halinde olduğu gibi katılmıştır.

açabilir. Elektriksel ışık yayında olanlar bu cins bir değişimdir. Zaten gaz içinde var olan yüklü tanecikler alandan o kadar enerji alırlar ki, öteki atomlara çarpmaları, yeni iyonlanmalara yol açacak kadar yeğin olur, bu da yüklü yeni tanelerin doğması demektir. Böyle gelişen çığ halindeki iyonlanma Ohm yasasının yıkılmasıdır!

Ohm yasasının değilse bile geliştirdiğimiz kuramın yıkılabileceği başka bir bölgeyi önceden kestirebiliriz. E elektrik alanının çok kısa bir zaman için uygulandığını düşünelim. Bu süre τ kritik zamanı ile ölçüşebilecek kadar ya da ondan daha kısa ise kurgumuzu yeniden gözden geçirmek gerekir. Daha açık söylersek, periodu çarpışmalar arasındaki zamana bakınca kısa olan bir dalgalı elektrik alanı kullanalım. O zaman yüklü tanelerin tepkisi, geniş ölçüde, özgür cisimler olarak sahip oldukları eylemsizlikleri ile belli olacaktır. Bu halde incelediğiniz problem veya gelecekte rastlayacağınız problemler ne olursa olsun, ana çizgilerini verdiğimiz kuram artık uygun düşmeyecektir. Bununla birlikte örnek olarak aldığımız gaz içinde çarpışmalar arasındaki ortalama zaman, artı iyonlar için (10^{-6} cm/molekül hızı) yakınlarında yani 10^{-10}s basamağında, elektronlar için ise, daha da kısa olacaktır. Böylece sabit alan için geliştirilmiş ise de, kuramımız birçok dizge için çok hızla değişen alanlar halinde de işleyebilir.

Kes. 4.2'de anlattığımız diod lâmba göze batacak şekilde Ohm yasasına uymayan bir düzenektir. Bir takım koşullarda eldeki elektron sayısı, katotdan birim zamanda salınan elektron ile sınırlı olduğundan anot artı oldukça, akım gerilime hemen hiç bağlı değildir. Anot eksi ise, akım sıfırdır, zira anot hiç elektron salamaz. Diyod akımı tek bir doğrultuda geçirir. Böyle bir düzenek dalgalı akım doğrultucusu olarak kullanılır. Prob. 4.25'de incelenen uzay yükü ile sınırlı akım koşulları içinde, diyod akımı, Ohm yasasında olduğu gibi gerilimin birinci kuvveti ile oranlı olacak yerde 3/2 nci kuvveti ile oranlı olur.

İki yarı iletken maddenin eklem yeri, veya, bir yarı iletkenle bir metal arasındaki eklem yeri Ohm yasasından epey uzak durur ve bu bölgeler diyod lâmbalar gibi tek yönlüdür. Çizgisel olmayan düzenekler uygulamada olduğu kadar elektronikte de onlarsız yapamayacağımız dizgelerdir. Her şey Ohm yasasına uymağa başlasaydı elektronik uygulayımbilimi* silinir giderdi.

4.6 Metallerin Elektriksel İletkenliği

Metaller bildiğimiz en iyi iletkenlerdir. Anlattığımız elektriksel iletkenlik kuramı 19. yüzyılın sonlarında Drude ve başkalarınca başkalarınca metallerin iletkenliğini açıklamak için geliştirilmiştir. Lorentz kuramın ayrıntılarını geniş ölçüde işlemiş ve bazı bakımdan verimli sonuçlara varmıştır. Metallerin yüksek iletkenlik göstermesinin, özgür elektronlardan ileri geldiğinde hiç kuşku yoktur; özgür elektron deyimi ile hiç bir atoma bağlı olmayan ve metalin kristal örgüsü içinde özgürce devinebilen elektronları anlıyoruz. Buna inanmak için, akım geçiren bir metal çevriminde** kimyaca saptanabilen herhangi bir madde taşınması olmadığını anımsayalım. Metal elementler kimyası ve atom yapısı üzerine ilk kuantum kuramı, metallerin bir veya iki dış elektronlarını kolayca koyuverdiklerini ortaya koyar. Atomlar ayrı halde ise bu elektronlar onlara bağlı kalırlar, ama bir kristal içinde böyle birçok atom bir yere geldiği zaman elektronlar özgürleşirler. O zaman örgünün kendisi, düzgün katı (rijid) bir düzende bağlı artı iyonlardan oluşur. "iletim elektronları" bu iyon örgüsü içinde devinirler. Her metal atomu başına bir tek elektron özgürleşse bile, ortaya çıkan yüklü tanecik yoğunluğu, başka yollarla iyonlar oluşturduğu zaman elde edilen yoğunluktan çok daha büyüktür. Örneğin sodyum metalinin cm^3'ünde bulunan atom sayısı $2{,}5\times10^{22}$dir.

Daha önce gördüğümüz gibi, yüklü taneciklerin devingenliği uygulanan elektrik alanından yönelmiş momentum alabilmesi için geçen τ süresi ile belirlenir. Olayın içeriği ne olursa olsun bu doğrudur. Sodyumdaki yüklü taneciklerin sayısının atom başına 1 olduğu ve bunların m_e kütleli elektronlardan oluştuğu düşünülürse, τ'yu hesaplayabilmek için yalnız denel olarak ölçülen iletkenliğe gereksinmemiz vardır. Sodyumun oda sıcaklığındaki öziletkenliği durgun yük birimler cinsinden 1.9×10^{17}esb/s-cm-statvolt'dur. Denk.

* Uygulayımbilim: Teknoloji.

** Çevrim: Devre

17'de artı yüklü taneleri bir yana bırakarak,

$$\tau_- = \frac{\sigma m_{e-}}{N_- e^2} = \frac{(1{,}9\times10^{17})\times(9\times10^{-28})}{(2{,}5\times10^{22})\times(23\times10^{-20})} \approx 3\times10^{-14}\,\text{s} \qquad (19)$$

bulunur. Bir elektronun, bir kristalin içinde önemli bir sapmaya uğramaksızın şaşılacak kadar uzun bir süre boyunca devindiği anlaşılıyor. Bir elektronun gazların kinetik kuramına göre oda sıcaklığındaki ısıl hızı, 10^7 cm/s yakınlarında olmalıdır, öyle ise, bir elektron bu 3×10^{-14} s'de 30 angström kadar, yani örgü aralığının 10 katı kadar yol alır.

İyon örgüsü, elektronlar için niye bunca saydamdır? unutmayalım ki iyonlar kristal içinde birbirlerine değecek kadar sıkışıktırlar. Üstelik örgü içindeki yol boyunca gerilim değişmeleri oda sıcaklığındaki elektronun uçuşu sırasında, onu yoldan alakoyan çarpışmalar değilse nedir? Bu gibi çok önemli sorular elektronun dalgalı yapısı ortaya çıkıncaya dek gerçek şekilde yanıtlandırılmamıştır. Gerçekten elektronların bir metal içindeki davranışı, kuantum mekaniği öncesi fiziğini inatçı bir takım çelişmelerle karşı karşıya bırakmıştır. Bu sorulara daha sonra, kuantum fiziğinde bilgi edindikten sonra yeniden döneceğiz. Şimdiki işimiz bakımından bütün yapabileceğimiz, bir çok fizikçi kuşağının yapmak zorunda kaldığı gibi, metallerin bu ilginç elektrik iletkenliğini olduğu gibi onaylamaktır.

Ama yine de kurduğumuz elektrik iletkenliği düzeninin bazı temel parçalarını elde tutabiliriz. İletim akımı elektronlarla taşınır; bu yüklü, taneciklerin gelişigüzel ve çok hızlı ısıl devinimlerine eklenen yavaş ve sürekli bir sürüklenme devinimidir. Elektronların iletken örgüsü tarafından saçılması ve dağıtılması, sürüklenme hızının alanla oranlı olmasını ve dolayısı ile, akımın Ohm yasasına uymasını sağlayan düzenektir.

Metallerin çoğunda Ohm yasası, bir metalin uzun zaman dayanamayacağı kadar yeğin akım yoğunlukları için bile, çok büyük sağlıkla doğrudur. Bir kuramsal öngörüye göre, 10^9 amp/cm² 'lik bir akım yoğunluğu için yasadan ayrılma yüzde bir kadar olabilir. Bu akım yoğunluğu bir çevrimde bulunan bir teldeki akım yoğunluklarının bir milyon katı tutarıdır.

Arı metallerin iletkenliği sıcaklık alçaldıkça büyür. Bunun yukarki kuram ile açıklanması biraz güçtür. Üstelik aşırı iletkenlik dediğimiz şaşırtıcı olayı, metal iletkenliğinin bütün görünüşlerini anlayabilmek için ortaya atılan "bilardo bilyası" taslamına dayanarak açıklamaya çalışmak güçtür. Çoğu metaller aşağı sıcaklıklarda öylesine iyi iletmeğe başlarlarki bunu ancak sonsuz iletkenlik sözü ile anlatabiliriz. (Bu kabul bile onların akıl almaz elektriksel davranışını tam olarak anlatamaz.)

Şek. 4.6'daki çizelge bir çok arı maddenin iletkenliklerini ve bu iletkenliklerin sıcaklıkla değişimini göstermektedir. Çizelge değerlerin ve davranışların ne geniş ölçüde değiştiğini ortaya koymaktadır. Burada hem engilerin (sıcaklıklar) ve hem de boyguların (iletkenlikler) logaritmalı ölçekte olduğuna ilginizi çekelim.*

4.7 İletkenlerin Direnci

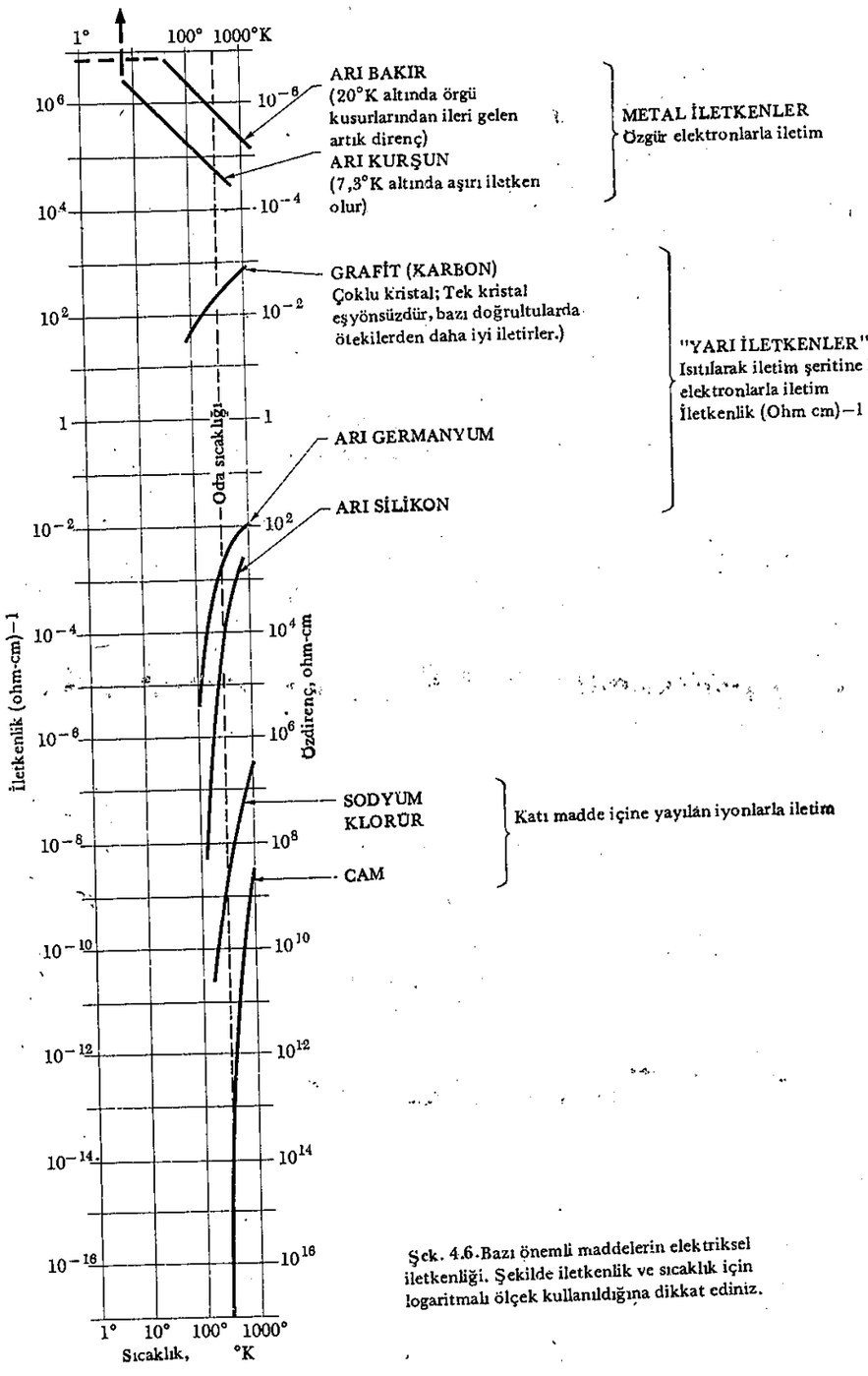
Düzgün bir telin yapıldığı maddenin özdirenci verildiğine göre R direncinin bulunması yalın bir hesap işidir. Daha yukarıda Denk. 11'de yazdığımız direnç eşitliği

$$R = \frac{\text{uzunluk}\times\text{özdirenç}}{\text{kesit yüzölçümü}} \qquad (20)$$

dir. R direnci yalnız iyi tanımlanmış bir akım geçişi için bir anlam taşır. Bir tel halinde bu anlam üzerinde hiçbir kuşku yoktur. Ama akımın bir oylum içine dağılması gibi daha genel bir hal karşısında isek, bu dizgeye akımın girdiği ve çıktığı "bağlamauçları"nın yerlerini kesinleştirmeden dirençten sözedemeyiz. Bütün hacım boyunca akım yoğunluğu dağılımının $\mathbf{J}=\sigma\mathbf{E}$ temel bağıntımıza göre belirlenmesi gerekir.

Buna bir örnek olmak üzere Şek. 4.7 *a* ve *b*'de gösterilen, arası grafit doldurulmuş silindir biçimli iki

* Engi: Absis; Boygu: Ordinat



Şek. 4.6. Bazı önemli maddelerin elektriksel iletkenliği. Şekilde iletkenlik ve sıcaklık için logaritmalı ölçek kullanıldığına dikkat ediniz.

bakır yaprağın oluşturduğu cisimden geçen akımı inceleyelim. Gerecin bağlanma uçları arasındaki direnç nedir? Eğer bakır boru boyunca akan akıma karşı bakırın gösterdiği direnç, grafitin içinden ışınsal doğrultuda geçen akıma karşı bu maddenin gösterdiği dirençten çok küçükse, akımın bağlanma uçlarının yerinin pek önemi yoktur. Bu halde bu bakır boruların eşgerilim yüzeyler olduğunu varsayıla bilir. Şek. 4.6'daki cetvele göre bakırla grafitin oda sıcaklığındaki iletkenlikleri 10^3 'ü aşkın bir çarpan kadar ayrıdır ve, bakır yaprak yeterince kalın oldukça, bu varsayım yapılabilir. Bu varsayıma dayanarak bakır elektrotlar arasındaki gerilim ayrımına V_0 diyelim. Grafit içindeki elektrik alanını bulabilmek için yüklü silindirler arasındaki alanın $1/r$ ile oranlı olduğunu anımsayalım ve $E = k/r$ alarak buradaki k oranı katsayısını

$$V_0 = \int_{r_1}^{r_2} E\,dr = k\int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r} = k \ln \frac{r_2}{r_1} \qquad (21)$$

bağıntısından çıkarabiliriz. Buna göre grafitin içinde her hangi bir r yarıçapı üzerindeki alan

$$E = \frac{V_0}{r \ln (r_2/r_1)} \qquad (22)$$

olur ve orada σE değerinde bir akım yoğunluğu oluşur. Akımın r yarıçapında aktığı tüm yüzey $2\pi rL$ olduğuna göre, toplam akım

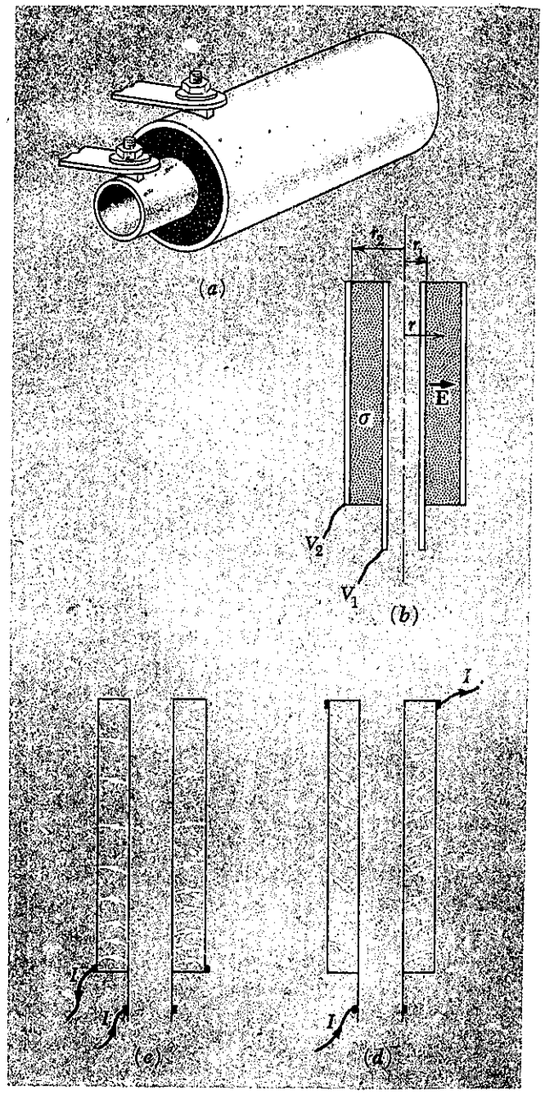
$$I = \frac{2\pi L\sigma V_0}{\ln (r_2/r_1)} \qquad (23)$$

dır. Beklememiz gerektiği gibi bu r'ye bağlı değildir. Direnç,

$$R = \frac{V_0}{I} = \frac{1}{2\pi L\sigma} \ln \frac{r_2}{r_1} \qquad (24)$$

olur.

Silindir biçimli bakır elektrotlar çok ince metal yapraklar olsaydı ve bu yüzden silindirler boyunca geçen akıma gösterilen direnç grafitin enine direnci yanında savsanamasa idi ne olurdu? Bu problemi çözmeye ça-



Şek. 4.7. Silindir biçiminde bakır iki boru arasındaki bölge grafit doldurulmuştur (a,b). Bakır boruların direnci savsanacak kadar küçüktür; akım grafit içinde ışınsal doğrultuda geçer. Böyle olmasa idi, akım çizgileri, ayrı iki bağlanma yeri için (c) ve (d) gibi olurdu.

lışmayacağız, ama akım çizgilerinin ne biçim alacağını düşünmek öğreticidir. Şek 4.7 c ve d, bağlama uçlarının ayrı iki yeri için, akım çizgileri dağılımının nasıl olabileceği konusunda yardımcı olmaktadır.

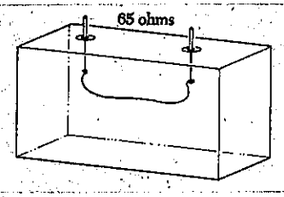
4.8 Çevrimler ve Çevrim Ögeleri

Elektriksel düzeneklerin genel olarak, tel bağlanabilecek belirli uçları olur. Yükler düzeneğe bu uçların birinden girip ötekinden çıkar. Özellikle tellerle dışarı bağlanabilen yalnızca iki uç varsa ve akım akışı her yerde sabit bir gerilim altında kararlı bir değerde ise, o zaman iki bağlama ucundaki akımın eşit ve zıt yönlü olması gerekir*. Bu halde ele aldığımız düzenekten geçen I akımından ve bunun "uçları arasında"ki elektriksel gerilim farkı anlamına gelen V geriliminden söz edebiliriz. Buradaki V/I oranı verilen bir I değeri için direnç birimleri cinsinden bir sayıdır (V'ler volt ve I'ler ampere olduğuna göre dirençler ohm çıkar). Cismin akım geçen bütün parçaları Ohm yasasına uyarlarsa bu sayı akıma bağlı olmayan bir sabit olacaktır. Direncin değeri, cismin bağlama uçları arasındaki kararlı doğru akım ("da") için elektriksel davranışı tam olarak anlatır. Bu oldukça açık uyarı ile çevrim öğesi kavramı gibi basit bir düşünceyi tanıtmak istiyoruz.

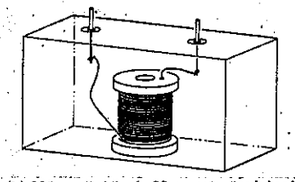
Şek. 4.8'deki beş kutuya bakınız. Hepsinin iki bağlama ucu ve her kutu içinde ayrı cisimler bulunmaktadır. Bu kutulardan herhangi biri, uçlarına bağlanan tellerle bir elektrik çevriminin bir parçası haline sokulursa bu uçlar arasındaki gerilim farkı nın bağlama tellerinden geçen akım yeğinliğine oranı 65 ohm değerinde çıkar. Her kutuda uçlar arasındaki direnç 65 ohm'dur deriz. Bu deyimin akım şiddetinin ve gerilim farkının akla gelebilecek bütün değerleri için doğru olmayacağını kesin olarak söyliyebiliriz. Uçlar arasındaki gerilim farkı yükseltilirse, kutularda ayrı olaylar geçebilir

* Bir uçtan içeriye 4 ampere'lik akım girerken öteki uçtan 3 amper'lik akım çıkabilir. Ama bu cismin, 1 coulomb/s hızla içerde artı yük biriktirdiğini gösterir. O zaman gerilimin çok hızla değişmesi gerekir ki, bu da uzun süremez. Öyleyse bu zamana bağlı olmayan kararlı bir akım hali olamaz.

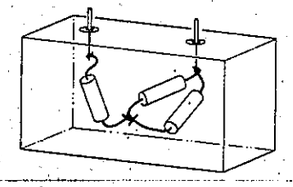
Şek. 4.8. Bir doğru akım için 65 ohm'luk bir dirence eşdeğer olan ayrı düzenekler.



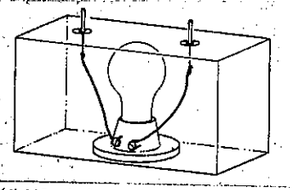
(a) 28 cm boyunda numara 40 nikrom tel.



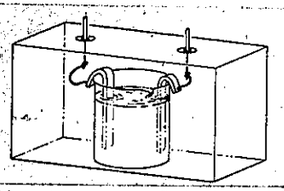
(b) 225 g ağırlığında 28 numara, üzeri kaplı bakır mıknatıs teli (343 m).



(c) İki tane 70 ohm'luk direnç ile bir tane 30 ohm'luk direnç.



(d) 115 volt, 25 watt'lık telli ampul (soğuk).



(e) 0,5 N potasyum klorür çözeltisi, elektronlar belirli bir büyüklükte ve belirli aralıktadır.

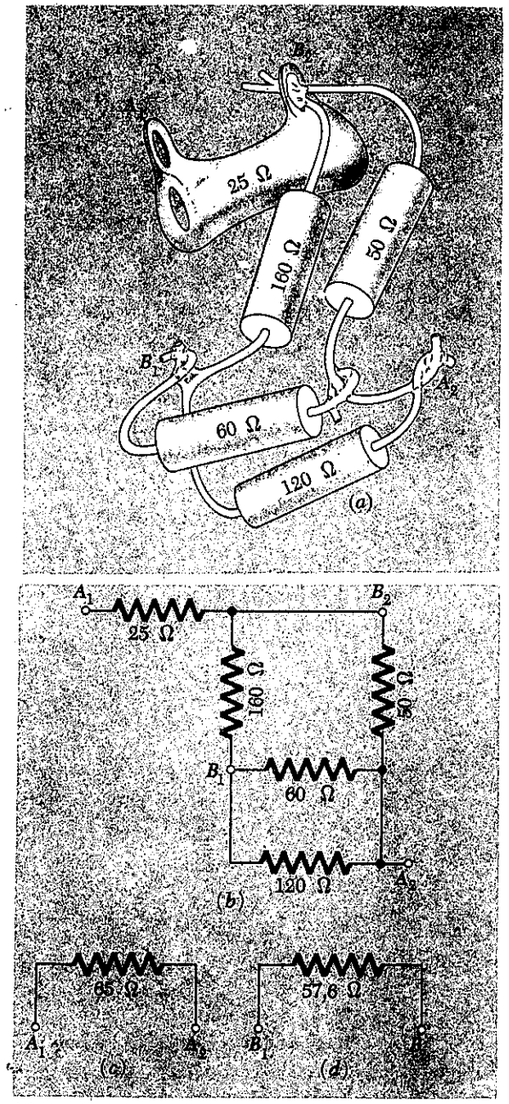
ve kimilerinde gerilim/akım oranı değişir. Bu kutulardan hangisinin daha erken başımızı derde sokacağını kestirebilirsiniz. Yine de bir takım alt sınır değerler vardır ki, bunun altında tümü benzer davranıştadır ve bu sınır içinde, bütün kutular kararlı akım bakımından birbirinin aynıdır. Kutu 65 ohm'luk bir dirence eşdeğerdir*. Böyle bir direnci çizemlerde ⁄\/\/\ biçiminde gösteririz, ve kutunun bir parçası olduğu çevrimin çizeminde kutu yerine bu soyutlamayı alırız. Bir elektrik çevrimi ya da bir akım örgüsü, bu gibi çevrim öğelerinin savsanabilir dirençte tellerle bağlanması ile oluşmuş bir iletkenler dizisidir.

Birbirine bağlı birçok öğelerden oluşmuş bir akım örgüsü alarak bunun iki noktasını giriş ucu halinde kullanırsak, dizgenin bütününü, bu giriş uçlarına bağlanmış bir tek direnç eşdeğer görebiliriz. Böylece Şek. 4.9 a'daki cisimlerin oluşturduğu fiziksel örgünün Şek. 4.9 b'deki çizimle gösterildiğini ve A_1A_2 giriş uçları için eşdeğer çevrimin Şek. 4.9 c-deki çevrim olduğunu söyleriz. B_1B_2 uçları için eşdeğer çevrim ise Şek. 49 d'de verilmiştir. Bu topluluğu yalnız bu uçlardan girebilecek biçimde bir kutu içine yerleştirecek olursak, bu 57,6 ohm'luk bir dirençten ayırt edilemeyecektir. Bu arada önemli bir kural vardır: Bu işlemler sırasında yalnız *doğru akım* ölçülerine izin verilir! Bütün bu söylediklerimiz, zamanla sabit kalan akımlara ve elektrik alanlarına bağlıdır; eğer hal böyle değilse, bu çevrim öğesinin davranışı, yalnız dirence bağlı olmayabilir. Eşdeğer çevrim kavramı, bu doğru akım örgülerinden, gerilimin ve akımın zamanla değiştiği dizgelere doğru genişletilebilir. Aslında, bunu en yararlı olduğu yer de budur. Şimdilik bu bölgeyi araştırmaya tam hazır değiliz.

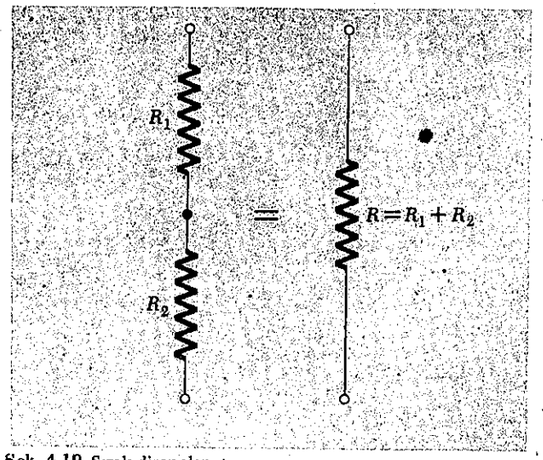
Burada çevrim öğelerinden oluşmuş bir örgünün eşdeğer direncinin hesaplanması yolları üzerinde biraz duracağız. sıralı ve koşut* düzenlenim halleri ko-

* Biz direnç terimini bu işi görmek üzere yapılmış parçanın adı olarak kullanıyoruz. Böylece 200 ohm, 10 watt yazılı tel direnç, iki uçlu "üzeri yalıtılmış" kangal halinde sarılmış düzenektir ve o şekilde kullanılmak için hazırlanmıştır ki, ısı biçiminde yitirdiği enerji ortalama olarak 10 watt'ı geçmesin.

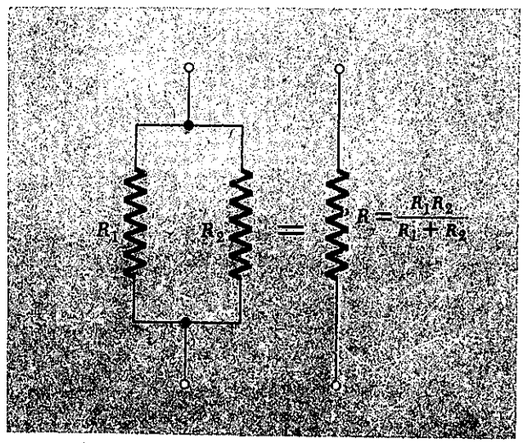
**Sıralı ve koşut: Seri ve paralel



Şek. 4.9. (a) Birbirine bağlanmış bazı dirençler. (b), Çevrimin çizimi. (c), (d), Bazı bağlanma uçlarına göre eşdeğer dirençler.



Şek. 4.10. Sıralı dirençler.



Şek. 4.11. Koşut dirençler.

laydır. Şek. 4.10'dakine benzer, değerleri R_1 , R_2 olan sıralı iki dirençli bir düzenlenişte eşdeğer direnç

$$R = R_1 + R_2 \tag{25}$$

olur. Şek. 4.11'deki gibi bir düzenleme koşut bağlanmış iki direnci gösterir. Kolayca geliştirebilmeniz gereken bir düşünüş ile eşdeğer direncin

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \quad \text{ya da} \quad R = \frac{R_1R_2}{R_1 + R_2} \tag{26}$$

olduğu bulunur.

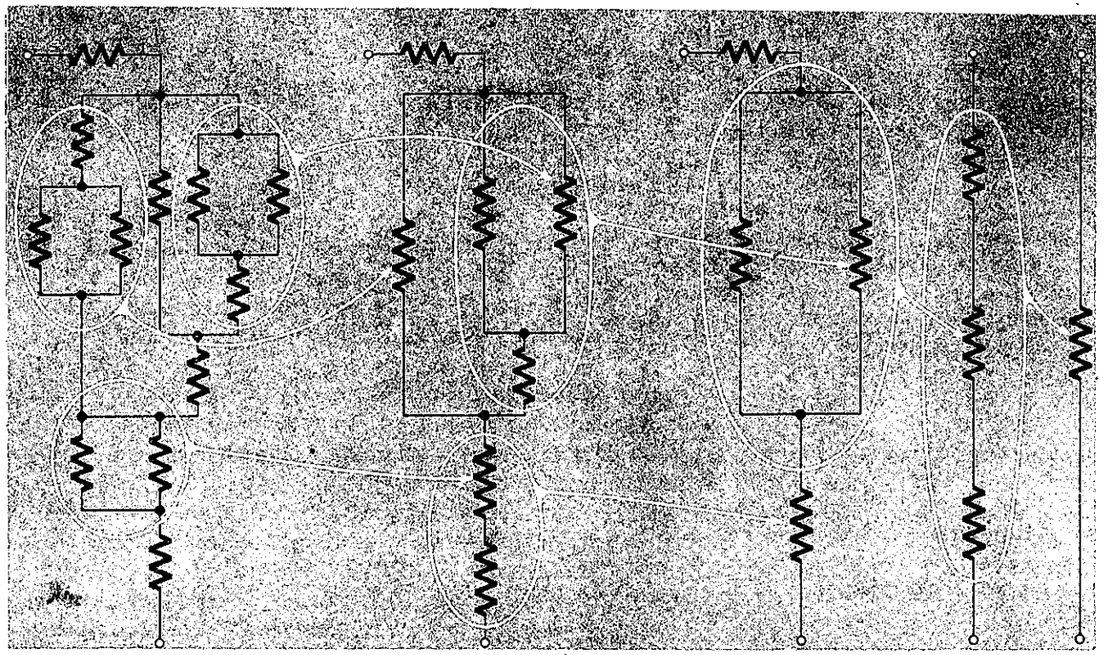
Şek. 4.12'deki gibi pek karışık görünen bir çevrimi adım adım, sıralı ve koşut düzenlenişlere indirgemek için gerekli bütün bilgi bu kadardır. Bununla birlikte Şek. 4.13'deki yalın çevrim bu yoldan indirgenemez ve daha genel bir yöntem gereklidir. Düşünülebilecek herhangi bir direnç örgüsünden sabit akımlar geçtiğine göre bu çevrimin aşağıdaki koşullara uyması gerekir:

(i) Her öğeden geçen akım şiddeti, bu öğenin uçları arasındaki gerilim değişiminin direncine bölümüne eşit olmalıdır.

(ii) Örgünün bir bağlantı yerinde, yani iki ve daha çok telin birleştiği bir noktada, elektrik akımlarının cebirsel toplamı sıfır olmak zorundadır. (Bu bildiğimiz ve Denk. 7'de deyimlenen yük korunumunun çevrim diline uygulanmasıdır.)

(iii) Çevrim örgüsünün kapalı bir ilmeği boyunca yani bir bağlantı noktasında başlayan, kapalı bir yol boyunca alınan gerilim değişimleri toplamı sıfırdır. (Bu durgun elektrik alanının kapalı bir yol boyunca $\int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = 0$ genel özelliğinin, çevrim örgüsü diline çevrilmesidir.)

Bu koşulların herhangi bir örgü için cebirsel yazımı seçilen herhangi iki nokta arasındaki eşdeğer direnç için, yalnız bir tane çözüm bulunmasını sağ-



Şek. 4.12. Sıralı ve koşut dirençlerden oluşmuş bir akım örgüsünün yalın bir dirence indirgenmesi

layacak gerekli sayıdaki çizgisel denklemi tam olarak verir. Bunu tanıtlamadan bildiriyoruz. Bir doğru akım ağı probleminin yapısı, ağın yalnız ilingesine* bağlıdır, yani, çizit** çizgilerinin herhangi bir değişikliğinden bağımsız çizit bağlantılarının özelliğine bağlıdır.

Bir doğru akım direnç örgüsü çizgisel bir dizgedir, yani (i), (ii) ve (iii) koşullarının deyimlediği gibi gerilimler ve akımlar bir çizgisel denklem takımına uyarlar. Bu nedenle örgü için olabilir ayrı hallerin üstüste gelmesi de yine olabilir bir haldir. Şekil 4.14, aralarında V_1, V_2. . . . gerilim farkları bulunan bağlantı noktaları arasındaki iletkenlerden geçen akım şiddetlerinin I_1, I_2. . . . gibi değerler aldığı bir hali göstermektedir. Burada başka bir I_1' . . . gibi akım yeğinlikleri V_1'. . . gibi gerilim farkları kümesi de olabilir ise $(I_1 + I_1')$ ve $(V_1 + V_1')$ .....kümesi de çevrim örgüsünün bu bölgesinde olabilir başka bir haldir. Üstüste gelmeye uyan bu akımlar ve gerilimler (i), (ii) ve (iii) koşullarını yerine getirirler. Akım örgüleri üzerine elektrik mühendisleri için yararlı ve ilgi çekici kimi genel teoremler bu özelliklere dayanır.

* İlinge: topoloji

** Çizit: Diyagram.

4.9 Akımda Enerji Yitiği

Bir dirençten akım geçmesi enerji yitiğine yol açar. Yüklü taneleri ortalama v hızı ile devindirebilmek için bir $\mathbf{F}$ kuvveti gereklidir ve bu kuvveti veren kaynak ne olursa olsun saniyede $\mathbf{F} \cdot \mathbf{v}$ denli iş görmek zorundadır. Eğer bir $\mathbf{E}$ elektrik alanı q yüklü iyonları devindiriyorsa $\mathbf{F} = q\mathbf{E}$'dir ve iş görme hızı $q\mathbf{E}.\mathbf{v}$ olur. Bu şekilde harcanan enerji ısı şeklinde ken-

dini gösterir. Geliştirdiğimiz iyon iletkenliği taslamında bunun nasıl olduğu açıktır. Çarpışmalar arasında iyonlar hem bir tutam momentum hem de kinetik enerji edinirler. Bir tek çarpışma ya da en çoğu bir kaç çarpışma yüklü tanenin momentumunu gelişigüzel bir doğrultuya çevirir ama devimsel enerjisini normale döndürmesi gerekmez. Böyle bir dönüş olabilmesi için iyon kinetik enerjisini çarptığı engellere aktarmalıdır. Yüklü taneciklerin kütlelerinin çarpıştıkları ılın atomlarınkine bakınca çok daha küçük olduklarını düşünelim. Küçük bir misket bir bilardo topuna çarparsa ortalama devimsel enerji aktarması çok küçük olur. Böylece iyonlar (misket) enerji biriktirip gideceklerdir; bu biriktirme arttıkça çarpışmadaki yitik de artacak, ta ki iyonun iki çarpışma arasında kazandığı enerji, çarpışmada yitirdiği enerjiyi tam karşılasın. Bu yoldan "önce ısınan" yüklü tanecikler kendilerini sürükleyen elektrik alanının gördüğü işi, ortamın geriye kalan kısmına gelişigüzel devimsel enerji ya da ısı halinde aktarırlar.

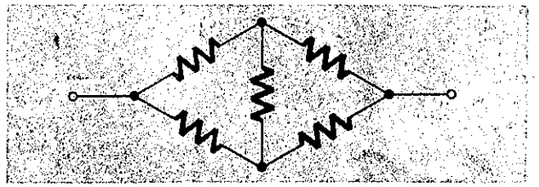
Direnci R ohm olan bir iletkenden I ampere şiddetinde sürekli bir akım geçtiğini düşünelim. Her saniyede I coulomb'luk yük V voltluk bir gerilim farkından aşırılır; burada $V = IR$'dir. Dolayısıyla bir saniye içinde görülen iş (güç) joule olarak I^2R eder. (1 coulomb×1 volt =1 joule = 10^7 erg).Buna karşı gelen güç (iş görme hızı) birimi watt ya da volt-ampere (1 watt = 1 joule/s)'dir.

$$P = I^2R \tag{27}$$

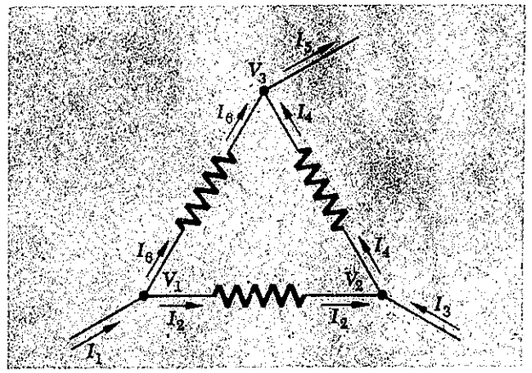
Bir doğru akım çevriminde sürekli akım akmasının, yüklü taneciklerin devinimlerini sürdüren bir elektrik alanını ayakta tutacak bir enerji kaynağı gerektirdiği açıktır. Buraya kadar bir çevrimin kesimlerini inceleyerek *elektromotor kuvvet* sorusuna dokunmaktan kaçındık; yani "bataryayı" inceleme dışı bıraktık. Şimdi bazı elektromotor kuvvet kaynaklarını inceleyeceğiz.

4.10 Elektromotor Kuvvet ve Volta Pili

Bir doğru akım çevriminde elektromotor kuvvet kaynağı, yüklü taneciklerı elektrik alanının devindirmeğe çalıştığı doğrultuya karşı götüren bir

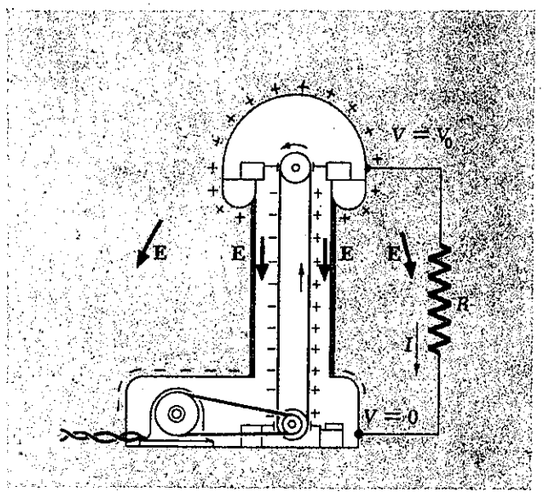


Şek. 4.13. Yalın bir köprü örgüsü. Bu Şek. 4.12 gibi yalın bir dirence indirgenemez.



Şek. 4.14. Bir akım örgüsünün düğümleri arasındaki akımlar ve gerilimler.

düzenektir.) Bir Van de Graaff durgun yük üreteci (Şek. 4.15) bunun büyük ölçekte bir örneğidir. Her şey kararlı şekilde işler halde ise, dış dirençte E elektrik alanı yönünde akan bir akım buluruz, ve orada ısı şeklinde enerji yitiği olduğu ve birim zamanda yitiğin IV_0 ya da I^2R değerini bulduğu görülür. Aygıtın sütunu içinde de aşağı doğru yönelmiş bir elektrik alanı vardır. Burada yüklü taneler iletken olmayan bir şerit üzerine serpilir ve şeritle alana karşı sürüklenebilirler. Yüklü taneler, yalıtkan şerit üzerinde aşağı yönelik alan içinde, şerit yüzeyi üzerinde geriye doğru kayamazlar. (Bununla birlikte, yükler uçlarda bulunan fırçalar arasındaki çok daha kuvvetli bir alan ile şeritlerden sökülüp alınabilirler. Burada altta görülen makara çevresinde yüklerin şeride nasıl geçirildiği konusunu incelemek zorunda değiliz.) Şeridi devinimde tutabilmek için gerekli enerji başka bir yerden,



Şek. 4.15. Bir Van de Graaff üretecinde yüklü tanecikler, mekanik yoldan, elektrik alanının kendilerini zorladığı yöne karşı devindirilmektedirler.

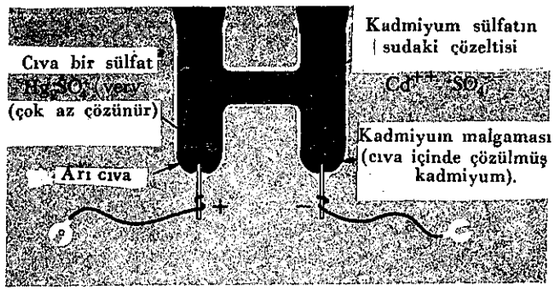
genel olarak, bir güç kaynağına bağlı bir elektrik motorundan sağlanır; bu bir gaz motoru da olabilir, bir tekerleği döndüren bir insanın gücü de olabilir. Van de Graaff üreteci bu koşullar altında elektromotor kuvveti V_0 volt olan bir batarya gibi işler.

Bayağı bataryalarda yüklü taneleri, devinimlerine karşı koyan bir elektrik alanının bulunduğu bir bölge de devindiren, kimyasal enerjidir. Başka bir deyişle artı yüklü bir tanecik elektrik gerilimi *daha yüksek* olan bir yere çıkabilir, yeter ki bu sırada, bu tanecik bir yerden elektriksel yokuşu aşmak için gerekli enerjiyi bulabilsin. Bunun bir yolu kimyasal tepkimlerdir.

Bunun nasıl işleyeceğini görebilmek için özellikle volta pilini inceleyelim. Volta pili kimyasal elektromotor kuvvet kaynağının genel adıdır. Galvani'nin 1790 yıllarında yaptığı, kurbağanın ayağının atmasına yol açan ünlü deney, elektrik akımı üretildiğinin ilk imiydi. Akım kaynağının Galvani'nin ileri sürdüğü gibi "hayvan elektriği" olmadığını ama ayrı metallerin çevrim içinde birbirine değmesinden ileri geldiğini ortaya koyan Volta oldu. Volta çalışmasını sürdürerek aralarına ıslatılmış kâğıt yerleştirilmiş bir bakır yaprak ile bir çinko yapraktan oluşmuş "gözeler"den kurulu ilk bataryayı yaptı. Volta pili denilen bu düzenek sürekli akım verebilen işe yarar ilk kaynaktır. Bugün Volta pillerinin, hiç kuru olmadığı halde kuru pil denileni de kapsayan, pek çok çeşitleri vardır. Otomobil bataryaları, örneğin 12 voltluk batarya, sıralı altı tane kurşunsülfürik asit gözesinden oluşmuştur. Şimdi kimyası oldukça yalın olan ve *Weston standart pili* denilen başka çeşit bir pilden söz edeceğiz. Üstelik Weston pili laboratuvarlarda incelikli gerilim ölçümlerinde önemli olan bir standart pildir.

Bir çeşit Weston Pili Şek. 4.16'da gösterilmiştir. Düzenek sulu $CdSO_4$ çözeltisi doldurulmuş H-biçimli bir cam kaptır. Cam kabın iki ayaklarına içteki elektrotlarla değmeyi sağlayacak biçimde iki iletken tel kaynatılmıştır. Bu elektrotlar sol yanda arı cıva havuzcuğu, sağ yanda ise içinde kadmium çözünmüş cıva havuzcuğundan oluşmuştur. (Bir çok metal civada çözünür; böyle bir çözeltinin adına *malgama* denir.) Sol kolda cıvanın üstünde, suda çok az çözünen bir miktar cıva bir sülfat Hg_2SO_4 kristali bulunur. Dış iletkenler arasında, sol ucu sağdakine bakınca artı olan bir gerilim farkı doğar. (Gerilimin mutlak değeri önemli değildir, burada yalnız farklar bir anlam taşır.) Pilin içinde geçen olaylarda, kadmium iyonları malgamadan çözeltiye geçer, ve bu sırada herbiri geride iki elektron bırakarak malgama elektrodun önemlice eksi yüklenmesine yolaçar. Bununla birlikte, bu göç, elektroda çok fazla elektron kazandırır ve daha başka kadmium iyonlarının ayrılma eğilimlerini önleyecek bir çekim kuvveti oluşunca durur.

Pilin uçları arasına bir direnç bağlıyarak bir dış iletim yolu bağlayarak , elektronlar bu dış yol üzerinde eksi elektrotdan artı elektroda doğru akarlar. Bu yeni Cd^{++} iyonlarının çözeltiye gitmelerine ve geride bıraktıkları elektronlarla elektrodun eksi yükünü tamamlamasına olanak verir. Dışarda sürekli bir akım kurulur ve içerdeki sulu çözeltide göçen iyonlar bu çevrimi tamamlar. Bu arada öteki elektrotta da bir şeyler olmaktadır. Şekil 4.17 çev-



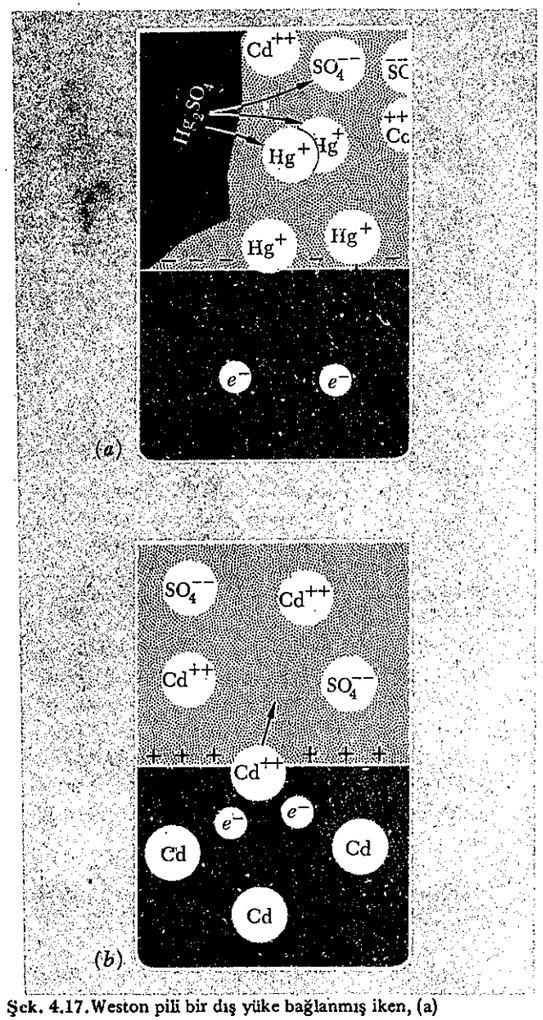
Şek. 4.16 İncelikli gerilim ölçmelerinde standart olarak kullanılan Weston pili. Bu "doymamış" gözedir. "Doymuş" göze halinde şekilde her elektrotda görülen maddeler üzerinde çözülmemiş halde fazla kadmiyum sülfat bulunur.

rimden akım geçerken elektrotla çözeltinin (elektrolitin) ayrılma yüzeylerinde neler olduğunu göstermektedir. Şek. 4.17 *a*'da Hg^+ iyonları çözeltiden ayrılmakta dıştan gelen elektronlarla buluşarak ılın cıva atomları haline dönmektedirler. Bunların yerini yeni çözünen Hg_2SO_4 almakta ve bu olay aynı zamanda elektrolit içine yeni sülfat iyonları vermektedir. Şek. 4.17 *b*'de kadmium atomlarının metalden ayrılarak Cd^{++} iyonları halinde çözeltiye karıştıkları görülmektedir.

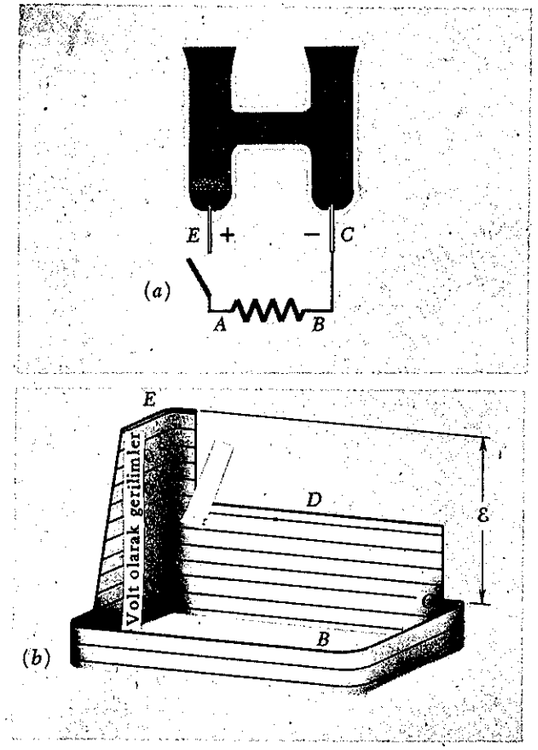
Olayın bütünü kadmium atomlarından elektron alınması ve cıva iyonlarına elektron katılması biçiminde görülebilir. Kimyacılar burada kadmiumun yükseltgendiğini cıvanın ise indirgendiğini söylerler. Pilin işlemesinin nedeni bu alışverişin enerji bakımından elverişli oluşudur. Elektronların kadmium ve cıva atom yapıları içindeki bağlanışları öyledir ki, cıva iyonlarının elektron kazanma istekleri kadmium atomlarının elektron kaybetme isteksizliklerinden daha büyüktür denebilir.

Her ayırım yüzeyinde iyonların elektrik alanına karşı devindiklerine dikkat ediniz. Bu bir kaç angström kalınlığındaki geçiş yüzeyleri Van de Graaff üretecindeki şeridin yerini tutarlar.

Şimdi bütün bu dizge boyunca akım varken ve kesik iken elektriksel gerilim değişimini ele alalım. Şek. 4.18'de çevrim bir yerinden kesik iken gerilimin çevrim boyunca değişimi düşey bir ölçek üzerine taşınmıştır. Açık çevrimde uçlar arasındaki gerilim farkı pilin $\mathcal{E}$ ile gösterilen elektromotor kuvvetidir. Elektrik alanı, gerilimin(−) bayırgısıdır. Başka herhangibir durgun elektrik alanı gibi, E'nin kapalı bir yol boyunca alınan çizgi tümlevi sıfırdır. (Bu arada elektrik gerilimi düzeyinin çizimi isteğe göre alınmıştır; bu doğrudan doğruya ölçülemez.)



Şek. 4.17. Weston pili bir dış yüke bağlanmış iken, (a) artı elektrodun yüzeyi üzerinde, ve (b) eksi elektrodun yüzeyi üzerinde neler olduğunun çizimlemesi.



Şek. 4.18. Açık bir çevrimde gerilim üleşimi. Gerilim ölçeğinin sıfırı sağ yandaki bağlama ucu üzerinde alınmıştır.

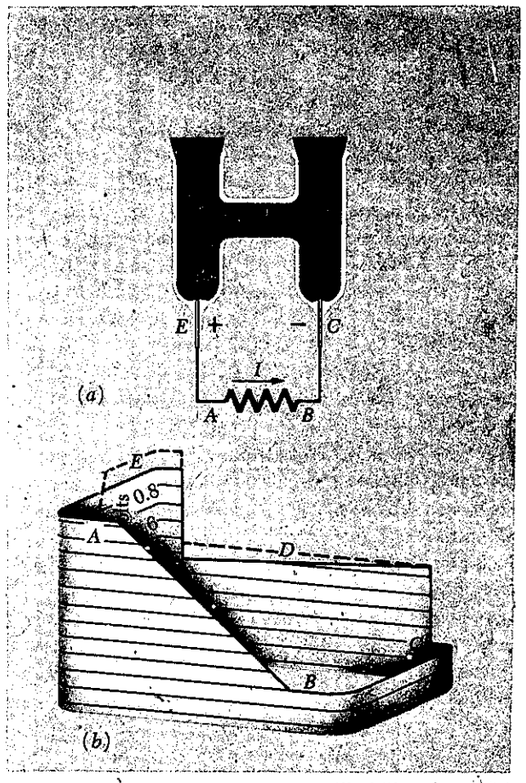
Şekil 4.19 bir dış dirençden akım geçerken iletken boyunca gerilim bölüşümünün nasıl olduğunu göstermektedir. Elektrolit içinde akımla ayni yönlü bir elektrik alanı vardır. Kadmiyum sülfat, Ohm yasasına uyan herhangi bir direnç gibi davranır. Bu sırada elektrotlar arasındaki gerilim farkı $\mathcal{E}$ 'den daha küçüktür. Bunun nedeni, içerde elektrolit boyunca gerilim düşüşü ve geçiş katmanlarında bulunabilecek ek dirençlerdir. Elektrik alanının bütün çevrim boyunca alınan çizgi tümlevi yine sıfırdır. Çevrimde akım, bir noktadan geçen yük Q coulomb'u buluncaya değin sürmüş ise, dış çevrimde ve iççevrimde pilin kimyasal enerjisi zararına harcanmış enerji tutarı coulomb ile ve $\mathcal{E}$ voltla ölçüldüğüne göre $\mathcal{E} \times Q$ joule'dur.

Göze içindeki tepkim zinciri tersinirdir. Bu demektir ki, elektromotor kuvveti daha büyük olan ikinci bir kaynak çevrime zıt yönde bağlanacak olursa, akım zıt yönde geçecek, ve söz konusu olaylar geriye doğru gelişecektir. Bir akümülâtör bataryası doldurulurken olan da budur. Bildiğimiz "kuru pil" de boşalma sırasında dönüşmeyen bazı kimyasal tepkimeler olur ve bunlar olayların tersinir olmasını önler.

Bir gözenin elektromotor kuvveti, onun atomsal özelliklerine bağlıdır. Bu elektromotor kuvvet 1 volt yakınlarındadır, çünkü atomların dış elektronlarının bağlanma enerjisi birkaç elektron volt kadardır ve elektromotor kuvvet halinde kendini gösteren gerilim, bu bağlama enerjilerinin farkları halinde ortaya çıkar. Elektromotor kuvvet sıcaklık derecesine de epeyce bağlıdır, bu da, buradaki elektro–kimyasal olayların bir termodinamik problemi olmasından ileri gelir. Bu fizikokimyanın temel konularından biridir. Burada işe karışan *özgür enerji* kavramı termodinamik konusudur ve bunun ayrıntılarına girmeyeceğiz.

Weston gözesinin kendisi bir elektriksel enerji kaynağı olarak değil, gerilim farkı standardı olarak kullanılır. Şek. 4.19'da gösterilen durumda,çevrimden geçen akımın yeğince olması dolayısiyle uçlar arasındaki gerilim farkı o/o 10 kadar bir düşme gösterir; böyle bir durum pilin kötü kullanılması demektir. Weston pillerinin elektromotor kuvveti hep aynı değeri verir. Pilin iç yapısı biraz farklı olan bir çeşidinde, kadmiyum sülfat çözeltisi iki elektrodda da aşırı doyurulmuş haldedir ve 20° C'deki elektromotor kuvvet 1,0183 volttur. Standart olarak bir Weston gö-

Şek. 4.19 Bir dış dirençten akım akarken gerilim üleşimi. Çözelti içindeki gerilim düşüşüne iyi bakınız. Weston pili gerilim başvuru değeri bir ölçün (standart) olarak kullanıldığı için çok akım çekilmemelidir.

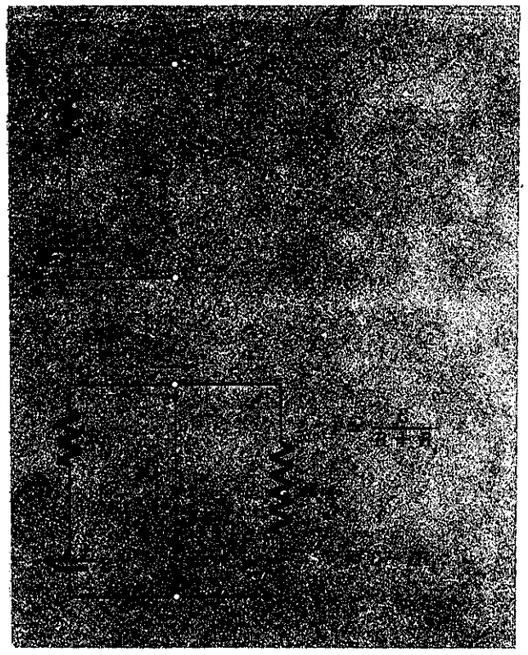


zesi kullanmak ve uygun bir gerilimböler seçmekle, gerilimler yüz binde bir sağlıkla ölçülebilir.

Bir pil bir dış çevrimdeki görevi bakımından, bir $\mathcal{E}$ elektromotor kuvveti ve sıralı bir R_i iç dirençten oluşan eşdeğer çevrim ile gösterilebilir. Bu pilin Şek. 4.20'de görüldüğü gibi bir R dış çevrimine bağlanması

$$I = \frac{\mathcal{E}}{(R + R_i)}$$

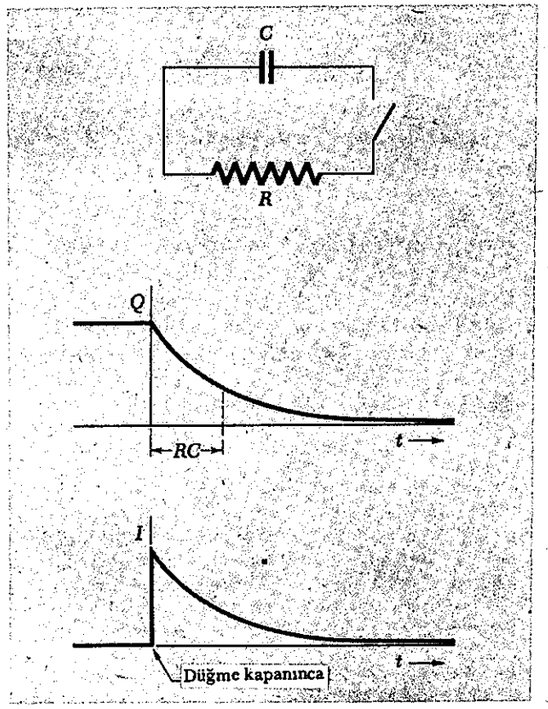
akımının geçmesine yol açar.



Şek. 4.20. (a) Bir volta gözesi için eşdeğer çevrim, sabit değerde bir $\mathcal{E}$ elektromotor kuvvet ile sıralı bağlı R_i direncidir. (b) I içinde volta gözesi bulunan bir çevrimdeki akımın hesabı.

4.11 Sığaçlarda ve Dirençlerde Değişken Akımlar

Sığası C olan bir sığacı V_0 gibi bir gerilim altında, yükledikten sonra bir R direncine bağlayarak boşaltalım. Şekil. 4.21 bildiğimiz ⫫ işareti ile gösterilen bir sığaç ile bir R direnci ve $t = 0$ anında kapandığını düşündüğümüz bir anahtarı göstermektedir. Şurası açıktır ki, akım akmağa başlayınca sığa yükünü yitirecek, sığacın uçları arasındaki gerilim farkı düşecek, ve bu düşüş bir yandan da akımı düşürecektir. Burada ne olduğunu tam olarak görebilmek için, çevrimi yöneten koşulları yazmalı-



Şek. 4.21. Bir RC çevriminde yük ve akım. Yük tutarı bir RC süresi içinde e çarpanınca düşer.

yiz. Yapraklar üzerinde herhangi bir andaki yük Q, aradaki gerilim V olsun; bu aynı zamanda R direncinin uçları arasındaki gerilimdir. Çevrimden geçen akım şiddeti de I olsun ve bu akım sığacın artı yaprağından öteye doğru akınca artı sayılsın. Hepsi zamanın işlevi olan bu nicelikler aşağıdaki eşitliklere uyarlar,

$$Q = CV \qquad I \doteq \frac{V}{R} = -\frac{dQ}{dt} = I \quad (28)$$

bu denklemler arasından I'yi ve V'yi elersek Q'nün zamana bağlı değişimini veren bir denklem elde ederiz.

$$\frac{dQ}{dt} = -\frac{Q}{RC} \quad (29)$$

Bunu; $$\frac{dQ}{Q} = -\frac{dt}{RC} \quad (30)$$

şeklinde yazar, her iki yanın tümlevini alırsak

$$\ln Q = \frac{-t}{RC} + \text{sabit} \quad (31)$$

elde ederiz. Buna göre türevli denklemimizin çözümü,

$$Q = (\text{başka bir sabit}) \times e^{-t/RC} \quad (32)$$

olur; olayın başında yani $t = 0$ için, $V = V_0$ olduğunu belirttiğimize göre, bu anda $Q = CV_0$'dır. Bu, tümlevdeki sabiti belirler ve çevrim kapandıktan sonra Q'nün ne biçimde değiştiğini,

$$Q = CV_0 e^{-t/RC} \quad (33)$$

denklemi içinde görebiliriz. Çevrimden geçen I akım yeğinliği bundan doğrudan çıkarılır:

$$I = -\frac{dQ}{dt} = \frac{V_0}{R} e^{-t/RC} \quad (34)$$

Düğmenin kapanması ile akım birden V_0/R değerini alır ve sonra üstel bir işlev halinde sıfıra doğru düşer. Bu düşüşü belirleyen zaman RC sabitidir. Burada direnç ile sığanın çarpımının zaman boyutunda olduğuna şaşmayalım; çünkü C sığasının boyutu uzunluktur ve direnç × uzunluk niceliği, ohm-cm halinde özdirenç birimi olarak karşımıza çıkınca, bunun boyutunun zaman olduğunu anımsayalım. Kimileri bir çevrimin ya da bir kesiminin "RC zaman sabitinden söz ederler"

Kılgın birimler dizgesinde sığa birimi farad'dır. Sığası 1 farad olan bir sığaç 1 volt'luk bir gerilim farkı ile yüklendiği zaman 1 coulomb'luk bir yük alır. R ohm ve C farad alınırsa RC çarpımı saniye cinsinden zaman olarak çıkar. Bunu sınamış olmak için, *ohm = volt/ampere volt - s/coulomb* olduğunu ve, öte yandan *farad = coulomb/volt* olduğun gözden kaçırmayın. Şek. 4.21'deki çevrimi 0,05 mikrofaradlık bir sığaç ile 5 megohm'luk bir dirençten kurulu varsayarsak (bu değerde parçalar herhangi bir laboratuvardabulunabilir), bu çevrim için $RC = 5 \times 10^6 \times 0{,}05 \times 10^{-6}$ veya 0,25 s bulunur.

Çok genel olarak, yüklü iletkenlerden ve dirençli akım yollarından oluşmuş bir elektrik düzeninde geçen süreçler ile ilgili; direnç ile sığa çarpımının belirlediği bir zaman sabiti, belki de bir tek olmayan bir zaman sabiti bulunacaktır. Bunu daha önce özdirencin boyutu üzerinde yaptığımız uyarı ile ilgilidir. Yapraklarının yüzölçümü A ve aralığı s olan bir sığacın C sığası $A/4\pi s$'dir. Şimdi sığacın yaprakları arası özdirenci ρ olan az iletici ortam ile dolu olsun. Bunun sığa üzerine etkisi sorunundan kaçınmak için, bu ortamın çok az iyonlanmış bir gazdan oluştuğunu düşünelim; bu yoğunlukta bir madde sığada pek bir değişiklik yapamaz. Bu yeni iletken yol, sığacı Şek. 4.21'deki dış direnç kadar etkinlikle boşaltacaktır. Bu boşalım ne hızla olacaktır? İletken yolun R direnci, $\rho s/A$'dır. Buna göre çevrimin RC zaman sabiti, $(\rho s/A)(A/4\pi s) = \rho/4\pi$ olur. Bu zaman sığacın ölçülerine ve mutlak büyüklüğüne bağlı değildir. Burada bulduğumuz sadece iletken ortamdaki yüklerin yeniden düzenlenebilmesi için ya da elektrik alanının iletken bir ortamdaki *gevşemeyi (relaxation)* belirlemek için bir zaman sabitidir. Bunu anlatmak için sığaç yaprakları gerekmiyor. Yüklü iki katman iletken bir ortam içine karşı karşıya yerleştirilirse bu tabakaların yükleri kaybolacak, elektrik alanı sönecek, ve ortam sabit bir gerilim değerini bulacaktır.

Buradaki gevşeme zamanı ortamın özdirenci ile belirlenir. Örneğin eğer az önce ele aldığımız az iyonlaşmış gazın özdirenci 10^8 ohm-cm ise, gevşeme zamanı 10 μ saniye olmalıdır.

Metaller gibi iyi iletkenlerin öz dirençlerinin 10^{-5} ohm-cm basamağında olduğunu anımsayalım. Bu değere göre bu gibi maddelerin gevşeme zamanları 10^{-18} s basamağında olacaktır. Böyle bir sayı kuşku uyandırır. Bu zamanı gerçekten bir iletkendeki yük birikmesinin kaybolması için gerekli zaman diye yorumlayabilir miyiz? İlk başta şunu vurgulayalım ki, bu zaman bizim elektriksel iletkenlik taslamı ile ilgili herhangi bir çarpışma zamanına veya ilişki zamanına bakınca çok küçüktür. Oda sıcaklığında sodyum için Denk. 19'da $\tau_- = 3\times10^{-14}$ s bulmuştuk. Bu da, bunca kısa süre içine sığan olaylar bakımından, doğru akım özdirencini kullanmağa hakkımız olamayacağını anlatır. Bu herhangi bir gevşeme zamanının nicel değerlendirilmesi bakımından ortaya bir takım kuşkular çıkarır.

Bununla birlikte öykünün bitmediğini gösteren daha derin nedenler vardır. Örneğin $\tau = \rho/4\pi$ elektriksel gevşeme zamanının, ilgili bölgenin büyüklüğüne bağlı olmaması gariptir. Eğer bölge yeterince küçük ise buna bir diyecek yok; ama herhangi bir τ gevşeme zamanı için, bu zamanla ilgili bölgenin bir boyutu τ zamanı ile ışığın yayılma hızı çarpımından daha uzun ise, gevşeme olayı yüklerin yeniden düzenlenmesinin, ışığın c yayılma hızından daha büyük bir hızla yayılmasını gerektirir. Bu ise görelilik ile bağdaşamaz. O halde elektrik yükleri ile alanlarının davranışlarının özel görelilik kuramının koyutları* ile çelişkiye düşmemesi için, bu görünüşün içine yeni bir şeyler gelmelidir. Bu da gelecek bölümün inceleme konusu olacaktır.

Problemler

4.1 Tümü batıya doğru 10^7 cm/s hızla devinen ve cm^3'de 5×10^{10} tane bulunan iki değerli iyonlar var. Aynı bölge içinde cm^3'de 10^{11} tane elektron olsun ki, bunlar da kuzey-doğuya doğru 10^8 cm/s hızla devinsinler. (Bunu nasıl sağladığımızı sormayın!). J'nin doğrultusu nedir? Bunu cm başına esb/s olarak değeri ne eder? Ampere/cm^2 olarak değeri nedir? Yanıt: 48,8° güney-batı; $5{,}14\times10^9$ esb/s-cm^2, 1,71 ampere/cm^2

4.2 6 Bev'lik bir elektron sinkrotronunda elektronlar çevresi 240 m olan yaklaşıkça dairesel bir yörünge üzerinde uçmaktadırlar. Bir hızlanma dolanımı içinde aşağı yukarı 10^{11} elektronun hızlanmaya katıldıklarını kabul etmek uygundur. Elektronların hızı kılgınca ışığın hızını bulur. Akım yeğinliği nedir? Çok yalın olan bu problemi vermekten amacımız, akım yeğinliğini, birim zamanda taşınan yük tutarı, yani yük taşınma hızı olarak tanımlarken, yüklü tanelerin hızlarının göresiz olması gibi bir koşul gerekmediğini ve akıma katkıda bulunan elektronların 1 s'lik zaman içinde aynı bir kesitten birçok kez geçebileceğini ve sayılabileceğini göstermek içindir.

4.3 Bir Van de Graaff durgun yük üretecinde 30 cm genişliğindeki kauçuklu şerit 20 m/s hızla devinmektedir. Şeridin yüzeyine alt başından yük verilmektedir ve bu yük yoğunluğu şeridin her iki yüzeyinde ki elektrik alanının 40 statvolt/cm değerini bulmasını sağlayacak bir yoğunluktadır. Elde olunan akımın miliampere olarak değeri ne tutar?

* Koyut: Postüla.

4.4 Anodu ve katodu koşut düzlemler olan Şek. 4.2'deki gibi bir diod lamba bulunsun. Katodla anod arasındaki aralık s cm: her yaprağın yüzölçümü A cm^2 ve katot tarafından püskürülen elektronların sağladığı anod akımının yeğinliği de I esb/s'dir. Katodun gerilimi sıfır sayılırsa anot gerilimi V_0 statvolt artı değerinde tutulmaktadır. Elektronların v hızlarının katoda olan x uzaklıklarının işlevi olarak değeri ne tutar ve ρ uzay yük yoğunluğu ne tutar? Akımın zayıf olduğu, elektronların uzay yük yoğunluğunun alanı etkilemediği ve katotdan sıfır ilk hızı ile ayrılmış oldukları varsayılacaktır.

4.5 Gümüş gibi bir metal içindeki iletim elektronları sayısının atom sayısına eşit olduğunu varsayarsak, bu iletim elektronlarının 1 mm çaplı bir telden 30 ampere'lik bir akım geçerken ortalama sürüklenme hızları ne tutar? Buna yaklaşık bir yanıt veriniz; yapacağınız hesapta gerekli olan ve çizelgelerde verilmeyen bir sabit sayının ne olduğunu kestiriniz.

4.6 İçinde oda sıcaklığında ve basıncında hava bulunan bir kap x-ışınları etkisi altında bırakılarak moleküllerinin küçük bir bölüğünün iyonlanmasına yol açılmıştır. Burada oluşan eksi iyonlar bir fazla elektron kazanmış O_2 molekülleridir. Ama bu problemi işlemek için, bütün moleküllerin ağırlıklarının aynı ve O_2 ile N_2'ninki arasında olduğunu düşünebilirsiniz. Kabın 10 cm × 10 cm × 2 cm boyutunda, 10 cm × 10 cm yüzeyinin metal, öteki yüzeylerinin ise yalıtkan maddeden olduğunu düşünün. Kutunun iletken yüzeyleri arasına 1000 volt'luk bir gerilim farkı uygulanmış ve böylece $1{,}5\times10^{-6}$ ampere'lik akım geçmesi sağlanmıştır. Bu az iyonlanmış gazın iletkenliği ne tutar? İyonların ortalama hızı 5×10^4 cm/s alınırsa, ve bunların gaz içindeki ortalama özgür yolları 10^{-5} cm ise ortalama çarpışma zamanı ne tutar? Gaz içindeki moleküllerin yüzde kaç iyonlanmıştır (gaz içinde artı ve eksi bir kez iyonlanmış eşit sayıda iyon bulunduğunu düşünün)?

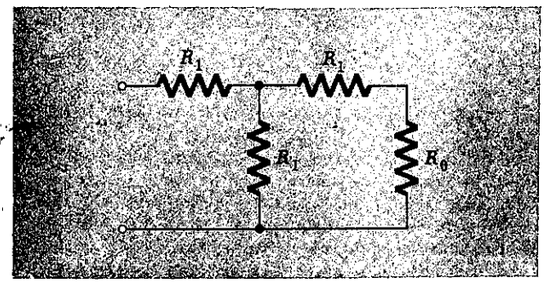
4.7 Bir deneyci 50 angström kalınlığında ince bir alüminyum yaprağı yapmak ister ve bunun için boşlukta temiz bir cam yaprak üzerine alüminyum buharı yoğunlaştırarak çalışır. Bunun için ilk önce camın ortasını bir şeritle peçeleyerek kalan yerlerine oldukça kalın bir katman tutturur. Sonra camı ikinci bir şerit ile kaplayarak birinciyi kesecek biçimde ayni genişlikte ikinci bir alüminyum katman tutturur. Bu arada iki yandaki kalın parçaları elektrot olarak kullanır ve aradaki parçanın direncini ölçer. Direncin hangi değerinde buharlaştırmayı durdurmalıdır? (Arı alüminyumun oda sıcaklığındaki özdirenci $2{,}83\times10^{-6}$ ohm-cm'dir).

4.8 Arı demirin 20°C'da özdirenci 10.0×10^{-6} ohm-cm'dir. Aynı sıcaklıkta bakırınki ise $1{,}77\times10^{-6}$ ohm-cm'dir. Şimdi ayrı iki bileşik iletken ele alınız. Bunlardan herbirinin boyu 1 m ve kesitleri 0,8 cm kenarlı kare biçiminde olsun: A iletkeni 50-cm uzunluğunda kare kesitli bir demir çubukla aynı biçimde bir bakır çubuğu uç uca perçinlemekle elde edilmiştir. B iletkeni ise 1 m uzunluğunda ve 0,4 × 0,8 cm kesitli bir bakır ve bir demir çubuğun yanyana perçinlenmesi ile elde edilmiştir. Her iki çubuğun 1 m aralıklı iki ucu arasındaki dirençleri ohm olarak ne eder? A çubuğundan bir kararda doğru akım geçerse hangi madde içindeki enerji yitiği daha büyüktür? Aynı soruyu B çubuğu için de yanıtlayın.

4.9 Bir bakır teli gererek uzunluğunu o/o 0,1 kadar uzatırsanız, direncinin ne denli değişeceğini kestirebilir misiniz? Bu biçim değiştirmesi sırasında bakırın davranışı üzerinde varsayımınız nedir?

4.10 Çapları 30 cm olan iki metal küreden iki elektrot yalıtkan kablolarla deniz içine asılmıştır. Küreler deniz içinde 75 m derinlikte bulunmaktadır; aralarındaki yatay uzaklık 300 m'dir. Elektrodların çevrimi yüzeylerine değen yalıtılmış bir kablo ile kürelerden birisinin üstünde duran gemiye bağlanarak sağlanmaktadır. Deniz suyunun iletkenliğini 0,04 $(\text{ohm-cm})^{-1}$ alarak bu çevrimdeki direncin ne kadar olduğunu kestiriniz. Bu arada denizin elektrotlar arasındaki bölgesinin direncini hesaplarken kürelere yakın bölgelerin mi, yoksa daha

Prob. 4.7



Prob. 4.11

geniş hacımdaki deniz suyunun mu direnç üzerine etkili olduğuna karar vermeniz gerekir. Bu soruyu açıklığa kavuşturmak için biri çok büyük öteki küçük aynı merkezli iki küre arasının türdeş bir madde ile doldurulmuş olduğunu düşünebilirsiniz. Başka bir yol ise, denize daldırılmış küreler arasındaki akım çizgilerini yaklaşıkca çizmektir. İletken sondaların az iletken bir ortam içine batırılarak elde edilen bir çevrimin direncinin bulunması sorusu, salt jeofizikte değil bir çok fizyolojik araştırmalarda da önemlidir.

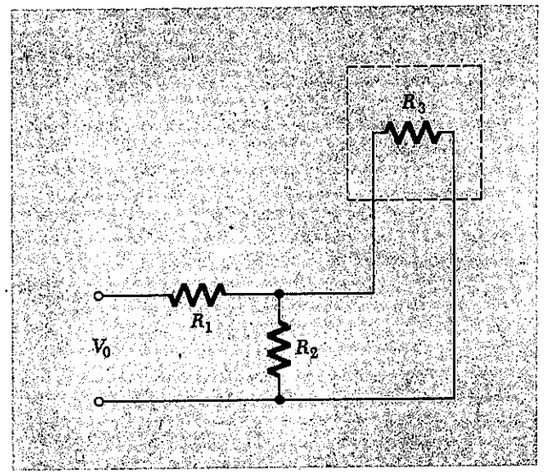
4.11 Şekildeki çevrimde, R_0 verilmişse, giriş uçları arasındaki direncin R_1 'a eşit olması için R_0 'in ne olması gerekir?

4.12 EMK'si bilinmeyen iç dirençsiz bir batarya bir R direnci üzerine bağlanırsa çevrimdeki akımölçer 4 amp'i gösteriyor. Çevrime 10 ohmluk bir ek direnç konulacak olursa akımölçerin göstergesi 3 ampere'e düşüyor. Buradaki R ile V'nin değerleri nelerdir? Bataryanın R_i gibi bir iç direnci varsa, R, V ve R_i'yi verecek nasıl bir dizi deney yapmak gerekir?

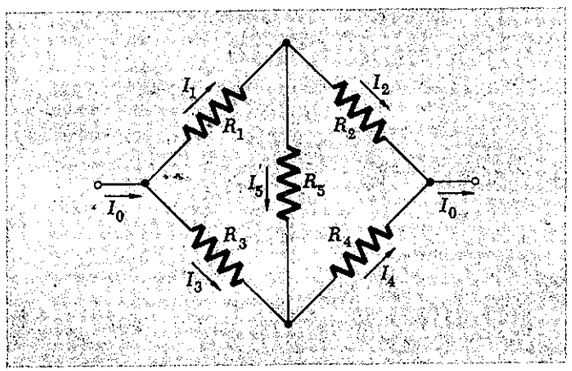
4.13 $\mathcal{E}$ elektromotor kuvveti sabit olan ve R_i gibi bir iç direnci bulunan bir bataryanın değişken bir R direncine bağlandığı zaman, dış çevrimden en büyük güç alınabilmesi için $R = R_i$ olması gerektiğini gösteriniz.

4.14 Yüksek basınçlı bir silindir içindeki bir aygıta sabit hızla ısı verilmek isteniyor. Deney boyunca basınç değişecek ve bu basınç değişikliği ısıtıcı olarak kullanılan her telin direncinde değişiklik yapacaktır. Bu durumda işe yarayacak yalın bir çevrim şekilde gösterilmiştir. Buradaki R_3 direnci basınç silindiri içine yerleştirilmiş ısıtıcı kangaldır. R_1 ve R_2 dirençleri ise silindir dışına çevrime konulmuş ve sabit değerde kalacakları düşünülmüştür; V_0 uygulanan sabit gerilimdir. Burada yararlanılan düşünce, R_3'de kaybolan gücün R_3 direncine bağlı olmamasını ilk basamakta bir yaklaşıklıkla sağlamaktır. Bunun olabileceğini şöyle anlayabiliriz. Eğer R_3 direnci sıfıra yaklaşırsa orada yitirilen gücün de sıfıra yaklaşması gerekir, zira akım R_1 ile sınırlanmıştır. Oysa, R_3 direnci sonsuza doğru büyüyecek olursa, güç sıfıra doğru yaklaşır, çünkü R_3'ün uçlarındaki gerilim sınırlıdır. Bu ikisi arasında bir yerde bir doruk bulunmalıdır. Şimdi göreviniz, R_3 direncindeki değişikliklere duyarsızlık sağlamak için R_1, R_2 ve R_3 dirençlerinin uymak zorunda oldukları koşulları bulmaktır.

4.15 Şekilde çizilen köprü örgüsündeki $R_1 \ldots R_5$ dirençleri ile çevrime sol yandan giren I_0 akım şiddeti verilmiştir. Örgü probleminin çözülmesi bütün kollardaki akım yeğinliklerinin bulunması demektir. Bu bilinmeyen beş akım yeğinliği, kollar üzerine çizilen oklarla gösterilmiştir. Aslında bir kol üzerindeki akım çizilen okla zıt yönlü ise, hesabın sonunda eksi imli çıkacaktır. Köprüdeki dört kavşak veya düğüm yerinde $I_0 - I_1 - I_3 = 0$ gibi bir denklem geçerli olacaktır. Bu gibi denklemleri yazınız ve bunlardan yalnız üçünün bağımsız olduğunu gösteriniz. Bundan başka Kesim 4.8'de iki ilmek için (iii) koşulunu uygulayarak iki denklem daha elde ediniz. (Şekil üzerinde üç ilmek görebilirsiniz, ama denklemleri yazdığınız zaman bunlardan yalnız iki bağımsız denklem elde edilebileceği ortaya çıkar). Şimdi 5 bağımsız denkleminiz ve 5 bilinmiyeniniz vardır ki, çözülmeleri yalın bir cebirsel işlemdir. Bu çözümleri bulursanız bunları sınamak için uygun bir yol R'lerden birini sıfıra doğru götürmek ve bu şekilde köprüyü yalın bir çevrim haline getirerek bu çevrim üzerindeki akımların ne olacağını yalınca görmektir. Örneğin $R_5 = 0$ ise I_1 için ne elde etmemiz gerekir?



Prob. 4.14



Prob. 4.15

4.16 Kesim 4.8'deki dip notla ilgili uyarmaya örnek olmak üzere, kıyıları yaklaşıkça 10 cm olan bir "siyah kutu" ve bunun üstünde iki bağlama ucu ele alalım. Bu uçlardan herbiri birer telle bir dış çevrime bağlanmıştır. Bundan başka kutu dışardan yalıtılmıştır. Bu çevrim öğesinden yaklaşık olarak 1 ampere'lik akım geçmektedir. Kutuya giren akım ile çıkan akım arasında milyonda 1 kadar fark bulunduğunu düşünelim. Başka bir şey olmadığı takdirde kutunun gerilimini 1000 volt kadar artırmak için ne kadar zaman geçecektir?

4.17 Yukarda konu içinde bir C sığacının bir R direnci üzerinden boşalmasını inceleyen örneği ele alarak direnç üzerinde yitirilen toplam enerjinin sığaç içine başlangıçta biriken enerjiye eşit olduğunu gösteriniz. Biri çıkıp sığacın ***gerçekten*** hiç bir zaman boşalmadığını, çünkü ancak $t = \infty$ için Q nün sıfıra düştüğünü ileri sürebilir. Bu savı nasıl karşılayabilirsiniz? sığaçtaki yükün bir elektrona kadar düşmesi için ne kadar süre geçmesi gerektiğini akla yakın varsayımlarla nasıl bulabilirsiniz?

4.18 Çapı 10 mikron (10^{-3} cm) kadar olan hemen hemen küresel bir grafit parçacık 3 kvolt'luk bir proton akımı içinde boşlukta düşmektedir. Grafit tanesi proton demetinin üst başından birkaç cm yukarda bulunan bir yüzeyden sarsılarak bırakılmıştır. Devinim halinde bulunan protonlardan oluşan yatay demet 2 cm yarıçaplı dairesel bir kesit içine tekdüze dağılmış 10 mA şiddetinde bir akım geçirmektedir. 3-kV'lık protonların 10 mikron'luk grafit tanesini delip öteye geçemediğini ve dolayısı ile çarpan her protonun içinde kaldığını düşünebilirsiniz. Grafit parçacığın başına neler geleceğini nasıl kestirebilirsiniz? Bu bakımdan düşünülecek bazı sorular: Parçacığın geriliminin yeterince yükselip daha başka protonların gelmesini önleyecek şekilde itmesini sağlayabilmesi için kaç tane proton yakalaması gerekir? Bu hal ne sürede olur. Bu zaman grafit parçacığın demeti aşması için gerekli zamandan uzun mudur? Parçacık görülür bir yatay hız kazanır mı? Parçacığın sıcaklığı çok yükselir mi? Yatay gidecek yerde yukarıya doğru yönelmiş bir proton demeti grafit parçacığı hareketsiz tutabileceğini düşünür müsünüz? (*Birimler üzerine uyarı:* Gerçekte rastlanan bir çok problemde olduğu gibi bu problemde de bir birimler karmasından oluşmuş sayılar bulunur. Bu verilerin kimilerini başka birimlere çevirmek gerekir. Kendi içinde tutarlı bir birim dizgesi kullanılabilir; problem için en doğal birim dizgesini ya da daha az dönüşüm isteyen birim dizgesini ya da yalınca en kolay anımsayacağınız birim dizgesini kullanabilirsiniz? Şu sırada yükü esb ile, gerilimi statvoltla ölçen CGS birimlerindeki sığa birimini yani cm'yi kullanmakta olduğumuzdan, tartışmalarda, CGS birimlerini kullanmanız mümkündür. Bu durum mA lerin esb/s'ye çevrilmesini ve voltların ise statvolta çevrilmesini gerektirdiğini anımsayınız. Aynı biçimde parçacığın sığasının farad olarak alınmasını gerektiren iş birimi ile kılgın elektrik birimlerinden de yararlanabilirsiniz).

4.19 Yüklü tanelerin hızlarının bir iletken üzerindeki yük dağılımının kendini düzenlemesi için gerekli zamana bir sınır koyduğunu düşünebilirsiniz. Bununla birlikte, yüklü olmayan bir metal çubuğu ele alınız ve bunun bir ucuna bir esb'lik artı yük öteki ucuna da 1 esb'lik eksi yük yerdiğinizi düşününüz. Bu çubuğun her yanında ılın halini yeniden kazanması için yüklerin ne kadar devinmesi gerekir? Şu noktayı gözönüne alabilirsiniz: 10 Mev'lik bir proton hızının yaklaşık olarak $4{,}5 \times 10^9$ cm/s olduğu ve 1 mm uzakta bulunan bir bakır yaprağın yüzeyine koşut olarak devindiğini düşünelim. İletim elektronlarının bakır içindeki hızları 10^8 cm/s'yi ancak aşar. Örneğin irgitimle oluşan yüzey yük dağılımı, protonun devinimi ile uyumlu kalabilir mi, yoksa geride mi kalır?

Bölüm 5

Devinimli Yüklerin Alanları

5.1	Oersted'den Einstein'a	122
5.2	Mıknatısal Kuvvetler	122
5.3	Devinimli Yükün Ölçülmesi	124
5.4	Yüklerin Değişmez (İnvariant)'liği	126
5.5	Farklı gözlem Çatkılarında Ölçülen Elektrik Alanları	130
5.6	Sabit Hızla Devinen Bir Nokta Yükün Alanı	133
5.7	Devinime Geçen ya da Durtıklaşan Yükün Alanı	135
5.8	Devinimli Bir Yüke Etkiyen Kuvvet	139
5.9	Devinimli Bir Yükle Başka Yükler Arasındaki Etkileşim	142
	Problemler	148

BÖLÜM 5 DEVİNİMLİ YÜKLERİN ALANLARI

5.1 Oersted'den Einstein'a

1819-1820 kış döneminde Hans Christian Oersted Copenhagen Üniversitesinde ileri öğrencilere Elektrik, Galvanizma ve Mıknatıslık dersleri vermekte idi. Elektrik sözü ile durgunyük anlaşılıyordu; *Galvanizma* ise Galvani'nin bir rastlantı ile bulduğu ve Volta'nın deneyleri ile geliştirilen bataryalardan elde edilen sürekli akımların etkileri anlaşılıyordu. Mıknatıslık terimi de, eskiden beri bilinen mıknatıs taşı, pusula iğnesi ve yerin mıknatısal alanı gibi konular için kullanılıyordu. Her ikisinin de elektrik çarpması **uyarımı** dışında çok az dolaysız kanıtı bulunduğu halde elektrik yükü ile galvani akımları arasında bir bağıntı olması gerektiği kimine açık gibi göründü. Bunun dışında mıknatıslanma ile elektriklenme arasında hiç bir ilişki yok gibiydi. Buna karşın, Oersted'de mıknatıslığın, galvani akımı gibi, elektriğin bir çeşit "gizli şekli" olduğu üzerine, inatla izlediği belli belirsiz bir düşünce, bir kanı vardı. Bu düşüncenin izinde, olayın kendini göstermesi umudu ile bir gün dersten önce, bir pusulanın üzerinde ve dik doğrultuda tutulan bir telden galvani akımı geçirdi. Hiç bir şey olmadı. Dersten sonra içinden aynı deneyi, teli pusulaya koşut tutarak yinelemek geldi. Bu kez pusla hızla geniş bir dönme yaptı –Galvani akımının yönü değiştirilince pusula öteki yönde gitti!

Fen dünyası bilinmeyenden gelen bu haberi çoktan bekliyordu. Haber öteki laboratuvarlara ulaşır ulaşmaz bir sıra deneyler ve buluşlar sökünetti. Çok geçmeden Ampere, Faraday ve daha başkaları elektrik akımlarının mıknatısal etkisini tam ve doğru olarak anlatmayı başardılar. Oersted deneyi üstünden oniki yıl bile geçmeden Faraday'ın elektromıknatısal indüksiyon* olayını buluşu, bu buluşların başına bir taç gibi yerleşti. Daha önce, iki yüzyıl boyunca, William Gilbert'in 1600'da yayınladığı *De Magnete* adlı büyük yapıtından beri insanoğlunun mıknatıslık üzerindeki anlayışı hiç bir ilerleme göstermemişti. Bu denel buluşlardan klasik elektromıknatısal kuram doğdu. Maxwell'in matematiksel yazım halinde geliştirdiği ve Hertz'in denel çalışmalar ile ortaya çıkardığı elektromıknatısal dalgalar 1888'de bu gelişimin utkusunu doğruladı.

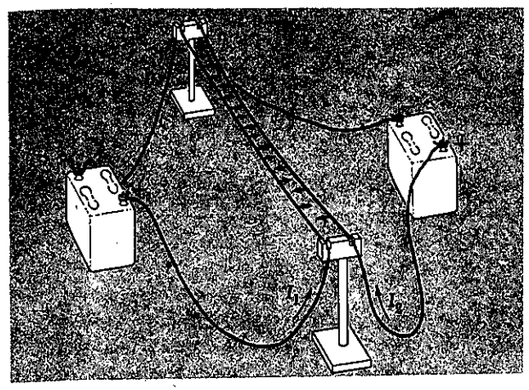
* Irgitim: İndüksiyon.

Özel görelik kuramının kökleri elektromıknatıslık içindedir. Lorentz, yüklü tanelerin devinimlerinin elektrodinamiğinde araştırmalar yaparken Einstein'nın vardığı sonuçların çok yakınına daha önce gelmişti. Zaten Einstein'in 1905'de yayınladığı büyük çalışmasının adı "Görelik Kuramı Üzerine" değil "Devinimli Cisimlerin Elektrodinamiği Üzerine" başlığını taşıyordu. Bugün görelik koyutlarında ve bunların sonuçlarında yalnız sadece elektromıknatıslığı değil, bütün fizik yasalarını kavrayan geniş bir çerçeve görüyoruz. Herhangi bir fiziksel kuramın tam olması için bunun görelice değişmez kalmasını bekliyoruz. Yani böyle bir kuram eylemsiz (ivmesiz) bütün gözlem- dizgelerinde aynı şeyi söylemelidir. Fiziğin, göreli olarak değişmez bir kuramı vardı ki o da, göreli değişmezliğin anlaşılmasından önce kurulmuş olan Maxwell'in elektromıknatısal kuramı idi. Özel görelik kuramındaki düşünceler, tam bir elektromıknatısal alan kuramı olmasa idi gelişebilir mi idi sorusu fen tarihçilerinin tartışacakları bir sorundur; belki de bunu hiç yanıtlayamayacağız. Bütün söyleyebileceğimiz tarihin Oersted'in pusula iğnesi deneyinden Einstein'in koyutlarına giden bir yol bulunduğunu açıkca göstermesidir.

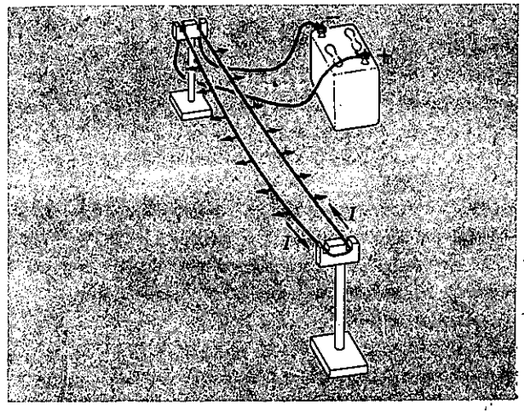
Bu bölümde ve Bölüm 6'da bu gelişim yolunu aşağı yukarı ters *yönde* izleyeceğiz. Bu tarihe saygısızlık değildir. Aslında bu parlak buluşlar tarihini inceleyen bir kimsenin, elektrikle mıknatıslık arasındaki temel bağıntıyı açıkça anlamakla büyük rahatlık duyacağını düşünüyoruz. Olaylara ve şimdiye dek öğrenmiş olduğumuz elektrik yükü ve elektrik alanı kavramlarına özel görelik kuramının ışığı altında bakmakla, bu ilişki kısa yoldan ve çok yalın biçimde açıklanabilir. Bu işe girişmezden önce açıklamaya çalışacağımız olaylardan bazılarını gözden geçirelim.

5.2 Mıknatısal Kuvvetler

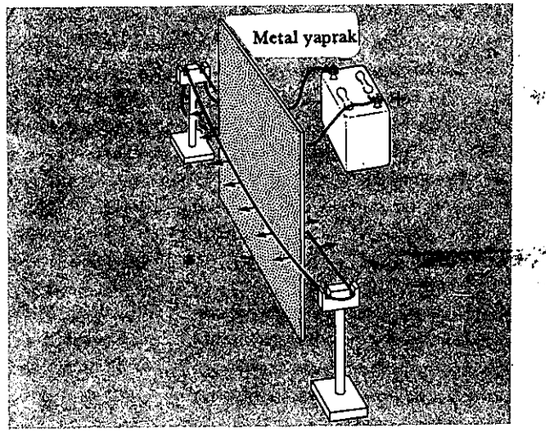
Koşut, aynı yönde akım geçiren iki tel, yan yana asılmışlardır. Tellerden birinin birim boyuna etkiyen kuvvetin geçen akımların çarpımı ile oranlı olduğu gösterilmiştir (Şek. 5.1a). Akımlardan birinin yönü değiştirilirse aralarındaki kuvvet de yön değiştirir ve bir itme haline geçer. Bu nedenle Şek. 5.1 b'de aynı bir çevrimin iki parçası olan teller birbirinden açılmağa çalışırlar. Böylece doğru akım taşıyan iki tel arasında bir çeşit "uzaktan etki" bulunduğu gözlenir. Bunun tellerin yüzeyinde bulunabilecek durgun yüklerle hiç bir ilişkisi yok gibidir. Bu gibi yükler bulunabilir ve dolayısıyla teller ayrı gerilimlerde olabilirler. Ama bizim ilgilendiğimiz kuvvet yüklerin devinimlerine, yani akıma bağlıdır. İki tel arasına bir metal yaprak tutmakla bu kuvveti hiç etkileyemezsiniz (Şek. 5.1c). Yükler hareket halinde olunca ortaya çıkan bu yeni kuvvetlere mıknatısal kuvvetler denir.



Şek. 5.1. (a) Aynı yönde akım geçiren koşut teller birbirini çekerler.



(b) Zıt yönde akım geçiren koşut teller birbirlerini iterler.

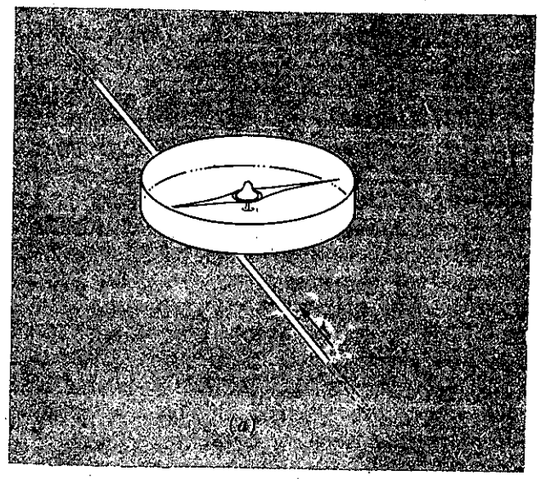


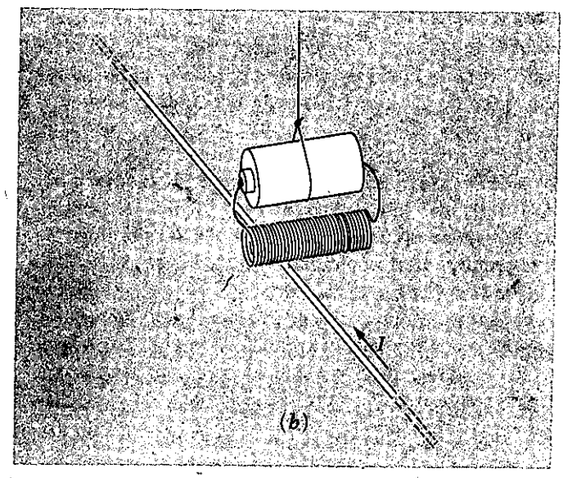
(c) Teller arasına bir metal yaprak koymak bu kuvveti etkilemez.

Oersted'in pusula iğnesi (Şek. 5.2a) bir doğru akım devresine pek benzemiyor. Ama Ampere'in başta kuşkulandığı gibi, bugün artık biliyoruz ki, mıknatıslı demir durmadan devinen yüklerle, yani atom boyutunda akımlarla doludur. Bir batarya ile tellerinden akım geçirilen ince bir akım makarası (Şek. 5.2b), yakında bulunan başka bir akımın etkisi altında tam bir pusula iğnesi gibi davranır.

Akım geçiren bir tel yerine, özgürce devinen bir yüklü tanenin deviniminde aynı olayları gözleriz. Bir katot ışınları tübü, akım geçiren bir tele yaklaştırıldığı zaman, dosdoğru gitmesi gereken elektronlar bu teldeki akımın yönüne bağlı olarak tele doğru çekilirler ya da telden öteye itilirler (Şek. 5.3). Bu olayı laboratuvarda gözlemiş olduğunuz için iyi biliyorsunuz ve akım ile devinimli yüklerin bu etkileşmesini *mıknatısal alan* kavramının işe karışması ile anlatılabildiğini öğrendiniz. (Elektrik alanının, durgun yükler arasındaki uzaktan etkileşmeyi yani Coulomb yasasını anlatmak için kullanılan bir yol olduğunu anımsayın.) Aynı biçimde elektrik akımına eşlik eden ve çevresindeki uzayı dolduran bir mıknatısal alan bulunduğunu söyleriz. Başka akımlar, ya da devinirken bulunan yüklü bir parçacık bu alan içine girerse bölgedeki mıknatısal alanın yeğinliği ile oranlı bir kuvvet etkisine uğrar. Kuvvet yüklü bir parçacık için parçacığın hızına hep dikeydir. Yükü q olan bir parçacığa etkiyen toplam kuvvet

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} + \frac{q}{c}\mathbf{v} \times \mathbf{B} \qquad (1)$$





Şek. 5.2.Bir iletkenden geçen akım,
(a) Yakında bulunan bir pusula iğnesini,
(b) akım geçiren bir tel kangalını aynı biçimde etkiler.

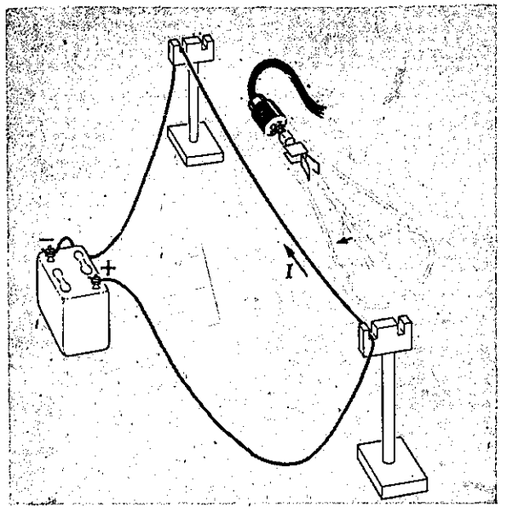
ile verilmiştir ki burada **B** mıknatısal alandır.

Biz burada Denk. 1'i **B**'nin tanımı olarak alacağız. Mıknatısal alan yeğinliği, devinimde bulunan yüklü tanecik üzerine etkiyen kuvvetin, hızla oranlı payını belirleyen bir yöngüdür. Başka bir deyişle, **B** yöngüsünün falan yerdeki doğrultusunu ve büyüklüğünü ölç diye bir görev verildiği zaman, şu işlemlerin yapılması gerekir: q yükü bilinen bir parçacık al. Bu q yükü dururken etkilendiği kuvveti ölçerek **E**'yi bul. Sonra yüklü parçacık **v** hızı ile devinirken kuvveti ölç; **v**'ye farklı doğrultular vererek bu ölçüyü yinele. Şimdi Denk. 1'in bütün bu sonuçlara uymasını sağlayacak bir **B** değeri bul; bu söz konusu yerdeki mıknatısal alandır.

Açık söylemek gerekirse bu hiç bir şey *anlatmıyor*. Denklem 1'in işlerliği nereden gelir? Olabilecek bütün hızlar için ve her zaman bu yalın bağıntı ile bağdaşan bir **B** değeri bulabilmemiz nedendir? Hızla oranlı bir kuvvet doğmasının nedenini anlamak istiyoruz. Bu kuvvetin **v** hızı ile kesin olarak oranlı oluşu, elektrik alanı etkisinin ise **v**'ye hiç bağlı olmayışı gerçekten çok ilginç bir olaydır! Gelecek sayfalarda bunun niçin böyle olduğunu göreceğiz.

5.3 Devinimli Yükün Ölçülmesi

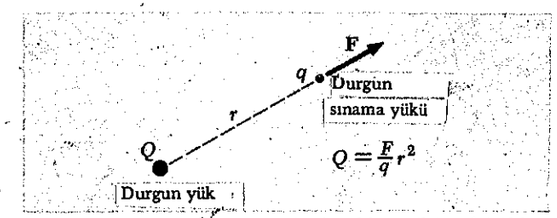
Devinimli bir parçacığın yükünü nasıl ölçebiliriz? Bu soru bir karara bağlanmadan devinimin yük üzerine etkisinin ne olduğunu anlamaya çalışmak boşunadır. Bir yük ancak oluşturduğu etkilerle ölçülebilir. Durgun bir Q nokta yükü, belli uzaklıkta bulunan bir q sınama yüküne etkilediği kuvvetle belirlenir (Şek. 5.4 *a*). Bu belirleme Coulomb yasasına dayanır. Ama ölçmek istediğimiz yük devinimde ise kararsız bir ortamda bulunuyoruz demektir. Zira şimdi uzay içinde özel bir doğrultu, devinimin bir andaki doğrultusu vardır, q sınama yüküne etkiyen kuvvet iki yük arasındaki uzaklığa olduğu kadar Q'den q'ye giden doğrultuya da bağlı olabilir. O zaman Şek. 5.4*b*'de görüldüğü gibi sınama yükünün farklı konumlarında farklı kuvvetler gözlememiz gerekir. Bu kuvvetleri Coulomb



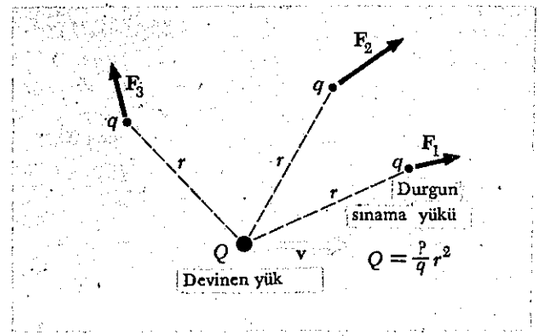
Şek. 5.3.Aynı yönlü akımların birbirini çekmesi üzerine bir örnek. Bunu Şek. 5.1a ile karşılaştırınız. Bunu bir elektron demetinin bir mıknatısal alanla saptırılması şeklinde de anlatabiliriz.

yasasına yerleştirmekle aynı Q yükü içindeğişik sayılar elde ederiz. Bundan başka, şimdiye dek olduğu gibi, kuvvetin **r** ışınsal yöngüsü doğrultusunda olacağına da güvenemeyiz.

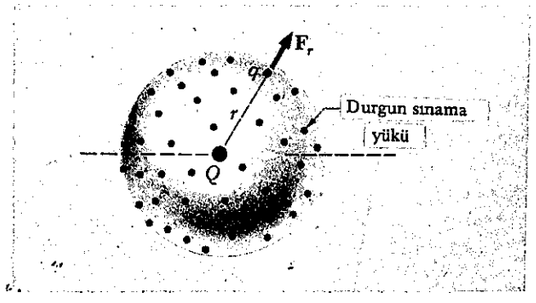
Elimizdeki bir olanağı kullanabilmek için Q'yü tanımlamada, bütün doğrultular üzerinde bir ortalama almakta anlaştığımızı ve büyük sayıda sonsuz küçük sınama yüklerinin bir küre yüzeyi üzerine düzgün olarak serpildiğini düşünelim (Şek. 5.4 *c*). Devinimli yükün kürenin merkezinden geçtiği anda sınama yüklerinin herbirine etkiyen kuvvetin *ışınsal bileşeninin ortalaması ölçülmüş* ve bu ortalama kuvvet Q'yü hesaplamakta kullanılmış olsun. Bu yaptığımız elektrik alanının küre yüzeyi üzerinde t anında yüzey tümlevini bulmak için yapmamız gereken işlemdir. Buradaki sınama yüklerinin tümünün durduklarını unutmayalım; q'ye yük birimi başına etkiyen kuvvet, tanımı uyarınca, bu noktadaki elektrik alanını verir. Bu durum devinimli bir parçacığın veya devinimli parçacıklar kümesinin yük tutarının tanımlanmasında



Şek. 5.4. (a) Durgun devinimsiz bir yükün büyüklüğü, devinimsiz bir sınama yüküne etkilediği kuvvetle ve Coulomb yasası ile belirlenir.



(b) Devinimli bir yük halinde, kuvvet hakkında bütün bildiğimiz, bunun sınama yükünün yerine bağlı olabileceğidir. Eğer bu doğru ise (a)'daki kuramı kullanamayız.



(c) Q'nün, sınama yüklerinden oluşmuş küresel bir kabuğun merkezinden geçtiği sırada, bunlardan herbirine etkiyen ışınsal kuvvet bileşenini ölçünüz, ve Q'yü bulmak için F_r'lerin ortalama değerini kullanınız. Bu yaptığımız **E**'nin tümlevini almakla birdir.

Coulomb yasasından çok Gauss yasasının doğal bir yol* olduğunu anlatır. Böyle bir tanımı aşağıdaki gibi çerçeveleyebiliriz.

Bir bölgede bulunan elektrik yük tutarı, oluşturdukları $\mathbf{E}$ elektrik alanının bu bölgeyi saran bir S yüzeyi üzerinde alınan yüzey tümlevi ile tanımlanır. Bu S yüzeyi bir F gözlem çatkısı içinde devinimsizdir. Bu F çatkısında herhangi bir (x,y,z) noktasında ve t anındaki $\mathbf{E}$ alanı F'ye göre durgun halde bulunan bir sınama yüküne, o yerde ve o anda etkiyen kuvvetle ölçülür. Bulunması gereken yüzey tümlevi belli bir t anı içindir. Yani, kullanılan alan değerleri bütün S yüzeyi üzerine dağılmış gözlemcilerin aynı anda ölçtükleri alan değerleri olacaktır (Bunda bir güçlük yok, zira S, F. dizgesinde durgun haldedir.) S üzerinde t anında alınan böyle bir yüzey tümlevi

$$\int_{S(t)} \mathbf{E} \cdot da \qquad (2)$$

ile gösterilmiş olsun. S içindeki yük tutarı bu tümlevin $1/4\pi$ katı olarak tanımlanır:

$$Q = \frac{1}{4\pi} \int_{S(t)} \mathbf{E} \cdot da \qquad (3)$$

Böyle belirlenen Q değeri S yüzeyinin biçimine ve büyüklüğüne bağlı olsaydı güç duruma düşerdik. Durgun yükler halinde böyle bir bağlılık yoktur ve bu durum Gauss yasasına uyar. Ama Gauss yasasının yükler devinimde oldukları zaman da geçerlikte olduğunu nereden biliyoruz? *Bereket versin ki bu böyledir. Biz bunu denel bir olgu olarak alacağız.* Devinimde bulunan yüklü parçacıkların elektrik alanı ile ilgili bu temel özellik, yük tutarını Denk. 3'e dayanarak tanımlamamıza yarar. Bu andan başlayarak bir bölge içinde veya bir parçacık üzerinde bulunan yük tutarından sözedebiliriz, ve bunun yükler devinimde de olsa eksiksiz bir anlamı olacaktır.

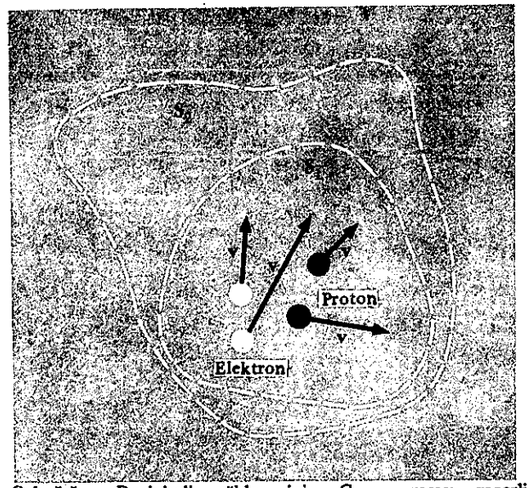
*Bu olağan tek yol değildir. Siz pekâlâ gönlünüzce bir kural alarak, sınama yükünü devinim doğrultusuna göre, ölçülecek yükün ön tarafında alabilirsiniz. Tanımlanacak yük bizim tartışmaya başladığımız basit özellikleri taşımayacak ve kuramınız karmaşıklaşacaktır.

Şek. 5.5 bu noktaları bir örnek içinde özetlemektedir. İki proton ile iki elektron devinim halindedirler. $\mathbf{E}$ elektrik alanının S_1 yüzeyi üzerinde hesaplanan yüzey tümlevi, aynı alanın aynı anda S_2 yüzeyinde hesaplanan yüzey tümlevine tam eşit olduğu denel bir olgudur dedik. Biz bu tümlevi, durgunyükte Gauss yasasını kullandığımız gibi yüzeyin içinde kapalı kalan toplam yükü bulmakta kullanabiliriz.

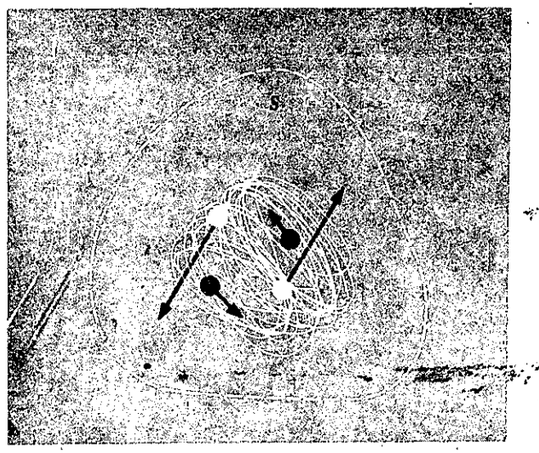
Şekil 5.6 yeni bir soru ortaya atmaktadır. Aynı parçacıklar başka hızlarla devinirlerse ne olur? Örneğin iki protonla iki elektron birleşerek bir hidrojen molekülü oluşturmuş olsunlar. Toplam yük daha önceki değerin tam aynı mı çıkacaktır?

5.4 Yüklerin Değişmez (İnvariant)'liği

Bir dizge içinde bulunan toplam yükün değişmediği üzerine kesin sonuçlu denel kanıtlar elde edilmiştir. Bunu sağlama bağlanmış gibi görmeğe öylesine alışmışızdır ki üzerinde durup ne denli ilginç bir temel olgu olduğunu düşünmeği gereksiz saymayız. Atomların ve moleküllerin elektrikçe tam ılın oluşları buna bir kanıttır. Böl. 1'de protonla elektronun taşıdıkları yüklerin 10^{20}'de 1'i aşan bir yaklaşıklıkla eşit olduğunu ve dolayısıyla hidrojen moleküllerinin ılınlığının denel yoldan sınandığını anlattık. Benzer bir deney helyum atomları ile yapılmıştır. Helyum atomunda iki proton ile iki elektron, yani hidrojen molekülünü oluşturan yüklü parçacıkların aynıları vardır. Ama bunların helyum atomu içindeki devinimleri, hidrojen molekülü içindekinden çok farklıdır. Özellikle helyum atomu içindeki protonlar, hidrojen molekülünde olduğu gibi 0,7 angstrom aralıkla yavaş bir dolanma devinimi içinde değil, helyum çekirdeği içinde sıkıca birbirine bağlanmış milyon elektron-volt basamağında devimsel enerjili devinimler içindedirler. Eğer devinimin yük tutarı üzerine bir etkisi olsaydı hem, hidrojen molekülünde ve hem de helyum atomunda gözlenen elektron-proton yük ılınlığı tam olmazdı. Gerçekten, helyum atomlarının hemen hemen aynı denel incelikle ılın oldukları gösterilmiştir.



Şek. 5.5. Devinimli yükler için Gauss yasası geçerli kalır. E'nin S_1 yüzeyinden geçirdiği akı aynı alanın S_2 yüzeyinden aynı anda hesaplanan akısına eşittir.



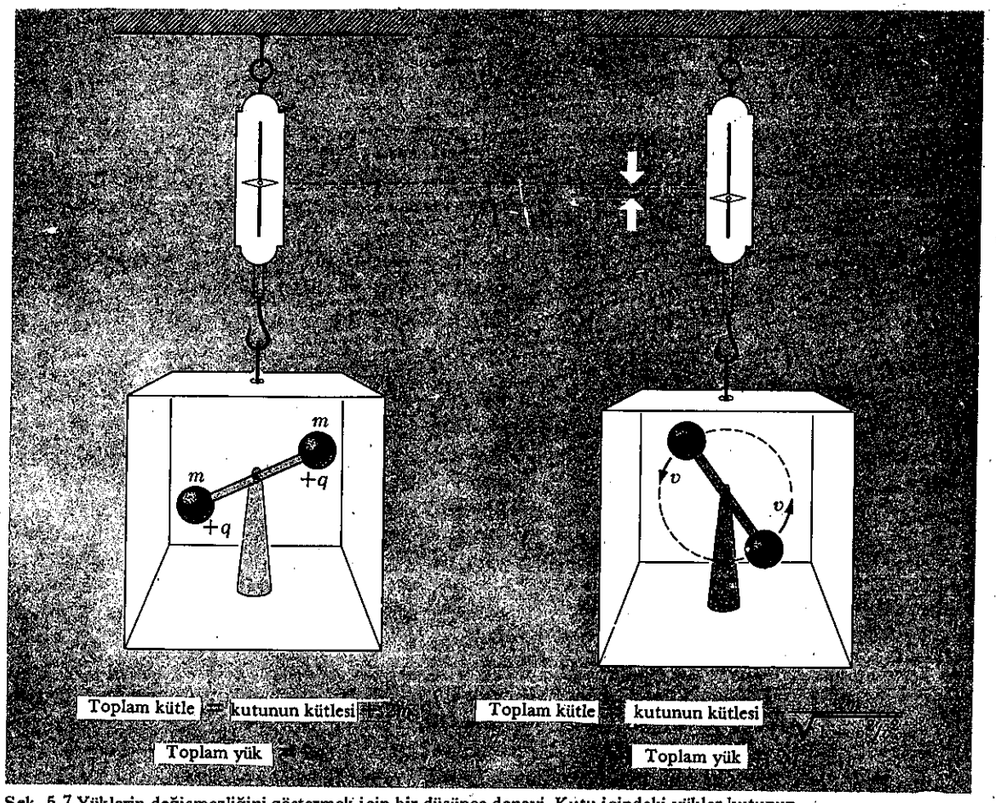
Şek. 5.6. E'nin S yüzeyinden geçirdiği akı yüklü parçacıkların devinim durumuna bağlı mıdır? E'nin bu S yüzeyinde alınan yüzey tümlevi Şek. 5.5'dekinin aynı mıdır? Burada yüklü parçacıklar hidrojen molekülü halinde birbirine bağlanmışlardır.

Başka bir denel kanıt, aynı elementin çekirdek kütleleri farklı, ama çekirdek yükleri hiç değilse kabaca aynı olan izotoplarının optik spektrumlarından gelmektedir. Burada da, protonun çekirdek içindeki devinimlerinde belirli bir fark bulunduğu halde, iki izotopun spektrum çizgilerinin karşılaştırılmasında, toplam yükün en hafif bir farkına yorulabilecek bir ayrılık gözlenemez.

Kütle bunun gibi değişmez *değildir*. Bir parçacığın kütlesinin devinimi dolayısıyla, $1/(1-v^2/c^2)^{1/2}$ çarpanı ile değiştiğini biliyoruz. Bu ayrımı açıkca belirtmek için Şek. 5.7'de bir *düşünce* deneyi veriyoruz. Sağdaki kutuda yüklü büyük kütleli iki cisim bir çubuğun uçlarına tutturularak v hızı ile dönmeye konulmuştur. Şağdaki toplam kütle, kutunun bir yaylı terazi ile tartılması veya tümüne bir ivme kazandırmak için gerekli kuvvetin ölçülmesi ile gösterilebileceği gibi soldakinden *daha büyüktür**. Yine de toplam elektrik yükü değişmemiştir. Buna eşdeğer olan gerçek bir deney, bir kütle spektrometresi ile yapılabilir; böyle bir deneyde, iyonlanmış bir döteryum molekülü ile (2 proton, 2 nötron, 1 elektron), iyonlanmış bir helyum atomu iyonu (yine 2 proton, 2 nötron ve 1 elektron) arasında bir kütle farkı bulunduğu açıkca görülür. Bunlar, içindeki parçacıklar çok farklı hızlarla devinen çok ayrı iki yapıdır. Enerjilerindeki farklar kütlede ölçülebilen bir ayrılık gösterir. İki iyonun elektrik yüklerinde ise, çok büyük incelikle yapılan deneylerde bile, bir ayrılık yüze çıkarılamamıştır.

Yük değişmezliği, yük kuantumlanması olgusuna özel bir anlam verir. Böl. 1'de yüklü her temel parçacığın yükünün büyüklükçe başka herhangi bir temel parçacığın yüküne eşit olması gibi önemli ve gizemli bir olguyu belirtmiştik. Şimdi görüyoruz ki

**Kütleler arasındaki fark, yalnız parçacıkların devinim enerjisine değil, ama, parçacıkları tutan çubuğun esnek zorlamasında olduğu gibi, gizligüç enerjisindekideğişime de bağlı olacaktır. Çubuk yeterince sert ise, bu katkı v/c terimi ile karşılaştırınca küçük kalacaktır. Bunun böyle olduğunu göstermeye çalışabilirsiniz.

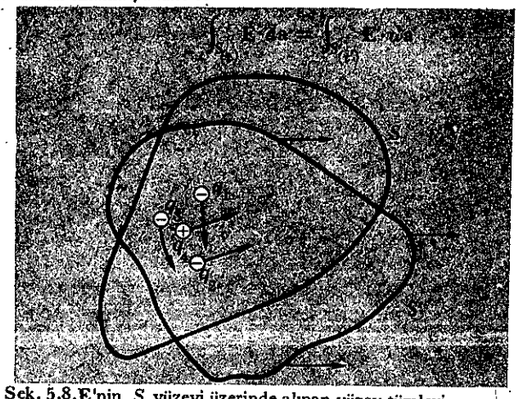


Şek. 5.7. Yüklerin değişmezliğini göstermek için bir düşünce deneyi. Kutu içindeki yükler kutunun çevresindeki alanın ölçülmesi ile veya buna eşdeğer biçimde uzakta bulunan bir sınama yüküne etkiyen kuvvetin ölçülmesi ile bulunacaktır.

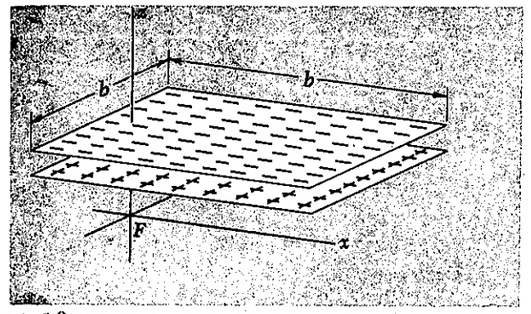
bu **denli** incelikle doğrulanan bu eşitlik, birbirine göre durgun halde iki parçacık için değil, bağıl bir devinim içinde bulunan parçacıklar için de doğrudur.

Anlattığımız deneyler ve daha birçokları, $\int_S \mathbf{E}\,da$

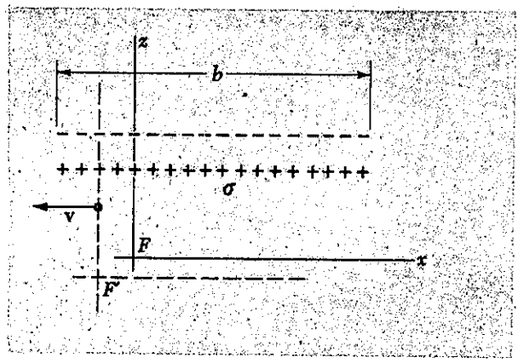
yüzey tümlevinin, S *yüzeyi içinde kalan yüklü parçacıkların yalnız sayılarına ve çeşitlerine bağlı olduğunu ve bunların devinimlerine bağlı olmadığını* gösterir. Görelik koyutları uyarınca bu yazım ivmesiz (eylemsiz) bir gözlem çatkısı için doğruysa, ivmesiz her gözlem çatkısı için de doğru olmak zorundadır. Bu yüzden eğer F' , Fye göre devinimde



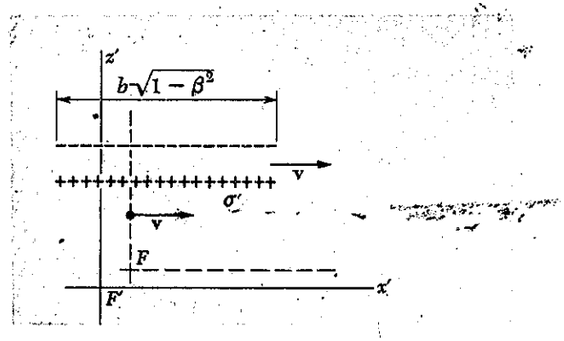
Şek. 5.8. E'nin S yüzeyi üzerinde alınan yüzey tümlevi E'nin S'üzerindeki tümlevine eşittir. Yük bütün gözlem çatkıları içinde aynı kalır.



Şek. 5.9. Elektrik alanı başka bir gözlem çatkısından nasıl görülür (bağıl hız alan doğrultusuna dik). (a) yoğunluğu sabit olan durgun iki yük katmanı.



(b) Bu sistemin F çatkısından görülen kesiti.



(c) Bu sistemin F'çatkısında görülen kesiti.

bulunan ivmesiz *başka* bir dizge ise, ve eğer, S yüzeyinin t anında kapsadığı yüklü cisimleri, t' anında bu yeni dizge içinde kapsayan bir yüzey S' ise,

$$\int_{S(t)} \mathbf{E}\cdot da = \int_{S'(t')} \mathbf{E}'\cdot da' \qquad (4)$$

olmalıdır.

Bu $\mathbf{E}'$ alanı F''de ölçülmüştür, yani F' çatkısında durgun bir sınama yüküne göre tanımlanmıştır. Burada t ile t' arasındaki ayrımı gözden kaçırmamalıdır. Bildiğimiz gibi F'de aynı andaki olaylar, F''de aynı anda olmak zorunda değildir. Denk. 4'deki yüzey tümlevlerinin herbiri kendi çatkısı içindeki bir an için hesaplanacaktır. Yükler S ve S''nün sınırları üzerinde bulunuyorlarsa, t anında S içindeki yüklerin, t' anında S' içindeki yüklerle aynı olduğuna güvenebilmemiz gerekir. Yükler, Denk. 4 bağıntısını göstermek üzere çizilmiş bulunan Şek. 5.8'de olduğu gibi sınırlardan çok uzakta iseler bu bakımdan bir güçlük çıkmaz.

Denklem 4 yüklerin göreli olarak değişmezliğinin yasal yazımıdır. Gauss yüzeyini ivmesiz herhangi bir çatkıda alabiliriz; yüzey tümlevi gözlem çatkısına bağlı olmayan bir sayı verecektir. Bu dediğimiz Böl. 4'de tartışılan ve matematiksel olarak,

$$\text{ıra}\,\mathbf{kJ} = \frac{-\partial\rho}{\partial t}$$

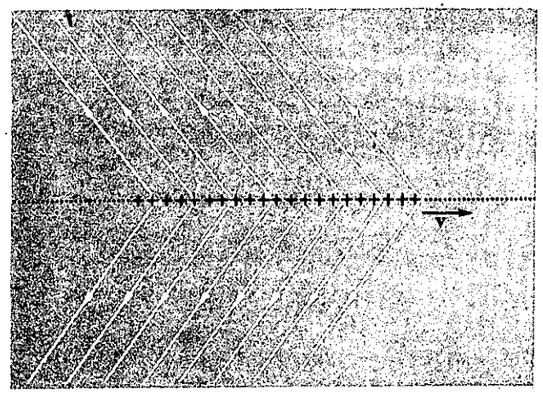
denklemi ile anlatılan yük korunumu ile aynı şey değildir. Yük *korunumu*, bir gözlem çatkısında sabit kapalı bir yüzey içinde yüklü madde bulunmakta ise, sınırlardan hiç bir yük geçmedeği zaman, içerdeki toplam yükün sabit kalmasını gerektirir. Yük *değişmezliği* ise, bu madde topluluğunun, yükünü başka bir gözlem çatkısından ölçecek olursak, tam aynı değeri bulmamız gerektiğini anlatır. Enerji korunumludur, ama görelikçe değişmez *değildir*. Yükler korunumludur, ama yükler aynı zamanda göreli olarak değişmezdir. Görelilik dilinde enerji dört yöngü dizgesinin bileşenidir; halbuki yük bir sayıdır ve Lorentz dönüşümü bakımından değişmez bir sayıdır. Bu, çok önemli sonuçlar veren, gözlemlerden çıkma bir olgudur ve devinen yüklü parçacıkların alan yapısını tam olarak belirler.

5.5 Farklı Gözlem Çatkılarında Ölçülen Elektrik Alanları

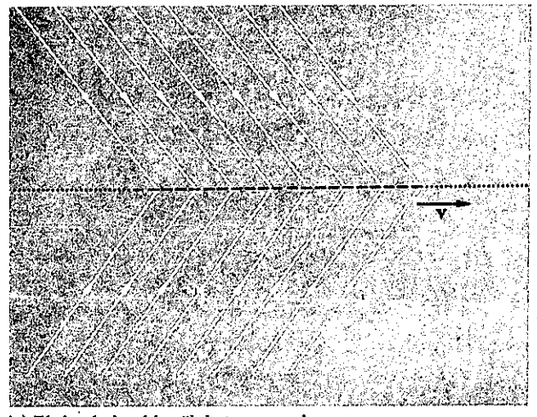
Eğer yük bir Lorentz dönüşümünde değişmez kalmak zorunda ise **E** elektrik alanı özel bir şekilde dönüşmelidir. **E** yi dönüştürmek" şöyle bir soruyu yanıtlamak demektir: Eylemsiz (ivmesiz) herhangi bir F gözlem çatkısı içinde, bir gözlemci (uzayın belli bir noktasında ve belli bir anda), bir **E** elektrik alanını ölçer ve şu kadar statvolt/cm bulursa, ayrı bir F' eylemsiz çatkısında bulunan başka bir gözlemci, aynı uzay zaman noktası içinde ne değerde bir alan bulur? Bazı alan sınıfları için, bazı yalın dizgelere Gauss yasasını uygulayarak soruyu yanıtlandırabiliriz.

Bir F çatkısında (Şek. 5.9*a*), $+\sigma$ ve $-\sigma$ esb/cm yoğunluğunda durgun iki yük katmanı bulunsun. Bunlar xy düzlemine koşut, b cm kenarlı karesel, aralarındaki alan düzgün sayılabilen yük katmanlarıdır. Bu alanın F'de bulunan bir gözlemcinin ölçtüğü yeğinliği $4\pi\sigma$ dır. F'ye göre sola doğru v hızı ile devinen eylemsiz (ivmesiz) ikinci bir F' çatkısı ele alalım. F'de bulunan gözlemci için yüklü "kare"ler artık kare değildir. Bunların x' boyutları b'den $b\sqrt{1-\beta^2}$'ye düşecek biçimde büzülmüştür, $\beta = v/c$. Ama toplam yük değişmez, yani gözlem çatkısına bağlı değildir ve dolayısıyla F''de ölçülen *yük yoğunlu* σ'dan $1/\sqrt{1-\beta^2}$ oranında *büyük* olur. Dizgenin kesitini gösteren Şek. 5.9 (b) hali F çatkısından, (c) ise F' çatkısından bakıldığına göre durumun ne olduğudur. Devinimli yüklerin elektrik alanı üzerinde bütün bildiğimiz Denk. 4 içinde bulunmakta ise F''deki elektrik alanı üzerinde ne söyleyebiliriz?

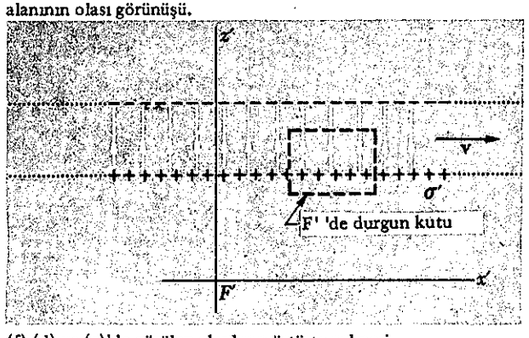
Hiç değilse bir şeye güvenebiliriz, o da sandviçin dış bölgesinde elektrik alanının sıfır olduğu ve yapraklar arasında ise hiç değilse yapraklar boyutunun sonsuz sayılabildiği sınırlar içinde elektrik alanının biteviye olduğudur; biteviye yüklü bir yalın katmanın $2\pi\sigma$ alanı yaprağa olan uzaklığa ya da yaprak üzerindeki konuma bağlı değildir. (Bu dizge içinde uzaklık ölçeğini ya da konumları verecek birşey yoktur; alanlar, bir nokta yükün ya da yüklü bir doğrunun



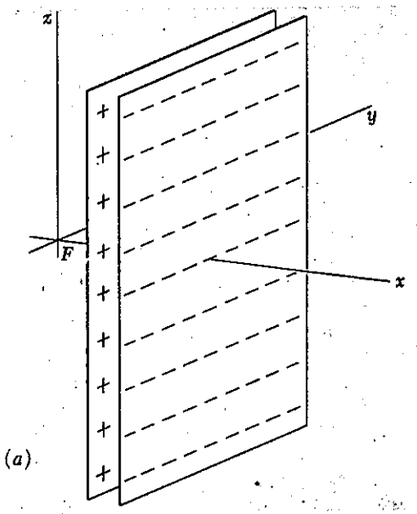
(d) Devinen yalınkat artı yük katmanının, alanının olası görünüşü.



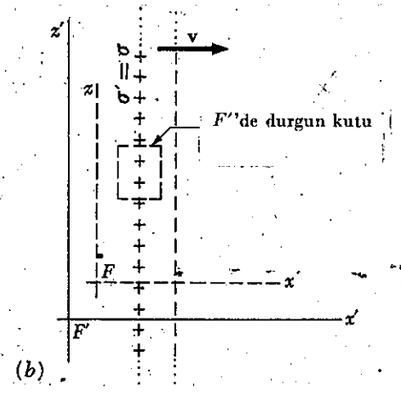
(e) Eksi yalınkat bir yük katmanının benzer alanının olası görünüşü.



(f) (d) ve (e)'de görülen alanların üstüste gelmesi.



Şek. 5.10. Başka bir gözlem çatkısındaki elektrik alanı (bağıl hız elektrik alanı doğrultusunda). (a) F gözlem çatkısındaki; (b) F' gözlem çatkısındaki kesitin görünüşü.



alanı halinde olduğu gibi eksi üslü bir yasaya uysalardı katmanın yüzü üzerinde sonsuz olurlardı.) Ama devinen yalınkat artı bir yük katmanının alanı üzerinde *bütün bildiğimiz* bunun Şek. 5.9 d'ye benzeyebileceğidir. Eğer bu doğru ise* eksi yüklü bir yalınkat katmanın alanı Şek. 5.9*e*'deki gibi olmalı, şöyleki, ikisinin üstüste gelmesi Şek. 5.9*f*'de gösterilen biçimde bir alan oluşturmalıdır.

Şimdi F' çatkısında kesiti Şek. 5.9*f*'de görülen devinimsiz kutuya Gauss yasasını uygulayalım. Kutu içinde bulunan yük tutarı σ' ile verilmiştir ve sandviçin dışındaki alan sıfırdır. Gauss yasası içteki tek alan bileşeni olan E_z' 'ün büyüklüğünün $4\pi\sigma'$ 'ye ya da $4\pi\sigma/\sqrt{1-\beta^2}$ 'ye eşit olması gerektiğini söyler:

$$E_z' = \frac{E_z}{\sqrt{1-\beta^2}} = \gamma E_z \qquad (5)$$

$1/\sqrt{1-\beta^2}$ çarpanı yerine Cilt 1, Bölüm 11, Denk. 13'de verilen γ simgesini kullanacağız. Her zaman $\gamma \geqq 1$ olduğunu unutmayın.)

Şimdi ayrı bir durum, F çatkısında durgun yüklü katmanların Şek. 5.10'daki gibi x eksenine dik olarak yönelmiş bulundukları hali düşünelim. F-deki gözlemci x doğrultusunda $E_x = 4\pi\sigma$ değerinde bir alan bulunduğunu bildirir. Bu halde F çatkısındaki yüzeyce yük yoğunluğu F''de gözlenen ile aynıdır. Katmanlar büzülmemiştir; yalnız aralık daralmıştır ama bu aralık alanın hesaplanmasında işe karışmaz. Bu kez Gauss yasasını F' çatkısında durgun halde bulunan kutuya uygulamakla:

$$E_x' = 4\pi\sigma' = 4\pi\sigma = E_x \qquad (6)$$

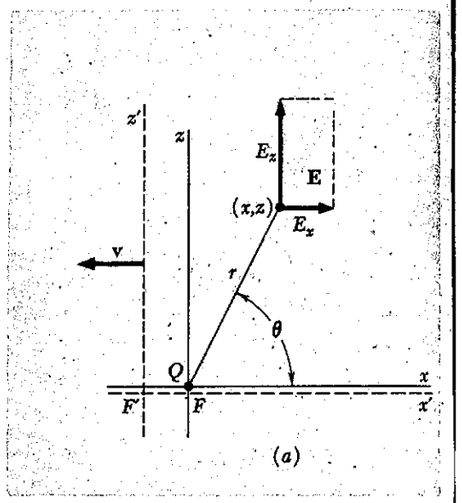
bulunur.

Burada çizilen yalın yük düzenlenişleri için her şey iyi yürümektedir; vardığımız sonuçların geçerliği daha genel midir? Bu soru bizi *alan* anlamının

*Unutmayın ki, bu F' çatkısında devinen yalın bir yük katmanıdır; bunun durgun bir katman halindeki alanla aynı olacağına dair hiç bir güvencemiz yoktur. Gerçekte devinen bir yüklü katmanın alanı, bizim Şek. 5.9 (d) ve (e)'de varsaydığımızın tersine yüklü katmanın yüzeyine diktir.

ta kalbine götürmektedir. Eğer bir uzay-zaman noktasındaki $\mathbf{E}$ elektrik alanının bir tek anlamı olacaksa, $\mathbf{E}$'nin başka gözlem çatkılarında aynı uzay-zaman komşuluğu içinde aldığı değer $\mathbf{E}$'yi yaratan alan kaynakları nerede olurlarsa olsunlar, bu kaynakların yapısına bağlı olamaz. Başka bir deyişle F'de bulunan bir gözlemci, belli bir anda, bir noktadaki alanı ölçmüşse, *yalnız bu ölçülerden, başka gözlem çatkılarındaki gözlemcilerin* aynı uzay-zaman noktasında ne ölçeceklerini kestirebilmelidir. Bu dediğimiz doğru çıkmazsa *alan* kavramı işe yaramaz. *Bunun doğru oluşunun açık kanıtı, alan kuramı ile deney arasındaki uyuşmadır.*

Bu ışık altında görülünce, Denk. 5 ve 6'da verilen bağıntılar, koşut yalınkat yükler gibi özel bir halin ötesinde de bir anlam taşır. Şimdi F çatkısına göre her yeri devinimsiz herhangi bir yük dağılımı ele alalım. Eğer F'deki bir gözlemci z doğrultusunda E_z gibi bir alan ölçerse, F' çatkısındaki gözlemci aynı uzay-zaman noktası için $E'_z = \gamma E_z$ alanını ölçecek, yani F'deki gözlemcinin bulduğu E_z ölçüsünün γ çarpanı kadar büyümüş bir sayı bulacaktır. Bundan başka F'deki gözlemci x doğrultusunda yani F''nün F'ye göre hızı doğrultusunda E_x alanı ölçerse, F''deki gözlemci E_x'a eşit bir E'_x alanı gözlediğini bildirecektir. Açıkca görüleceği gibi y ve z doğrultularının her ikisi de $\mathbf{v}$ hızına göre enine olduklarından, birbirine eşdeğerdirler. E'_z için söylediğimiz E'_y için de doğrudur. $\mathbf{E}$'nin F çatkısı içindeki doğrultusu ne olursa olsun bu x, y ve z bileşenlerinin bileşkesidir ve bunların herbirinin dönüşümünden, aynı noktanın F' çatkısındaki $\mathbf{E}'$ alan yöngüsünün değeri çıkarılabilir. Bu dediklerimizi herhangi bir doğrultudaki bağıl devinime uygun düşecek sözlerle özetleyelim: F çatkısında durgun halde bulunan yükler bir $\mathbf{E}$ alanının kaynağı olsunlar. Bir F' çatkısı $\mathbf{v}$ hızı ile F'ye göre devinsin. F'de bulunan herhangi bir nokta için, $\mathbf{E}$'yi $\mathbf{v}$'ye koşut "boyuna" $E_\parallel$ bileşeni ile $\mathbf{v}$ doğrultusuna dik "enine" $E_\perp$ bileşenine ayıralım. F' içinde aynı uzay-zaman noktasında $\mathbf{E}'$ alanı da $E'_\parallel$ ve $E'_\perp$ bileşenlerine ayrılır; bunlardan $E'_\parallel$, $\mathbf{v}$'ye koşut $E'_\perp$ ise, aynı doğrultuya diktir. Buna göre



Şek. 5.11. Bir nokta yükün elektrik alanı,
(a) yükün devinimsiz olduğu bir çatkı hali;
(b) yükün sabit hızla devindiği bir çatkı hali.

$$\boxed{E'_\parallel = E_\parallel \qquad E'_\perp = \gamma E_\perp} \tag{7}$$

dir.

Vardığımız sonuç, yalnız, F içinde durgun yüklerin uyardığı alanlar için geçerlidir. Şimdi göreceğimiz gibi F deki yükler devinime geçerlerse F'deki elektrik alanının kestirilebilmesi F'de bu kez iki alanın, yani *elektrik* ve *mıknatısal* alanların bilinmesini ister. Ama yine de kullanışlı bir sonuç elde etmiş bulunuyoruz ve bu bütün yüklü tanelerin durgun bulunduğu ivmesiz bir gözlem (eylemsizlik) çatkısı bulabildiğimiz zaman işimizi görür. Şimdi bunu sabit hızla devinen bir nokta yükün elektrik alanını incelemek için kullanacağız.

5.6 Sabit Hızla Devinen Bir Nokta Yükün Alanı

F gözlem çatkısı içinde nokta yükü başlangıç noktasında devinimsiz bulunmaktadır (Şek. 5.11 *a*). Bu çatkının her noktasında $\mathbf{E}$ elektrik alanının değeri Q/r^2'dir ve ışınsal olarak dışa doğru yönelmiştir. Alanın xz düzlemi içinde bir (x,z) noktasındaki bileşenleri

$$E_x = \frac{Q}{r^2}\cos\theta = \frac{Qx}{(x^2+z^2)^{3/2}} \qquad E_z = \frac{Q}{r^2}\sin\theta = \frac{Qz}{(x^2+z^2)^{3/2}} \tag{8}$$

dır. Şimdi ikinci bir F' konumluk çatkısının eksi x'ler doğrultusunda v. hızı ile devindiğini düşünelim. Bir olayın veya bir uzay-zaman noktasının iki çatkıdaki konumlukları arasındaki bağıntılar,

$$x = \gamma(x' - \beta ct') \qquad y = y'$$

$$z = z' \qquad t = \gamma\left(t' - \frac{\beta x'}{c}\right) \tag{9}$$

dır. Bunlar Gilt I, Böl. 11'de Denk. 15 ile verilen Lorentz dönüşüm denklemleridir. Yukarda verilen denklemlerde (–) imi kullanılmıştır, çünkü F' gözlem çatkımız F. den bakınca eksi x'ler doğrultusunda devinmektedir. Saatler, $x = 0$ ve $x' = 0$ konumluklarıçakıştıkları anda sıfırı gösterecek şekilde ayarlanmış olsun.

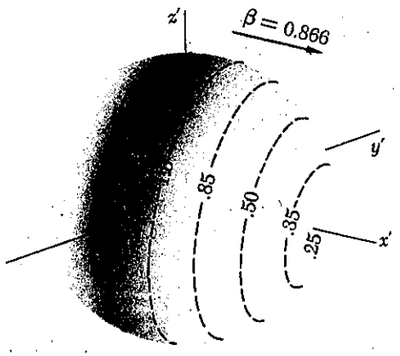
Yukarda türettiğimiz Denk. 5 ve 6'ya göre $E'_z = \gamma E_z$ ve $E'_x = E_x$'dir. Denk. 8'i ve Denk. 9'u kullanarak E'_z ve E'_x alan bileşenlerini F' içindeki konumluklar cinsinden yazabiliriz. Buna göre $t' = 0$, anında yükü F''nün başlangıç noktasından geçmekte iken,

$$E'_x = E_x = \frac{\gamma Qx'}{[(\gamma x')^2 + z'^2]^{3/2}} \qquad E'_z = \gamma E_z = \frac{\gamma Qz'}{[(\gamma x')^2 + z'^2]^{3/2}} \tag{10}$$

elde ederiz.

Buradan hemen $E'_z/E'_x = z'/x'$ olduğuna dikkat ediniz. Bu bize $\mathbf{E}'$ yöngüsünün x' ekseni ile yaptığı açının, $\mathbf{r}'$ ışın yöngüsünün yaptığı açıya eşit olduğunu gösterir. Öyleyse $\mathbf{E}'$ yöngüsü, Şek. 5.11 *b*'de görüldüğü gibi, Q'nün bir andaki konumundan dışarı doğru giden ışınsal doğru boyunca yönelmiştir. Şimdi burada bir an durarak bu sonucun içinize sinmesini bekleyin! Bunun anlamı odur ki, eğer yükü, üslü çatkının başlangıcından "üslü zamanda" öğle üzeri tam saat 12:00'de geçecek olursa, üslü çatkının *herhangi bir yerinde bulunan* bir gözlemci, öğle üzeri saat tam 12:00'-de kendi yakınlarında bulunan noktalardaki alanın tam başlangıçtan çıkan ışınsal doğrultular boyunca yöneldiğini söyleyecektir. Bu şanki haberlerin bir yerden ötekine bir anda iletildiği gibi bir anlam taşımaktadır! 1 kilometre uzakta bulunan bir gözlemci parçacığın o anda nerede bulunduğunu nasıl bilecektir? Bunu bilemez. Ama bunu bilmek de gerekmez. Unutmayın ki, parçacık "uçuş tasarı"na* göre sabit hızla sonsuz bir devinimde bulunmakta idi; ve öğle üzeri başlangıçtan geçeceği çoktan belli idi. Eğer nedenler ve sonuçlarından söz açmak istenirse, gözlediğimiz alanın, parçacığın geçmiş öyküsü ile belir-

* Tasar: Plan.



Şek. 5.12. Devinimli bir yükün alanının çeşitli doğrultulardaki yeğinliğiBu anda yük $x'y'z'$ çatkısının baş noktasından geçmektedir. Şekildeki sayılar alan yeğinliğini Q/r'^2 göre değerlendirmektedir.

lendiğini söyleyebiliriz. Şimdi uçuş tasarında beklenmeyen bir değişiklik olursa bunun neye yol açacağını araştırabiliriz.

Alanın E'^2 şiddetini bulabilmek için $E'^2_x + E'^2_z$ yi hesaplayabiliriz,

$$E'^2 = E'^2_x + E'^2_z = \frac{\gamma^2 Q^2 (x'^2 + z'^2)}{[(\gamma x')^2 + z'^2]^3} =$$

$$\frac{Q^2 (x'^2 + z'^2)}{\gamma^4 [x'^2 + z'^2 - \beta^2 z'^2]^3}$$

$$= \frac{Q^2 (1 - \beta^2)^2}{(x'^2 + z'^2)^2 \left(1 - \frac{\beta^2 z'^2}{x'^2 + z'^2}\right)^3} \qquad (11)$$

(burada bir kezliğine β'yı yeniden eşitliğe sokmak yazımı biraz basitleştirdi.) Şimdi bu anda başlangıç noktasında bulunan yükünün alanı ölçtüğümüz (x', z') noktasına olan uzaklığını r' ile gösterelim: $r = (x'^2 + z'^2)^{1/2}$ Bu ışınsal yöngü ile Q yükünün F' çatkısı içindeki hızı doğrultusu olan artı x' doğrultusu arasındaki açıyı θ' ile gösterelim. Yalınca $z' = r' \sin \theta'$ olduğuna göre, alanın büyüklüğü

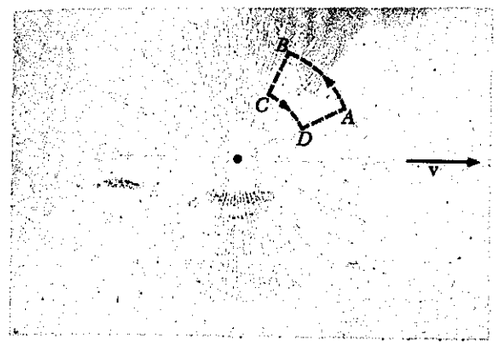
$$E' = \frac{Q}{r'^2} \frac{1 - \beta^2}{(1 - \beta^2 \sin^2 \theta')^{3/2}} \qquad (12)$$

olarak yazılabilir. Konumluk eksenlerinin başnoktasının hiç bir özelliği olmadığı gibi, $x'z'$ düzleminin de x' ekseninden geçen herhangi bir düzleme bakınca bir özelliği yoktur. Öyleyse çok genel olarak düzgün devinimde bulunan bir yükün belli bir anda uyardığı elektrik alanının, yükün bu andaki konumundan çıkan ışınsal doğru boyunca yöneldiğini, değerinin ise Denk. 12 ile verildiğini söyleyebiliriz burada θ' açısı yükün devinim doğrultusu ile o andaki konumundan gözlem noktasına giden ışınsal doğrultu arasındaki açıdır.

Alçak hızlar için alan $E' \approx Q/r'^2$ yazımına düşer ve bu alan, F' içinde devinimsiz bir Q yükünün bu anlık konumunda oluşturacağı alanın kılgınca aynıdır. Ama eğer β^2 savsanacak kadar küçük değilse, yükün devinim doğrultusu ile 90° açı altında bir noktadaki alan, yükten aynı uzaklıkta ama devinim doğrultusunda bulunan bir noktadaki alandan daha yeğin olur. Alan yeğinliği, çoğu zaman yaptığımız gibi, alan çizgilerinin yoğunluğu ile gösterirsek bu çizgilerin, yassı bir çörek gibi, devinim doğrultusuna dik düzlem içine biriktiklerini görürüz. Şekil 5.12, x' doğrultusunda $v/c = 0{,}866$ hızı ile devinen bir yükün, bir birim küre üzerinde uyardığı alan çizgisi yoğunluğunu göstermektedir. Bunun daha yalın bir görünüşü, Şek. 5.13'te $x'z'$ kesit düzlemi için de alan çizgileri ile verilmiştir*.

Bu çok ilginç bir elektrik alandır, kuresel bakışım göstermez. Buna şaşmamak gerekir çünkü bu çatkıda seçilmiş bir doğrultu, yüklerin devinim doğrultusu vardır. *Bu aynı zamanda, ne olursa*

* Şek. 5.13'deki gibi iki boyutlu bir çizim, alan yeğinliğini alan çizgileri yoğunluğu ile doğru olarak gösteremez. Biz çizgilerden kimilerini gelişigüzel bırakmadıkça şekildeki çizgilerin yoğunluğu $1/r'$ gibi değişecektir; oysa göstermeye çalıştığımız alan yeğinliği $1/r'^2$ gibi değişmektedir. Böylece Şek. 5.13'ün r' ve θ''ye bağlı olarak değişimini ancak niteliksel olarak verebilir.



Şek. 5.13. Düzgün devinimli bir yükün alanını başka şekilde göstermek.

olsun, durgun yük dağılımının uyaramayacağı bir alandır. Çünkü bu alan içinde E''nün kapalı bir yol boyunca alınan çizgi tümlevi *sıfır değildir*. Örneğin Şek. 5.13'deki kapalı $ABCD$ yolunu ele alalım. Bu yol üzerindeki dairesel yaylar boyunca, yaylar alana dik oldukları için tümleve bir katkıda bulunmazlar; ışınsal kesimler üzerinde ise alan, BC boyunca, DA boyunca olduğundan daha *yeğindir*, ve E''nün tüm yol üzerindeki *dolanımı* sıfır değildir. Ama unutmayın ki yük durgun olmadığından bu bir *durgunyük* alan değildir. F' çatkısının herhangi bir noktasındaki E' elektrik alanı, kaynak yük devinimde bulunduğu sürece zamanla değişikliğe uğrar.

Şekil 5.14 ve 5.15 bir gözlem çatkısında x doğrultusunda sabit hızla devinen bir elektronun belli zamanlarda gözlenen alanını gösteriyor*. Şekil. 5.14'de elektronun hızı 0,33c'dir ve devimsel enerjisi yaklaşıkça 30000 elektron volt (30 kev)'dır. (Cilt I Böl. 12) Bu koşullarda β^2'nin değeri 1/9'dur ve elektrik alanı durgun bir yükün alanından çok ayrı değildir. Şek. 5.15'de ise hız 0,8 c'dir ki, 335 kev'luk bir enerji eder. Her iki çizimde zaman birimi 1,0 $\times 10^{-10}$ s alınırsa, çizimlerdeki uzaklık ölçeği gerçek büyüklüklere uygundur. Çizitin, hızı yukarda verilen değeri bulan yüklü bir parçacık için de doğru olduğuna kuşku yoktur. Elektronun eşdeğer enerjilerini vermekten amacımız, herhangi bir laboratuvarda, göreli hızları elde etmenin güç olmadığını anımsatmaktır.

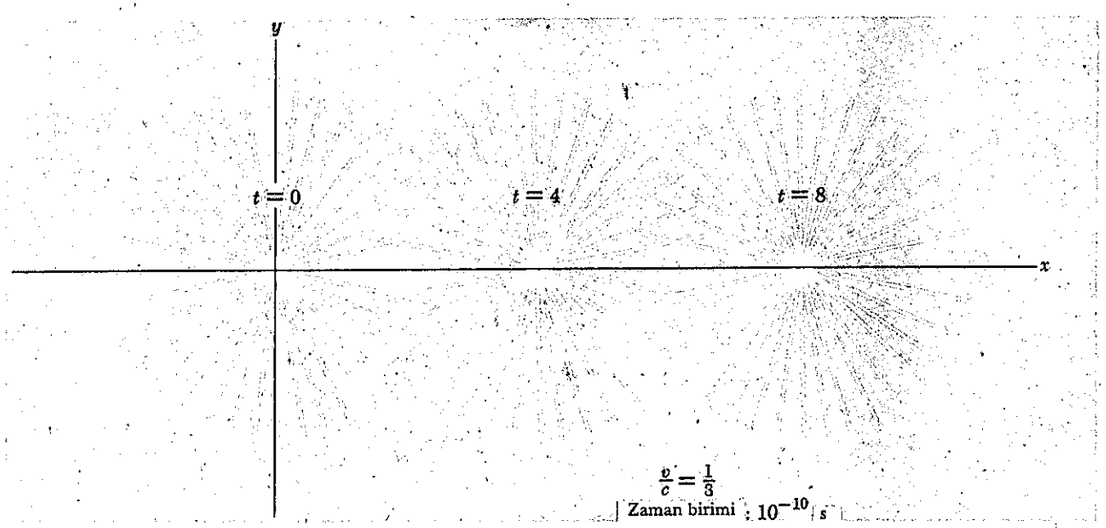
* Daha önce sınama yükünün üslü olmayan çatkıda durgun üslü çatkıda ise devinimli olduğu düşünülmüştü. Burada xyz ile yükün devinimli olduğu çatkıyı alarak, birçok üs kullanmaktan kaçınmak istiyoruz.

5.7 Devinime Geçen ya da Duruklaşan Yükün Alanı

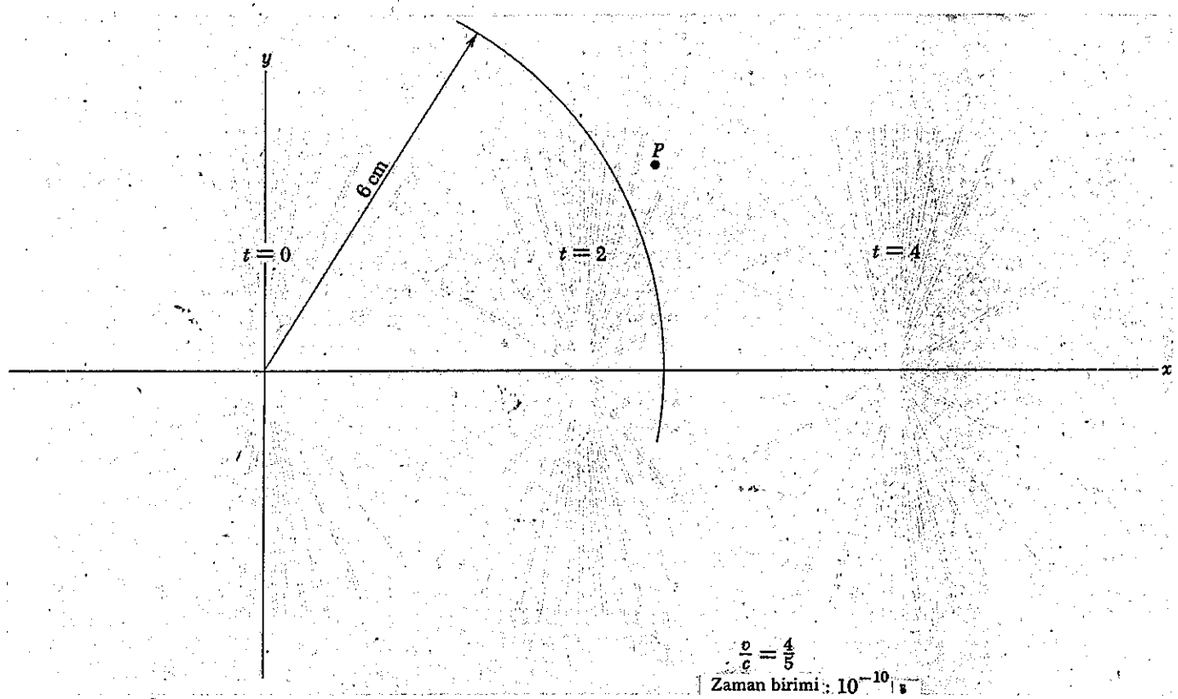
Kullanmakta olduğumuz *biteviye hız* teriminin, bir doğru üzerinde sabit hızlı bir devinimi anlattığını ve bu devinimin sonsuz olarak sürüp gitmekte olduğunu açıkca anlamak gerekir. Elektronumuz $t = 0$ anında önümüze geldiği sırada, uzak geçmişten beri eksi x ekseni boyunca devinimde değil idiyse ne olacaktır? Örneğin elektronun konumluklar başında durup durarken $t = 0$. anından azıcık önce, bir düzenek yardımı ile, birden büyük bir ivme edinerek v hızına kadar hızlandırdığımızı ve artı x ekseni boyunca bu hızla devindirdiğimizi düşünelim. Bu andan başlayarak elektronun devinimi Şek. 5.15'de çizilen elektron devinimine tam benzeyecektir. Ama Şek. 5.15, elektronun az önceki alanını doğru olarak vermez. Gerçekten bunu doğru olarak veremediğini görmek için, $t = 2$, anında yani 2×10^{-10}s anında P ile gösterilen noktadaki alanı ele alalım. 2×10^{-10} s'de bir ışık işareti 6 cm yol alır. Bu nokta başlangıç noktasından 6 cm'den daha uzakta bulunduğu için, elektronun $t = 0$ anında devinime geçtiği haberini henüz alamamış olacaktır. Göreliğin ağır şekilde zedelenmesi karşısında bulunmadıkca, (biz görelik koyutlarını* bütün tartışma için temel sayıyoruz) $t = 2$, anında P noktasındaki ve merkezi başlangıç noktasında bulunan 6 cm yarıçaplı kürenin dışında bulunan bütün noktalardaki alanlar, *başlangıç noktasında devinimsiz bir yükün alanlarıdır*.

Öte yandan, devinimli tanenin çok yakınlarında bulunan noktalar için, uzak geçmişte olanlar bir etki yapmayacaktır. Yükten gittikçe daha uzak bölgeler ele alırsak, verilen $t = 2$ anında alan, nasıl olsa değişecek, Şek. 5.15'deki ikinci çizitle başlangıç noktasındaki yükün alanı haline geçecek biçimde değişecektir. Haberin ne hızla yayıldığını bilmeksizin bundan öteye bir bilgi edinemeyiz. Bu haberin görelik postülatları ile bir çelişmeye düşmek-

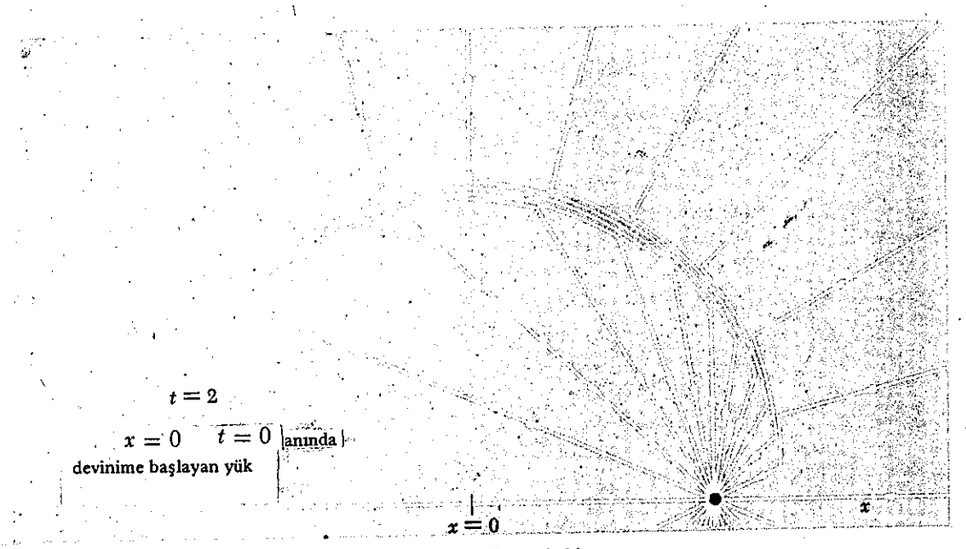
* Koyut: Postüla.



Şek. 5.14.Devinimli bir yükün elektrik alanının ardışıra 3 anlık görünüşü. v/c = 1/3.



Şek. 5.15.Devinimli bir yükün ardısıra gelen 3 andaki elektrik alanı: v/c = 4/5.

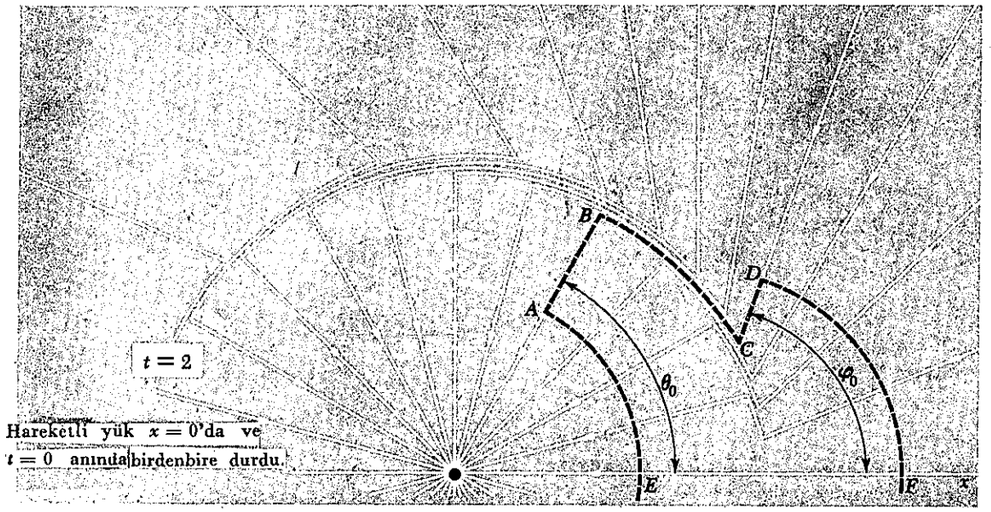


Şek. 5.16.Başlangıçta x 0 yerinde devinimsiz duran yük t 0 anında birdenbire hızlanmakta ve bundan sonra sabit hızla devinmektedir.

sizin olabildiğince hızlı gittiğini düşünelim;yalnızca düşünelim. O zaman eğer hızlanma süresi savsanırsa $t = 2$ anında 6 cm yarıçaplı kürenin içinde bulunan alanın, düzgün devinimli bir nokta yükün alanına eşit olmasını beklememiz gerekir. Durum böyle ise, birden devinime geçerek, $t = 0$ anında v hızını bulan bir elektronun tüm alanı, Şek. 5.16'da görülene benzeyecektir. Burada kalınlığı, hızlanma süresine bağlı bir küre kabuğu içinde, bir tip alandan ötekine geçiş olmuştur. Bu kabuk, merkezi $x = 0$ 'da olmak üzere c hızı ile yayılacaktır. Alan çizgileri üzerindeki oklar, kaynağın eksi bir yük (elektron) olduğu varsayımına göre çizilmiştir.

Şekil 5.17 sabit hızla $t = 0$ *anına dek* devinimde iken tam bu anda $x = 0$ konumuna ulaşarak birden *durdurulan* bir elektronun alanını göstermektedir. Elektronun durdurulduğunu bildiren haber, t zamanı içinde, başlangıç noktasına uzaklığı ct 'yi aşan hiç bir noktaya ulaşmamıştır. Yarıçapı $R = ct$ olan bir kürenin dışındaki alan, elektron ilk hızı ile devinimi sürdürse idi oluşturacağı alanın aynı olurdu. Bu nedenle Şek. 5.17'nin sağ yanındaki alan çizgileri demetinin elektron durmamış olsa idi varacağı noktaya doğru yönelmiş olduklarını görüyoruz. (Bu sonucun, geçen alt kesimde ortaya attığımız düşünceye yani haberlerin olabildiğince hızlı yayıldığı varsayımına bağlı olmadığını unutmayınız. Alanın kendine özgü bir yaşantısı var gibidir!

İç ve dış alan çizgilerini ulamak oldukça yalın bir konudur. Bunun Gauss yasası ile bağdaşır şekilde ancak bir türlü yapabiliriz. Şek. 5.17'yi örnek alalım ve A gibi bir noktadan yola çıkarak x ekseni ile θ_0 açısı yapan bir alan çizgisi boyunca gidelim; bu çizgiyi bizi dış alana çıkarıncaya dek izleyelim; böylece x ekseni ile φ_0 açısı yapan bir alan çizgisi doğrultusu buluruz. (Bu çizgi yükün yörünge uzatımı ile kestirilen yerinden, yani dış alanın sanal kaynağından çıkan ışınsal doğrultudur.) A ile D 'yi dairesel yaylarla x eksenine bağlayalım; daha doğrusu, iç alanın kaynağında merkezlenmiş AE yayı ile dış alanın sanal kaynağına merkezlenmiş DF yaylarını çizelim. Böyle elde olunan $EABCDF$ eğrisini x ekseni çevresinde döndürerek bir dönü yüzeyi oluşturalım. Bu yüzey içinde yük bulunmadığı için $\mathbf{E}$ 'nin bütün yüzey üzerindeki yüzey tümlevinin değeri sıfır olmalıdır. Tümleve biricik katkı küresel kaparlardan gelmelidir; zira $ABCD$ nin oluşturduğu yüzey kısmı, oluşumu bakımından alana koşut bulunmaktadır. İç küre kapağı yüzeyi



Şek. 5.17.Sabit hızla devinmekte bulunan bir yük, $t = 0$ anında başlangıç noktasına varmakta ve sert şekilde yavaşlayarak durup artık başlangıçta kalmaktadır.

üzerindeki alan devinimsiz bir nokta yükün alanıdır; dış küre kapağı üzerindeki alan ise Denk. 12'de verildiği gibi sabit v hızı ile devinen bir nokta yükün alanına eşittir. Şek. 5.18'de görülen iç kapak üzerindeki akıyı hesaplayalım. $\mathbf{E}$'nin iç kapak üzerinde alınan tümlevi:

$$\int_0^{\theta_0} \frac{q}{r^2} 2\pi r^2 \sin\theta\, d\theta = 2\pi q \int_0^{\theta_0} \sin\theta\, d\theta \qquad (13)$$

dır. $\mathbf{E}$'nin dış küre kapağı üzerindeki tümlevi ise:

$$\int_0^{\varphi_0} \frac{q}{r^2} \frac{1-\beta^2}{(1-\beta^2\sin^2\varphi)^{3/2}} 2\pi r^2 \sin\varphi\, d\varphi$$

$$= 2\pi q \int_0^{\varphi_0} \frac{1-\beta^2}{(1-\beta^2\sin^2\varphi)} \sin\varphi\, d\varphi \qquad (14)$$

olur. Soldan yüzeye giren akının sağda yüzeyden çıkan akıya eşit olması koşulunu ele alırsak:

$$\int_0^{\theta_0} \sin\theta\, d\theta = \int_0^{\varphi_0} \frac{1-\beta^2}{(1-\beta^2\sin^2\varphi)^{3/2}} \sin\varphi\, d\varphi \qquad (15)$$

yazabiliriz. Bunu bir tümlev hesabı uygulaması olarak işleyebilirsiniz*. Hesap sonunda θ_0 ile φ_0 arasında şu bağıntı elde edilir:

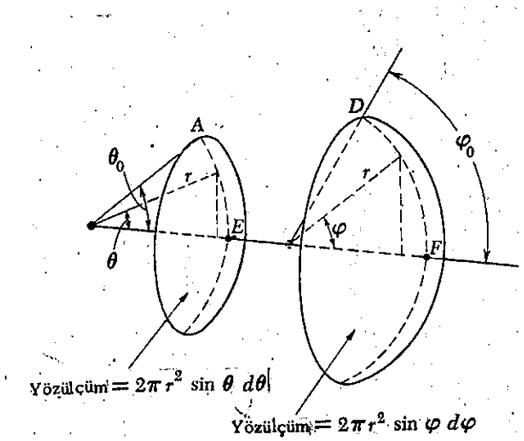
$$\cos\theta_0 = \frac{\cos\varphi_0}{\sqrt{1-\beta^2\sin^2\varphi_0}} \qquad (16)$$

Aynı bağıntıyı yalınca ve buna eşdeğer biçimde deyimleme yolu,

$$\tan\varphi_0 = \gamma \tan\theta_0 \qquad (17)$$

dır. Bu arada, eşit akıların işe karıştırılmasına dayarak bulunan bu θ_0 ile φ_0 arasındaki bağıntı katı (rijid) bir çubuğun kendine göre devinimsiz ve devinimli iki gözlem çatkısındaki devinim doğrultuları ile yaptığı açılar arasındaki bağıntının aynıdır. Bu, devinim

* Gerekli tümlev: $\int \frac{dx}{(a^2+x^2)^{3/2}} = \frac{x}{a^2(a^2+x^2)^{1/2}}$



Şek. 5.18 İç kürekapağı Şek. 5.17'deki AE'yi, eksen etrafında döndürerek dış küre kapağı ise DF'yi döndürerek oluşmuştur. AE üzerindeki alan durgun yükün alanıdır. DF üzerindeki ise sabit hızla devinen yükün alanıdır. Bu iki yüzeyden geçen akının eşit olmasını istiyoruz.

içinde bulunan bir yükün alanının dönüşümünü çok yalın biçimde tasarlamamızı sağlar: Alan "çizgilerinden" her birinin belli bir akıyı gösterdiğini ve yükün durgun çatkıdaki alan çizgilerinin, sabit teller gibi yükten çıkarak her doğrultuda uzandığını düşünelim . Devinimli çatkıda her tel aynı tutarda akıyı gösterir, ve bu kez teller daha dik bir açı altında görünürler şöyleki, tel demeti Şek. 5.13'deki biçimi alır.

Sadece Şek. 5.17'deki geçiş bölgesinin genişliği "haberin olabildiğince çabuk yayıldığı" gibi, bu ana dek bir kanıtla desteklemediğimiz bir varsayımına dayanır. Şu anda devinimsiz yükün yakınlarında, $t = 0$ anından önceki bütün izlerin yitirildiği bir bölge varsa, Denk. 5.17'de anlatılan bağlılık geçerli *olmalıdır*. Bu nedenle yakın alanı uzak alana bağlayan alan çizgilerinin, enine yönelmiş yani ışınsal doğrultuda olmayan bir bileşeni bulunmalıdır.

Şek. 5.16 ve 5.17'deki alan çizgileri, Denk. 17'ye uyacak biçimde bağlanmışlardır. Bunun sonucunda geçiş bölgesinde oldukça yeğin bir alan oluşmuş ve buradaki alan çizgilerinin, kaynaktan gelen ışınsal yöngüler aşağı yukarı dik olarak yönelmelerine yol açılmıştır. Bu elektrik alanı biçimleniminin zaman ilerledikçe c hızı ile yayıldığını anımsarsak, dışarı doğru, yayılma doğrultusuna göre enine dönük bir elektrik dalgası karşısında bulunduğumuzu görürüz. Bu sonuçlara görelik koyutlarını ve elektrik yüklerinin göreli değişmezliği sonuçlarını hiç gözden kaçırmadan vardık. Bu düşünceleri daha sonra, ivmeli devinimli bir yükten çıkan ışınımın yapısını anlamak için kullanacağız. Ama şimdilik, bize daha birçok süprizler getirecek olan yüklü bir tanenin düzgün devinimine dönelim.

5.8 Devinimli Bir Yüke Etkiyen Kuvvet

Denklem 12, devinimsiz bir yükün, sabit hızla devinen başka bir yükün alanı içinde etkilendiği kuvveti verir. Şimdi ayrı bir soru soruyoruz: Başka bir takım yüklerin alanı içinde devinimli bir yüke etkiyen kuvvet nedir? Önce devinimsiz yüklerin oluşturduğu alan içinde devinimli bir yüke örnek, bir osiloskobun yüklü saptırma yaprakları arasındaki alanda devinen bir elektron olabilir, ya da bir atom çekirdeği çevresindeki Coulomb alanı içinden geçen bir alfa parçacığı olabilir. Bütün bu hallerde alan kaynakları, "laboratuvar" çatkısı diyeceğimiz bir gözlem çatkısına göre devinimsizdirler. Bu "Lab" çatkısının bir yerinde ve bir anında q yüklü bir parçacık, bir durgunyük alanı içinde v hızı ile devinmektedir. Bu q yüküne etkiyen kuvvet nedir? Konumuz bu.

Kuvvet, momentumun değişim hızına verilen addır; öyleyse sorumuz aslında, "Lab" gözlem çatkısında bir yerde ve bir anda parçacığın momentumunun dp/dt değişiminin ne kadar olduğudur. (Devinimli parçacığa etkiyen kuvvet demekle yalnız bunu anlıyoruz.) Bu sorunun yanıtı şimdiye kadar öğrendiklerimiz içinde, zorunlu bir sonuç olarak bulunmaktadır. Şimdi bu dizgeye, söz konusu anda, *parçacıkla birlikte* devinen F' çatkısından bakalım. Bu "parçacık" çatkısı içinde, parçacığımız hiç değilse bir an için devinimsizdir ve devinen öteki yüklü parçacıklardır. Bu nasıl ele alınacağını bildiğimiz bir durumdur. Devinimsiz q yüküne etkiyen kuvvet, F' çatkısında gözlenen elektrik alanı $\mathbf{E}'$ olduğuna göre, $\mathbf{E}'q$ olur. Oysa $\mathbf{E}$ verilmiş ise $\mathbf{E}'$nün nasıl bulunaca-

ğını biliyoruz; gerekli kural Denk. 7'den çıkar. Böylece **E** bilindiğine göre F''de gözlenen parçacığın momentumunun değişim hızını bulabiliriz. Geri kalan iş, bu niceliği gerisin geri F çatkısına dönüştürmektir. Böylece problem, *kuvvetin, yani momentumun değişim hızının*, bir eylemsizlik çatkısında ötekine nasıl dönüştüğü sorusuna bağlanmaktadır.

Bu soru Cilt I Böl. 12'de incelenmişti. Bundan çıkan sonucu anımsayabilirsiniz. Ama yine de uygun yazımları Cilt I'den alarak kullanacak yerde, bu yazımlara götüren bazı adımları burada yineleyelim. Bu yineleme olayın gelişmesini tam olarak anlamamıza yardım edecektir. O halde bir F gözlem çatkısına göze v hızı ile, artı x doğrultusunda devinen bir F' eylemsiz (ivmesiz) dizgesini ele alalım F' çatkısından durgun kütlesi m olan bir parçacık artı x' doğrultusunda v' hızı ile devinmekte olsun. F'de ölçülen momentumun x bileşeni p_x ile F''de ölçülen değerinin x' bileşenini de p_x' ile gösterelim. Bu p_x ile p_x' arasındaki bağıntıyı bulabilmek için,

$$p_x' = \frac{mv'}{\sqrt{1 - v'^2/c^2}} = mc\beta'\gamma' \tag{18}$$

olduğuna unutmayalım. Kolayca görüldüğü gibi burada $\beta' = v'/c$ ve $\gamma = 1/\sqrt{1 - \beta'^2}$ kısaltmaları kullanılmıştır. Bundan başka parçacığın F çatkısındaki hızı

$$(v + v')/(1 + vv'/c^2)$$

dir ki, bu da $\dfrac{c(\beta + \beta')}{(1 + \beta\beta')}$ şeklinde yazılabilir, şöyleki:

$$\begin{aligned} p_x &= \frac{mc(\beta + \beta')}{(1 + \beta\beta')\left[1 - \left(\dfrac{\beta + \beta'}{1 + \beta\beta'}\right)^2\right]^{1/2}} \\ &= \frac{mc(\beta + \beta')}{[(1 - \beta^2)(1 - \beta'^2)]^{1/2}} \\ &= mc\gamma\gamma'(\beta + \beta') \end{aligned} \tag{19}$$

elde edilir. Denk. 18' ile Denk. 19'u karşılaştıracak olursak p_x ile p_x''i birbirine bağlayan bağıntının

$$p_x = \gamma(p_x' + \beta\gamma' mc) \tag{20}$$

olduğu görülür.

Burada $\beta\gamma' mc$ terimindeki $\gamma' mc$'nin $\gamma' mc^2/c$ ya da E'/c olduğunu gözönünde tutalım;

E' parçacığın F' çatkısındaki toplam enerjisi, yani durgun kütle enerjisi ile devimsel enerjisi toplamıdır, bunun şu anda ilgilenmediğimiz elektrik alanı ile bir ilintisi yoktur. Şimdi Denk. 20'yi $p_x = \gamma(p_x' + \beta E'/c)$ biçiminde yazalım ve bunun üzerinde biraz durarak x konumluğunun $x = \gamma(x' + \beta ct')$ Lorentz dönüşüm yazımı ile karşılaştıralım. Bu benzerlik bize genel bir olguyu anımsatır: Bir Lorentz dönüşümünde p_x, p_y, p_z, ve E/c gibi dört nicelik, tam olarak, x, y, z, ve ct den oluşan dört uzay-zaman konumluğu gibi davranır. Gerçekten eğer bu konuyu iyi biliyorsanız, Denk. 20'yi doğrudan yazabilir ve burada yaptığımız yinelemeyi bir zaman kaybı sayabilirsiniz. Şimdi bu olguyu enine momentum bileşeninin türetilmesi için ayrı bir yol gibi kullanalım. x-eksenine koşut bir hız için Lorentz dönüşümünde $y = y'$ olacağından,

$$p_y = p_y' \tag{21}$$

beklemeliyiz.

Yine aynı dönüşümde t ile t' arasındaki bağıntı bildiğimiz,

$$t = \gamma\left(t' + \frac{\beta x'}{c}\right) \tag{22}$$

ile verilir. Biz dp_x/dt ve dp_x'/dt' arasındaki bağıntılarla ilgiliyiz. Denk. 22'nin diferansiyelini alırsak:

$$dt = \gamma\, dt' + \gamma\frac{\beta}{c}\left(\frac{dx'}{dt'}\right)dt' = \gamma\, dt'(1 + \beta\beta') \tag{23}$$

elde ederiz, dx'/dt' yalnıca v''ye eşittir. Denk.21

$$dp_y = dp_y' \tag{24}$$

verir, ve Denk 20'nin diferansiyelini alırsak

$$dp_x = \gamma\, dp_x' + \gamma\beta mc\left(\frac{d\gamma'}{dp_x'}\right)dp_x' \tag{25}$$

buluruz. Bu son deyim içindeki $mc(d\gamma'/dp_x')$ katsayısı Denk. 18'den yararlanılarak hesaplanabilir ki, bu da

$$p_x' = mc\gamma'\beta' = mc\sqrt{\gamma'^2 - 1} \tag{26}$$

demektedir. Böylece,

$$\frac{dp_x'}{d\gamma'} = \frac{mc\gamma'}{\sqrt{\gamma'^2 - 1}} = \frac{mc}{\beta'} \tag{27}$$

buluruz. Böylece

$$\frac{d\gamma'}{dp_x'} = \frac{1}{(dp_x'/d\gamma')} = \frac{\beta'}{mc}$$

olur. Bunu denklem 25'de yerine taşıyacak olursak

$$dp_x = \gamma\, dp_x'(1 + \beta\beta') \tag{28}$$

elde ederiz. Denk. 23 ile Denk. 28'i karşılaştırırsak

$$\frac{dp_x}{dt} = \frac{dp_x'}{dt'} \tag{29}$$

elde ederiz ki, her iki denklemde $(1 + \beta\beta')$ çarpanı bulunduğuna göre v' ne kadar büyük olursa olsun, doğru kalmaktadır. Aslında biz v''nün yalnız çok küçük olduğu yani, parçacığın F' çatkısında hemen hemen devinimsiz bulunduğu durumlarla ilgiliyiz. Bu halde $\beta\beta'$ terimi savsanabilir ve Denk. 23 ile 24'ün karşılaştırarak enine momentum değişimi için

$$\frac{dp_y}{dt} = \frac{1}{\gamma}\frac{dp_y'}{dt'} \tag{30}$$

elde ederiz.

Vardığımız önemli sonuçları özetlersek, F', parçacığın bir an için devinimsiz bulunduğu ya da çok yavaş devindiği bir eylemsizlik (ivmesiz) gözlem çatkısıdır, F ise, herhangi bir eylemsizlik çatkısıdır. F' bu çatkıya göre herhangi bir hızla devinmektedir. F''nün F'nin bağıl devinimine koşut ya da buna dik olduğuna göre $\parallel$ ve $\perp$ imlerini kullanarak, momentumun boyuna ve enine bileşenlerini yazalım:

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{dp_\parallel}{dt} &= \frac{dp_\parallel'}{dt'} \\ \frac{dp_\perp}{dt} &= \frac{1}{\gamma}\frac{dp_\perp'}{dt'} \end{aligned}} \tag{31}$$

Denk. 31'de anlatılan kuvvet dönüşümü ve Denk. 7 ile anlatılan elektrik alanı dönüşümü deyimlerini kullanarak yüklü parçacığın bir **E** elektrik alanı içindeki devinimine dönecek olursak, şaşılacak yalınlıkta bir sonuçla karşılaşırız. Önce **E** alanının yüklü parçacığımızın devinim doğrultusuna koşut $E_\parallel$ bileşenini ele alalım. Bu anda parçacık ile devinimde bulunan F' çatkısı içine dönüştürelim. Bu çatkı içindeki boyuna elektrik alanı $E_\parallel'$'dır ve Denk. 7'ye göre $E_\parallel' = E_\parallel$ 'dir. Öyleyse $dp_\parallel'/dt'$ kuvveti,

$$\frac{dp_\parallel'}{dt'} = E_\parallel' q = qE_\parallel \tag{32}$$

olur. Geriye F çatkısına dönersek, burada boyuna kuvvet, yani momentum boyuna bileşeninin değişim hızı olan $dp_\parallel/dt$. ölçülmektedir. Denk. 31'e göre $dp_\parallel/dt = dp_\parallel'/dt'$ olduğundan, F çatkısı içindeki gözlemcilerin bulacakları boyuna kuvvet bileşeni:

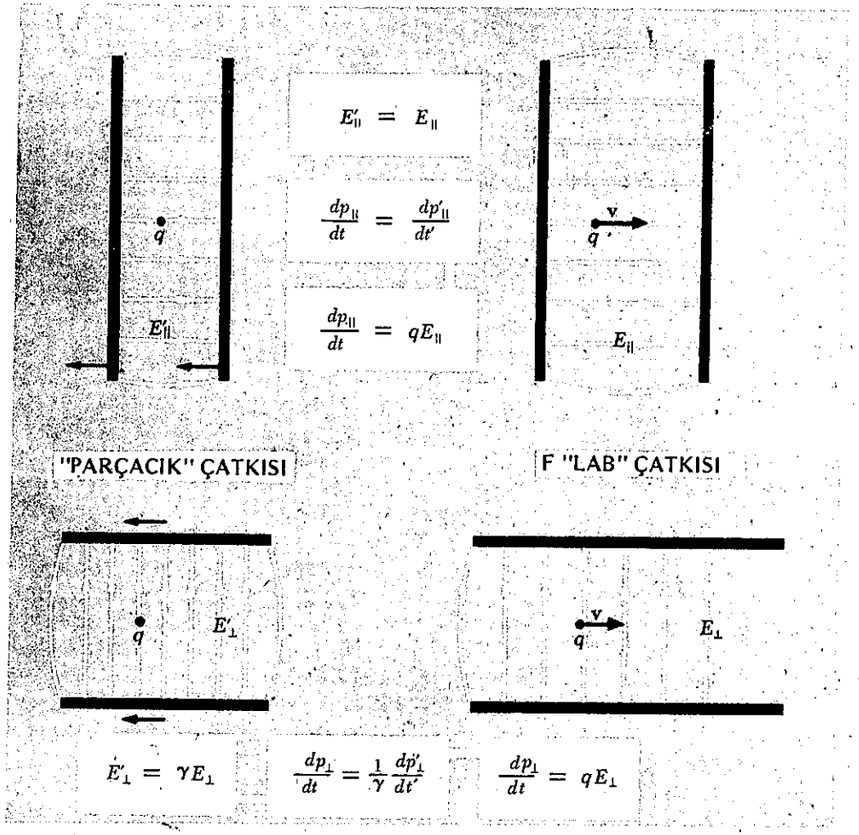
$$\frac{dp_\parallel}{dt} = \frac{dp_\parallel'}{dt'} = qE_\parallel \tag{33}$$

olur. Yüklü parçacık F' çatkısında zamanla devinime geçecektir. Çünkü bu parçacık **E**' alanı ile hızlandırılacak ve F' eylemsizlik çatkısındaki v' hızı sıfırdan başlayarak büyüyüp gidecektir. Bununla birlikte, yalnız bir anlık ivme ile ilgilendiğimize göre, v''nün nasıl olsa sonsuz küçük değerleri ile uğraşıyoruz demektir ve Denk. 31 üzerindeki kısıtlamalar tam olarak yerine getirilmiştir. F içindeki $E_\perp$ enine alan bileşeni için, dönüşüm $E' = \gamma E_\perp$ 'dir. şöyle ki $(dp_\perp'/dt') = qE_\perp' = q\gamma E_\perp$ olur. Ama kuvvetin geriye F çatkısına da dönüşümü yapılınca $(dp_\perp/dt) = (1/\gamma)(dp_\perp'/dt')$ elde ederiz ki, burada γ nasıl olsa düşecektir:

$$\frac{dp_\perp}{dt} = \frac{1}{\gamma}(\gamma E_\perp q) = qE_\perp \tag{34}$$

Denk. 33 ve Denk. 34'ün dedikleri yalınca şudur: F çatkısında devinen yüklü bir parçacığa etkiyen kuvvetin değeri q kez **E** elektrik alanının bu çatkıdaki değeridir, ve bu, parçacığın hızına hiç mi hiç bir *şekilde bağlı değildir*. Şekil 5.19 bu olguyu ve bunu buluş şeklimizi anımsatır.

Daha önce, elektrik alanının, devinimli yüke etkiyen tüm kuvvete katkısı $q\mathbf{E}$ olarak verilmişti. Bu



Şek. 5.19. E alanını oluşturan yüklerin durgun halde bulunduğu bir çatkıda herhangi bir hızla devinen q yüküne etkiyen kuvvet sadece qE'dir.

nedenle bu sonuç size yabancı gelmemiştir ve belki de bunu sığ bulmuş, ve bu açık sonucu tanıtlamak için boş yere zaman yitirdiğinizi düşünmüşsünüzdür. Biz bunu deneyden çıkma (ampirik) bir olgu olarak ta alabilirdik. Zira γ katsayısının 10^4 'ü bulan çok geniş bir hızlar bölgesi içinde, yani ışık hızına kadar giden hallerde bu sonucun doğruluğu deneyle sınanmıştır. Bu bakımdan elde edilen sonuç çok ilginç bir yasadır. Bu bölümdeki tartışmamızla, yasanın yükün değişmezliğinden doğrudan çıkan bir sonuç olduğu gösterilmiş oldu.

5.9 Devinimli bir Yükle Devinimli Başka Yükler Arasındaki Etkileşim

Devinimli bir yüke hızına bağlı bir kuvvet etkidiğini gördük. Bu kuvvet *mıknatısal alan ile ilişkilidir;* bu alanın kaynağı ise elektrik akımları, yani, devinim halindeki başka yüklerdir. Oersted deneyi elektrik akımlarının **mıknatısları** etkilediğini gösterir, ama bu deneyin yapıldığı sırada bir mıknatısın iç yapısının ne olduğu tam bir giz perdesi ardındaydı. Daha sonra Ampere ve başkaları, koşut ve aynı yönlü

akım geçiren iletkenler arasındaki çekim kuvvetleri gibi, etkileşimleri ortaya koydular. Bu gözlemler Ampere'i mıknatısal maddeler içinde durmadan dolanan elektrik akımları bulunduğunu varsaymak gibi bir sonuca götürdü. Eğer bu varsayım doğru ise, Oersted deneyinin bir telden geçen "galvani" akımı ile, pusula iğnesine mıknatıslık özelliğini veren minil* sürekli akımların etkileşimi biçiminde anlaşılabileceği düşünülür. Ampere sürekli akımlar arasındaki etkileşimin ve mıknatıslı maddelerin sürekli akımlar dizgesine eşdeğerliliğini anlatan tam ve zarif bir matematiksel türetim geliştirdi. Demirdeki mıknatıslığın gerçek yapısı üzerine ileri sürdüğü parlak öngörülerin kesincek doğrulanması için, bir yüzyıllık zaman geçmesi gerekmiştir.

Elektrik akımlarının mıknatısal görünüşleriyalnız yük taşınmasından mı ileri gelir, yoksa işin içinde ayrı etkenlerde olabilir mi sorusu Ampere ve çağdaşları için pek açık değildi. Durgun elektrikle yüklenmiş bir cisim devindirilirse sürekli "galvani" akımlarında olduğu gibi etkiler görülür mü idi? Geçen yüzyılın ikinci yarısı içinde Maxwell'in kuramsal çalışmaları yanıtın evet olması gerektiğini gösteriyordu. Bunun doğrudan yapılan gözlemlere dayanan inandırıcı ilk kanıtı, deneylerini Bölüm 6'nın sonunda gözden geçireceğimiz Henry Rowland tarafından elde edilmiştir. Şu andaki gözetleme yerimizden görüldüğüne göre, elektrik akımlarının mıknatısal etkisi Coulomb yasasının kaçınılmaz bir sonucu gibi görülebilir. Eğer görelik koyutları geçerli, elektrik yükleri değişmez ise, ve eğer Coulomb yasası ayakta duruyorsa, bizim genel olarak "mıknatısal" dediğimiz etkiler oluşmak zorundadır. Devinimli bir yükle devinimli başka yükler arasındaki etkileri incelemeğe koyulduğumuz anda bu etkiler hemen kendilerini göstereceklerdir. Çok yalın bir dizge buna iyi bir örnek olur.

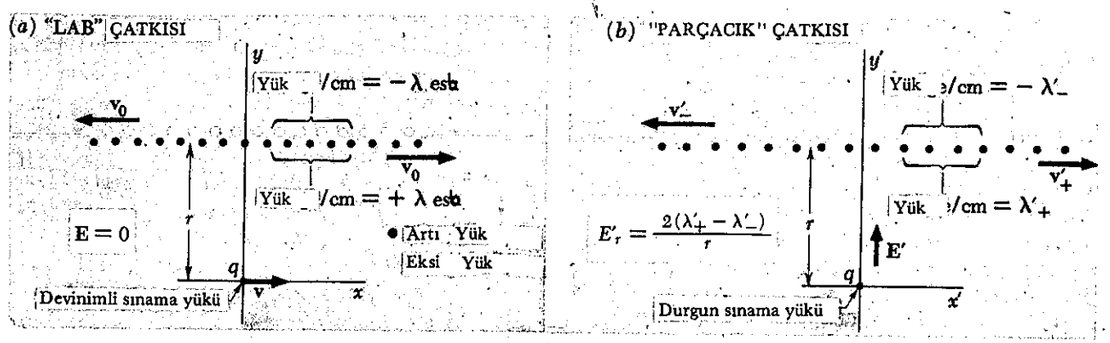
Şek. 5.20 *a*'da görüldüğü gibi "lab" çatkısı içinde sağ tarafa doğru v_0 hızı ile devinen sonsuz bir artı yük dizisi ile aynı yere yerleşmiş sola doğru aynı hızla devinen eksi bir yük dizisi bulunsun. Bu yüklerin sayısı o denli büyük ve birbirlerine o denli yakın olsunlar ki, bunlara baktığımız yerden taneli oldukları belli olmasın. Şekilde açıklık olsun diye devinen iki yük dizisi biraz aralıklı çizildi. Bu dizge için bütün yüklerin durgun halde bulunabileceği bir gözlem çatkısı yoktur. Lâboratuvar çatkısında λ_+ esb/cm olarak artı ve eksi yüklerin çizgisel yük yoğunluklarının aynı olduğunu düşünelim. Buna göre "lab" çatkısı içinde çizgisel dizili yüklerin net yoğunluğu sıfırdır. Buna göre lab çatkısında E elektrik alanı sıfır olmalıdır. Bu taslam sürekli akım geçiren yüklenmemiş bir iletkene eşdeğerdir. Bir metal tel içinde yalnız eksi yükler (elektronlar) devinimdedir, artı yükler durgun kalırlar. Bizim daha bakışımli bir taslam alışımız tartışmayı biraz yalınlaştırmak içindir.

Artı yüklerin hızı ile devinmekte olsaydınız, bunların çizgisel yoğunluklarını ayrı bulurdunuz. Şek. 5.19'daki sığacın içindeki durum budur. Lâb çatkısında x boyunca artı yük dağılımı, yüklere göre devinimsiz çatkıda $(1 - v_0^2/c^2)^{1/2}$ çarpanı kadar büzülecektir ki, bu, yük yoğunluğunun büyümesi demektir. Öyleyse artı yüklere göre devinimsiz çatkıdaki yük yoğunluğu lab çatkısındaki λ yük yoğunluğundan daha küçük olacak daha doğrusu $\lambda(1 - v_0^2/c^2)^{1/2}$'ye eşit olacaktır. Ayni düşünüş eksi yüklerin kendi çatkıları içindeki çizgisel yoğunluğu için de doğrudur.

Şimdi "tel"'den r uzaklığında duran bir q sınama yükü, elektrik alanı sıfır olduğu için hiç bir kuvvet etkisi duymayacaktır. Biz devinimli bir yüke etkiyen kuvvetle ilgilenmekteyiz. q yükü lab çatkısı içinde, sağa doğru, v hızı ile devinime geçirilsin. Lab çatkısından gözlendiğine göre, bu yüke etkiyen kuvvet nedir? Bu gibi sorulara nasıl yanıt verileceğini öğrendik. Bunun için q sınama yükü ile devinen bir konumluk çatkısına yerleşiyoruz. Bu "parçacık" çatkısında q yükü devinimsizdir ve ona etkiyen kuvvet yalnız bu çatkıdaki elektrik alanı ile verilir.

Ama "lab" çatkısı içinde hiç bir elektrik alanı bulunmadığı halde bu parçacık çatkısında bir alan ne diye bulunsun? Bunun nedeni, parçacık çatkısındaki λ'_+ ve λ'_- ile belirteceğimiz çizgisel yük yoğunluklarının *eşit olmayışlarıdır*. Yani "parçacık" çatkısında görülen tel yüklüdür! Telin her birimi boyunca

* Minil: Mikroskopik.



Şek. 5.20. Çizgi halindeki artı ve eksi yüklerin farklı gözlem çatkılarında gözlenişi. (a) "Lab" çatkısında eksi yükler sola doğru, artı yükler ise sağa doğru, aynı hızlarla devinmektedirler. "Lab" çatkısında yük yoğunlukları eşittir, ama (b) "parçacık" çatkısından bakacak olursak q yükü burada durgun haldedir ve çizgisel yüklerin yoğunlukları farklıdır.

bir eksi yük fazlalığı vardır*.

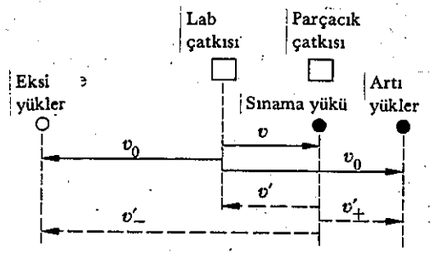
Konu üzerinde işlem yapabilmemiz için artı ve eksi yüklerin yeni gözlem çatkısındaki hızlarını bilmemiz gerekir. Bu hızların eşit olmayacağı açıktır. Gerçekten, "parçacık" çatkımızda lab çatkısından bakınca sağa doğru devineceğinden artı yüklere yetiştiği halde, eksi yüklerden daha da hızlı kaçacaktır. Şekil 5.21 ele almamız gereken hızların hangileri olduğunu tanımamıza yardım edecektir. Burada hiç bir yaklaşıklığa yer vermeyeceğimizden artı ve eksi yüklerin "parçacık" çatkısındaki v'_+ ve v'_- hızlarını bulmakta göreli hız bileşimi yazımını kullanmak zorundayız. Bu hızlar,

$$v'_+ = \frac{v_0 - v}{1 - v_0 v/c^2} \qquad v'_- = \frac{v_0 + v}{1 + v_0 v/c^2} \tag{35}$$

dır. Burada β ve γ kısaltmalarımız kolaylık sağlar. O halde $\beta_0 = v_0/c$, $\gamma_0 = (1 - \beta_0^2)^{-(1/2)}$; $\beta'_+ = v'_+/c$, $\gamma'_+ = (1 - \beta'^2_+)^{-(1/2)}$ v.b olarak denk. 35

$$\beta'_+ = \frac{\beta_0 - \beta}{1 - \beta_0\beta} \qquad \beta'_- = \frac{\beta_0 + \beta}{1 + \beta_0\beta} \tag{36}$$

biçimine girer.



Şek. 5.21. Olayların izini yitirmemek için bir "hız uzayı" çizimi. Ama hızların toplanması göreli olarak yapılmalıdır. Buradaki ayrı v'ler hız büyüklüklerini gösterir, ve bunlar burada Denk. 35'den 44'e kadar olduğu gibi artı niceliklerdir.

* "Değişmezlik"e ne oldu diyebilirsiniz. Buraya dek belli sınırlar içindeki toplam yüklerin hangi gözlem çatkısında olursa olsun değişmediğini birçok kez belirttik. Bu kez tel üzerinde toplam yükü hiç bir yüzey sınırlayamaz, çünkü tel sonsuza doğru uzanmaktadır, ama telin üzerinde olanlar bizim için burada önemli değildir.

Bu durumda iki yük dağılımı Lorentz büzülmesine uğrayacaklardır, ve işin can alıcı noktası budur. Artı yüklerin çizgisel yoğunluğunu bulmak için, bu yüklerin kendi durgun çatkılarındaki yoğunluklarını bulmakla yola çıkar ve "parçacık" çatkısına geçmek için büzülme çarpanını uygularız. Az önce artı yüklerin kendi durgun çatkılarındaki yoğunluklarını $\lambda(1-v_0^2/c^2)^{1/2}$'ya da yeni yazışımızla λ/γ_0 bulduk. Bu yük dağılımının parçacık çatkısından bakıldığı zaman çizgisel büzülmesi $1/\gamma'_+$ çarpanı kadardır, Öyleki bunun tersi γ'_+, artı çizgisel yük yoğunluğunun kendi durgun çatkısına göre artış çarpanı olur. bunun tersi olan γ'_+ çarpanı kadar artmıştır. Öyleyse artı yüklerin parçacık çatkısındaki çizgisel yoğunluğu:

$$\lambda'_+ = \gamma'_+ \left(\frac{\lambda}{\gamma_0}\right) \tag{37}$$

olmalıdır. Benzerince eksi yüklerin parçacık çatkısındaki yoğunluğu:

$$\lambda'_- = \gamma'_- \left(\frac{\lambda}{\gamma_0}\right) \tag{38}$$

Denk. 36'yı kullanarak bu denklemlerden γ'_+ ve γ'_-'yükeleyebilir. ve $\lambda'_+ - \lambda'_-$net çizgi yoğunluğunu bulabiliriz. Bu işlem bizi biraz sıkışık bir cebir işlemine sokacak gibi görünse bile güzel bir yalınlaştırma sağlar:

$$\lambda'_+ - \lambda'_- = \frac{\lambda}{\gamma_0}(\gamma'_+ - \gamma'_-) \tag{39}$$

Denk. 36'dan

$$\gamma'_+ - \gamma'_- = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\dfrac{\beta_0 - \beta}{1 - \beta_0\beta}\right)^2}} - \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\dfrac{\beta_0 + \beta}{1 + \beta_0\beta}\right)^2}}$$

$$= \frac{1 + \beta_0\beta}{\sqrt{1 - \beta_0^2 - \beta^2 + \beta_0^2\beta^2}}$$

$$= \frac{-2\beta_0\beta}{\sqrt{(1 - \beta_0^2)(1 - \beta^2)}} = -2\beta_0\beta\gamma_0\gamma \tag{40}$$

çıkar. Öyleyse net yük yoğunluğu:

$$\lambda'_+ - \lambda'_- = -2\lambda\beta_0\beta\gamma = -\frac{2\lambda\gamma v v_0}{c^2} \tag{41}$$

olur.

Parçacık çatkısındaki bu çizgisel elektrik yükü aynı yoğunluktaki herhangi bir çizgi yükünün oluşturduğu elektrik alanını verir, yani bu

$$E'_r = \frac{2(\lambda'_+ - \lambda_-)}{r} = -\frac{4\lambda\gamma v v_0}{rc^2} \tag{42}$$

ile verilen ışınsal elektrik alanıdır. Öyleyse artı q sınama yüküne etkiyen kuvvet ışınsal olarak içe doğru, yani, parçacık çatkısında artı y' doğrultusuna yönelmiş,

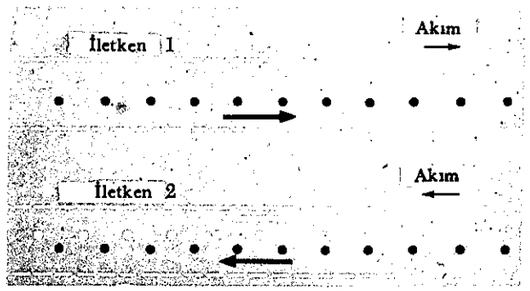
$$F'_y = \frac{4q\gamma\lambda v v_0}{rc^2} \tag{43}$$

değerinde bir kuvvettir. Bu parçacık çatkısında enine bir kuvvettir. Bu kuvvet lab çatkısında ölçülecek olursa ayrı bir değer bulunacaktır. Kuvvet dönüşümü kurallarımıza göre (Denk. 31) $F_y = (1/\gamma)F'_y$'dır. Bu γ'nın aradan çıkmasını sağlar. Bundan lab çatkısında "tel"e koşut olarak v hızı ile devinen q yüküne etkiyen kuvvetin büyüklüğünün

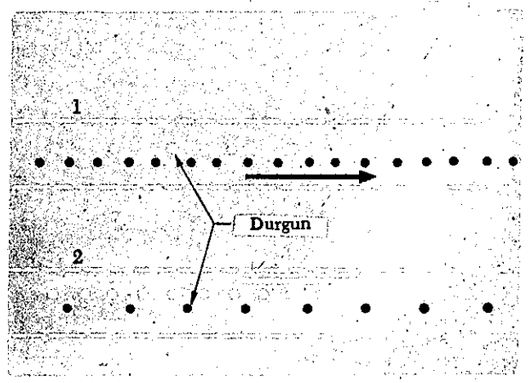
$$F_y = \frac{4q\lambda v v_0}{rc^2} \tag{44}$$

olduğu sonucuna varırız.

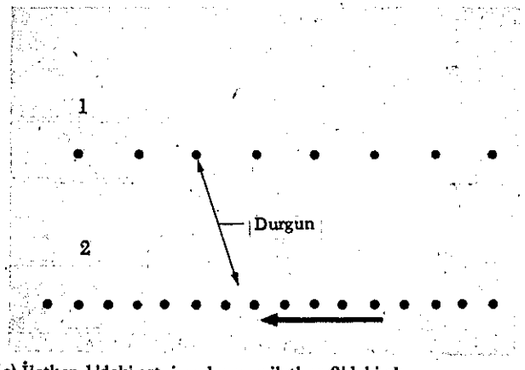
Şimdi Denk. 44'de bir çarpan halinde ayırabileceğimiz $2\lambda v_0$ niceliği "tel"deki elektrik akımının saniyede esb olarak yeğinliğinden başka bir şey değildir. Başka bir deyimle, λv_0 artı yüklerin sağa doğru taşınma çabuklüğudur. Yani, yük dizisinin verilen bir noktadan saniyede geçirdiği artı yük tutarıdır ve



Şek. 5.22. (a) "Lab" çatkısında, zıt yönlerde akım geçiren iki iletken. Akım aynı hızlarla devinen artı ve eksi iyonlardan ileri gelmiştir.



(b) İletken 1'deki eksi iyonlar ile iletken 2'deki artı iyonların devinimde bulundukları çatkı.



(c) İletken 1'deki artı iyonların ve iletken 2'deki eksi iyonların devinimsiz bulundukları çatkı.

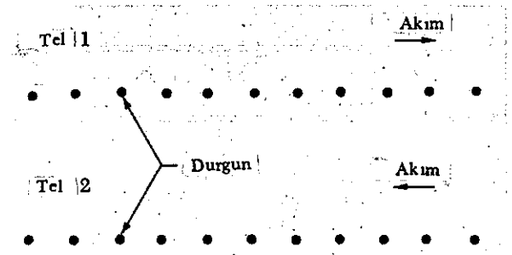
eksi yüklerin sola doğru taşınmaları akıma eşit katkıda bulunur. Bu akımı I ile gösterirsek devinimli yüklere etkiyen kuvvetin büyüklüğü,

$$F = \frac{2qvI}{rc^2} \tag{45}$$

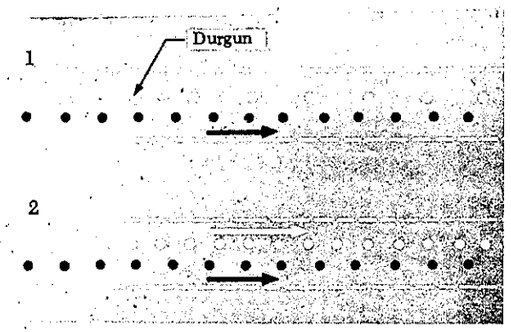
ile verilir.

Devinimdeki sınama yüküne etkiyen kuvvetin, teldeki yük taşıyıcılarının yoğunluğuna ya da hızlarına ayrı ayrı bağlı olmayıp, bunların net yük taşınmasını belirleyen λv_0 çarpanına bağlı oluşu çok ilginç bir olgudur. Eğer 10^7 esb/s'lik yani 3,3 miliampere'lik bir akım söz konusu ise, bu akımın, ışık hızının yüzde 99'unu bulan bir hızla uçan, elektronlardan, ya da bir metal içinde bir doğrultuda zayıf bir hızla sürüklenen elektronlardan ya da, bir çözelti içinde zıt yönlerde giden artı ve eksi iyonlardan oluşmuş bulunmasının bu kuvvet bakımından bir önemi yoktur. Bundan başka, sınama yüküne etkiyen kuvvet bu yükün hızı ile kesinkes oranlıdır. Yazımı türetişimiz neteldeki yük taşıyıcıları için ne de sınama yükü için de küçük hızlar haline sınırlanmış değildir. Denklem 45 hiç kısıtlamasız doğrudur.

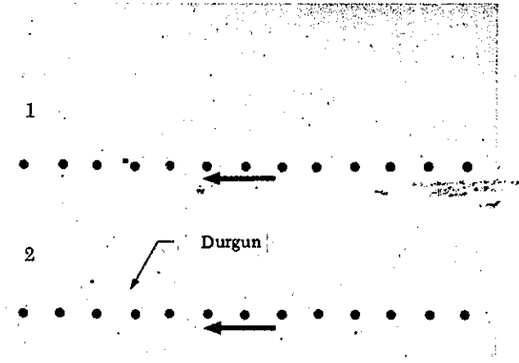
Şimdi bu bölümün başında Şek. 5.1 *b*'de görüldüğü gibi zıt yönde akım geçiren iletkenler arasındaki itişmeyi buna göre nasıl açıklayacağımızı görelim. Önce her iletkende zıt yönlerde, aynı hızla devinen eşit sayıda artı ve eksi yük taşıyıcıları bulunduğunu düşünelim. "Lab" çatkısında Şek. 5.22 *a*'ya benzer bir durum karşısında bulunuyoruz demektir. İletken 1'deki eksi yüklerle iletken 2'deki artı yüklerin devinimsiz kaldıkları ortak çatkıya taşınacak olursak Şek. 5.22 *b*'de görülen dizge oluşur. Bu çatkı içinde iletken 1'in her birim boyunda bir artı yük fazlalığı vardır; dolayısıyla bunlar iletken 2'nin artı yüklerini iterler. Benzerince, iletken 1'deki eksi yükler iletken 2'deki eksi yük fazlalığınca itilir. Geriye kalan iletken 1'deki artı ve 2'deki eksi yüklere etkiyen kuvveti bulmak için Şek. 5.22 *c*'de görüldüğü gibi bunların devinimsiz bulundukları konumluk çatkısına geçeriz. Burada iletken 2 bir artı yük fazlalığı ile göründüğü için 1'deki artı yükler bir itmeye uğrayacaklardır. Benzerince 2'deki eksilerde



Şek. 5.23. (a) "Lab" çatkısı içinde zıt yönlerde akım geçiren iki tel hali. Metal tel halinde olduğu gibi akım yalnız eksi iyonların (elektronların) devinimiden ileri gelmektedir.



(b) Tel 1'deki elektronların durgun çatkısı. Unutmayın ki, tel 2'de bulunan artı iyonlar sıkışmıştır, ama elektron dağılımı daha da fazla sıkışmıştır.



(c) Tel 2'deki elektronların durgun çatkısı. (b) Halinde olduğu gibi öteki tel, durgun halde bulunan bu elektronlara eksi yüklenmiş gibi görünür.

itileceklerdir. Böylece her yük taşıyıcısı, kendi devinimsiz çatkısında, öteki iletkende bulunan yük taşıyıcıların net itmesine uğrayacaktır. Kuvvetin lab çatkısındaki yeğinliğini doğru olarak bulmak için, Denk. 43'den Denk. 44'e geçerken olduğu gibi, gerisin geri dönüştürme gerekir. Ama bu, kuvvetin imini değiştiremez. O halde laboratuvar çatkısında her iletkenin ötekince itildiğini gözlemek durumundayız.

Anlattığımız taslam bir elekrolit halinde ya da iyonlanmış bir gaz halinde olduğu gibi, iki tip yük taşıyıcıları genel olarak ayrı hızlarla devinseler de uygun düşebilir. Oysa bir metalde, artı yükler kristal örgüsüne bağlı kalarak sabit dururlar yalnız eksi yük taşıyıcıları (elektronlar) devinirler. Zıt yönlerde akım geçiren böyle iki tel Şek. 5.23 a'da lab çatkısında görülmektedir. Teller ılın olduklarından laboratuvar çatkısında durgun halde bulunan artı iyonlara öteki telden bir kuvvet etkimez. Şek. 5.23 *b*'de olduğu gibi bir elektron dizisinin durgun halde bulunduğu bir çatkıya geçecek olursak, öteki teldeki elektron üleşiminin artı iyon üleşiminden daha büyük bir Lorentz büzülmesine uğradığını görürüz. Buna benzer bir durum Şek. 5.23 *c*'de bulunmaktadır. Böylece bu taslam da zıt yönlü koşut akımlar arasında bir itişme olduğunu öngörür. Bu akımlar arasındaki kuvvet etkileşmesinin yalnız akan akımın tutarına bağlı olduğunu ve yüklerin nasıl taşındığına bağlı olmadığını bildiren daha önceki bir deyimi nitel olarak doğrular. (problem 5.15 bu deyimin genel bir tanıtının ana çizgilerini verir.)

Bu bölümde yük değişmezliğinin, elektrik akımları arasında kuvvet etkileşimini nasıl gerektirdiğini gördük. Bu bizi bir olguya, ayrı bir olgunun nedeni gözü ile bakmak zorunluğunda bırakmaz. Bunlar yalnız, aralarındaki bağımlılığa dayanarak daha genel bir yasaya varışın güzel bir örneğini veren elektromıknatıslığın iki görünüşünden başka bir şey değildir: Fizik, bütün eylemsizlik gözlem çatkılarında aynıdır.

Devinimi her yük dizgesini çeşitli konumluk çatkıları arasında bir ileri bir geri dönüştürerek çözüm-

lemek zorunda kalsaydık çalışmamız hem güç hem çok karışık olurdu. Bunun daha iyi bir yolu vardır. Bir akımın ayrı bir akım üzerine tam etkisi, ya da bir akımın bir devinimli yüke etkisi yeni bir alan, *mıknatısal alan* kavramını işe karıştırmakla tam ve kısa olarak anlatılabilir.

Problemler

5.1. Bir sığa dörtgen biçimli koşut iki yapraktan oluşmuştur ve bunların aralıkları düşey doğrultuda 2 cm'dir. Yaprakların doğu-batı boyutu 20 cm, kuzey-güney boyutu ise 10 cm'dir. Sığaç 300 volt'luk (1 statvolt) bir bataryaya bağlanıp ayrılarak yüklenmiştir. Eksi yaprakta bulunan fazla elektronların sayısı ne kadardır? Yapraklar arasındaki elektrik alan yeğinliği ne tutar . Şimdi, laboratuvara göre devinimsiz varsayılan sığaç yapraklarına göre doğuya doğru 0,6 c hızı ile devinen bir gözlem çatkısı düşünelim ve aşağıdaki niceliklerin bu çatkı içindeki değerlerinin ne olduğunu bulalım: Sığacın üç boyutu; eksi yaprak üzerindeki fazla elektron sayısı, yapraklar arasındaki elektrik alan yeğinliği, Aynı soruları yukarıya doğru 0,6 c hızla devinen bir gözlem çatkısı için yanıtlandırınız.

5.2 Devinen bir yükün alan çizgileri biçimlenimindeki göreli "yassılaşma"nın kaba bir ölçüsü olarak, toplam akının yarısını içine alan, tepe tepeye iki koni yüzeyi arasındaki α açısını kullanabiliriz. Bu demektir ki, bir küreden geçen akının yarısı, $\theta' = \pi/2 + \alpha/2$ ve $\theta' = \pi/2 - \alpha/2$ açıları arasında bulunan ekvatör bölgesi içine sıkıştırılmıştır. yalnız $\gamma \gg 1$ göreli sınır hali ele alınız. O zaman $|\epsilon| \ll 1$ olmak üzere, yalnız $\theta = \pi/2$ koşulunu yerine getiren θ' açıları ele alınabilir. Öyleyse önce Denk. 12'nin yerine,

$$E' = \frac{Q}{(r')^2} \frac{\gamma}{(1 + \gamma^2\epsilon^2)^{3/2}}$$

yaklaşık yazımının alınabileceğini gösteriniz. Şimdi ϵ 'yi $-\alpha/2$ den $+\alpha/2$ 'ye kadar değiştirerek tümlevi hesaplayınız ve böylece ince ekvatör kemerinden geçen akıyı bulunuz.

Yanıt: $\alpha = 2/(\sqrt{3}\gamma)$

5.3 30-Bev'lik bir proton bir hidrojen atomunun 10^{-7} cm ötesinden geçmektedir. Atomun uğradığı elektrik alanı itmesinin yaklaşık süresini ve elektrik alanının tepe değerini bulunuz. Aynı hesaplamayı 30 Bev'lik bir elektron aynı uzaklıktan geçtiğine göre yapınız. Bu parçacıkların durgun kütleleri olarak proton için 1 Bev, ve elektron için 0,5 Mev yaklaşık değerlerini kullanınız.

5.4 y doğrultusunda geniş, biteviye bir alan yatağı içine 0,8 c hızı ile x doğrultusunda giren bir yüklü parçacığın yörüngesini ele alınız. Parçacığın x doğrultusundaki hızının *azalması* gerektiğini gösteriniz. Momentumun x bileşeni üzerinde ne söylenebilir?

5.5 Yüksek gerilimli bir katot ışınları ossiloskobunun saptırma plakaları, uzunluğu 4 cm, eni 1,5 cm ve aralığı 0,8 cm olan dörtgen şeklinde iki yapraktır. Yapraklar arasında 6000 volt'luk bir gerilim farkı bulunmaktadır. 250 kilovoltluk gerilim farkı ile hızlandırılmış bir elektron demeti bu saptırıcı yapraklar arasına soldan aralığın tam ortasından girerek ilerlemektedir. Bir elektronun, saptırıcı yaprakların öteki ucundan çıkarken yerinin ve devinim doğrultusunun ne olduğunu bulmak istiyoruz. Yaprakların kıyı bölgesinde alan çizgilerinin bozulmasını önemsemiyoruz ve bir baştan ötekine biteviye bir alan bulunduğunu varsayıyoruz. Elektronun durgun kütlesi 500 kev alınabilir. Aşağıdaki soruları yanıtlarken yapacağınız çözümlemeyi "lab" çatkısı içinde yürütünüz: γ =? ; β = ? mc birimleri cinsinden p_x = ? yapraklar arasında geçen zaman = ? (Prob. 5.4'de tartışılan yatay hız değişimi savsanacak.); mc birimleri ile ı kazanılan enine momentum bileşeni = ? çıkıştaki enine hız = ? çıkıştaki düşey konum = ? çıkıştaki uçuş doğrultusu = ? Şimdi bütün bu olayları elektronla devinen bir eylemsizlik çatkısı içinde nasıl görüldüğünü anlatınız: Yapraklar nasıl gözükeceklerdir? Yapraklar arasındaki alan nasıldır? Bu çatkısında elektrona ne olabilir? Bu ödevde sizin için başlıca görev, iki anlatımın tümcek bağdaşır halde olduğunu görmenizdir.

5.6 Şek. 5.16 ile 5.17'nin üstüste gelmesi ile ne olacağını anlatınız. Geçiş bölgesindeki alanlar birbirlerini kuvvetlendirir mi, yoksa söndürür mü? Bunun üstüste gelme ilkesinin, gerektirdiği yük devinimlerinin yapısına bağlı olarak açıklayabilirmisiniz?

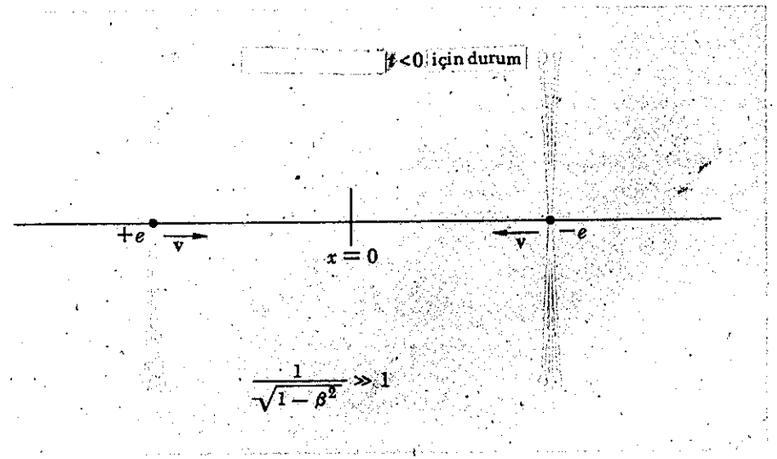
5.7 Bir q yükü konumluk eksenleri başına doğru x ekseni boyunca v hızı ile yaklaşmaktadır. Yük başlangıç noktasına ulaşmakta ve $t = 0$ anında bir an durarak sanki esnek olarak geriye yansımış gibi tersine gitmektedir, şöyle ki, parçacık bu kez artı x ekseni doğrultusunda aynı hızla uzaklaşmaktadır. Parçacık yansıdıktan biraz sonra ki, alanı çizitle gösteriniz.

5.8 Alttaki şekil iyice göreli artı bir parçacığın başlangıç noktasına doğru soldan geldiğini ve eksi bir parçacığın da aynı hızla sağdan geldiğini gösteriyor. Parçacıklar başlangıç noktasında $t = 0$, anında çarpışmaktadırlar, bunların devimsel enerjilerini alacak bir çare düşünün ki, başlangıç noktasında ılın varlıklar halinde kalabilsinler. $t > 0$ gibi bir anda elektrik alanı nasıl görülebilir? Alan çizgilerini çiziniz. Zaman geçtikçe alan nasıl değişir?

5.9 Yükü q_1 olan 1 no'lu parçacık durgun idi. Yükü q_2 olan 2 nolu parçacık birinciye doğru v hızı ile devinime geçti ve ona en çok b kadar sokularak geçip gitti. Birinci parçacığın kütlesi o denli büyük sayılmaktadır ki, geçiş süresi içinde Coulomb kuvveti etkisi ile uğrayacağı yer değiştirme önemsenmeyecek kadar küçüktür. İkinci parçacığın kütlesi ise o büyüklüktedir ki, doğrusal olan yörüngesinin bükülmesi ya da hızının değişmesi savsanacak kadar küçük olsun. Bu yakın karşılaşma sonucu parçanın kazandığı enine devinim ne tutar? (Burada enine sözü ile 2 nolu parçacığın devinim doğrultusuna dik doğrultuyu anlıyoruz.) Bu soruyu önce 2 nolu parçacık için, parçacık 1'e göre devinimsiz bir çatkı içinde çalışarak yanıtlandırınız. Bir silindire uygulanan Gauss yasası bir tümlev almayı gereksiz kılacaktır. Yazımınız görelice tam mıdır? Şimdi 1 nolu parçacığın kazandığı devinirliği ele alınız. Buna etkiyen alan Denk. 12 ile verilen yüklü parçacığın deviniminin alanıdır. Uygun tümlemekle enine devinirlik hesaplanabilir. Bununla birlikte, bunun yerine Gauss yasası kullanmakta haklı olabilirsiniz ya da ilk elde ettiğiniz sonuç üzerinde tartışarak doğrudan yanıtlandırabilirsiniz. Açıklayınız.

Yanıt: (*heriki parça için)* $;2q_1q_2/vb$.

5.10 Kesim 5.9'da yüklerin değişmezliği ile yük korunumu arasındaki ayrım belirtilmiş ve korunumun değişmezliği gerektirmediği konusunda uyarılmıştınız. Bununla birlikte, Gauss yasasının, görelik ile birlikte, bir gözlem çatkısı içinde herhangi bir yüzey için doğru oluşu yük korunumunu ***gerektirmez***. Bu soruyu gerçek olmayan aşağıdaki durum için tartışarak gösteriniz: Konumlukları başlangıcında $t = 0$ anında birden bir artı yük yaratılmıştır. Daha sonraki bir $t = t_1$ anında, gözlemciler, E_r'nin değişik yarıçaplı yüzeyler üzerindeki yüzey tümlevini hesaplıyorlar. Buradan yola çıkarak devam ediniz.



* Devinirlik: Momentum.

Bölüm 6

Mıknatısal Alan

6.1	Mıknatısal Alanın Tanımı	152
6.2	Mıknatısal Alanın Bazı Özellikleri	156
6.3	Yöngü Gerilimi	161
6.4	Akım Geçiren Bir Telin Mıknatısal Alanı	164
6.5	Halkaların ve Kangalların Alanları	166
6.6	Bir Akım Katmanında B'nin Değişimi	171
6.7	Alanlar Nasıl Dönüşür	173
6.8	Rowland Deneyi	179
6.9	Bir Mıknatısal Alanda Elektrik İletimi Hall Olayı	180
	Problemler	182

6.1 Mıknatısal Alanın Tanımı

Bir yük akımına koşut devinen bir yük kendi hızına dik bir kuvvet etkisinde kalır. Bu olgu geçen bölümde Şek. 5.20'de incelediğimiz durumun çözümlemesinden ortaya çıktı. Aynı şeyi Şek. 5.3'de bir elektron demetinin, yanına tutulan bir akım etkisi ile sapması halinde de gördük. Sınama yükümüzü daha başka doğrultularda devindirirsek ne olacağını henüz göstermiş değiliz. Bununla birlikte bu davranış akım geçiren bir telin çevresinde bir mıknatısal alan oluşturma ve bu mıknatısal alan içinde devinen bir yüke bir kuvvet etkidiğini söylemekle anlatılabilir. Nasıl ki $\mathbf{E}$ elektriksel alan yöngüsünü devinimsiz bir sınama yüküne etkiyen kuvvet olarak tanımladıksa, bu kez de, devinen bir sınama yüküne etkiyen kuvvetin, hızla oranlı kısmı yardımı ile *başka bir* alan tanımlayabiliriz. Daha kesinlikle belirtmek için, belirli bir konumluk çatkısı içinde, herhangi bir konumda ve herhangi bir anda yapılan deneyler, düzgün v hızıyla devinen bir q yüküne etkiyen kuvvetin,

$$\boxed{\mathbf{F} = q\mathbf{E} + \frac{q}{c}\mathbf{v} \times \mathbf{B}} \qquad (1)$$

ile verildiğini göstermiştir deriz; burada $\mathbf{E}$ ve $\mathbf{B}$, v'ye ve q'ye bağlı olmayan yöngülerdir. Bu dediğimiz ayakta duruyorsa, yazımdaki $\mathbf{E}$'yi o konumdaki elektriksel alan $\mathbf{B}$'yi de, o konumdaki mıknatısal alan olarak *tanımlıyoruz.*

Bu tanımı tam yerinde bulmak için, deney yolu ile ya da başka bir yoldan giderek böyle bir bağıntıyı her zaman bulabileceğimizi göstermek gerekir. Biz bu çalışmayı henüz tamamlayabilmiş değiliz; ama bunun bazı önemli ve öğretici özel hallerde doğru olduğunu, gösterdik. Kesim 5.8'de bütün öteki yükler durgun ise, sınama yüküne etkiyen kuvvetin, hızına *hiç* bağlı olmadığı tanıtlanmıştı. Bu halde, her yerde $\mathbf{B} = 0$ almak üzere Denk. 1 doğrudur. Yukarıdan beri yaptığımız tartışma, "tel" içindeki yüklü parçacık akımına koşut devinen bir yüklü parçacığın kendi hızı ile oranlı ve bu hıza dik bir kuvvet etkisinde kaldığını gösterir; Denk. 1'de görülen çapraz çarpım da bunu anlatır. Gerçekten bulgularımızla ve dizgenin bakışımı ile bağdaşabilen bir $\mathbf{B}$ mıknatısal alan yöngüsünün ne olabileceğini tam olarak söyleyebiliriz. Bu, şekil düzlemine dik, yani, hem tele hem de sınama yükünün v hızına dik bir yöngü olmalıdır. Denk. 5.45'i, Denk. 1 ile bağdaşık tutabilmek için $\mathbf{B}$'nin büyüklüğü:

$$B = \frac{2I}{rc} \qquad (2)$$

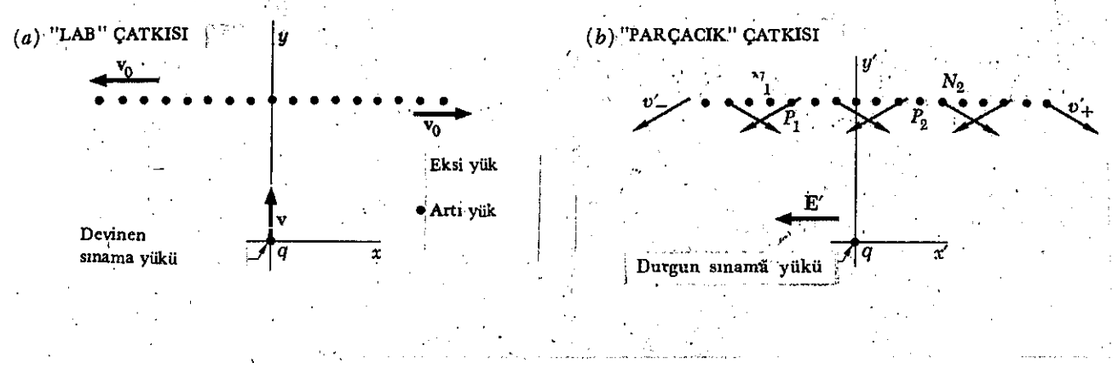
olmalıdır.

Bir doğru akımın mıknatısal alanını, devinen bir yüklü parçacığın yalnız *elektriksel* alanını çözümleyerek türettik. Bu türetişimiz tam değildir; ama eksikliği de temel düşünce ile ilgili değildir. Eğer biz bir sınama yükünü iletkenden dışa doğru veya iletkene doğru ışınsal doğrultuda devindirirsek, aynı büyüklükte ve uygun doğrultuda, yine hıza bağlı bir kuvvet oluştuğunu göstermek zorundayız. Bu işin matematiksel ayrıntıları epey güç de olsa bu hesap yapılabilir. Burada ilgi çekici nokta, konumluklar (koordinatlar) dönüşümünün matematiği değil, böyle bir kuvvetin varlığının nedenidir. Bunu da hiç hesap yapmadan ortaya koyabiliriz.

Şek. 6.1 *a*'da tele doğru devinen sınama parçacık ile "lab" çatkısını çizdik. "Sınama yükünün durgun kaldığı parçacık" çatkısı içinde (Şek. 6.1*b*) artı ve eksi yükler dizisinin sınama yüküne doğru ilerlediklerini görürüz; daha belirlicesi, artı yükler sağ aşağı, eksi yükler ise sol aşağı doğru eğik olarak ilerlerler. Bu çatkı içinde sola yönelik bir $\mathbf{E}'$ elektrik alanı bulmayı umuyoruz. Bununla birlikte herşey bakışımlı gözükmektedir; böyle bir alan nasıl oluşabilir?

Parçacık çatkısında, artı yüklerden P_1 gibi birini ve bunun bakışımı P_2 yükünü dikkate alalım. (Bütün artı yüklerin katkılarını toplamak gerekirse, bu artı yükleri öyle bakışımlı çiftler halinde öbekleyebiliriz ki, bunlardan biri çizgi yükün sol yarısında ötekisi sırası ise sağ yarısında bulunsun.) Bu iki bakı-

* Nasıl ilk haldeki kuvvet yukardan bakıldığı zaman hız yöngüsüne dik ve sola yönelmiş idi ise, burada laboratuvar çatkısında bulunan bir gözlemciye göre sınama yükünün hızına dik bir kuvvet arıyoruz



Şek. 6.1. (a) "Lab" çatkısında bulunan bir sınama yükü, yük çizgisine dik olarak deviniyor. (b) "Parçacık" çatkısında, yük çizgisi sınama yüküne doğru ilerliyor.

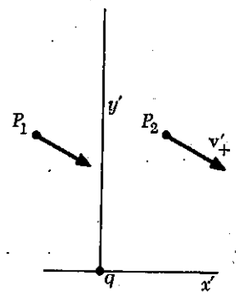
şımlı yükün elektrik alanları Şek. 6.2a'da gösterilmiştir. Bunların q'de eşit etkiler oluşturmayışlarının nedeni şimdi açıktır. Denk. 5.12'de anlatılan alanın görelice $[1-\beta^2\sin^2\theta']^{-3/2}$ katsayısı kadar büzülmesi, q'nün bulunduğu yerde P_2'nin oluşturduğu alanın P_1'inkinden daha yeğin olmasına yol açar. Eğer alanlar küresel bakışımlı olsalardı, x' bileşenleri ile birbirlerini tam olarak karşılayabileceklerdi. Oysa bu halde, P_2 kazanmakta ve sola doğru bir x' bileşeni kalmaktadır.

Şimdi Şek. 6.2b'de görüldüğü gibi N_1 ve N_2 gibi bakışımlı konumlarda eksi iki yük ele alalım. Bu kez q'nün bulunduğu yerde N_1 daha yeğin bir alan oluşturur ve dolayısı ile yine eksi x' doğrultusunda bir elektrik alanı bileşeni kalır. Öte yandan, artı ve eksi yüklerin y' bileşenleri açıkca görüldüğü gibi birbirlerini yok ederler. Böylece bize bir $\mathbf{E}'$ alanı kalır ve q yüküne tele koşut eksi x' doğrultusunda yönelmiş bir kuvvet etki

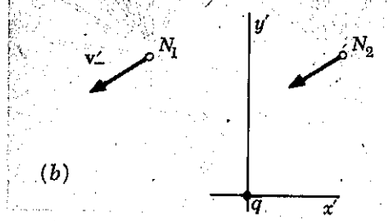
Devinimli yükler arasındaki mıknatısal etkileşimin tam bir göresel etki olduğunu artık açıkca görüyoruz. Bu aslında Denk. 5.44'de görülen v_0v/c^2 katsayısından belli idi. Devinimli yükler dünyasında c sonsuz olursa mıknatısal etki silinecektir. Ama, mıknatısal kuvvetlerin, bir motorun döngenini döndürecek ya da bir ağırlık kaldırabilecek kadar büyük olması tuhaf gelir. Daha önce, büyük cisimler arasındaki durgunyük kuvvetlerin pek de büyük olmadığına ilginiz çekilmişti. Mıknatısal kuvvetler neden daha da zayıf değildirler? Bunun açıklanması, tıkız maddenin elektrikçe hemen hemen ılın oluşudur. Bundan sonra anlatacağımız bu bakımdan iyi bir örnektir Kılgın bir halde, akım geçiren koşut iki tel arasında nasıl bir kuvvet beklememiz gerektiğini hesaplayacağız.

Bu örnek, madde içindeki mıknatısal alanı ilk kez işe karıştırdığı için, tartışmamıza biraz ara vererek bu nokta üzerinde duralım. Demir dışında, bakırın da içinde bulunduğu çoğu metaller, ve genel olarak maddelerin çoğunun, mıknatısal alana etkileri yoktur. Yani bakır içindeki $\mathbf{B}$ alanının değeri, aynı akım için, boşlukta oluşan alan ile kılgınca (pratikçe) ayni sayılabilir. Bu sorunu Böl. 10'da ayrıntıları ile inceleyeceğiz. O zamana kadar demir kullanmamaya bakacağız.

Şimdi 1 mm çaplı iki bakır tel 5 cm aralıkla koşut dursunlar (Şek. 6.3). Her iki telden de akım geçmektedir; iletim elektronlarının her teldeki orta-



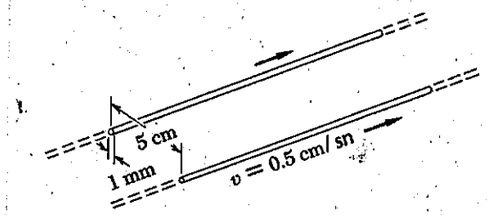
(a)



(b)

Şek. 6.2 Şek. 6.1b'deki parçacık çatkısında kuvvetin nasıl oluştuğunun gösterilmesi. Burada elektrik alanları (a) bakışık konumlu artı yükler. (b) bakışık konumlu eksi yükler hali.

lama hızları 0,5 cm/s olsun. Bu ortalama sürüklenme hızının elektronların ısıl kaynaşma hızına bakınca çok düşük olduğunu biliyoruz. İletkenin her bakır atomu için bir iletim elektronu bulunduğunu, 1 mm çapında ve 1 cm uzunluğundaki iletken içinde kaç iletim elektronu bulunduğunu kolayca bulabiliriz. (Bu sayı yaklaşık olarak 6×10^{20} 'dir. Bu hesabı yapabilmek için bakırın 8 g/cm^3 olan özkütlesini, 64 olan atom kütlesini ve Avagadro sayısını bilmek gerekir. Buna göre devinen eksi yüklerin λ çizgisel yük



Şek. 6.3. İletim elektronlarının 0,5 cm/s'lik ortalama sürüklenme hızı ile devindikleri düşünülen iki tel.

yoğunluğu

$$\lambda = (6 \times 10^{20}) \times (4{,}8 \times 10^{-10}) \approx 3 \times 10^{11} \text{ esb/cm} \qquad (3)$$

olur. Artı yükler durgundur. Bu λ çizgisel yoğunluğu ile sürüklenme hızının çarpımı $(3 \times 10^{11}) \times (0{,}5) = 1{,}5 \times 10^{11}$ esb/s eder ki, bu yaklaşık olarak 50 ampere'lik bir akım demektir. Şimdi $r = 5$ cm ötedeki telin bir elektronuna etkiyen kuvveti bulalım. Öteki telden de aynı yeğin bir akım geçmekte ise, bu elektron da ortalama aynı 0,5 cm/s hızıyla devinir. Denk. 5.45'i uygulayarak,

$$F = \frac{2q\lambda v v_0}{rc^2} =$$

$$\frac{2(4{,}8 \times 10^{-10} \text{ sn})(3 \times 10^{11} \text{ sn/cm})(0{,}5 \text{ cm/ sn})^2}{(5 \text{ cm})(3 \times 10^{10} \text{ cm/ sn})^2}$$

$$\approx 1{,}6 \times 10^{-20} \text{ din} \qquad (4)$$

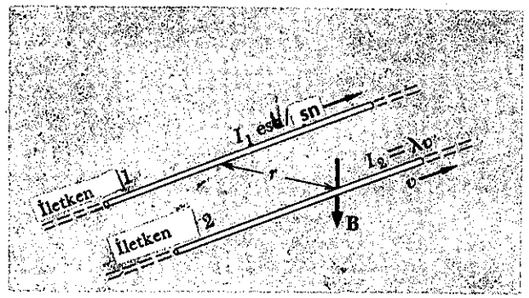
bulunur. Öteki telin her iletim elektronu böyle bir kuvvet etkisinde kaldığına göre, telin 1 cm'sinde bulunan elektronların tümüne etkiyen kuvvet $(6 \times 10^{20}) \times (1{,}6 \times 10^{-20})$ya da yaklaşıkça 10 din/cm olur. Bu

kuvveti telin kendisini etkileyen bir kuvvet olarak gözlüyoruz; zira elektronlar aldıkları devinirliği (momentumu) içinde bulundukları kristal örgüsüne aktarırlar. Kuvvetin yönüne gelince, Şek. 5.20'deki durumu çözümlediğimiz zaman gördüğümüz gibi, aynı imli yükler koşut, ayni yönlü devindikleri takdirde, mıknatısal etkileşimi bir çekim kuvveti ile kendini gösterir. O halde bakır tellerimiz, birbirlerini cm başına 10 dinlik bir kuvvetle çekeceklerdir. Bu dediğimiz bakır yerine herhangi iki iletken için de doğrudur, yeter ki koşullar bir olsun, yani aynı aralıkla dursunlar ve 50 ampere akım geçirsinler.

Bu 10 dın çok büyük bir kuvvet değil; ama kolayca ölçülebilecek kadar da büyüktür. Bu kuvveti, net 3×10^{11} esb/cm ile yüklü iki iletken tel arasındaki durgun elektriksel kuvvetle karşılaştıralım. Çizgisel yoğunluğu λ olan bir çizgisel yükün elektrik alanı $2\lambda/r$ olduğuna (Denk. 1.26) göre, r cm uzakta bulunan benzer bir çizgisel yükün cm'sine etkiyen kuvvetin değeri $2\lambda^2/r$ olmalıdır. Teldeki elektronların çizgisel yoğunluğu için aldığımız 3×10^{11} esb/cm değerini yazımda yerine koyarak, mıknatısal etkileşimde bulduğumuz 10 din/cm'lik kuvvetin $(c/v)^2$ katı tutar yani 36×10^{21} din/cm veya kabaca 4×10^{13} ton/cm gibi bir kuvvet buluruz! Eğer doğa, durgun elektrik etkileşimi hiçe indirircesine biribirini ılınlayan iki imli yükler oluşturmamış olsa idi, mıknatısal olaylar hiç hesaba gelmeyecek kadar zayıf kalırdı. Zaten yalnız bir imli yüklerden oluşmuş bir evren, usumuz almayacak ölçüde değişik olurdu.

Gerçekten, temel parçacıklar arasında, Coulomb kuvvetlerinin etkisinin tam olarak göründüğü atomsal bölgede, mıknatısal etkiler, elektriksel etki yanında ikinci derecede bir yer tutmaktadırlar. Genel olarak bunlar, beklememiz gereken bir katsayı kadar, yani parçacık hızının ışık hızına oranının karesinin verdiği katsayı zayıftırlar.

Koşut akımlar arasındaki mıknatısal etkileşim akımların çarpımına bağlı ama yük yoğunluklarına ve hızlara bağlı değildir. Yukarıki örnekte yük yoğunluğunu ve hızları işe karıştırmamız durgun elektrik ve mıknatısal etkileşimleri karşılaştırabilmek



Şek. 6.4.İletken 1, iletken 2'nin bulunduğu yerde bir B mıknatısal alanı uyarır.

içindi. Bu bakımdan, her teldeki akımlar ile ilgileniyoruz; yani yük taşınmasının yavaş devinen birçok yük ile mi, yoksa hızlı devinen az sayıda yük ile mi sağlandığı önemli değildir. Şek. 6.4'deki iletken 1'den I_1 esb/s'lik akım geçtiğini düşünelim. Bundan r uzaklıkta bulunan iletken 2 içinde, v_2 hızı ile devinen λ esb/cm'lik yük bulunsun. İletken 2'nin birim boyuna etkiyen kuvvetin $2 I_1 \lambda v_2/rc^2$ olduğunu ve bunun:

$$\text{Santimetre başına kuvvet} = \frac{2I_1 I_2}{rc^2} \qquad (5)$$

demek olduğunu biliyoruz; zira λv_2 ikinci iletkendeki I_2 akımıdır.

Bir iletkenin **B** mıknatısal alanı içinde bulunan ve sürekli bir I akımı taşıyan ikinci bir iletkenin cm'sine etkiyen kuvvetin tutarı, **B** mıknatısal alanı cinsinden IB/c'dir. İletkene ve mıknatısal alana dik olan bu kuvveti yöngüsel (vektörel) olarak şöyle yazabiliriz:

$$\boxed{d\mathbf{F} = \frac{I}{c}\, d\mathbf{l} \times \mathbf{B}} \qquad (6)$$

Denk. 6'daki $d\mathbf{F}$, I esb/s yeğinlikli, sürekli bir akım geçiren bir iletkenin $d\mathbf{l}$ gibi küçük bir parçasına etkiyen kuvvettir. Yazımdaki $d\mathbf{l}$ artı akım doğrultusunda yönelmiştir. Denk. 6 bu bölümün ba-

şında verdiğimiz Denk. 1'e dayalı **B** tanımından ve yük taşınma hızı (yani birim zamanda taşınan yük) demek olan akımın tanımından gelmektedir. Yazım iletim yolu ne olursa olsun doğrudur; yalnız bütün bu yol boyunca **B** mıknatısal alan yöngüsünün değerini bilmeliyiz. Denk. 6'yı, **v** hızı ile devinen bir dq yük öğesine etkiyen kuvvetin $d\mathbf{F} = dq(\mathbf{v}/c) \times \mathbf{B}$ olduğunu anımsayarak elde edebilirsiniz. Buna göre

$\mathbf{v} = d\mathbf{l}/dt$ ve $dq = I\,dt$ olur, ve bu da hemen

$$d\mathbf{F} = \frac{I\,dt}{c}\frac{d\mathbf{l}}{dt} \times \mathbf{B} = \frac{I\,d\mathbf{l}}{c} \times \mathbf{B} \qquad (7)$$

biçimine girer.

Buraya kadar I'yı esb/s olarak aldık. Kılgın akım yeğinliği birimi olan ampere 3×10^9esb/s'dir*. Düz bir iletkenden geçen akım ampere ile ölçülmüşse, bundan r cm uzaklıkta bulunan bir noktadaki mıknatısal alan

$$B\,(\text{gauss}) = \frac{2}{10}\frac{I\,(\text{amp})}{r\,(\text{cm})} \qquad (8)$$

olur. Buradaki 2/10 katsayısının 1/10 kısmı 3×10^9'un c'ye oranından gelmektedir. Benzerince, I ampere'lik akım geçiren bir iletken, B gauss'luk bir alan içinde bulununca etkilendiği kuvvet,

$$d\mathbf{F}\,(\text{ din }) = \frac{1}{10} I\,(\text{amp})\, d\mathbf{l} \times \mathbf{B}\,(\text{cm} \cdot \text{gauss}) \qquad (9)$$

olur.

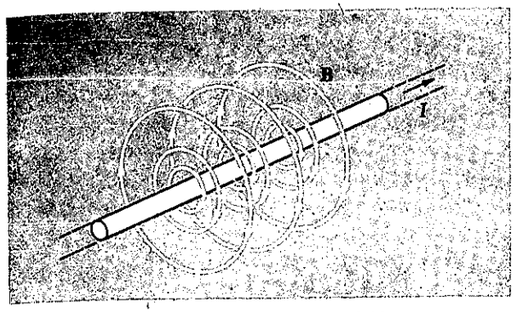
Kuvvetleri din uzaklıkları cm olarak aldığımız bu yazımların B için gerektirdiği birimin adı *gauss*'dır. Bu birimi hem fizikçiler hem de mühendisler uzun zamandır kullanmakta, ve başka birim dizgelerinin yarışımına karşın alan yeğinliğini ölçmede, en çok kullanılan en gözde birim olma niteliğini sürdürmektedir. Yer küresinin yüzeyine yakın yerlerdeki mıknatısal alan yeğinliği yarım gauss basamağındadır. Şek. 6.3'deki tellerden birinin bulunduğu yerde, öteki teldeki akımın oluşturduğu alan 2 gauss kadardır. Büyük bir elektromıknatısın kutupları arasındaki alan ise, binlerce gauss (kilogauss) tutar. Bir demir mıknatıs ile kolayca 10 ilâ 20 kilogauss yeğinlikli bir alan sağlamak ve firmalardan alınabilecek aşırı iletken bir mıknatıs ile de 60 ila 80 kilogauss'u bulmak olasıdır. Bunun ötesinde 10^5 gauss'ı aşan alanlar elde etmek için özel çaba harcamak gerekir. Güneşin yüzeyi üzerinde bazı bölgeler (güneş lekeleri) yüzlerce gauss'luk bir mıknatısal alan yeğinliği gösterdikleri gibi, bazı yıldızlarda 1 kilogauss'u aşan yüzey alanları ile tanınmışlardır. Genel olarak evrende geniş ölçekde mıknatısal alanlar, mutlak değerce oldukça zayıftır. Yenilikte yapılmış özel spektroskopi ölçüleri, bizim galaksimizde bulunan ufak bir yıldızlar arası bölgenin mıknatısal alanının 10^{-5} gauss yakınlarında olduğunu göstermiştir. Galaksiler ölçeğinde düşünülecek olursa, bu büyüklükteki bir mıknatısal alanı önemsememek olmaz. Gerçekten Galaksiler dinamiğinde mıknatısal alanlar çok temel ve bazen tümden başat bir rol oynar. Böylece insanoğlunun yüzyıllardan beri tanıyabildiği mıknatısal alanların büyüklük basamağında olan 1 gauss kabaca, kozmolojinin önemli mıknatısal alan değerleri ile laboratuvarlarda elde edilebilen en kuvvetli mıknatısal alanların geometrik ortalaması kadardır.

Son olarak şunu belirtelim ki, mıknatısal alan dediğimiz ve **B** diye tanımladığımız nicelik, bazı kitaplarda mıknatısal *irgitim (indüksiyon)* adını alır.

6.2 Mıknatısal Alanın Bazı Özellikleri

Mıknatısal alan, elektriksel alan halinde olduğu gibi, yüklü parçacıkların birbiri ile nasıl etkileştiklerini anlatmağa yarayan bir araçtır. Şimdi (4,5;3,2; 6,0) noktasında öğleyin saat 12:00'daki mıknatısal alan, yatay olarak eksi y doğrultusunda yönelmişti. ve değeri 5 gauss'tur dersek, bu uzay-zaman noktasında, devinen bir yükün gösterdiği ivmenin ne olduğunu anlatırız. İşin ilginç yanı şudur: Yalınca **B** gibi bir yöngüsel nicelik veren böyle bir deyimde söylemek

* Böl. 1'de böyle "3"lerin ışığın yayılma hızından geldiği konusunda uyarmıştık. Şimdi bunun nasıl olduğunu görüyoruz. Buradaki sayı tam 2,9979...olmalıdır.



Şek. 6.5. Akım geçiren bir düz telin çevresindeki mıknatısal alan çizgileri.

istediklerimizin tümü bulunur. Bu deyim yardımı ile, herhangi bir hızla devinen herhangi bir parçacığa etkiyen kuvvetin, hıza bağlı kesimini önceden belirtebiliriz. Artık alana kaynak olan öteki yüklerin devinimleri ile ilgili başka bilgi gereksizdir. Başka bir deyişle, devinen iki yük sistemi, belli bir noktada aynı **E** ve **B** alanları oluştururlarsa, bu noktadaki bir sınama yükünün her ikidizgesi, için davranışı tam özdeş olacaktır. Parçacıkların etkileşimini incelerken alan kavramının bir araç olarak kullanışlı olmasının tek nedeni budur. Yine bu nedenledir ki, biz alanı bu anlamda bağımsız bir varlık olarak görürüz.

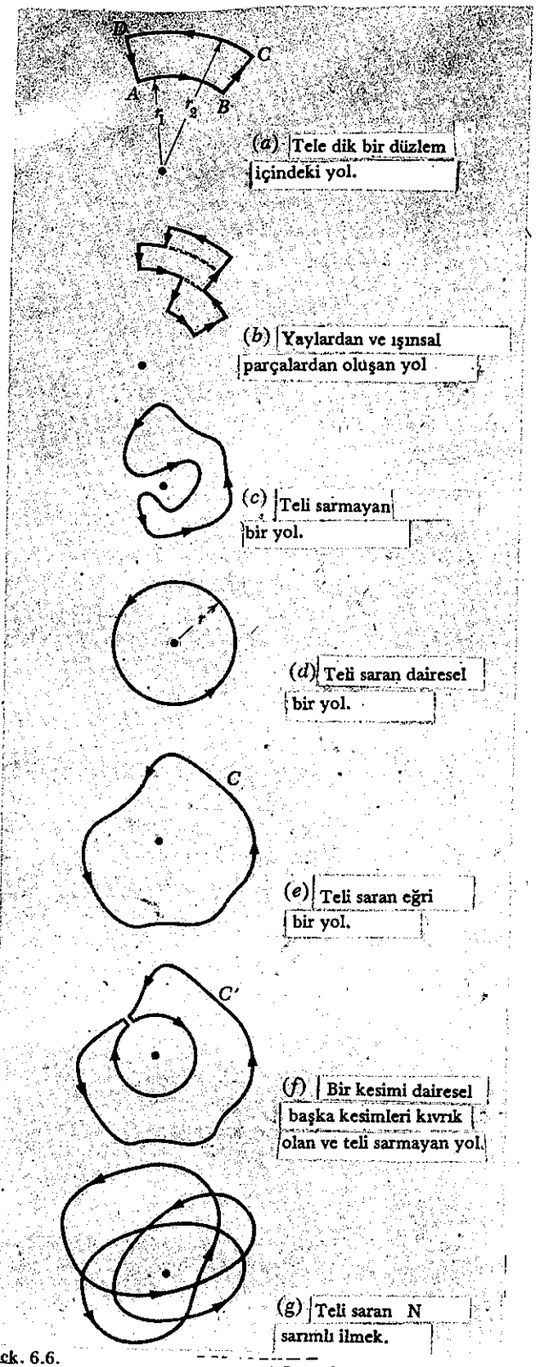
Acaba alan kavramı, etkileşimini incelediğimiz parçacıklardan daha gerçek ya da daha az gerçek midir? Bu derin bir sorudur ve uzun bir süre için bir yana bıraksak iyi ederiz. Elektriksel ve mıknatısal alanları canlı olarak, gerçek olarak görebilenler örneğin bu arada ikisini saymış olmak için Faraday ile Maxwell, bu kavram yardımı ile olayları daha derinden görmüşler anlamışlar ve büyük buluşlar yapmışlardır. Bu bakımdan alanı onların aldığınca somut düşünelim ve bunun bazı özelliklerini öğrenmeye çalışalım.

Buraya dek sadece doğru bir telden geçen sürekli akımın mıknatısal alanını incelediğ. Bulduğumuz mıknatısal alanın doğrultusu, her yerde, bu iletken ile alanı gözlediğimiz noktayı içine alan düzleme diktir. Alanın büyüklüğü $1/r$ ile oranlıdır. Alan çizgileri Şek. 6.5'de gösterildiği gibi teli saran daireler-dir. **B** yöngüsünün yönü, daha önce benimsediğimiz yöngül çarpım anlaşmasına uygun olarak Denk. 1'deki ikinci terimin $+(q/c)\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ biçiminde yazılması ile ve artı akıma koşut devinen artı yükün, bu akımlarca itilecek yerde çekildiğini gösteren fiziksel olgu ile belirlenir. Eğer **B**'nin doğrultusunu, kaynaklandığı akımın doğrultusuna Şek. 6.5'deki gibi bağlıyacak olursak, bunların tümü tutarlı olur. Artı akım yönünde baktığımızda **B** çizgileri saat iğneleri yönünden dolanır. Bunu anımsamak için isterseniz sağ vida kuralını kullanabilirsiniz.

Şimdi bu alan içinde bulunan kapalı bir yol boyunca **B**'nin çizgi tümlevini alalım. (Unutmayın ki, bir nokta yükün elektriksel alanı halinde yaptığımız benzer bir inceleme, bizi bütün duruk yük alanlarının bir temel özelliğine götürdü.) Şimdi ilk başta Şek. 6.6a'da görülen $ABCD$ yolunu alalım. Bu, tele dik bir düzlem içindedir, aslında bu düzlem içinde çalışmak yeter, çünkü **B**'nin tele koşut bileşeni yoktur. **B**'nin bu yol boyunca alınan çizgi tümlevi şu nedenle sıfırdır: Bu kapalı yolun BC ve DA kesimleri **B**'ye diktir ve çizgi tümlevine hiç bir katkıda bulunmazlar. Yolun AB kesimi boyunca **B**'nin değeri, CD boyunca olan değerinden r_2/r_1 oranında daha yeğindir; ama CD ile AB parçaları telden bakınca aynı açı içinde bulunan yaylar oldukları için, CD ötekinden ayni çarpan kadar daha uzundur. Böylece bu iki yay bütün tümleve eşit ve zıt yönde katkıda bulunduklarından toplam tümlev sıfır olur.

Bu dediklerimizin sonucu olarak, ışınsal parçalardan ve yaylardan Şek. 6.6b'de görüldüğü gibi kurulan herhangi bir yol boyunca da çizgi tümlevi sıfır olacaktır. Öyleyse kısa bir adım daha atarak teli sarmayan herhangi bir yol boyunca alınan çizgi tümlevinin sıfır olduğu sonucuna varabiliriz. Sivri köşeleri yumuşatmış olmak için üçgen biçimli küçük bir yol boyunca alınan tümlevin de sıfıra gittiğini göstermemiz gerekir. Aynı adımlar elektrik alanı halinde de işe karışmıştır.

Teli sarmayan bir yol Şek. 6.6c'deki gibidir Bunu, ipten yapılmış bir yol gibi yani çektiğimiz zaman özgür başarabilen bir ip parçası gibi



Şek. 6.6.

görebiliriz. Böyle herhangi bir yol boyunca da çizgi tümlevi sıfırdır.

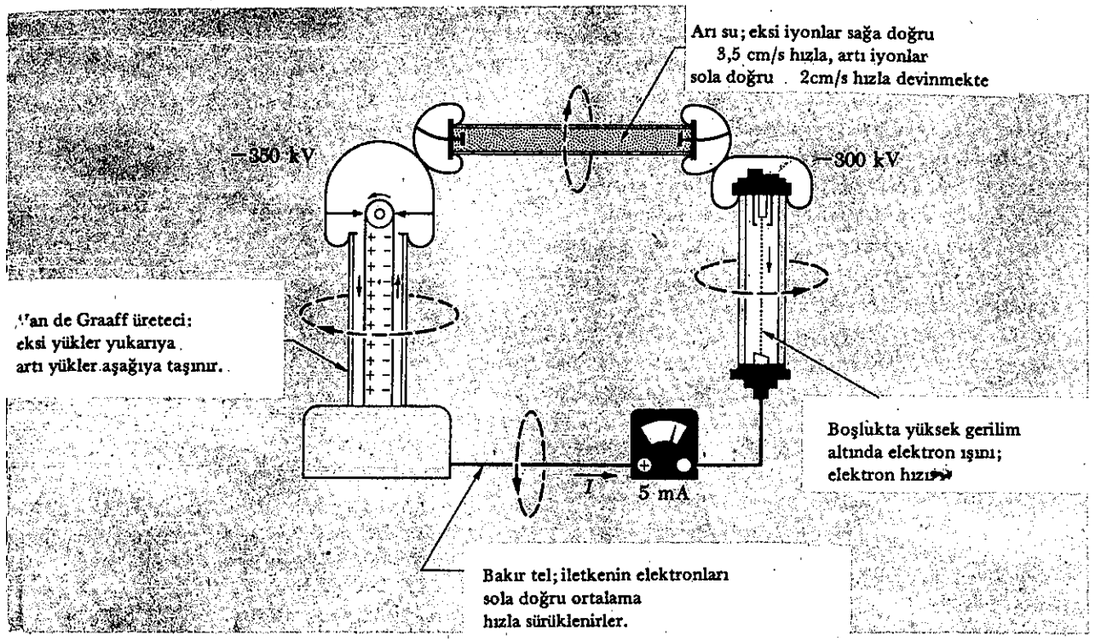
Şimdi teli saran Şek. 6.6d'de görüldüğü gibi dairesel bir yol alalım. Dairenin çevresi $2\pi r$, alan yeğinliği $2I/cr$'dir ve bu alan her noktasında yola teğettir; şöyle ki, bu özel yol boyunca alınan çizgi tümlevinin değeri $(2\pi r)(2I/rc)$ veya $4\pi I/c$ olur. Teli çeviren herhangi bir yol boyunca alınan çizgi tümlevi aynı değeri verecektir. Örneğin Şek. 6.6e'de görülen C gibi eğribüğrü bir yol gözönüne alalım. Şek. 6.6f-deki gibi dairesel bir yol ile C'ye benzer bir yoldan oluşmuş ama teli sarmayan eğri çizelim. Bu C eğrisi boyunca çizgi tümlevi sıfır olmalıdır, dolayısı ile C boyunca alınan tümlevinin daire boyunca alınanın eksi imlisine eşit olması gerekir ki, bu tümlevin de $4\pi I/c$ 'ye eşit olduğunu hesapladık. İmlerin yönünge üzerindeki devinim doğrultumuza bağlı olacakları açıktır. Öyleyse genel sonucumuz:

$$\int \mathbf{B} \cdot ds = \frac{4\pi}{c} \times \text{yolun sardığı net akım} \qquad (10)$$

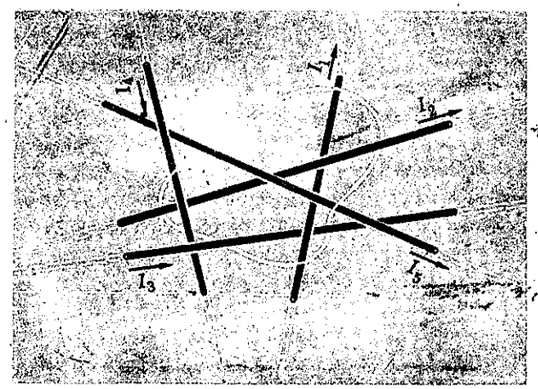
olur. Denklem 10 yolun akım telini bir kez sardığı zaman geçerlidir. Yol akım telini Şek. 6.6g'de olduğu gibi N kez saracak olursa, çizgi tümlevinin sonucu N kez büyük olacaktır.

Daha önce belirttiğimiz gibi, mıknatısal alan yalnızca yüklerin taşınma hızına, yani çevrimin bir noktasından birim zamanda geçen yük birimi sayısına bağlıdır. Şekil 6.7'da 5 mA (miliampere)'lik, yeğinliğinde yani, 15×10^6 esb/s'ye eşdeğer akım geçiren bir çevrim görülmektedir. Yük taşıyıcılarının ortalama hızı, çevrimin bir kesiminde 10^{-4} cm/s'den, başka bir kesiminde 0,8c değerine değin gider. Bu çevrimin her kesiminde, bu kısmı saran kapalı bir yol boyunca B'nin çizgi tümlevi hep aynıdır ve:

Şek. 6.6 B mıknatısal alanın herhangi bir kapalı yol boyunca çizgisel tümlevi sadece yolun sardığı akımlara bağlıdır.



Şek. 6.7. Bu çevrimin değişik kesimlerindeki yük taşıyıcılarının hızları değişik olduğu halde, B'nin herhangi bir kesim üzerindeki çizgi tümlevi hep aynı değerdedir.



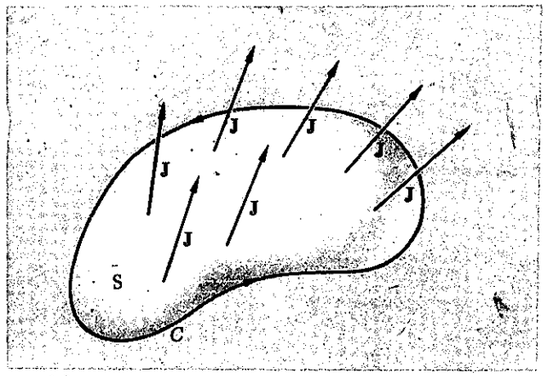
Şek. 6.8. Bir takım doğru akımların üstüste gelmesi. B'nin kapalı bir yol boyunca ok yönünde alınan çizgi tümlevi $\left(\frac{4\pi}{c}\right)(-I_4 + I_5)$'e eşittir.

$$\int \mathbf{B} \cdot ds = \frac{4\pi I}{c} = \frac{4\pi \times (15 \times 10^6 \text{ esb/sn})}{3 \times 10^{10} \text{ cm/sn}}$$
$$= 0{,}00628 \text{ gauss-cm} \qquad (11)$$

değerindedir.

Doğru akım teli için tanıtladığımız özellik, üstüste gelebilme dolayısı ile, doğru iletkenlerden oluşmuş herhangi bir dizgenin alanı için de doğrudur. Şek. 6.8'de ayrı doğrultularda akım geçiren birçok tel görünmektedir. Eğer Denk. 10 bu tellerden birinin mıknatısal alanı için doğru ise her noktada ayrı ayrı tellerin alanlarının yöngül toplamına eşit olan toplam alan için de doğru olmalıdır. Bu oldukça karışık bir alan olacaktır. Fakat B'nin Şek. 6.8'deki kapalı yol boyunca çizgi tümlevini yolun hangi akımları ve hangi yönde sardığına bakmakla kolayca kestirebiliriz.

Bununla birlikte, biz uzun doğru iletkenlerden başka şeylerle de ilgiliyiz. Örneğin herhangi bi-



Şek. 6.9. J yerel akım yoğunluğudur. J'nin S üzerinde alınan yüzey tümlevi C eğrisinin sardığı akıma eşittir.

çimde diyelim, kapalı bir ilmeğin çevrelediği bölgeden akan akımın oluşturduğu mıknatısal alanı anlamak istiyoruz. Bu problemi işleyecek olursak, bu genel alanların da Denk. 10'a, yani *tam aynı yasaya uyduklarını görürüz.* B'nin eğri bir tel çevresindeki çizgi tümlevi, aynı akımı geçiren uzun doğru bir telin çevresindeki çizgi tümlevinin aynıdır. Bu söylediğimiz, şimdiye dek elde ettiğimiz sonuçların biraz ötesine geçmektedir; bu bakımdan biz buna, verdiği sonuçlar denel olarak doğrulandığı için, doğru olduğuna inandığımız bir koyut (postülat) olarak bakacağız.

Bu yasayı daha genel şekilde deyimlemek için, akımın oylumca dağılımını gözönüne almak zorundayız. Genel, kararlı bir akım dağılımı, $\mathbf{J}(x,y,z)$ ile gösterdiğimiz oylumca akım yoğunluğu ile anlatılır ve bu nicelik zaman içinde değişmiyor ise de, yerden yere değişir. Bir tel içindeki akım, J'nin telin sınırları içinde belirli bir değer aldığı ama dışta sıfır olduğu özel bir halden ayrı bir şey değildir. Akımın hacımca dağılımını Böl. 4'de tartıştık ve zamana bağlı olmıyan akımlar halinde J'nin süreklilik denklemine veya yüklerin korunumu koşuluna uyması gerektiğini belirttik:

$$\text{ırak } \mathbf{J} = 0 \tag{12}$$

Akımın aktığı bölge içinde kapalı bir C eğrisi alalım. C'nin sardığı toplam akım, J yöngüsünün C üzerine oturmuş bir yüzeyden geçen akısına, yani, $\int_S \mathbf{J}\cdot da$ tümlevinin değerine eşittir. (Bak Şek. 6.9). O halde Denk. 10 eşitliğinin genel yazımı,

$$\int_C \mathbf{B}\cdot ds = \frac{4\pi}{c}\int_S \mathbf{J}\cdot da \tag{13}$$

olacaktır. Bunu Böl. 2'de geliştirdiğimiz Stokes kanıtsavı (teoremi) ile karşılaştıralım:

$$\int_C \mathbf{F}\cdot ds = \int_S (\text{dön } \mathbf{F})\cdot da \tag{14}$$

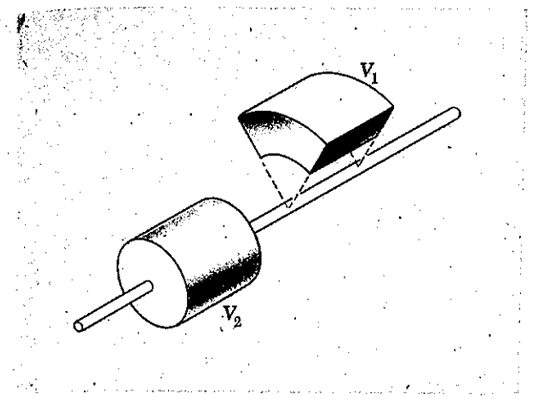
görülüyor ki, Denk. 13'e eşdeğer olan bir yazım,

$$\boxed{\text{dönül } \mathbf{B} = \frac{4\pi \mathbf{J}}{c}} \tag{15}$$

olacaktır. Bu yazdığımız, mıknatısal alan ile bu alanın kaynağı olan devinen yükler arasındaki bağıntının en yalın ve en genel biçimde deyimlenişidir.

Bununla birlikte Denk. 15 eşitliği $\mathbf{J}(x,y,z)$ verildiğine göre $\mathbf{B}(x,y,z)$ alanını belirlemeye yeterli değil; çünkü ayrı birçok yöngü alanlarının dönülleri aynı olabilir. Bu eşitliği tamamlayabilmek için ayrı bir koşul daha gerekir. Bunun için düşünebileceğimiz en uygun eşitlik B'nin ıraksamasıdır. Bir doğru telin oluşturduğu mıknatısal alana dönecek olursak, bu alanın ıraksamasının sıfır olduğunu görürüz. Bu iletkenin çevresinde nereye olursa olsun, bir kutu oturtacak olursak, kutudan geçen net akı sıfırdır; kutu, iletken teli saracak şekilde konulmuş olsa da durum değişmez. Bunu görmek için Şek. 6.10'daki V_1 ve V_2 kutularından geçen net akının sıfır olduğunu ve bu kutuların oylumları büzülerek sıfıra doğru gitse de bu durumun değişmediğini görmek yeter. O halde bu alan için ıra $\mathbf{B} = 0$'dır, ve bu gibi alanların üstüste gelmesi ile oluşan alan için de aynı eşitlik doğrudur. Burada da bu ilkeyi bir koyut (postüla) halinde herhangi bir akım dağılımı haline genişletebiliriz, şöyle ki, Denk. 12'ye eşlik edecek koşul

$$\boxed{\text{ırak } \mathbf{B} = 0} \tag{16}$$



Şek. 6.10. B'nin her iki kutudan çıkan net akısı sıfırdır.

olacaktır. Böylece Denklem 15 ile 16, eğer J verilmiş ise, B yi hemen hemen tek bir işlev halinde belirlerler. Eğer bu iki denklemi doğrulayan ayrı iki $\mathbf{B}_1(x,y,z)$, $\mathbf{B}_2(x,y,z)$ alanları var ise, bunların $\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2$ farkı da ıraksaması ve dönülü her yerde sıfır olan bir alan oluşturacaklardır. Böyle bir alan, uzayın bütün noktalarında aynı değerde $\mathbf{B}_0$ gibi değişmeyen bir yöngüden başka bir şey değildir. Öyleyse, bütün uzayı dolduran sabit bir alanın katılması gibi bir hali bir yana bırakırsak dönül $\mathbf{B} = 4\pi\mathbf{J}/c$ ve ıra $\mathbf{B} = 0$ koşulları verilen bir akım dağılımına bağlanan mıknatısal alanı belirlerler. Burada bulduğumuz bağıntıların durukyük alanı halindekiler ile karşılaştırmak ilgi çekicidir. Orada bulduğumuz koşulların

$$\text{ırak } \mathbf{E} = 4\pi\rho \qquad \text{ve} \qquad \text{dönül } \mathbf{E} = 0 \tag{17}$$

olduğunu anımsayalım.

Bununla birlikte, elektriksel alan kavramına Coulomb yasası ile girmiştik ve unutmayalım ki, bu yasa her yükün elektrik alanının herhangi bir noktadaki değerine olan katkısını doğrudan verir. Şimdi burada da, gerisin geri giderek, bu tipte bir bağıntı bulmaya çalışacağız*. Bunu ancak bir *gerilim işlevi* aracılığı ile yapabiliriz.

6.3 Yöngü Gerilimi

Daha önce bir yük dağılımının $\varphi(x,y,z)$ sayıl gerilim (potansiyel) işlevinin durukyük alanın hesaplanmasında işlek bir yol olduğunu görmüştük. Eğer $\rho(x,y,z)$ gibi bir yük dağılımı karşısında isek, bir (x_1,y_1,z_1) noktasındaki gerilim,

$$\varphi(x_1,y_1,z_1) = \int \frac{\rho(x_2,y_2,z_2)\, dv_2}{r_{12}} \tag{18}$$

oylum tümlevi ile verilmişti. Tümlev hesabı yük dağılımının tümünü kapsar ve yazımdaki $r_{12}(x_2,y_2,z_2)$'den (x_1,y_1,z_1)'e olan uzaklığı gösterir. E elektrik alanı φ'nin eksi bayırgısını (gradyentini) alarak bulunur:

$$\mathbf{E} = -\,\text{bayır}\,\varphi \tag{19}$$

Bu kez, B'nin yapısındaki temel ayrım yüzünden aynı oyun işleyemeyecektir. B'nin dönülünün sıfır olması gerekli değildir ve dolayısıyla B genel olarak bir sayıl gerilimin bayırgısı olamaz. Ama dönül dediğimiz başka bir çeşit yöngü türetimi bilmiyoruz. B'nin özelliklerı şunu gösterir ki, bu yöngüyü bir sayıl işlevinin bayırgısı olarak değil, bir yöngü işlevinin dönülü olarak

$$\boxed{\mathbf{B} = \text{dönül}\,\mathbf{A}} \tag{20}$$

şeklinde işe yarar bir bağıntı halinde verebiliriz. Buradaki açık benzerlik dolayısıyla A'ya *yöngüsel gerilim* diyoruz. İşin burasında bu taktiğin bize ne yarar sağlayacağı açık değil. Bu, konu ilerledikçe kendini gösterecektir. Herhangi bir A yöngüsü için ırakdön $\mathbf{A} = 0$ olduğuna göre Denk. 16'nın kendiliğinden

*Akımların etkileşimi bakımından Coulomb yasasına eşdeğer. bir yasadan niçin yola çıkmadığınız burada anlaşılmaktadır. Bunun yanıtı bir akım parçası, elektrik yüklerinden ayrı olarak, bir parçacık halinde ayrılamaz. Bir çevrimin bir parçasının uyardığı alanı denel olarak ayıramayız; çevrimin geriye kalan bölüngüsü yok ise süreklilik koşullarını çiğnemeden akımın sürekli olduğunu düşünemeyiz.

doğrulunması güvenç vericidir*. Ya da başka bir deyimle, ırak $\mathbf{B} = 0$ olması, $\mathbf{B}$'yi başka bir yöngü işlevinin dönülü olarak göstermemiz olanağı sağlar. Şu andaki görevimiz $\mathbf{J}$ akım dağılımı verildiğine göre, Denk. 20'nin mıknatısal alanı doğru olarak verebilmesi için $\mathbf{A}$'nin nasıl hesaplanacağını bulmaktır. Denk. 15'i gözönüne alarak $\mathbf{J}$ ile $\mathbf{A}$ arasındaki bağıntı,

$$\text{dönül}\,(\text{dönül}\,\mathbf{A}) = \frac{4\pi\mathbf{J}}{c} \tag{21}$$

olur.

Denk. 21 bir yöngü eşitliği olduğuna göre bu aslında üç denklemdir. Bunlardan birini, diyelim x bileşeni denklemini işleyelim. Dönül $\mathbf{B}$'nin x bileşeni $\partial B_z/\partial y - \partial B_y/\partial z$'dir. $\mathbf{B}$'nin z ve y bileşenleri ise

$$B_z = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \qquad B_y = \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \tag{22}$$

olur. Öyleyse Denk. 21'in x bileşeni

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right) = \frac{4\pi J_x}{c} \tag{23}$$

olacaktır. İşlevlerimiz öyle olsun ki tikel (kısmi) diferensiyel alma sırası değiştirilebilsin. Bu özellikten yararlanarak ve eşitliği biraz düzenliyerek Denk. 23'ü şöyle yazabiliriz:

$$-\frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial A_y}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial A_z}{\partial z}\right) = \frac{4\pi J_x}{c} \tag{24}$$

Eşitliği daha bakışımlı hale koymak için $\partial^2 A_x/\partial x^2$ terimini sol yana bir kez ekler ve bir kez de çıkarırsak,

* Bu olguyu bilmiyor iseniz Prob 2.15'i yeniden gözden geçiriniz.

$$-\frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}\right) = \frac{4\pi J_x}{c} \tag{25}$$

buluruz.

Buradaki ilk üç terimin A_x üzerinde Laplace işlemcisinin eksi imlisi olduğunu tanımışsınızdır. Ayraç içindeki nicelik ise $\mathbf{A}$'nın ıraksamasıdır. Oysa $\mathbf{A}$'nın kuruluşu bakımından bir genişlik bulunmaktadır. Bizim bütün ilgimiz bunun dönülü üzerindedir; ıraksama istediğimiz herhangi bir değeri alabilir. Öyleyse

$$\text{ırak}\,\mathbf{A} = 0 \tag{26}$$

*olmasını isteyelim**. Ayrı bir deyişle dönül $\mathbf{A} = \mathbf{B}$ koşulunu yerine getirebilecek çeşitli işlevler arasından aday olarak yalnız ıraksaması sıfır olanları gözönüne alalım. O zaman Denk. 25'in ıraksama ile ilgili kısmı düşer ve yalnızca

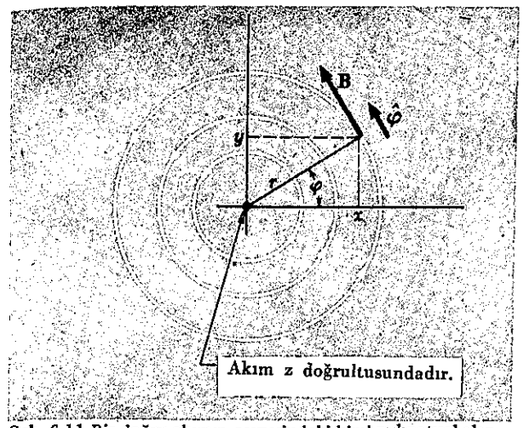
$$\frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2} = -\frac{4\pi J_x}{c} \tag{27}$$

kalır ki burada J_x niceliği, x, y, z'nin bilinen bir sayıl işlevidir. Şimdi Denk. 27'yi

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = -4\pi\rho \tag{28}$$

biçiminde yazılan Poisson denklemi (Denk. 2.70) ile karşılaştıralım. Bu iki denklem biçimce özdeştir. Denk. 28'in çözümünü öğrendik. Denk. 18'deki ha-

* Böyle yapmakta neden haklı olduğumuzu görmek için dön $\mathbf{A} = \mathbf{B}$ koşulunu sağlayan bir $\mathbf{A}$ yöngüsü bulunduğunu ama ırak $\mathbf{A} = f(x,y,z) \neq 0$. olduğunu düşünelim. Buradaki f'yi bir durukyük alanı halindeki ρ yük yoğunluğu gibi işleme koyarak, $\mathbf{E}$ durukyük alanına benzer $\mathbf{F}$ yöngüsü bulabiliriz; şöyle ki ırak $\mathbf{F} = f$ olsun. Ama, böyle bir alanın dönülünün sıfır olduğunu biliyoruz. Öyleyse $\mathbf{A}$'ya $-\mathbf{F}$ katarak dönülü uygun ve ıraksaması sıfır olan yeni bir alan elde ederiz.



Şek. 6.11. Bir doğru akımın çevresindeki kimi mıknatısal alan çizgileri. Akım şekil düzleminden size doğru akıyor.

cim tümlevi bunun örneğidir. Bu nedenle Denk. 27'nin bir çözümü

$$A_x(x_1,y_1,z_1) = \frac{1}{c}\int \frac{J_x(x_2,y_2,z_2)\,dv_2}{r_{12}} \tag{29}$$

yazımı ile verilmelidir. Öteki bileşenler de benzer yazılışlara uymak zorundadır. Bunların hepsi uygun bir tek yöngül yazım içine uygun şekilde girer:

$$\boxed{\mathbf{A}(x_1,y_1,z_1) = \frac{1}{c}\int \frac{\mathbf{J}(x_2,y_2,z_2)\,dv_2}{r_{12}}} \tag{30}$$

Bunun bir tek pürüzü var. Biz Denk. 27'yi elde edebilmek için ırak $\mathbf{A} = 0$ koşulunu Ama Denk. 30'un vereceği $\mathbf{A}$'nın bu özelliği taşıyacağını nereden biliyoruz? Bereket versin ki $\mathbf{A}$'nın bu özelliği taşıdığı tanıtlanabilir.

Bir yöngü gerilim eli örneği olarak I akımı geçiren uzun doğru bir tel alalım. Şek. 6.11'de akımın şekil düzleminden bize doğru artı z ekseni boyunca aktığı varsayılmıştır. Doğru bir telin mıknatısal alanının nasıl olduğunu biliyoruz. Alan çizgileri Şek. 6.5'de çizilen daireler gibidir. Bunlardan birkaçı Şek. 6.11'de görülmektedir. $\mathbf{B}$'nin büyüklüğü $2I/cr$ dir. "Çevresel" doğrultudaki birim yöngü için $\hat{\varphi}$ imini kullanarak $\mathbf{B}$ yöngüsünü

$$\mathbf{B} = \frac{2I\hat{\varphi}}{cr} \tag{31}$$

biçiminde yazabiliriz. Buradaki $\hat{\varphi}$ birim yöngüsünün $-\sin\varphi\hat{x} + \cos\varphi\hat{y}$, olduğunu anımsayarak bu alanı x ve y cinsinden aşağıki gibi yazabiliriz:

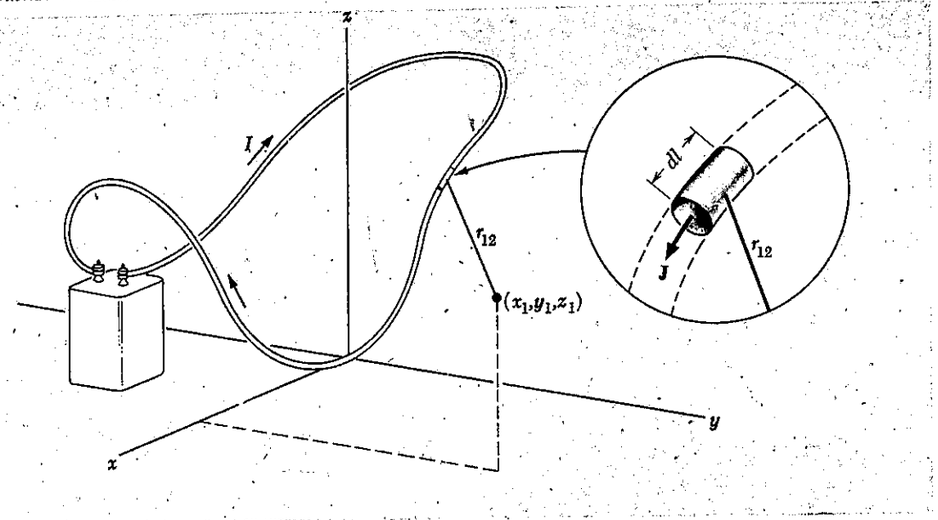
$$\mathbf{B} = \frac{2I(-\sin\varphi\hat{x} + \cos\varphi\hat{y})}{c\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{2I}{c}\left(\frac{-y\hat{x} + x\hat{y}}{x^2+y^2}\right) \tag{32}$$

$\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{B}$ denklemini doğrulayan bir $\mathbf{A}(x,y,z)$ yöngü işlevi şudur:

$$\mathbf{A} = -\hat{z}\frac{I}{c}\ln(x^2+y^2) \tag{33}$$

Bunu doğrulamak için $\nabla \times \mathbf{A}$'nın bileşenlerini hesaplayacağız

$$\begin{aligned}
(\nabla \times \mathbf{A})_x &= \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} = \frac{-2Iy}{c(x^2+y^2)} \qquad (=B_x)\\
(\nabla \times \mathbf{A})_y &= \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} = \frac{+2Ix}{c(x^2+y^2)} \qquad (=B_y)\\
(\nabla \times \mathbf{A})_z &= \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} = 0 \qquad (=B_z)
\end{aligned} \tag{34}$$



Şek. 6.12. Akım çevriminin her ögesi, (x , y , z) noktasındaki A gerilim yöngüsüne bir katkıda bulunur.

Bu yazımın, özel **B** için yöngü gerilimi olabilecek tek işlev olmadığı açıktır. Denk. 33'deki A'ya dönülü sıfır olan herhangi bir yöngü işlevi katılabilir. Bunların hepsi telin dışındaki uzay için geçerlidir. Telin içinde ise **B** değişiktir A'da öyle olmak zorundadır. Yuvarlak kesitli katı bir telin içine uygun düşen yöngü gerilimi işlevini bulmak güç değildir; bak. Prob. 6.13.

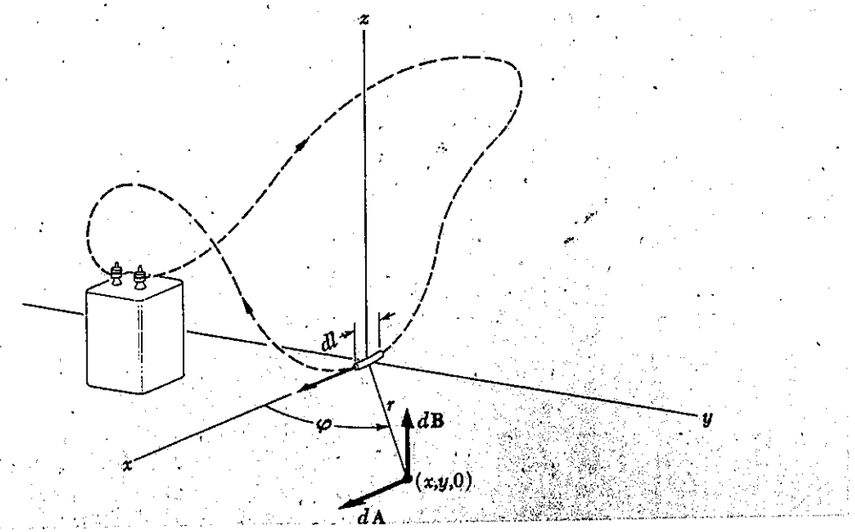
Bu arada, yukarki özel örneğimize uygun **A** işlevi Denk. 30 ile elde edilemezdi. Tel sonsuza doğru uzandığı için, tümlev ıraksak olurdu. Bu Böl. 2'de, yüklü bir telin elektrik alanının bir sayıl gerilimini bulmakta rastladığımız güçlüğü anımsatır. Gerçekten bu iki problem, geometrik özdeşlikleri ve Denk. 30 ile 18'in benzerlikleri dolayısıyla birbirlerine çok bağlıdırlar. Çizgisel yük probleminde uygun sayıl gerilimin $-\lambda \ln(x^2+y^2)$ *istenilen bir sabit* olduğunu bulmuştuk (Denk. 2.19). Bu çözüm, gerilimin sıfırı için ne sonsuz uzaklıkta ne de telin üzerinde bir nokta almagı ister. Sayıl gerilim de Denk. 33'ün verdiği yöngü gerilimi de başlangıç noktasında ve sonsuzda tekil (singular) değerler alır.

6.4 Akım Geçiren Bir Telin Mıknatısal Alanı

Şekil 6.12, I akımı geçiren bir tel ilmeği göstermektedir. Bu akımın (x_1,y_1,z_1) noktasındaki **A** yöngü gerilimi Denk. 30'a göre ilmek boyunca alınan tümlevle bulunur. İnce bir tel içinde kalan akım için dv_2 oylum (hacım) öğesi olarak telin dl uzunluğunda kısa bir parçasını alabiliriz. Telin kesiti a olduğuna göre J akım yoğunluğunun değeri I/a, ve $dv_2 = a dl$-dir. Burada $\mathbf{J}\, dv_2 = I\, dl$ olduğuna ve dl yöngüsünün artı akım doğrultusuna yönelttiğimize göre $\mathbf{J}\, dv_2$ yerine yalınca $I\, dl$ alabiliriz. Böylece ince bir tel için tel için Denk. 30'u çevrim boyunca alınan çizgi tümlevi halinde yazabiliriz:

$$\mathbf{A} = \frac{I}{c}\int \frac{dl}{r_{12}} \tag{35}$$

A yöngüsünü her yerde hesaplamak ve bunun dönülünü alarak **B**'yi bulmak çok uzun olabilir. **A**'yı veren çizgi tümlevine telin bir parçasının katkısını, örneğin, başlangıç noktasından geçen ve bir raslantı ile x eksenine koşut düşen parçanın katkısını ayır-



Şek. 6.13. Şekilde gösterilen özel akım ögesinin **A**'ya olan dA katkısını bulabilirsek, bunun B yöngüsüne katkısı **B** dön **A** ile hesaplanabilir.

mak daha kullanışlı olacaktır (Şek. 6.13). Bu parçanın boyunu dl ile, ve bunun **A**'yı veren tümlevindeki katkısını $d\mathbf{A}$ ile gösterelim. O zaman xy düzleminde $(x,y,0)$ noktasında ki artı x doğrultusunda yönelmiş $d\mathbf{A}$ yöngüsü

$$d\mathbf{A} = \hat{\mathbf{x}}\frac{(I/c)\,dl}{\sqrt{x^2+y^2}} \tag{36}$$

olur. Dizgenin bakışımlı oluşu dolayısıyla **A**'nın bu tikesinin dönül-**A**'ya katkısının xy düzlemine dik olacağı açıktır. **B**'nin buna rastlayan tikesini $d\mathbf{B}$ ile gösterirsek

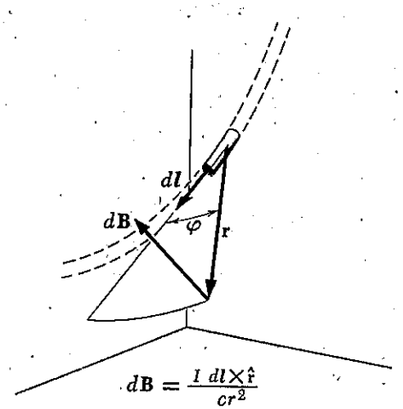
$$d\mathbf{B} = \text{dönül}(d\mathbf{A}) = \hat{\mathbf{z}}\left(-\frac{\partial A_x}{\partial y}\right) = \hat{\mathbf{z}}\frac{(I/c)dl\cdot y}{(x^2+y^2)^{3/2}} = \hat{\mathbf{z}}\frac{(I/c)dl\sin\varphi}{r^2}$$

buluruz. (37)

Bu sonuca varınca kendimizi belirli bir konumluk çatkısından kurtarabiliriz. Açıkca görüldüğü gibi önemli olan, dl öğesi ile bundan **B**'yi bulmak istediğimiz noktaya giden **r** ışınsal yöngüsünün bağıl yönelimleridir. Bir kısa dl parçasının **B**'ye katkısı, dl ile **r**'yi içine alan düzleme dik ve değeri $I\,dl \sin\varphi/r^2c$ olan bir yöngü olarak alınabilir, burada φ , dl ile **r** arasındaki açıdır. Bu yazım Şek. 6.14'de gösterildiği gibi yöngül çarpım kısaltımı ile toplu biçimde yazılabilir:

$$\boxed{d\mathbf{B} = \frac{I\,dl \times \hat{\mathbf{r}}}{cr^2}} \tag{38}$$

Eğer yöngüsel hesap kurallarına alışık iseniz, Denk. 35'den Denk. 38'e kestirmeden geçebilirsiniz. Bunun için $d\mathbf{A} = I\,dl/cr$ olmak üzere $d\mathbf{B} = \nabla \times d\mathbf{A}$ yazarak ve ∇ i bir yöngü gibi işleme sokup yöngül çarpımın sırasını ve dolayısı ile imini değiştiririz. Burada dl bir sabittir, şöyleki, ∇ yalnız $1/r$ üzerinde işler; yoksa bu yoldan bir yere varamazdık. Anımsayacağınız gibi $\nabla(1/r) = -\hat{\mathbf{r}}/r^2$'dir. (Coulomb geriliminden Coulomb alanına geçtiğimiz gibi). Buna göre



Şek. 6.14. Herhangi bir çevrimin mıknatısal alanı, çevrim öğelerinin katkılarını, kullanarak hesaplanabilir.

$$dB = \nabla \times \frac{I\,dl}{cr} = -\frac{I}{c}\,dl \times \nabla\left(\frac{1}{r}\right)$$
$$= -\frac{I}{c}\,dl \times \left(-\frac{\hat{r}}{r^2}\right) = \frac{I\,dl \times \hat{r}}{cr^2} \qquad (39)$$

Denk. 38'deki yazım bulunur.

Tarihçe, Denk. 38 Biot-Savart yasası diye bilinir. Denk. 38'in anlamı odur ki, bunun bir *çevrimin tümü* üzerinden tümlevini alarak, yani, her çevrim öğesinin bu yazımla verilen katkılarının bileşkesini alarak **B**'yi hesaplarsak bulunan **B** bileşkesi doğru olacaktır. Kesim 6.2'nin dipnotunda belirttiğimiz gibi, bir çevrim parçasının katkısını fiziksel olarak tanımak olanaksızdır. Gerçekte Denk. 38, **B**'yi doğru olarak verebilecek tek yazım olamaz, çünkü buna, kapalı bir yol boyunca tümlevi sıfır olan herhangi bir işlev eklenebilir.

Bu tartışmamızda yöngü gerilimi, temel bir iş gördükten hemen sonra bir yana attık. Aslında, işin kılgın yanı bakımından, elimizde Denk. 38 varken bir akım dizgesinin alanını doğrudan hesaplamak, önce yöngü gerilimini bulmaktan daha kolaydır. Gelecek kesimde bazı örnekler üzerinde bu hesabı yapacağız. Ama yine de, yöngü gerilimi kavramı daha derin nedenler yüzünden önemlidir. Hiç değilse birini söylemiş olmak için, bu kavram, **E** durukyük alanı ve bu alanı oluşturan kaynaklar yani elektrik yükleri arasındaki bağıntı ile, **B** mıknatısal alanı ve kararlı akımlar arasındaki bağıntının göz alıcı koşutluğunu ortaya koymaktadır. Bunun en büyük yararı daha ilerde zamanla değişen alanlar ve elektromıknatısal ışımanın incelenmesinde kendini gösterecektir.

6.5 Halkaların ve Kangalların Alanları

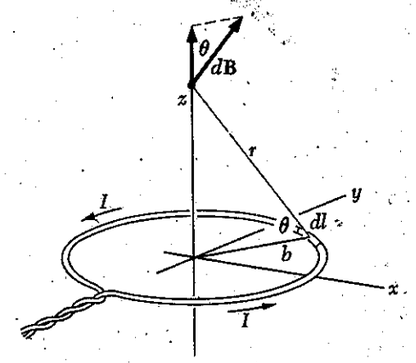
Şek. 6.15*a*'da b yarıçaplı dairesel bir akım teli görülmektedir. Bu kaynağın oluşturduğu mıknatısal alanın, bakışım ekseninden geçen bir düzlem içindeki alan çizgilerinin hiç hesaplamadan, Şek. 6.15*b*'de gösterdiğimiz gibi olacağını kestirebiliriz. Alan tümcek bu eksen çevresinde yani Şek. 6.15*a*'daki z ekseni çevresinde bir dönü bakışımı göstermelidir; alan çizgilerinin kendileri ise, halka düzlemine, yani, xy düzlemine göre bakışımlı olmak zorundadırlar. Telin çok yakınlarında alan doğru bir iletkenin oluşturduğu alanınkine benzer, çünkü bu bölge için halkanın uzak parçalarının katkısı oldukça önemsizdir.

Eksen üzerindeki alanı, Denk. 38'den yararlanarak hesaplamak kolaydır. Halkanın dl uzunluğundaki her öğesi r'ye dik dB kadar bir katkıda bulunur. Hesaba yalnız dB'nin eksen boyunca bileşenini sokmamız gerekir, çünkü, eksen üzerindeki toplam alanın z doğrultusunda yönelmiş olduğunu biliyoruz,

$$dB_z = \frac{I\,dl}{cr^2}\cos\theta = \frac{I\,dl}{cr^2}\frac{b}{r} \qquad (40)$$

Bunun bütün halka boyunca tümlevini alırsak kolayca $\int dl = 2\pi b$ buluruz; böylece eksen üzerinde herhangi bir z noktasındaki alan

$$B_z = \frac{2\pi b^2 I}{cr^3} = \frac{2\pi b^2 I}{c(b^2 + z^2)^{3/2}} \quad \text{(eksen üzerindeki alan)} \qquad (41)$$



(*a*)

(*b*)

Şek. 6.15. Bir akım halkasının mıknatısal alanı. (a) Eksen üzerindeki alanın hesabı; (b) alan çizgilerinin bir bölüğü.

olur). Halkanın ortasında $z = 0$ olduğu için mıknatısal alanın büyüklüğü

$$B_z = \frac{2\pi I}{cb} \quad \text{(merkezdeki alan)} \qquad (42)$$

dır.

Şek. 6.16*a*'da görülen silindir biçimli tel sarımına genellikle akım sarmalı denir. Burada tellerin, eşit aralıkla, sıkıca sarılmış olduğu ve silindir boyunca santimetre başına düşen sarım sayısının sabit bir sayı olduğu varsayılır. Akım yolu aslında sarmal şeklinde olduğu halde, sarımlar sık, sayısı büyük olursa, bunu görmezlikten gelebilir ve bütün sarmal bir deste tel halkadan oluşmuş sayabiliriz. O zaman, kangalın ekseni üzerinde bulunan z gibi bir noktadaki alanı bulabilmek için, Denk. 41'i hesabımıza temel alabiliriz. Şimdi ilk olarak, z'den çıkan ve eksenle θ ve $\theta + d\theta$ açılarını yapan doğrular arasında kalan halka akımlarının alana katkılarını ele alalım. Sarmalın Şek. 6.16*b*'de gölgelenmemiş yerinin eni $r\,d\theta/\sin$

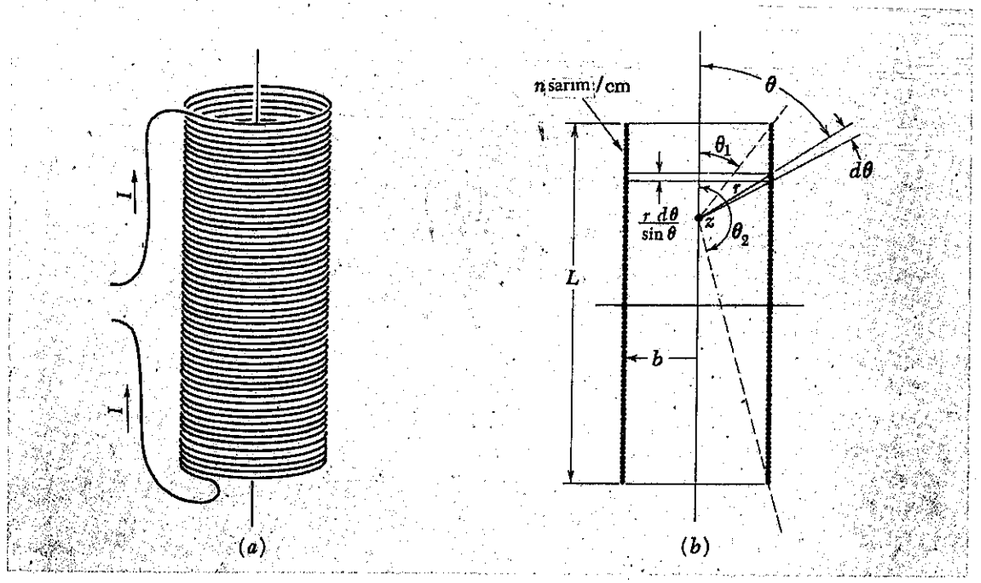
θ'dır, ve bu kısım $Inr\,d\theta/\sin\theta$ 'lık ı akım geçiren bir

halkaya eşdeğerdir. Burada $r = b/\sin\theta$ olduğuna göre bu halkanın eksen üzerindeki alana katkısı:

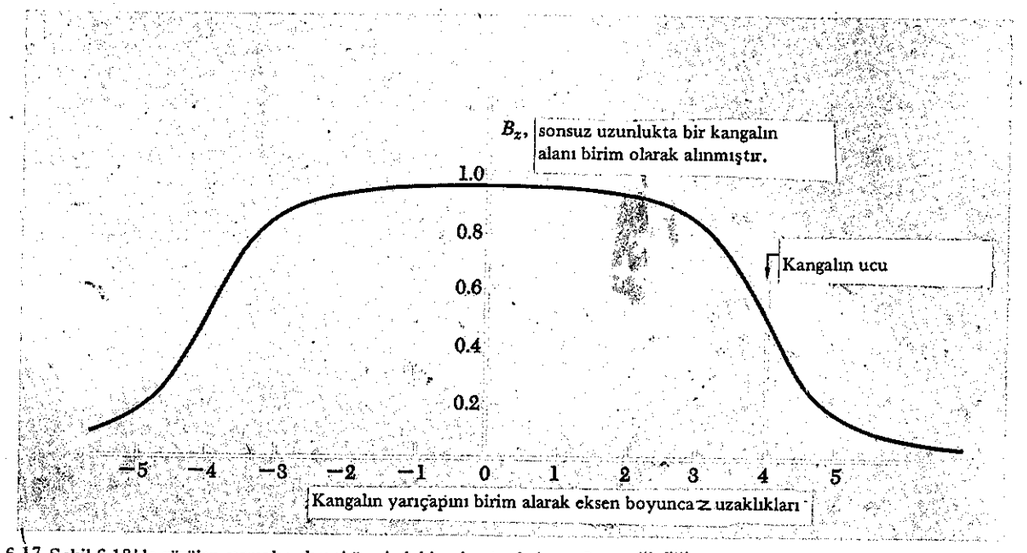
$$dB_z = \frac{2\pi b^2}{cr^3}\frac{Inr\,d\theta}{\sin\theta} = \frac{2\pi In}{c}\sin\theta\,d\theta \qquad (43)$$

olur. Bunun θ_1 ve θ_2 sınırları arasındaki tümlevini alırsak

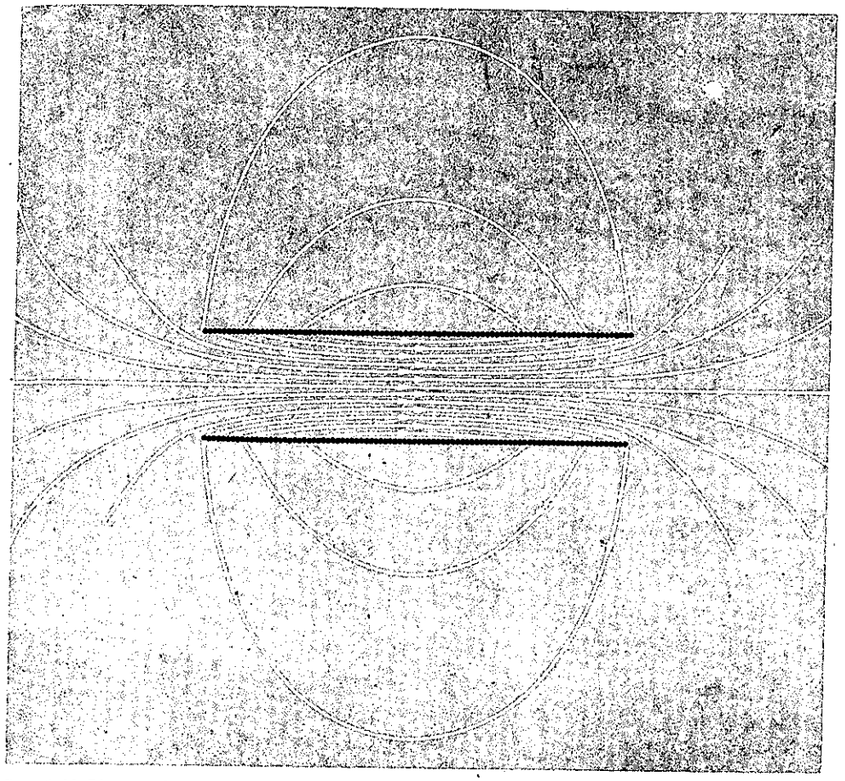
$$B_z = \frac{2\pi In}{c}\int_{\theta_1}^{\theta_2}\sin\theta\,d\theta = \frac{2\pi In}{c}(\cos\theta_1 - \cos\theta_2) \qquad (44)$$



Şek. 6.16. (a) Akım sarmalı, (b) Bir sarmalın ekseni üzerindeki bir noktadaki mıknatısal alanın hesabı.



Şek. 6.17. Şekil 6.18'de görülen sarmalın ekseni üzerindeki mıknatısal alanın B_z yeğinliği.



Şek. 6.18. Bir sarmal çevresindeki alan çizgileri.

buluruz.

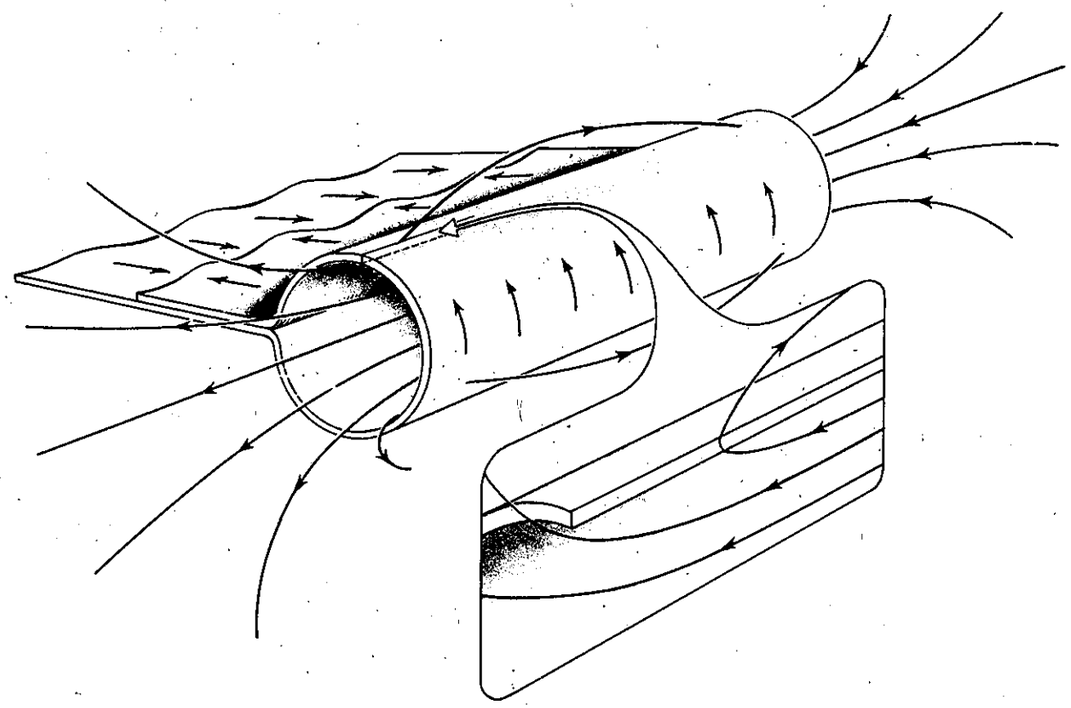
Uzunluğu çapının 4 katına eşit olan bir akım sarmalının ekseni üzerindeki alanın yeğinliğini Şek. 6.17'de çizitle göstermek için Denk. 44'den yararlandık. Çizitin boygu* ekseni üzerindeki, B_z alan-yeğinlikleri santimetresinde aynı sayıda sarım bulunan ve her sarımdan aynı akımı geçiren sonsuz uzunlukta bir akım sarmalının alan yeğinliğine göre bağıl olarak alınmıştır. Sonsuz uzun bir sarmal için, $\theta_1 = 0$ ve $\theta_2 = \pi$ ve böylece

$$B_z = \frac{4\pi In}{c} \quad \text{(sonsuz uzun sarmal)} \tag{45}$$

olur. İlgilendiğimiz "dörde-bir" sarmalın merkezindeki alan yaklaşıkca bu kadardır, ve eksen boyunca bir uca çok varmadıkça alanın değeri bu kadarda kalır.

Şek. 6.18 bu ölçülerde bir sarmalın çevresindeki ve içindeki alan çizgilerini göstermektedir. Burada kimi alan çizgilerinin, sarımlar arasından daldığına dikkat edeniz. Silindir biçimli akım kılıfı, mıknatısal alan bakımından bir süreksizlik yüzeyidir. Te-

* Boygu: Ordinat, Engl: Absis.



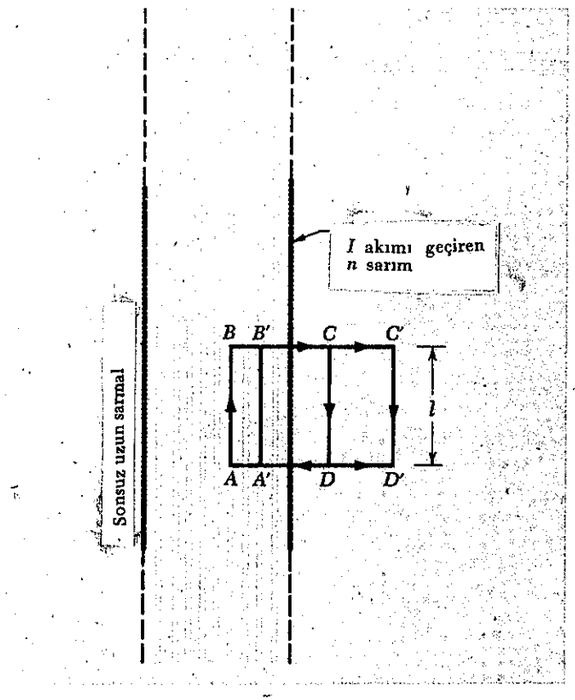
Şek. 6.19 Silindir biçimli, iletken bir yalın katmanın oluşturduğu sarmal. Şeklin altındaki parça akım geçiren katmanın içinde alan çizgilerinin nasıl doğrultu değiştirdiğini göstermektedir.

lin iyice bitişiğindeki alanı inceleyebilseydik, kuşkusuz, çok keskin bir geçiş değil, tek tek tellerin çevresinde ve içinde karışık, çok karışık ve dalgalı bir desen bulurduk.

İnce geniş şerit biçimli bir iletkenle Şek. 6.19'da görüldüğü gibi bir tek sarımdan oluşmuş uzun bir sarmal pekalâ yapılabilir. Böyle bir sarmal için hesabımız ve Şek. 6.18'deki çizenek tümünce doğrudur; yalnız nI niceliğinin yerini katman içinde santimetre başına akan akım alır. Şimdi çeperden içeriye dalan alan çizgisinin doğrultu değişimi, Şek.6.19'daki açık parçada görüldüğü gibi tam bu katmanın kalınlığı içinde olur.

Sonsuz uzun bir sarmalın alanını Denk. 45'e götüren çözümlemeyi yapmadan da bulabilirdik. Açıkca görüldüğü gibi, sonsuz sarmalın alanında hiçbir şey eksen boyunca yönelmiş z konumluğunun işlevi değildir. Alan her yerde z'ye koşut olmak zorundadır. Şek. 6.20'deki dörtgen şeklinde $ABCDA$ yolu gibi bir çizgi üzerinde **B**'nin çizgi tümlevini alalım.

Bu yolun yatay kısımları tümleve hiç bir



Şek. 6.20. Sonsuz uzun bir sarmalın dışındaki alanın sıfır olması gerektiğini gösteren çizit.

katkıda bulunmaz. CD boyunca da tümlevin sıfır olması gerekir| Çünkü CD boyunca tümlevin belli bir değeri olursa $C'D'$ gibi koşut bir kenar boyunca alınan tümlevde aynı değeri vermelidir ki, Bu da sarmalın dışındaki bütün uzayı kaplayan sabit yeğin bir mıknatısal alan bulunmasını gerektirir. Böylece dıştaki alanın sıfır olması gerektiği sonucuna varırız*. Bu bize **B**'nin yalnız AB boyunca alınan çizgi tümlevini bırakır ki, bunun da değeri $B_z l$'dir ve bu sonuç tüm çizgi tümlevinin $4\pi/c \times$ (yolun sardığı akım) sonucunu verir. O halde $B_z l = (4\pi/c)nIl$ yazabiliriz veya buradan $B_z = 4\pi nI/c$ elde ederiz ki, bu da Denk. 45'e uygundur.

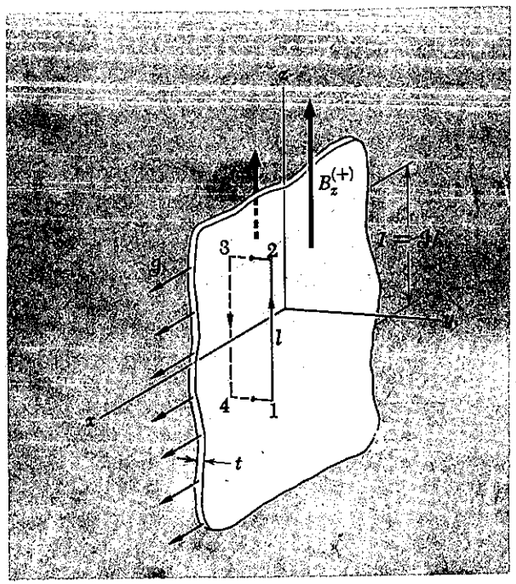
* Böyle bir sarmal bütün dış uzayda niçin bitevîye bir alan uyarmaz? Çünkü, şimdi inceleyeceğimiz sonsuz boyutta yassı akım katmanı, iki yanındaki iki yarı uzayı " bitevîye bir alanla doldurmaktadır. Bununla birlikte, sarmal istediğimizce ince ve uzun yapılabilir, ve çapı savsanacak kadar küçük olan çubuk gibi bir sarmalın her yerde sonlu bir alan oluşturması tuhaf olurdu. Belki daha güvenle sonuca götüren bir tartışma şekli biçimi düşünebilirsiniz.

6.6 Bir Akım Katmanında B'nin Değişimi

Şek. 6.19'daki örnekte, yuvarlanmış bir tek akım katmanından oluşmuş bir sarmal ele almıştık. Şimdi daha da yalın bir dizge, düz, sınırsız bir akım katmanı ele alalım. Bunu sabit kalınlıkta bir bakır yaprak gibi alıp yaprağın içinde her yerinden eşit yoğunlukta ve bir doğrultuda bir akım geçtiğini düşünebilirsiniz. Kesinlik olsun diye katmanın xz düzlemi içinde bulunduğunu ve akımın x doğrultusunda aktığını düşünelim. Katman sonsuz boyutta alındığı için, resmini çizmek kolay değil! Bir şey çizmiş olmak için Şek. 6.21'de katmanın kıyıları kesilmiş bir parçasını gösterdik; bunun geriye kalan kısmının bütün düzlem boyunca uzandığını tasarlamamız gerekiyor. Konuyu tartışmamız sonunda, katman kalınlığının bir önemi olmadığı ortaya çıkacak ise de, bunun her yerinde sabit ve t olduğunu düşünebiliriz. Metalin içindeki J akım yoğunluğu (esb/s)/cm² ise, z doğrultusunda alınan her cm enli parça, Jt esb/s değerini bulan bir akım şeridi halindedir. Biz buna 'yüzey akım yoğunluğu" veya "katman akım yoğunluğu" diyeceğiz, ve bunu, oylumsal akım yoğunluğundan ayırdetmek için **J** yerine $\mathcal{J}$ harfi ile göstereceğiz. Bu $\mathcal{J}$'nin birimi (esb/s)/cm'dir. Katmanın içinde olanlarla ilgilenmezsek, $\mathcal{J}$ kullanışlı bir niceliktir. Az sonra göreceğimiz gibi, katmanın bir yanından ötekine geçince mıknatısal alanın uğradığı *değişimi* bu $\mathcal{J}$ belirliyecektir.

Şek. 6.21'deki alanı yalnız katman oluşturmuş değildir; z doğrultusunda, başka bir kaynaktan gelen başka bir düzgün alan da vardır. Akım katmanının oluşturduğu alanı da içine alan toplam alan, metal yaprağının arka yüzünde **B** yöngüsü ile gösterilmiştir.

Şimdi Şek. 6.21'de **B**'nin 12341 dörtgeni boyunca alınan çizgi tümlevini görelim. Bu dörtgenin



Şek. 6.21. Bir yüzey akımı katmanı üzerinde, B'nin yüzeye koşut bileşeninin değeri bir yüzden ötekine geçince bir değişime uğrar.

uzun kıyılardan biri yaprağın önünde öteki ise arkadadır. Kısa kıyılar ise yaprağı delip geçecek şekilde yönelmiştir. Yaprağın hemen önündeki mıknatıslık alanının *z bileşenini* B_z^+ ile ve arka yüzünün hemen önündeki alanın z bileşenini ise B_z^- ile gösterelim. Burada alan deyince çevredeki bütün kaynakların ve bu arada yaprak içindekilerin oluşturduğu alanı anlıyoruz. B'nin uzun dörtgen boyunca çizgi tümlevi sadece $l(B_z^+ - B_z^-)$'dir. (Dörtgenin kısa kıyılarına koşut bir alan bileşeni oluşturan başka kaynaklar da bulunsa, bu kıyılar dörtgenin uzun kenarlarına bakınca herhangi bir alan değişimi karşısında istediğimizce kısa tutulabileceği, ve zaten yaprağı da istediğimizce ince aldığımız için, kısa kıyılar boyunca tümleve katkı önemli değildir.) Bu dörtgenin çevirdiği akım $l\mathcal{J}$ 'dir. Buna göre $l(B_z^+ - B_z^-) = 4\pi\mathcal{J}l/c$ ya da

$$B_z^+ - B_z^- = \frac{4\pi\mathcal{J}}{c} \qquad (46)$$

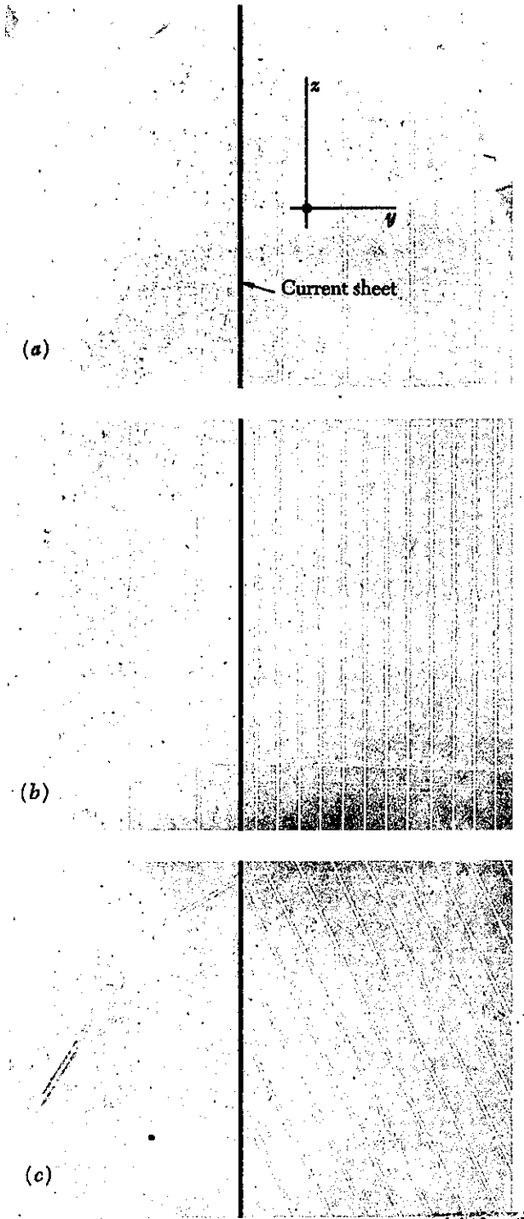
bulunur. Yoğunluğu $\mathcal{J}$ olan bir akım katmanı B'nin yüzeye koşut ve $\mathcal{J}$ 'ye dik olan bileşeninde bir atlamaya yol açar. Bu size bir elektrik alanının bir yük katmanında uğradığı değişimi anımsatabilir. Orada E'nin yüzeye dik bileşeni kesiklidir ve atlamanın büyüklüğü yüzey yüklerinin yoğunluğuna bağlıdır.

Eğer katman, eldeki biricik kaynak akım olsa idi, o zaman alanın katmana göre bakışımlı olması gerekeceğinde kuşku yoktu. O halde B_z^+ 'nın değeri $2\pi\mathcal{J}/c$ ve B_z^- ise $-2\pi\mathcal{J}/c$ olurdu. Bu durum Şek. 6.22*a*'da görülmektedir. Katmandaki akımın etkisine ayrı bir alan katılıyor ise tüm alan Şek. 6.22*b*' ve *c*'de gösterilmiştir. Şek. 6.23'deki gibi eşit ve zıt yönlerde yüzey akımı taşıyan koşut iki yaprak bulunduğunu ve çevrede başkaca kaynak bulunmadığını düşünelim. Akımın doğrultusu şekil düzlemine dik ve sol yanda bize doğru sağda ise öteye doğru yönelmiş olsun. Katmanlar arasındaki alan $4\pi\mathcal{J}/c$ 'ye eşittir, dış bölge de ise hiç bir alan yoktur. Benzer bir durum, Şek. 6.24'de çizildiği gibi, koşut iki yassı çubuk, genişlikleri yanında çok dar sayılacak bir aralıkla dururlarken sağlanır. Güç santrallarından ağır akım yükleri dağıtımında kullanılan iletken dağıtım çubukları için durum budur.

Daha önce Şek. 6.19'da belirttiğimiz gibi B'nin değişimi katman içinde olur. Aynı $\mathcal{J}$ değeri için katman ne denli ince ise, geçiş de o denli sert olur. Böl. 1 ve 2'de E'nin bir yüzey yük katmanında uğradığı süreksizliği incelediğimiz zaman buna çok benzeyen bir durumla karşılaşmıştık. O zaman yüzey yüküne etkiyen kuvveti araştırmak öğretici olmuştu, burada da benzer bir soru soracağız.

Katmanın kenarı 1 cm olan kare biçimli bir parçasını ele alalım. Bundan geçen akım $\mathcal{J}$ 'ye eşittir ve akım yolunun boyu 1 cm olduğu için, akımın katmanın bütün kalınlığı içinde biteviye dağıldığını düşünürsek bu akıma etkiyen ortalama alan (1/2) $\frac{1}{2}(B_z^+ + B_z^-)$ olur. Öyleyse dağılımının bu kesimine etkiyen kuvvetin değeri

$$\text{Katmanın 1 cm}^2\text{sine etkiyen kuvvet} = \frac{1}{2}(B_z^+ + B_z^-)\frac{\mathcal{J}}{c} \qquad (47)$$



Şek. 6.22. Bir akım katmanının yakınlarında mıknatısal alanın alabildiği biçimler. Akım x ekseni boyunca yani şekil düzleminden dışa doğru geçmektedir. (a) Yalnız katmanın alanı; (b) Şek. 6.21'deki durumda olduğu gibi, z doğrultusunda düzgün bir alanın buradaki alana katılması; (c) başka bir doğrultuda düzgün bir alanın katılması; her halde B_z bileşeninin değeri, katmandan geçerken $4\pi\mathcal{J}/c$ kadar bir değişime uğrar, B_y değişmez.

olur. Denk. 46'ya göre $(B_z^+ - B_z^-)/4\pi\mathcal{J}/c$'nin yerine alabiliriz, buna göre, cm²'ye düşen kuvvet

$$= \left(\frac{B_z^+ + B_z^-}{2}\right)\left(\frac{B_z^+ - B_z^-}{4\pi}\right)$$

$$= \frac{1}{8\pi}[(B_z^+)^2 - (B_z^-)^2] \qquad (48)$$

olur.

Kuvvet yüzeye diktir ve duruk sıvı basıncının yanbaskısında olduğu gibi yüzölçümü ile oranlıdır. İmlemeye güvenebilmek için kuvveti Şek. 6.23'deki özel hal için ele alabiliriz. Kuvvet her iletken üzerinde dışa doğrudur. Her şey sanki alanın büyük olduğu yerlerde büyük basınç gibi görünür. Bununla birlikte anımsamamız gerekir ki, bu kuvveti B'nin yalnızca yüzeye koşut bileşeni belirler.

Buraya dek sonsuz genişlikte düz katmanlarla uğraştık; ama eğri bir yüzey aldığımız ve yüzeye yeterince yakın bulunduğumuz zaman, aynı şey olacaktır. Nerede olursa olsun bir yüzeyi aştığımız zaman B'nin yüzeye koşut bileşeni B_1 'den B_2 'ye atlarsa, yalnız yüzeyden akan bir akım katmanı bulunduğu sonucunu çıkarmakla kalmayız. bir de yüzeye dik, din/cm ile ölçülen, $(B_1^2 - B_2^2)/8\pi$ kadar bir zorlama bulunduğunu anlarız. İşte bu *magnetohidrodinamik* denilen ve elektrik ileten sıvıları inceleyen bilim dalının temel ilkelerinden biridir ki, hem elektrik mühendislerini hem de astrofizikçileri yakından ilgilendirir.

6.7 Alanlar Nasıl Dönüşür

Bir yüzey yükü katmanı kendi yüzeyi içinde kendine koşut olarak devinirse bir yüzey akımı oluşturur. Yüzey üzerinde yoğunluğu σ olan biteviye bir yük dağılımı varsa, ve yüzey kendine koşut v hızı ile kaymakta ise, yüzey akım yoğunluğunun değeri $\mathcal{J} = \sigma v$ olur. Bu yalın düşünü, bir eylemsizlik çatkısından başka bir eylemsizlik çatkısına geçtiğimizde elektriksel ve mıknatısal alan niceliklerinin nasıl dönüştüğünü anlamamıza yardım edecektir.

Şek. 6.25'de görüldüğü gibi xz düzlemine koşut iki düzlem yüzey yükü katmanı düşünelim. Şekilde bu yüzeylerin yalnız bir kesimini gösteriyoruz; aslında yüzeyler sonsuza dek uzanmaktadır. F eylemsizlik çatkısında katmanlardan birinin yüzeyce yoğunluğu σ ötekininki ise $-\sigma$ olsun. Bu çatkı içinde, E elektrik alanı, artı y doğrultusunda yönelmiştir ve her zaman olduğu gibi Gauss yasası bu alan yeğinliğini

$$E_y = 4\pi\sigma \tag{49}$$

olarak verir.

Bu F çatkısında her iki katman artı x doğrultusunda v_0 hızı ile devinmekte, böylece elimizde bir çift akım katmanı var demektir. Katmanlardan biri üzerindeki yüzey akım yoğunluğu $\mathcal{J}_x = \sigma v_0$, ötekininki ise, bunun eksi imlisidir. Şek. 6.23'deki düzenlenişte olduğu gibi böyle iki akım katmanı arasındaki alan

$$B_z = \frac{4\pi\mathcal{J}_x}{c} = \frac{4\pi\sigma v_0}{c} \tag{50}$$

olur.

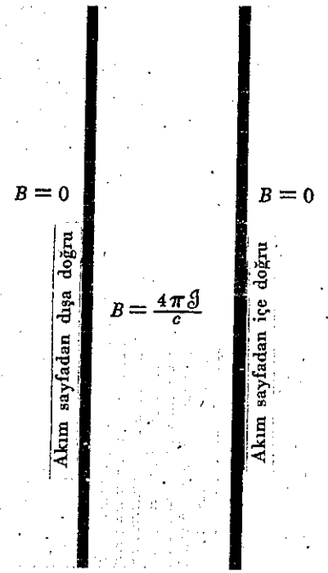
F eylemsizlik çatkısı F'ye göre artı x doğrultusunda v hızı ile devinmekte olsun. *F'de bulunan bir gözlemcinin ölçeceği alanlar nedir?* Bu soruyu yanıtlamak için F'deki kaynakların ne olduklarını bilmek gerekir.

Yük taşıyan katmanın F'deki x' boyunca v_0' hızı, hız bileşimi kuralına göre,

$$v_0' = \frac{v_0 - v}{1 - v_0 v/c^2} = c\,\frac{\beta_0 - \beta}{1 - \beta_0\beta} \tag{51}$$

olur. Daha önce, Kesim 5.9'da, devinimli çizgi yükü halinde olduğu gibi, bu çatkıdaki yük yoğunluğunda değişik bir Lorentz büzülmesi olur. Oradaki tartışmayı kullanarak, yüklerin kendi durgun çatkılarındakiyoğunluğu $\sigma(1 - v_0^2/c^2)^{1/2}$ya da σ/γ_0 dolayısı ile F' çatkısındaki yük yoğunluğu

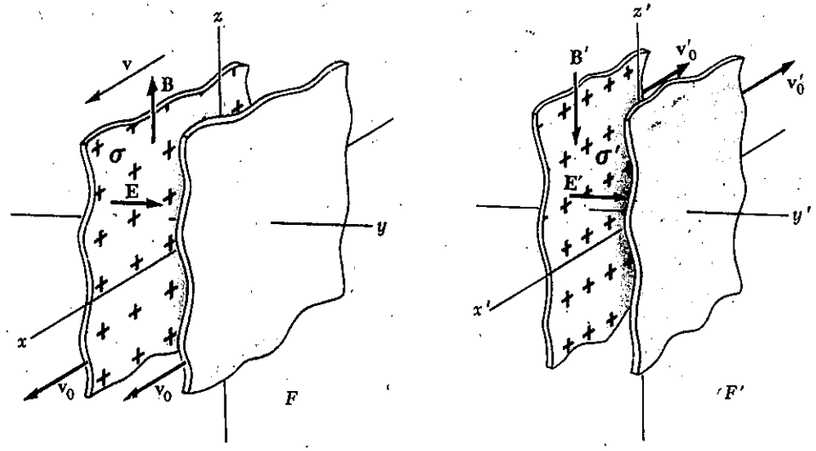
$$\sigma' = \sigma\,\frac{\gamma_0'}{\gamma_0} \tag{52}$$



Şek. 6.23. Düzlem koşut akım katmanları arasındaki mıknatısal alan.



Şek. 6.24. Bir çift kalın bakır çubuktan zıt yönlerde akım geçince oluşan mıknatısal alanın kesitte görünüşü.



Şek. 6.25. F' çatkısı F'de bulunan bir gözlemciye göre v hızı ile artı x doğrultusunda deviniyor. Yüklü katmanlar F'deki gözlemciye göre v_0hızı ile devinmektedir.

olacaktır. Her zaman olduğu gibi burada γ_0' katsayısı $(1 - v_0'^2/c^2)^{-1/2}$'dir. Denk. 51'den yararlanarak, ve γ_0' yi β_0 ve β ya da γ_0 ve γ cinsinden yazarak eleyebiliriz. Bu işlem yapılınca sonuç

$$\sigma' = \sigma\gamma(1 - \beta_0\beta) \tag{53}$$

bulunur. Buna göre F' çatkısındaki yüzey akım yoğunluğu

$$\mathcal{J}' = \sigma' v_0' = \sigma\gamma(1 - \beta_0\beta)c\,\frac{(\beta_0 - \beta)}{1 - \beta_0\beta} = \sigma\gamma(v_0 - v) \tag{54}$$

olacaktır. Artık kaynakların F' çatkısında nasıl göründüklerini biliyoruz; bu, F' çatkısı içinde alanın ne olması gerektiğini bilmek demektir. Bunu söylerken yine, görelikle koyut (postüla)larını düşünüyoruz. Fizik yasaları bütün eylemsizlik çatkılarında aynı olmak zorundadır; bu zorunluluk elektrik alanını yüzeyce yük yoğunluğuna bağlayan yazımları ve mıknatısal alanı yüzeyce akım yoğunluğuna bağlayan yazımları da içine alır. Öyleyse bunu

$$E_y' = 4\pi\sigma' = \gamma\left[4\pi\sigma - \left(\frac{4\pi\sigma v_0}{c}\right)\left(\frac{v}{c}\right)\right] \tag{55}$$

$$B_z' = \frac{4\pi}{c}\,\mathcal{J}' = \gamma\left[\frac{4\pi\sigma v_0}{c} - 4\pi\sigma\left(\frac{v}{c}\right)\right] \tag{56}$$

sonuçları izler. Şimdi geriye döner ve Denk. 49 ve 50'deki E_y ve B_z değerlerine bakarsak sonuçlarımızın şöyle yazılabileceğini görürüz:

$$\begin{aligned} E_y' &= \gamma(E_y - \beta B_z), \\ B_z' &= \gamma(B_z - \beta E_y) \end{aligned} \tag{57}$$

Eğer koşut akım tabakaları xz düzlemine değil de xy düzlemine koşut yönelmiş olsalardı, E_z''yi E_z ve B_y'ye bağlayan ve B_y''yi B_y ve E_z'ye bağlayan bağıntılar elde ederdik. Kuşkusuz bu bağıntılar da yukarda yazdıklarımız gibi olacaktı, ama doğrul-

tuları gözönüne alırsanız, B'nin ki ile ilgili kural dolayısı ile bir takım imleme ayrımları olurdu.

Şimdi devinim doğrultusundaki alan bileşenlerinin nasıl dönüştüğünü bulmak kalıyor. Daha önce Kes. 5.5'de E'nin boyuna bileşeninin her iki gözlem çatkısında aynı büyüklükte olduğunu görmüştük. Bu özelliğin B'nin boyuna bileşeni için de doğru olduğu şöyle gösterilebilir. B'nin boyuna bileşeninin, yani, Şek. 6.25'deki B_x bileşenini F çatkısında x eksenini eksen alarak sarılmış bir sarmalın uyardığını düşünelim. Böyle bir akım sarmalının içindeki alan, saniyede geçen yük demek olan tellerdeki I akım yeğinliğine, eksen boyunca santimetre başına düşen n sarım sayısına bağlı olduğunu biliyoruz. F' çatkısında sarmal bir Lorentz büzülmesine uğrayacak ve bu çatkıdaki sarım sayısı daha büyüyecektir. Ama aynı F' çatkısında ölçülen akım yeğinliği ise düşük çıkacaktır. Zira, F' deki akım yeğinliğini telin bir noktasından saniyede geçen elektronları sayarak ölçeriz; F''deki gözleyiciye göre F'-deki, gözlemci yavaş işleyen bir saat ile ölçü almıştır. Başka bir deyişle, nI çarpımındaki zaman gelişmesi uzunluk büzülmesini tam olarak karşılamıştır. Gerçekten (boyuna uzunluk)$^{-1}\times$(zaman)$^{-1}$'in boyutlarındaki herhangi bir nicelik Lorentz dönüşümlerinde değişemez. Böylece $B_x'=B_x$ olur.

Daha önce Bölüm 5'de, Denk. 5.6'nın tartışılmasından sonra uyarıldığınız bir noktayı anımsayın Alanların dönüşüm özellikleri *yerel* özelliklerdir. Bir konumluk çatkısının bir uzay-zaman noktasındaki **E** ve **B** değerleri, başka bir çatkı içinde aynı uzay-zaman noktasında gözlenen alan bileşenlerini belirleyen biricik niceliklerdir. Bu nedenle, yazımların türetilmesinde özellikle basit kaynaklar, yani, koşut, biteviye yüklü katmanlar kullanmamız, sonuçlarımızın genelliğine gölge düşürmez. Böylece hangi kaynaktan ya da hangi biçimlenimden gelirse gelsin, elektriksel, mıknatısal alanların bütün bileşenlerinin genel dönüşüm yasalarını bulmuş olduk.

Aşağıda bütün bu dönüşümlerin tam listesini veriyoruz. Burada bütün üslü nicelikler F'ye göre artı x doğrultusunda devinen F' çatkısında ölçülmüşlerdir. Üssüz nicelikler ise, F içinde yapılan ölçü sonuçlarıdır. Her zamanki gibi β harfi v/c 'yi ve γ ise $(1-\beta^2)^{-1/2}$'yi göstermektedir.

$$\boxed{\begin{aligned} E_x' &= E_x \quad E_y' = \gamma(E_y - \beta B_z) \quad E_z' = \gamma(E_z + \beta B_y) \\ B_x' &= B_x \quad B_y' = \gamma(B_y + \beta E_z) \quad B_z' = \gamma(B_z - \beta E_y) \end{aligned}} \qquad (58)$$

Kutu içine aldığımız denklemler bizi şaşırtıcı bir olgu ile karşılaştırır: **E** ile **B** tam bir bakışım göstermektedir. Eğer kitap dizilirken yanlışlık olur da E'ler yerine B ve y'ler yerine z'ler konulsa idi, denklemler hiç bir değişiklik göstermeyecekti! Mıknatısal alan üzerinde daha önceki görüşümüz, bunun devinen yüklerin elektrik alanının göreli dönüşümünden çıkan "ikincil" bir etki olduğu anlayışında idi ise de, gözlediğimiz mıknatısal ve elektriksel olayların ayrıldığı açıkca bellidir. Çevremizdeki evren elektriklik ve mıknatıslık bakımından hiçte bakışımlı değildir. Ama yine de, kaynakların değişik oluşu bir yana, alanların kendilerinin, yani **E** ve B'nin iyice bakışımlı biçimde bağlı oldukları görülüyor.

Üstelik, elektriksel ve mıknatısal alanlar, bir tek varlığın bir bakıma ayrı görünüşleri veya bileşenleri gibidirler. Bu bakımdan bir *elektromıknatısal* alandan söz edebilir ve E_x, E_y, E_z, B_x, B_y ve B_z 'yi elektromıknatısal alanın altı bileşeni gibi düşünebiliriz. *Aynı alan ayrı eylemsizlik çatkılarından* görülecek olursa, bu bileşenler ayrı değer takımları ile gösterilecektir, tıpkı bir yöngünün birbirine göre dönmüş ayrı konumluk çatkılarında ayrı bileşenlerle gösterilmesi gibi. Bununla birlikte, bu biçimde anlaşılan elektromıknatısal alan, matematikce bir yöngü değildir; ama daha genel olarak *gergi* (tensor) denilen bir niceliktir. Yukarda kutu içine aldığımız denklemlerin tümü, böyle bir gerginin bileşenlerinin, bir eylemsizlik çatkısından ötekine geçtiğimiz zaman ne biçimde dönüşeceklerini gösterirler. Bu matematik dilini burada geliştirecek değiliz; alıştığımız bir biçime uyarak, elektrik alanından söz ederken bir yöngü alanını, mıknatısal alandan söz ederken de yine gördüğümüz, ve Böl. 7'de incelemesini sürdüreceğimiz biçime uyarak, bu birinciye bağlı bir yöngü alanını düşünüp gideceğiz. Dört boyutlu uzay-zaman çatkısında gösterilen elektromıknatısal alanın birliği üzerindeki bu kısa uyarıdan sonra, bunun ötesinde daha fazla bilgi edinmek için daha ileri dersleri bektemeniz gerekecek.

Denk. 58 dönüşümleri, kimi hallerde şaşısı yalınlıkta bağıntılar verir. Çatkıların birinde, örneğin üssüz konumluklarda **B** mıknatısal alanının her yerde sıfır olduğunu düşünelim. O zaman öteki çatkıda gözlenen alanlar şunlardır:

$$\begin{aligned} E_x' &= E_x \quad E_y' = \gamma E_y \quad E_z' = \gamma E_z \\ B_x' &= 0 \quad B_y' = \beta\gamma E_z \quad B_z' = -\beta\gamma E_y \end{aligned} \qquad (59)$$

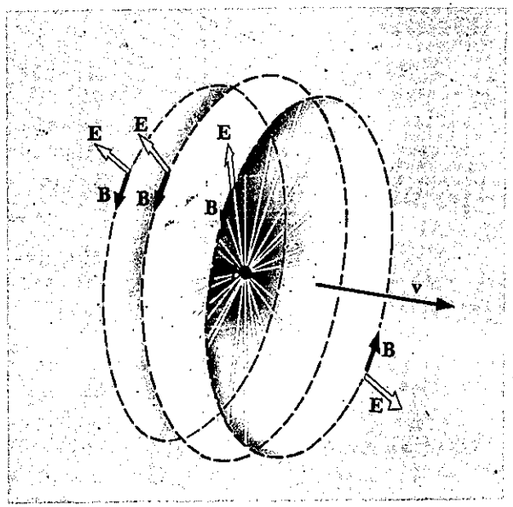
bu eşitlikler "üslü" çatkının her yerindeki elektriksel ve mıknatısal alanlar arasında bir takım bağıntılar bulunmasını gerektirir:

$$B_x' = 0 \qquad B_y' = \beta E_z' \qquad B_z' = -\beta E_y' \qquad (60)$$

Üssüz çatkının üslü çatkıdan görülen hızının $-x'$ doğrultusunda bir yöngü olduğunu anımsayarak yukarki bağıntıyı bir yöngül çarpım olarak deyimleyebiliriz ve daha genel bir kural elde ederiz;

$$\boxed{\mathbf{B}' = \left(\frac{\mathbf{v}'}{c}\right) \times \mathbf{E}' \quad (\textit{Bir çatkının her yerinde} \mathbf{B} = 0 \textit{ ise})} \qquad (61)$$

burada $\mathbf{v}'$ üssüz çatkının üslü çatkıdan gözlenen hızıdır.



Şek. 6.26. Devinimli bir yükün bir anlık elektriksel ve mıknatısal alanları.

Tam aynı yoldan giderek, üssüz çatkının her yerinde $\mathbf{E} = 0$ ise, Denk. 58'den yola çıkarak ayrı bir çatkıda,

$$\boxed{\mathbf{E}' = -\left(\frac{\mathbf{v}'}{c}\right) \times \mathbf{B}' \quad (\textit{Bir çatkının her yerinde } \mathbf{E} \textit{ 0 ise})} \qquad (62)$$

elde ederiz. Burada da, Denk. 61'de olduğu gibi, $\mathbf{v}'$, üssüz yani **E**'nin her yerde sıfır olduğu çatkının, üslü çatkıdan ölçülen hızıdır. Denk. 61 ve 62'de ayraç içindeki kısıtlamaların çok önemli olduğu kuşkusuzdur. Çoğu zaman her yerinde B'nin sıfır olduğu bir çatkı yoktur, ve yine elektriksel yük yoğunluğunun ve dolayısı ile **E**'nin her yerde sıfır olduğu bir çatkı yoktur.

Yalnızca aynı gözlem çatkısında ölçülen nicelikleri ise karıştırdığı için kısıtlamalar karşılandıkça Denk. 61'inuzay içinde değişen alanlara uygulanması

kolaydır*.

Bunun güzel bir örneği, Böl. 5-6'da sabit hızla devinen bir q nokta yükünün alanı problemidir. Üssüz çatkı olarak yükün devinimsiz durduğu çatkıyı alalım. Bu çatkı içinde kuşkusuz mıknatısal alan yoktur. Denklem 61, "lab" çatkısında yani içinde bulunduğumuz ve yükün v hızı ile devindiği çatkıda, elektrik alanına ve devinim doğrultusuna dik bir mıknatısal alan bulunması gerektiğini bildirir. Bu çatkıdaki elektrik alanını biçimini kesin olarak biliyoruz:

Alan yükün bir andaki yerinden çıkan ışınsal doğrular boyunca yönelmiştir ve değeri Denk. 5.12 ile verilmiştir. Mıknatısal alan çizgileri Şek. 6.26'da kabaca gösterildiği gibi, devinim doğrultusunu saran daireler olmak zorundadır. Yüklerin hızları büyük olur da $\gamma \gg 1$ olursa, ışınsal elektriksel alan çizgileri, ışınsal çizgiler yassı bir tekerlek halinde toplanacaklardır. Dairesel mıknatısal alan çizgileri de aynı tekerleğin içine toplanırlar. O zaman B'nin büyüklüğü hemen hemen E'ninkine eşittir. Yani, mıknatısal alanın gauss olarak büyüklüğü elektriksel alanın aynı yerde ve aynı andaki statvolt/cm büyüklüğüne hemen hemen eşittir.

Son iki bölüm boyunca Coulomb yasasından bu yana uzun bir yol aldık. Ama her adımda, göre'liğin ve elektrik yükü değişmezliğinin isterlerini özenle ve ısrarla izlemekte idik. Artık mıknatısal alanın varlığı ve bunun elektrik alanına bağlılığı bakımından ilginç bir bakışım bulunduğunu ve bunun bu genel ilkelerin bir zorunlu sonucu olduğunu görmeğe başlıyoruz demektir. Okuyuculara yeniden anımsatalım ki, tuttuğumuz yol elektromıknatıslık yasalarının ortaya çıkarılmasında ve aydınlanmasında tutulan tarihsel yol değildir. Elektriksel ve mıknatısal alanlar arasındaki çiftlenimin Denk. 58 içinde de beliren görünüşü, Michael Faraday'ın değişen elektrik akımları ile yaptığı deneylerde gün ışığına çıkmıştır. Ve bu, yukarda kutular içindeki denklemlerin yazılmasından 75 yıl önce olmuştur.

* Uzay içinde değişen alanlar için Denk. 58'in anlamı $E'(x',y',z',t') \neq E(x,y,z,t)$ vb'dir. Bu nedenle eğer t' anında üslü çatkının her yerinde gözlenecek alanları hesaplamak istersek, her (x',y',z') noktasında (x',y',z',t')'ye uyan bir t zamanını ve aynı zamandax,y,z'ye uyan x',y',z',t' konumluklarını kullanmak zorundayız. Örneğin kutu içindeki denklemlerin sağ yanına (x,y,z) noktasında t anındaki B_x ve B_y değerleri uygun düşerler.

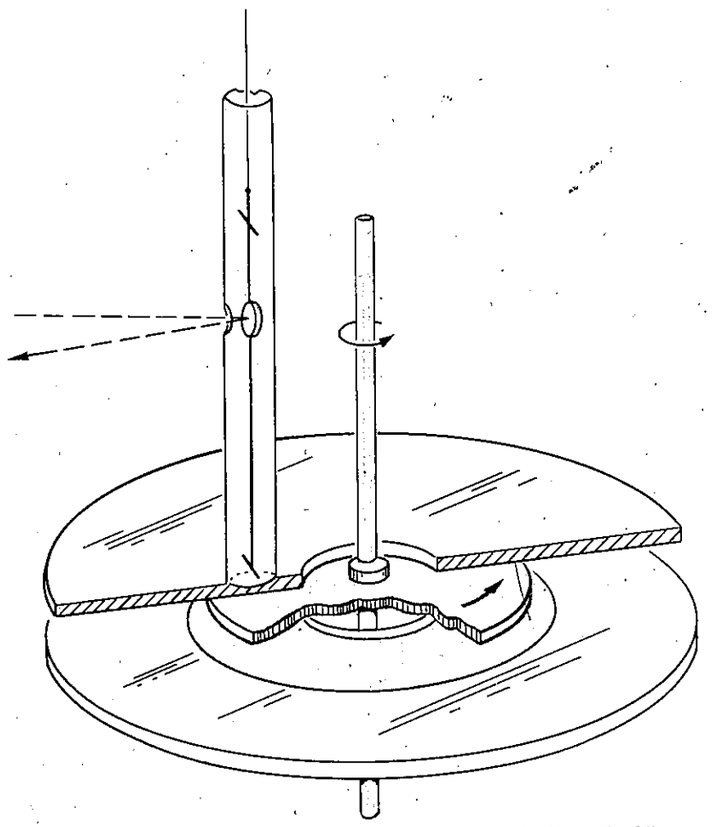
YÜK DEVİNİMİNİN MIKNATISAL ETKİSİ ÜZERİNE

(American Journal of Science (3) XV, 30-38, 1878)

Bu yazıda anlatılan deneyler, elektrikli bir cisim devinince, mıknatısal alan oluşturup oluşturmadığını sınamak için yapılmışlardır. Bir iletkenden geçen elektrik akımının mıknatısal etkisi iletkenle akım arasındaki karşılıklı etkileşime yorulabileceği için, ilgilendiğimiz soruyu oturtabileceğimiz bir kuramsal temel yoktur. Bununla birlikte bunu denemeye değer bulduk. Profesör Maxwell, "Treatise on Electricity" adlı yapıtının Kesim 770'inde, devinimli bir elektrikli yüzeyin mıknatısal etkisini hesaplamıştır; ama böyle bir etkinin bulunduğu üzerinde bu güne değin denel ya da kuramsal bir kanıt ortaya konamamıştır.

Kullanılan aygıt 21,1 cm çapında 0,5 cm kalınlığında bir ebonit tekerlektir ve bu tekerlek düşey bir eksen çevresinde saniyede 61 dönme yapacak biçimde döndürülebilir. Tekerleğin iki yanında 0,6 cm aralıkla cam levhalar tutturulmuştur ki, bunların çapları 38,9 cm'dir ve merkezlerinde 7,8 cm'lik birer delik vardır. Ebonit yaprağın iki yüzü de altın kaplanmıştır; cam yaprakların ise birer yüzüne halka biçiminde altın kaplanmıştır; bu kaplamanın dış ve iç çapları 24,0 cm ve 8,9 cm'dir. Cam yaprakların altın kaplı yüzleri ebonit tekerlek yanına ya da dışa çevrilebilir, ama hesapların kolay olması ve elektriklenmede belirsizlik olmaması için altın kaplı yüz hep ebonit tekerlek yanına çevrilmiştir. Genel olarak dış yapraklar toprağa bağlanmıştır; iç tekerlek ise kenarına 1 mm'nin üçte birine dek yanaşabilen bir uçla bir bataryaya bağlanmıştır. Tekerleğin kenarı geniş olduğu için bununla kenar arasında bir gerilim olmadan boşalma olamamaktadır. Elektrik bataryası ile tekerlek arasında, ...

(1) Anlatılan deneyler Berlin Üniversitesinde Profesör Helmoltz'un önerisi ile yapılmıştır ve deneylerin sonuçlanmasında kendisine çok şeyler borçluyuz. Böyle bir deney düşüncesi ilk kez 1868'de aklıma gelmiş ve defterime bu tarihte not düşmüştüm.



Şek. 6.27. Rowland'ın kullandığı aygıtın ana parçaları. Şeklin solundaki borunun içine mıknatıslanmış kısa iki iğne yatay olarak asılmıştır.

6.8 Rowland Deneyi

Daha önce Kesim 5.9'da belirttiğimiz gibi, bundan yüzyıl önce, bir telden akan akım gibi devinen yüklü cisimlerin de mıknatısal alan kaynağı oldukları açıkça belli değildi. Maxwell'in çalışmaları ile elektrik ile mıknatıslığın birleşik bir görünüş içinde görünmeleri, devinimli bir yükün mıknatısal alan uyaracağını belli ediyordu; ama bunun denel sınanması kolay başarılır bir iş değildi.

Durgun elektrik yüklü yaprakların deviniminin bir mıknatısal alan uyardığı kırınım ağlarını geliştirmekle ün yapmış Amerikalı büyük fizikçi Henry

Rowland ilk kez gösterdi. Rowland hünerli ve sağlıklı pek çok elektriksel ölçü yaptı; ama bunlardan hiç biri, onun deneysel yaratıcılığını, dönen bir yüklü tekerleğin mıknatısal alanını yüze çıkarması ve ölçmesi gibi göstermedi. Yüze çıkarılacak alan yerin mıknatısal alanının yüzbinde biri tutarında bir şeydi ki bunu ölçmek bugünün aygıtları ile bile görkemli bir deneysel başarıdır. Şek. 6.27'de Rowland'ın kullandığı aygıtın bir çizemini ve onun deneyini anlattığı makalenin ilk sayfasının kopyasını görüyorsunuz. Rowland'ın elde ettiği sonuçlar Hertz'in elektromıknatısal dalgaları buluşundan on yıl önce, Maxwell'in elektromıknatısal kuramına, çok coşkulu olmasa da, bağımsız bir destek olmuştur.

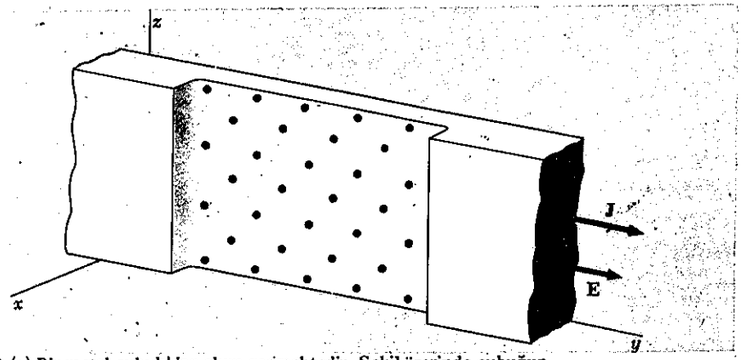
6.9 Bir Mıknatısal Alanda Elektrik İletimi: Hall Olayı

Mıknatısal alan içinde bulunan bir iletkenden akım geçecek olursa $(q/c)\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ kuvveti doğrudan yüklü tanecikleri etkiler. Ama bütün halinde iletkene de bir kuvvet etkisi olduğunu gözleriz. Bunun nasıl olduğunu görelim. Şekil 6.28 *a* sürekli akım geçiren bir metal çubuğun kesitini gösteriyor. Bir $\mathbf{E}$ alanının sürüklediği elektronlar sola doğru ortalama bir v hızı ile devinirler; buradaki v hızı, Böl. 4'de elektrik iletimini incelediğimiz zaman rastladığımız u hızı ile bir anlamdadır. İletim elektronları şekilde beyaz noktalar halinde gösterilmiştir. Siyah noktalar ise katı metal çubuğun sabit çatkısını oluşturan artı iyonlardır. Elektronlar eksi olduklarına göre y doğrultusunda bir akım var demektir. Bu akımın $\mathbf{J}$ yoğunluğu ile $\mathbf{E}$ alanı, $\mathbf{J} = \sigma E$ ile bağlıdırlar (σ iletkenlik). Şek. 6.28*a*'da akımın kendi oluşturduğu alandan başka mıknatısal alan yoktur ve biz de bu alanı görmezlikten geleceğiz. Şimdi x doğrultusunda bir $\mathbf{B}$ dış alanı uyarılmış bulunsun. Bu alan oluşur oluşmaz, yüklerin devinim halinin ne olduğu Şek. 6.28*b*'de görülmektedir. Elektronlar yollarından aşağı doğru sürüklenirler. Ama bu elektronlar metalden dışarı kaçamadıkları için, iletkenin tabanına birikirler. Bu birikme, tabanda eksi yük fazlalığı ile, tavanda buna karşı gelen artı yük fazlalığının oluşturduğu $\mathbf{E}_t$ alanının, elektronlara etkilediği yukarı dönük eE_t değerindeki kuvvet, aşağı yönelmiş $(e/c)\bar{v}\times B$ kuvvetini tam dengeleyinceye dek sürer. Kararlı duruma erişilince (ki bu çok çabuk olur) ortalama devinim yine yatay doğrultudadır; ama metalin içinde metal örgüsüne göre sabit olan konumluklardan gözlenen bir $\mathbf{E}_t$ enine elektrik alanı bulunur (Şek. 6.28*c*). Alan artı iyonlara aşağı doğru bir kuvvet etkiler. Bu elektronlara etkiyen $(-e/c)\bar{v} \times \mathbf{B}$ kuvveti, katı çubuğa aktarılmış olur. Çubuk kendini taşıyan cisme bu kuvveti iletir, taşıyan bir cisim yoksa aşağı doğru ivmelenir.

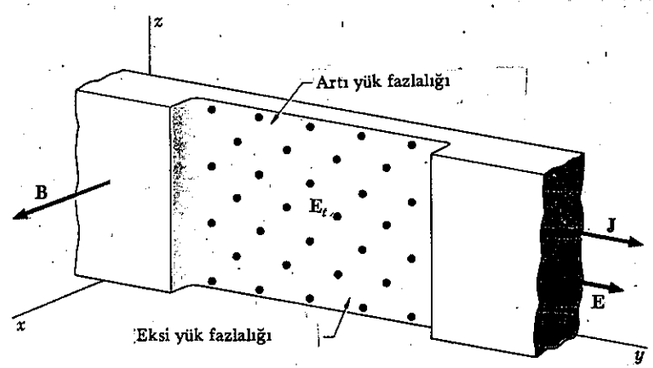
$\mathbf{E}_t$ enine elektrik alanının varlığı elektriksel yoldan doğrudan gösterilebilir (Şek. 6.29). Çubuğun P_1 ve P_2 gibi karşılıklı yerlerine teller bağlanır ve bu bağlanma yerleri, çubuktan akım geçirince $\mathbf{B}$ alanı sıfır iken aynı gerilimde olmasını sağlıyacak şekilde özenle seçilir. Tellerin öteki uçları bir duyarlı akım ölçere bağlanır. $\mathbf{B}$ mıknatısal alanı uyarılınca, bu çevrimde, P_1 ve P_2'nin artık aynı gerilimde olmadığını gösteren bir akım geçtiği gözlenir. Gerçekten anlattığımız düzenekte P_1 noktası, P_2'ye bakınca artı bir değer almıştır.

Bu olayı, 1879 yılında Johns Hopkins Üniversitesinde Rowland'ın yanında çalışan E. H. Hall bulmuştur. O günlerde metallerin iletkenliğinin içyüzünü bilen yoktu. Elektronun kendisi de henüz bilinmiyordu. Hall olayı en öğretici olaylardan biri olmuştur. Elektrik iletkenliği ile ilgili çağdaş araştırmalar ve hele yarı iletkenlerdeki çalışmalarda Hall-Olayı vazgeçemeyeceğimiz bir çalışma yöntemidir.

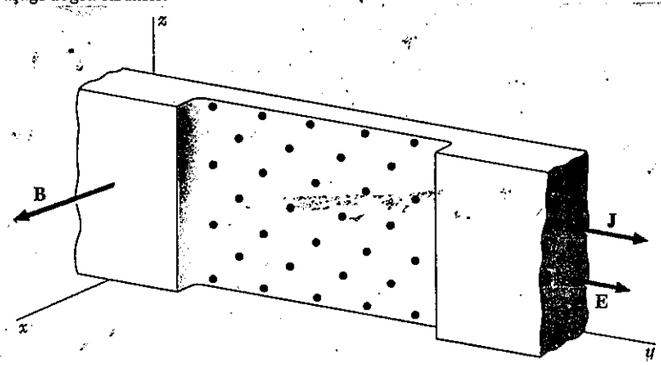
Bir akımın mıknatısal alanında olduğu gibi dış bir alan içinde bulunan ve akım geçiren bir iletkene etkiyen kuvvetin, iletim olayının ayrıntılarına bağlı olmadığını gördük. Ama Hall-Olayı akımı oluşturan yüklü tanecikler üzerinde bir şeyler açıklar. Şu noktaya iyi bakınız: Şek. 6.28'deki çubukta akım sağa doğru giden artı yüklerden ileri gelmiş olsaydı zıt yönlü enine bir $\mathbf{E}_t$ elektrik alanı oluşurdu. O halde P_1 ve P_2 noktaları arasındaki "Hall gerilim farkının" imi devinen yüklü tanelerin artı mı yoksa eksi mi olduğunu belli eder. Enine E_t alanının büyüklüğü nicel olarak



Şek. 6.28. (a) Bir metal çubuk'dan akım geçmektedir. Şekil üzerinde çubuğun yalnız bir kesimi görünüyor. Şekilde iletim elektronları beyaz noktalarla artı iyonlar, yani kristal örgüsü ise siyah noktalarla belirtilmiştir (burada boyut söz konusu değil). Şekilde oklar elektronların $\mathbf{v}$ ortalama hızını göstermektedir.



(b) x doğrultusunda bir mıknatısal alan uygulanıyor; bu alan devinen elektronları aşağı doğru sürükler.



(c) Değişmiş olan yük dağılımı enine $\mathbf{E}$ gibi bir elektrik alanı oluşturur. Bu alan içinde durgun artı iyonlar aşağı doğru bir kuvvet duyarlar.

$$qE_t = q\frac{\bar{v}}{c}B \quad \text{veya} \quad E_t = \frac{\bar{v}}{c}B \tag{63}$$

eşitliği ile belirlenir. Öteyandan yüklü tanelerin v ortalama hızı J akım yoğunluğuna

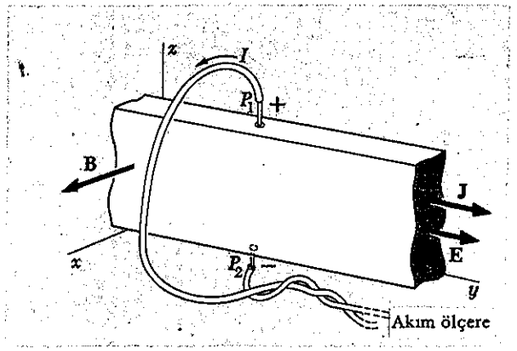
$$J = nq\bar{v} \tag{64}$$

eşitliği ile bağlıdır, burada n birim hacimdeki q yüklü tane sayısını göstermektedir. Denk. 63 ile 64'ü bir yere getirerek v'yi aradan çıkarabiliriz, böylece:

$$E_t = \left(\frac{1}{nqc}\right)JB \tag{65}$$

bulunur.

Buradaki E_t, J ve B, Şek. 6.29'daki gibi bir düzenekle ölçülebilir. E_t yalnız P_1 ile P_2 arasındaki gerilim farkının çubuğun kalınlığına oranı alınarak bulunur; J akım yeğinliğinin, çubuğun kesitinin yüz ölçümüne bölümüdür. Öyleyse $(1/nqc)$'yi bulabiliriz. Bu çarpanın adına alınan maddenin "Hall katsayısı" denir. Birçok metal için Hall katsayısı, atom başına kabaca bir iletim elektronu varsayılarak kestirilecek değer yakınlarındadır; gözlenen olayın imi de yüklü taneciklerin eksi olmaları varsayımına uygundur. Ama kimi metallerin Hall katsayıları *zıt işaretlidir!* Bu garip davranış metallerdeki elektronların kuantum kuramı gelişinceye dek şaşırtıcı bir çelişme halinde kaldı.



Şek. 6.29. Hall etkisi; akım geçiren biri iletkene enlemesine dik olarak bir mıknatısal alan uygulanacak olursa, iletken çubuğun karşı yüzeylerindeki noktalar arasında bir gerilim farkı oluştuğu gözlenir. Gözlenen noktalar arasında mıknatısal alan yokluğunda bir gerilim farkı yoktur. Bu, çubuğun içinde $\mathbf{E}_t$ gibi bir alan oluşması ile tutarlıdır. "Hall gerilimi"ni ölçmekle cm^3deki yüklü tane sayısını ve bunların iminin ne olduğunu anlayabiliriz.

Problemler

6.1 Şek. 5.1a'daki çevrimden 30 ampere'lik akım geçmektedir. Koşut tellerin aralığı 5 cm'dir. Tellerden birinin birim boyuna etkiyen kuvvet ne tutar?

6.2 Şekilde bir ince terazinin bir koluna asılmış dörtgen biçimli bir kangal görülmektedir. Bu kangal bir elektromıknatısın kutupları arasına asılmıştır ve kangalın yüzü kutuplar yüzeyine koşuttur. Mıknatısal alan göigesiz bölgede biteviyedir, telin üst kısmında ise önemsenmeyecek kadar küçüktür. Kangal 15 sarımlıdır ve alt kıyısı 8 cm'dir. Terazi dengeye getiriliyor ve sonra 0,500 amp'lik akım geçiriliyor. Dengeyi sağlamak için terazinin sağ kefesine 60,5 gram ağırlık eklemek gerekmişse B mıknatısal alanının gauss olarak değeri ne tutar? Bu yöntemin incelikli bir biçimi Standartlar Bürosunca mıknatısal alanların çok incelikli ölçüleri için kullanılmıştır.

6.3 Dairesel bir akım halkasının ekseni üzerinde bir noktada Denk. 41 ile verilen mıknatısal alanı elde alınız. Bu alanın eksen boyunca $-\infty$'dan ∞'a kadar çizgi tümlevini hesaplayın ve bununla

$$\int \mathbf{B}\cdot ds = \frac{4\pi I}{c}$$

yazımını doğrulayınız. Kapalı bir yol oluşturabilmek için çizgi tümlevinini "dönüş" parçasını niçin görmezlikten geliyoruz?

6.4 Bir tel parçası şekilde görülen saç firketesi gibi bükülmüştür. Telin yarı dairesel parçasının merkezi olan P noktasındaki mıknatısal alanın yazımını tam olarak bulun.

6.5 Bir hidrojen atomu bir protonla bunun çevresinde $a_0 = \hbar^2/me^2 = 0{,}53 \times 10^{-8}$ cm yarıçaplı dairesel bir yörünge üzerinde $v = e^2/\hbar$ hızıyla döndüğü anlaşılan bir elektrondan oluşmuş sayılabilir. Burada e elektronun yüküdür ve değeri $4{,}8 \times 10^{-10}$ esb ve Planck sabiti bölü 2π olan $\hbar \cong 10^{-27}$ erg/s alınabilir, m ise elektronun kütlesidir. Dolanan elektronun eşdeğer olduğu akım ne kadardır? Dolanan elektronun, protonun bulunduğu yerde oluşturduğu mıknatısal alanın gauss olarak yeğinliği ne tutar?

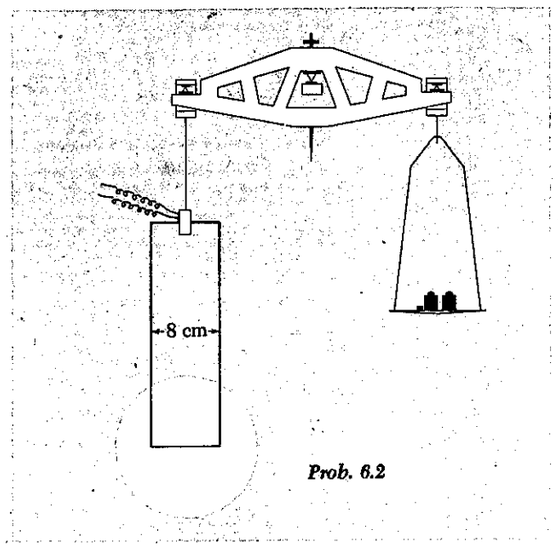
6.6 Büyük bir elektromıknatısa 5000 amp'lik doğru akım taşıyan iletkenlerin yapısı şöyledir: 5 cm çaplı alimünyum bir çubuk, dönüş iletkeni olarak kullanılan iç çapı 7 cm dış çapı ve 9 cm bir boru ile sarılmıştır. (Çubukla silindir arasındaki aralık oluşan ısıyı almaya yarayan bir yağ akımı ile doldurmuştur.) İletkenlerin her birindeki akım yoğunluğu iletkenin kesiti boyunca sabit olacaktır. Dış iletkenin dışında bulunan bir noktadaki B mıknatısal alanının (gauss) tutarını, bu noktanın iletkenin eksenine olan uzaklığının (cm) işlevi olarak hesaplayın ve bunu bir çizitle gösterin. Alimünyumun kendisinin veya arada bulunan yağın mıknatısal alan üzerine bir etkisi yoktur (Bak. Kesim 6.1)

6.7 Bir akım sarmalı 6 cm çaplı bir silindir üzerine de yalınkat 14 numara bakır tel sarmakla yapılmıştır. Sarmalın santimetresinde 5 sarım vardır ve bütün boyu 30 cm'dir. Teller çizelgesinde 14 numaralı bakır telin çapının 0,163 cm, ve 75°C 'de metresinin direncinin 0,010 ohm olduğunu görüyoruz. (Bu telin çok ısınmasını bekliyoruz!) Eğer bu sarmal 24 volt'luk bir üretecin kutupları arasına bağlanırsa, içindeki mıknatısal alanın tutarı kaç gaussdır; watt olarak güç yitiği ne tutar?

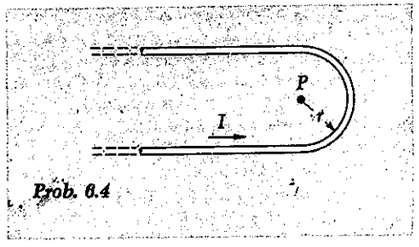
Yanıt: 520 gauss; 200 watt.

6.8 Bir x, y, z konumluk çatkısında baş nokta yöresinde bir yerde, şiddeti 100 stat-volt/cm olan ve x ekseni ile 30°, y ekseni ile 60°'lık açı yapacak şekilde yönelmiş bir $\mathbf{E}$ alanı var. İkinci bir F' çatkısının eksenleri biraz öncekininkine koşuttur, ama bu birinciye göre 0,6 c hızı ile artı y ekseni doğrultusunda devinmektedir. Bu F' çatkısında bulunan bir gözlemcinin ölçeceği mıknatısal alanın doğrultusunu ve yönünü bulunuz? Bu gözlemcinin bildireceği mıknatısal alan nedir?

6.9 Bir okyanus akıntısı yaklaşıkça 1 m/s hızla akmaktadır ve bu akıntının bulunduğu bölgede yerin mıknatısal alanının düşey bileşeni 0,35 gauss kadardır. Deniz suyunun bu bölgedeki iletkenliği 0,04 (ohm cm)$^{-1}$'dir. Devinimden ileri gelen $(v/c) \times B$'den ayrı hiç bir yatay $\mathbf{E}$ bileşeni bulunma-



Prob. 6.2



Prob. 6.4

dığını düşünerek k m başına ampere olarak yatay elektrik akımının yoğunluğunu bulunuz. Bir şişe deniz suyunun yerin alanı içinde bu hız ile devindirmekte olsanız bu suyun içinde böyle bir akım doğar mı idi?

6.10 Işığın c yayılma hızına bakınca küçük olan hızlar için alan dönüşümleri yalnızca,

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B} \qquad \mathbf{B}' = \mathbf{B} - \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{E}$$

biçiminde yazılabilir, burada $\mathbf{v}$ üslü konumluk çatkısının üssüzden ölçülen hızıdır. Şimdi $\mathbf{v} = \hat{x}\beta c$'nin Denk. 58'e uyan özel bir duruma rastladığını düşünün ve yukardaki denklemlerin $(1 - \beta^2)^{1/2} \approx 1$yaklaşıklığı içinde Denk. 58 ile bağdaşan sonuçlar verdiğini gösterin. Üslü konumluk çatkısı yerin mıknatısal küzeyi bölgesine doğru giden bir jet uçağı olsun, ve bu uçuş bölgesinde mıknatısal alanın değeri 0,4 gauss ve düşeyle yaptığı açı 30° olsun. Kuzey yarı kürede bulunduğumuza göre, alan aşağı doğru yönelmiş olacaktır. Uçağın konumluk çatkısında, mıknatıstık alan içinde devinim yüzünden doğan ek elektrik alanı bileşeninin doğrultusu nedir? Bu alanın statvolt/cm cinsinden değeri ne tutar?

6.11 Denk. 58'i kullanarak $\mathbf{E} \cdot \mathbf{B}$'nin Lorentz dönüşümü bakımından değişmezliğini gösterin. Yani $\mathbf{E} \cdot \mathbf{B}$'nin bir eylemsizlik çatkısında bir değeri varsa, bütün eylemsizlik çatkılarındaki değerlerinin aynı olduğunu gösterin. Benzerince $E^2 - B^2$'ninde bir Lorentz dönüşümü için değişmezliğini gösterin.

6.12 $B_x = 0, B_y = 0, B_z = B_0$ gibi z doğrultusunda biteviye bir alana uyan bir yöngü gerilimi tasarlama olanağını tartışın.

6.13 $\mathbf{A}$ yöngü potansiyelinin $\mathbf{B}$ mıknatısal alanına bağlılık biçiminin, $\mathbf{B}$'nin $\mathbf{J}$ akım yoğunluğuna bağlılık biçiminin aynı olduğuna dikkat edin. Yani dön $\mathbf{A} = \mathbf{B}$ iken dön $\mathbf{B} = (4\pi/c)\mathbf{J}$'dir. $\mathbf{B}$'nin kapalı bir yol boyunca alınan çizgi tümlevinin $4\pi/c$ kez bu yolun sardığı akım ifadesine, $\mathbf{A}$ yöngüsü halinde ne uyar? Kesiti boyunca biteviye dağılımlı ve eksene koşut bir akım geçiren silindirsel uzun bir metal çubuğun uyardığı mıknatısal alanı ele alın. Böyle bir akım dağılımının verdiği alanın ne olduğunu biliyorsunuz. Bu akım dağılımının ve mıknatısal alan çizgilerinin biçimini çizin. Şimdi yukarki benzerliği kullanarak, sonsuz uzun bir sarmalın alanına uyan yöngü gerilimini bulun. Bu halde, mıknatısal alanın kendisinin sıfır olduğu bir bölgede yöngü geriliminin sıfır olmadığı belirtmeğe değer.

6.14 bir yönlü akımlar birbirlerini çektiklerine göre, Prob. 6.6'daki iç iletkendeki gibi katı bir iletken çubuktan akan akımın, çubuğun eksenine yakın bölgelerde birikme eğilimi göstereceği düşünülebilir. Bu demektir ki, iletim elektronları metalin içinde her zaman olduğu gibi biteviye bir dağılım gösterecekleri yerde, akımın çoğu eksen boyunca akar. Bunun oluşmasını önleyen ne olabilir?. Acaba bir ölçüde böyle bir olay gözlenir mi? Eğer böyle bir olay var ise bu olayı yüze çıkaracak bir deney önerebilir misiniz?

6.15 Bir elektron ışınları tüpünde v hızı ile koşut devinen yan yana iki elektronun aralarındaki hızlarına dik aralık, r'dir. Laboratuvar çatkısından a gözlendiğine göre, bunlardan birine ötekinin varlığı dolayısı ile etkiyen kuvvet nedir? Eğer v, c'ye bakınca çok küçük olursa, yanıt olarak e^2/r^2 yazımını alıp işi orada bırakabiliriz. Ama v küçük değilse uyanık davranmanız gerekir.

(a) Yanıtı bulmak için en kolay yol şudur: Elektronlarla birlikte devinen gözlem çatkısına geçiniz. Bu çatkı içinde her iki elektron da durgun haldedir, ve aralarındaki uzaklık yine r'dir (Niçin?); ve kuvvet yalnızca e^2/r^2 olur? Ama şimdi kuvvet dönüşümünü kullanarak bu kuvvet yazımını laboratuvar çatkısına dönüştürün (Denk. 5.31). (Üslü çatkının hangisi olduğuna dikkat etmek gerekir; laboratuvar çatkısındaki kuvvet elektron çatkısındakinden büyük müdür, yoksa küçük mü?

(b) Aynı sonucu tümcek "lab" çatkısında işlemek ile de bulabilmeliyiz. Laboratuvar çatkısında elektron 1'in bir an bulunduğu yerde, elektron 2'den gelen bir elektriksel ve bir de mıknatısal alan vardır (bak. Şek. 6.26). Bu alanlar içinde v hızı ile devinen elektron 1'e etkiyen net kuvveti hesaplayın, ve bu kuvvetin (a) halinde elde ettiğimiz kuvvetle aynı olduğunu gösterin. Alanların ve kuvvetlerin doğrultusunu çizitle gösterin.

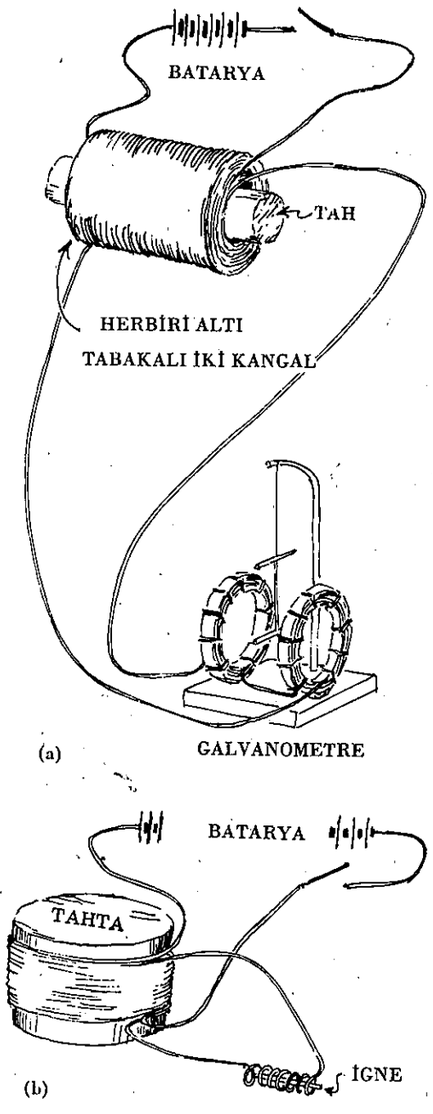
(c) Yan yana giden elektronların hızları $v \to c$ ereyinde(limitinde) aradaki kuvvet üzerinde bundan önceki öğrendiklerimizin ışığı altında ne diyebilirsiniz?

Bölüm 7

Elektromıknatısal İrgitim

Maxwell Denklemleri

7.1	Faraday'ın Buluşu	186
7.2	İletken Bir Çubuğun Düzgün Bir Mıknatısal Alan İçinde Devinimi	188
7.3	Bir İletken Çerçevenin Düzgün Olmayan Mıknatısal Alan İçinde Devinimi	190
7.4	Devinimli Alan Kaynağı ile Devinimsiz Bir İlmek	198
7.5	Evrensel Bir İrgitim Yasası	201
7.6	Karşılıklı İrgitim	203
7.7	Bir "Karşılık" Teoremi	206
7.8	Öz–İrgitim	208
7.9	Öz–İritimli Bir Çevrim	209
7.10	Bir Mıknatısal Alanda Biriken Enerji	211
7.11	"Bir Eksiklik Var"	213
7.12	Yer Değiştirim Akımı	216
7.13	Maxwell Denklemleri	218
	Problemler	223



Şek. 7.1.(a-e) Faraday'ın "Elektrikte denel araştırmalar" adlı kitabında anlatılan bazı deneylerin yazarca yorumu.

7.1 Faraday'ın Buluşu

"1. Bir gerginlik elektriğinin yakınlarında bir zıt elektriklenmeğe neden olma gücü İRGİTİM (İndüksiyon) dediğimiz genel bir terim ile anlatılmıştı: Bu terim fen diline girdiği biçimi ile, aynı genel anlamda, elektrik akımlarının yakınlarında kendi halinde bulunan yani akım taşımayan iletken maddeler içinde özel bir hal oluşturma gücünü de anlatabilir. İşte ben bu yazıda bu terimi bu anlamda kullanmak istiyorum.

2. Elektrik akımları ile irgitim olayının kimi etkileri gözlenmiş ve tanınmış bulunuyor: Mıknatıslanma bunlardan biri; ötekiler ise Ampere'in yaptığı bir bakır tekerleğin yassı bir akım sarmalı ile çekilmesi deneyi, ve yine Ampere'in Arago'nun çok ilginç deneyini eleştromıknatıslarla yinelemesi deneyi ve daha başka deneyler. Ama yine de bunların hepsinin akımla irgitimden ileri gelen etkiler olduğuna inanılmıyordu; özellikle demir dışında kalan maddelerde gözlenen olaylar yitip gittiği halde, gerilim elektriği ile sağlanan irgitim yüklenmesinin sürüp gittiği çok sayıda cisimde, üstelik devinimli yüklerin irgitim etkisi de uyarılabilmekte idi.

3. Bundan başka: ister Ampere'in güzel kuramı, ister bir takım kısıtlamalarla başka bir kuram benimsensin, ya da bunlara usa yatkın kısıtlamalar getirilsin her elektrik akımına, uygun yeğinlikte ve akımla dik açı yapan bir mıknatıslık etkisi eşlik ettiği halde, bu etki küresi içine yerleştirilen iyi iletkenler içinde, bir irgitim akımının oluşmaması, ya da böyle bir akıma kuvvetce eşdeğer duyulabilir etkiler oluşturmaması anlaşılır gibi değildi.

4. Bu düşünceler ve bunların sonuçları, bende bayağı mıknatıslıktan elektrik yaratma umutlarını uyandırdı ve çeşitli zamanlarda, elektrik akımlarının irgitici etkilerini denel olarak incelemek için içimden bir dürtü duymakta idim. Son zamanlarda olumlu sonuçlara vardım; böylece umutlarım yalnız gerçekleşmiş olmakla kalmadı, Arago'nun mıknatıslık olaylarını tam olarak açıklayacak kapıyı arkasına kadar açan bir anahtar elde etme olanağı sağladığım gibi elektrik akımları ile ilgili en önemli olayların kimini geniş biçimde etkileyebilecek yeni bir halin ortaya konulmasını sağladım.

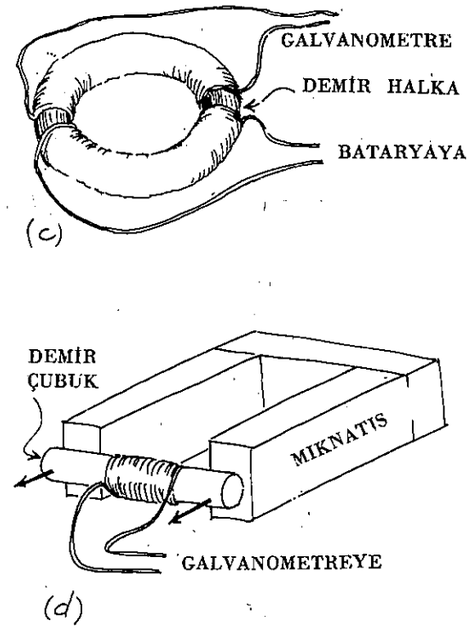
5. Anlatmak istediğim bu sonuçlar, elde ettiğim gibi değil, konunun bütününe keskin çevreli bir görünüş verecek biçimde sunulacaktır".

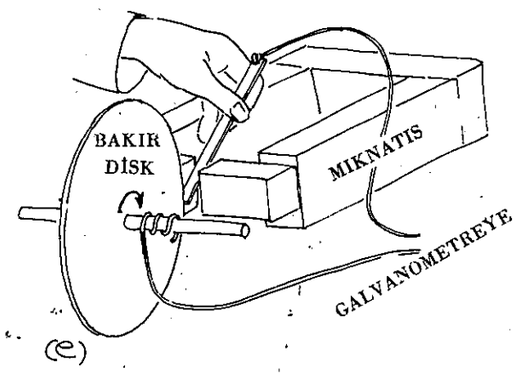
Michael Faraday'ın elektromıknatısal irgitimi (indüksiyonu) buluşu üzerindeki yazısı böyle başlamıştı. Aldığımız kesim Faraday'ın 1831'de yayınladığı bir çalışmanın bir bölümüdür. Bu kesim 1839'da Londrada yayınlanmış olan *Elektrikde Denel Araştırmalar* adlı yapıttan çıkarılmıştır. Yapıtın bu bölümünden sonra, Faraday gün ışığına çıkardığı, mıknatısal eylem etkisi ile elektrik üretme olanağını bir düzineyi aşkın deney içinde bütün ana çizgileri ile anlatmaktadır.

Faraday'ın "gerginlik elektriği" sözünden anladığı, duruk yüklerdir ve ilk cümlesinde sözünü ettiği irgitim bizim Böl. 3'de incelediğimizden başka bir şey değildir: Bir yerde bir yük bulunması yakın iletkenlerdeki yüklerin yeniden düzenlenmesine yol açar. Faraday'ın uğraştığı soru, bir elektrik akımı yakınlarda bulunan başka bir iletkende niçin bir elektrik akımı oluşturmadığı idi?

Oersted'in buluşundan sonra elektrik akımlarının mıknatısal alan uyardığı iyice araştırılmıştı. Burada kullanılan "galvani" akımının kaynağı o zamanki laboratuvarların biricik kaynağı yani volta pili bataryaları idi. Bu gibi akımların en duygun ölçeri ise bir galvanometre (galvani akım ölçeri) idi. Bu alet iki tel kangalı arasına oturtulmuş bir pusula iğnesi ya da ince bir ipe asılmış özgürce dönebilen mıknatıslı bir iğneden başka bir şey değildi. Arada bir, bu kangalların dışında 1'nci iğneye sıkıca 2'nci bir iğne daha tutturulur ki, bunun görevi yerin mıknatıslık alanının etkisini karşılamaktır (Şek. 7.1 *a*). Şek. 7.1 *b*'den *e*'ye değin giden resimler Faraday'ın irgitim deneylerinden kimini gösteriyor. Bu fencinin nasıl bir yaratıcı güçle çalışmağa koyulduğunu, gördüğü olayları anlamak için nasıl uyanık ve açık düşünce ile davrandığını görüp değerlendirebilmek için denel bilimlerin bir klasik yapıtı olan kendi kitabını okumak gerek.

Faraday ilk deneylerinde sürekli bir akımın yakınında bulunan bir çevrimde ölçülebilir bir etki uyarmadığını görerek çok şaşmıştı. O çalışmaları için Şek. 7.1 *a*'da bir örneğini gördüğünüz birçok akım kangalları yapmış ve bu kangalların telleri birbirine çok yakın gelecek ve ama değmeyecek biçimde aralarına yalıtım kâğıdı ya da bez koyarak sıkıca sarmıştı. İletkenlerden biri bir galvanometre ile bir çevrim oluşturuyordu. Öteki iletkenden ise, bir batarya'nın verdiği kuvvetli bir akım geçiyordu. Ama ne yazık ki, akımölçerde de hiç bir kıpırdama gözlenmiyordu. Ama Faraday bu deneylerin birinde,akım-





Şek. 7.1'in sonu.

ölçerin çevrim kapandığı ya da açıldığında hafifçe kımıldadığını gözledi; bu ipucunu izleyerek, başka bir iletkenden irgitimle akım oluşturmakta, *kararlı* akımların değil, *değişen* akımların etkili olduğunu hiç bir kuşkuya yer bırakmayacak biçimde ortaya koydu. Çalışmanın bu aşamasında Faraday parlak denel hünerlerinden birini gösterdi; kısa akım atımları için iyi bir ölçü aygıtı olmadığını gördüğü akımölçeri bir yana bırakarak yerine, içine bir çelik iğne yerleştirdiği küçük bir akım kangalı aldı. (Şek. 7.1 *b*). O zaman deneyci, birinci çevrim kapandığı zaman ikincide irgitimle doğan akım atımının iğneyi mıknatıslı bıraktığını anladı; birinci çevrim kesilecek olursa irgitimle oluşan akım atımı iğneyi zıt yönde mıknatıslıyordu.

İşte Faraday'ın kendi anlattığı başka bir deney:

"Geçen deneyde teller birbirine yakın konmuş, ve irgitleyici çevrimin bataryaya bağlanması ile gerektiğinde irgitim etkisi sağlanmıştır; ama bu özel eylemin yalnız, çevrimi kapama ve kesme anlarında oluşabildiği düşünülebileceğinden irgitim başka bir yoldan da oluşturulmuştur. Bir kaç metrelik uzunca bir bakır tel, W biçimli geniş zigzaklar halinde bükülmüş ve büyük bir kartonun bir yüzüne tutturulmuştu; ikinci bir tel de tam aynı biçimde bükülerek ikinci bir karton üzerine tutturulmuş, ve böylece teller yan yana getirilince boylu boyunca çakışmaları sağlanmıştı. Bu tellerden biri akımölçere, öteki ise bir volta pili bataryasına bağlanmıştır. Sonra birinci tel ikinciye doğru yaklaştırılınca akımölçer iğnesinin saptığı, sonra tel uzaklaştırılınca, iğnenin zıt yönde oynadığı gözlenmiştir. Teli önce yaklaştırıp sonra uzaklaştırmakla, ve bu işlemi iğnenin salınımları ile uyumlu biçimde yinelemekle, iğnenin salınımları genişleyip gidiyordu; ama tellerin yaklaşıp uzaklaşması durursa, iğne de hemen eski yerine dönüp duruyordu.

Teller birbirine yaklaştırılırken irgitim akımı ile irgitici akım zıt yönde, teller uzaklaşırken aynı yönde oluyordu. Teller durunca irgitim akımı kesiliyordu".

Bu bölümde Faraday'ın yukarda anlattığımız deneylerle araştırdığı elektromıknatısal irgitimi inceleyeceğiz. Bu günkü görüşümüze göre, irgitim bir mıknatısal alan içinde devinen bir yüke etkiyen kuvvetin doğal bir sonucudur. Dar anlamı ile, irgitim yasasını, bildiklerimizden çıkarabiliriz. Faraday'ın bu bölümün başında verdiğimiz bilimsel bildirisinin sonundaki deyimine uyarak, olayın bütününe en keskin çevreli görünüşü verebilmek için, olayın tarihsel gelişme sırasından ayrılarak dersi işleyeceğiz.

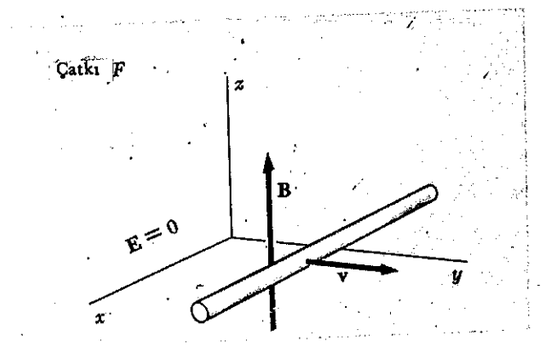
7.2 İletken Bir Çubuğun Düzgün Bir Mıknatısal Alan İçinde Devinimi

Şekil 7.2*a*da görülen doğru bir tel parçasının veya ince bir metal çubuğun v gibi sabit bir hızla kendi boyuna dik doğrultuda devindiği düşünülmektedir. Çubuğun içinde devindiği uzay bölgesi, zamanla değişmeyen biteviye bir **B**, mıknatısal alanı yatağıdır. Böyle bir alan bütün şeklin bulunduğu bölgeyi kapsayan büyük bir sarmal ile oluşturulabilir. Konumlukları x, y, z ile gösterilen bir F gözlem çatkısı sarmalın devinimsiz kaldığı çatkıdır. Devinimli çubuk yokken bu çatkı içinde bir elektrik alanı yoktur, yalnız biteviye **B** mıknatısal alanı vardır.

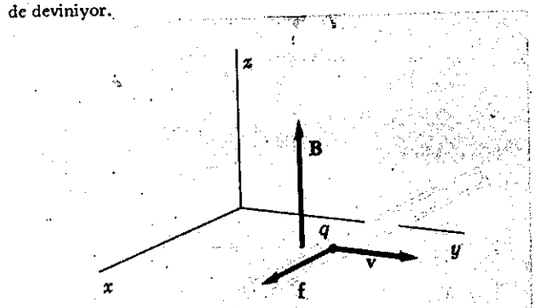
Çubuk iletkendir, yani içinde yüklü taneler bulunmaktadır; bu yüklü taneler bir kuvvet etkisinde kalınca devinirler. Çubukla birlikte sürüklenen bir yüklü parçacık, örneğin Şek. 7.2 *b*'deki q yüklü taneciği, **B** mıknatısal alanı içinde devinmek zorundadır ve dolayısı ile

$$\mathbf{f} = \frac{q}{c}\mathbf{v} \times \mathbf{B} \qquad (1)$$

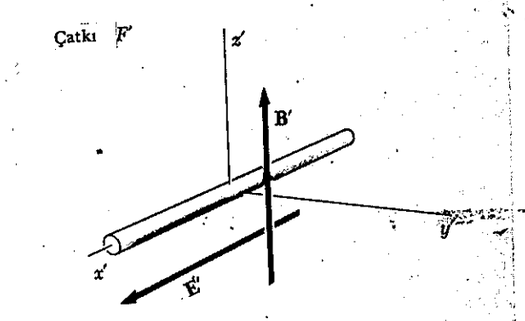
değerinde bir kuvvet etkisinde kalır. **B** ve v Şek. 7.2'deki gibi yönelmiş iseler, artı q yüküne etkiyen kuvvet artı x ekseni boyunca yönelmiştir; ve çoğu iletkenlerde olduğu gibi, yüklü tanecikler eksi yüklü elektronlar ise, kuvvet zıt yönde yönelmiş olur. Ama ister artı, ister eksi yüklü taneler ya da her ikisi birden devinsin, sonuç birdir.



Şek. 7.2.a İletken bir çubuk bir mıknatısal alan içinde deviniyor.



(*b*) Çubukla devinen her q yükü $(q/c)\mathbf{v}\times\mathbf{B}$ gibi bir kuvvetle etkilenir.



(*c*) F' gözlem çatkısı çubukla birlikte devinmektedir; bu çatkı içinde bir $\mathbf{E}'$ elektrik alanı vardır.

Çubuk sabit hızla devinime koyulduktan ve olaylar kararlı hale girdikten sonra, Denk. 1'in verdiği f kuvveti, çubuğun içinde eşit ve karşıt yönlü bir kuvvetle karşılanmalıdır. Bu, çubuğun içinde oluşan bir elektrik alanı ile ancak sağlanabilir. Elektrik alanı şöyle oluşur: f kuvveti eksi yükleri çubuğun bir ucuna doğru iter ve böylece öteki ucu artı yüklü bırakır. Bu durum, çubuğun içinde her yerde

$$q\mathbf{E} = -\mathbf{f} \qquad (2)$$

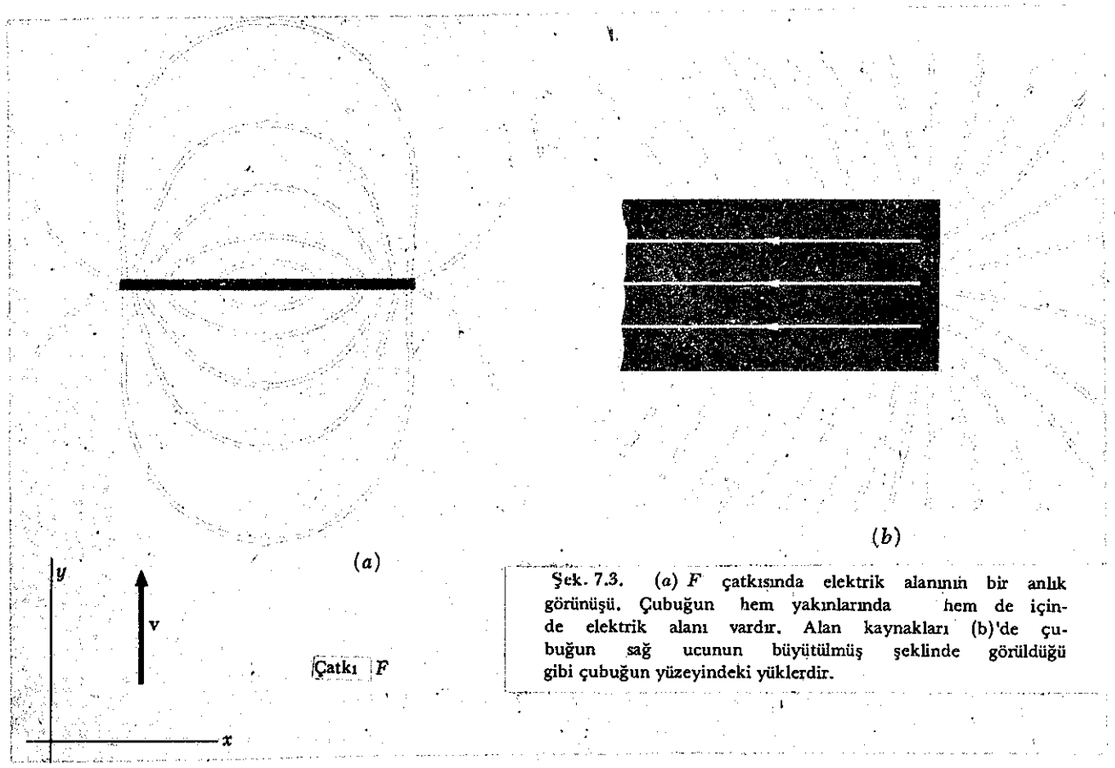
kuvvetini sağlayacak **E** değerinde bir elektrik alanı doğup gelişinceye dek sürer. Sonra yüklerin çubuğa göre devinimi durur. Bu yük dağılımı çubuğun içinde olduğu kadar dışında da bir elektrik alanı doğmasına yol açar. Dıştaki alan ayrı iki yerde kümelenmiş artı ve eksi yüklerin alanına benzer, bir farkla ki, yükler çubuğun tam uçlarına toplanmış değildir, çubuk boyunca dağılmışlardır. Dış alan Şek. 7.3 *a* .'daki çizemde* gösterilmiştir. Şekil 7.3 *b* çubuğun artı ucunun büyütülmüş bir görünüşüdür; şekilde çubuğun yüzeyi üzerindeki yük dağılımı ile, içteki ve dıştaki bazı alan çizgileri görülmektedir. F çatkısı içinde herhangi bir anda olayların, görünüşü budur.

Şimdi bu dizgeyi çubukla birlikte devinen F' çatkısından gözleyelim. Bir an için çubuğu bilmezlikten gelirsek, Şek. 7.2 *c*,de gösterilen bu F' çatkısında Denk. 6.62'nin verdiği gibi bir $\mathbf{B}'$ mıknatısal alanı ile biteviye bir elektrik alanı gözleriz ki, bu mıknatısal alan, v küçük ise **B**'den çok farklı değildir (Denk. 6.58):

$$\mathbf{E}' = -\frac{\mathbf{v}'}{c} \times \mathbf{B}' = \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B}' \qquad (3)$$

Çubuğu dizgeye katmakla bütün yaptığımız, biteviye bir elektrik alanı içine devinimsiz bir iletken çubuk koymaktır. Burada Şek. 3.6'daki metal kutu halinde, ya da elektrik alanı içinde bulunan herhangi bir iletken halinde olduğu gibi, çubuğun yüzeyi üzerinde içteki alanı sıfır yapacak bir yük dağılımı oluşacaktır. $\mathbf{B}'$ mıknatısal alanının varlığının, bu duruk yük dağılımı üzerine hiç bir etkisi yoktur. Çünkü çubuk dolayısıyle yükler F''de devinimsizdir. Şekil 7.4 *a*,F'

* Çizem: Şema



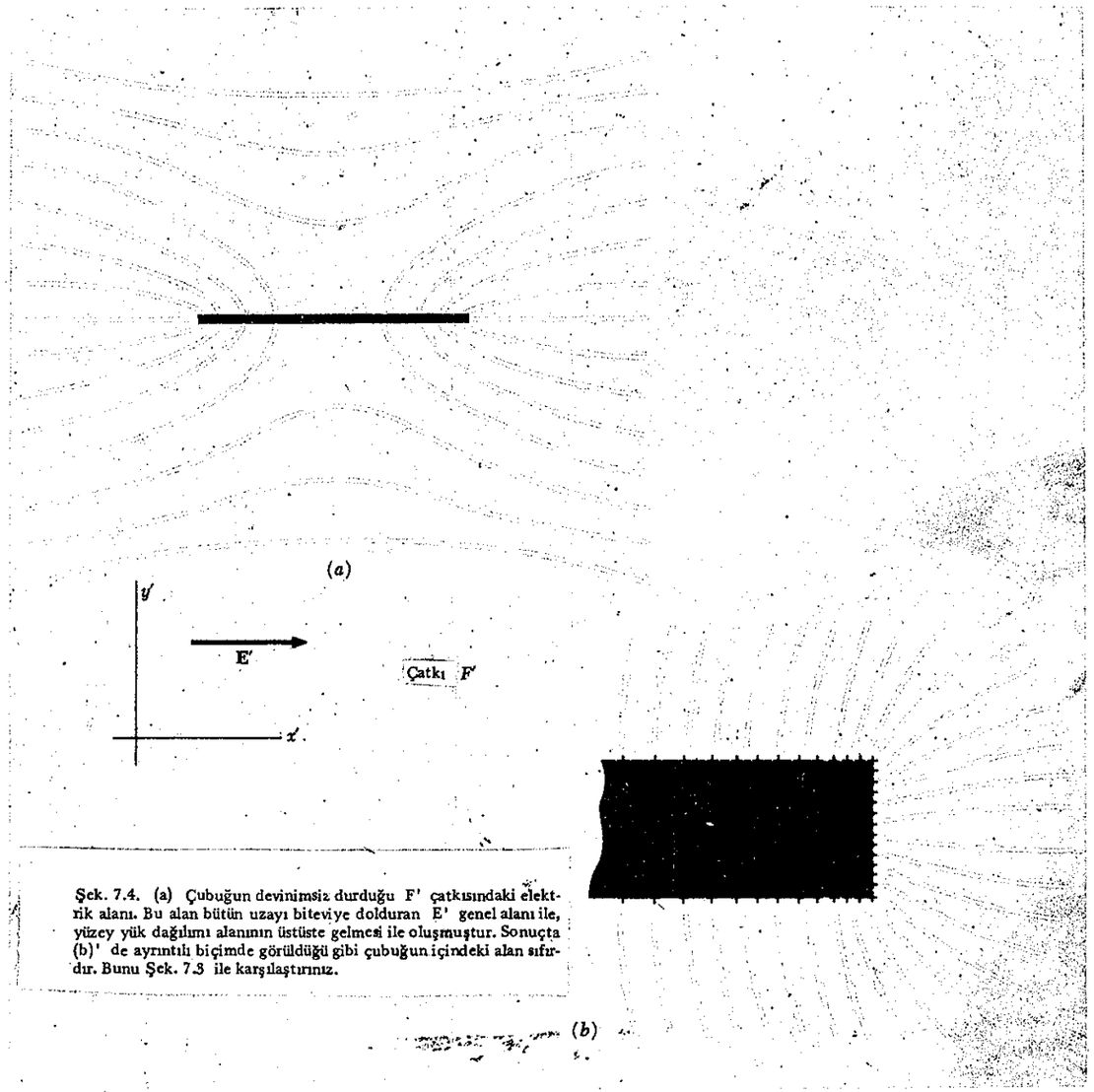
Şek. 7.3. (a) F çatkısında elektrik alanının bir anlık görünüşü. Çubuğun hem yakınlarında hem de içinde elektrik alanı vardır. Alan kaynakları (b)'de çubuğun sağ ucunun büyütülmüş şeklinde görüldüğü gibi çubuğun yüzeyindeki yüklerdir.

çatkısındaki bazı elektrik alan çizgilerini göstermektedir, ve Şek. 7.4 b'deki çubuğun ucunun büyütülmüş görünüşünde çubuğun *içindeki* elektrik alanının sıfır olduğu görülmektedir.

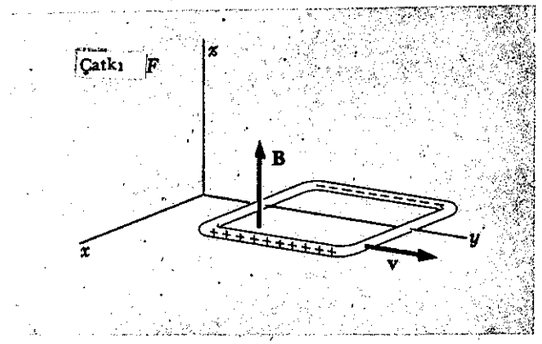
Lorentz büzülmesi $(v/c$ cinsinden ikinci basamaktan bir olay) dışında F çatkısında bir anda gözlenen yük dağılımı F' çatkısında görünen yük dağılımının aynıdır. Şek. 7.3'deki elektrik alanının değişikolmasının nedeni, bu alanın yalnız çubuktaki yüzey yük dağılımından ileri gelmesi, oysa Şek. 7.4'deki elektrik alanının, yüzey yük alanı ile bu gözlem çatkısındaki alanının üstüste gelmesi ile oluşmasındandır. F'deki bir gözlemci, "çubuğun içinde $\mathbf{E} = -(\mathbf{v}/c) \times \mathbf{B}$, değerinde bir elektrik alanı gelişti, ve bu alan $q\mathbf{E} = -q(\mathbf{v}/c) \times \mathbf{B}$ gibi bir kuvvet etkileyerek $q(\mathbf{v}/c) \times \mathbf{B}$ kuvvetini dengeledi; bu dengeleme olmasa, bu kuvvet her q yükünü çubuk boyunca devindirir" derdi. F'deki bir gözlemci ise: "çubuk içinde elektrik alanı yoktur, burada biteviye bir mıknatısal alan varsa da, bundan bir kuvvet doğmaz, çünkü devinen yük yoktur". derdi. Bu söylenenlerin ikisi de doğrudur.

7.3 Bir İletken Çerçevenin Düzgün Olmayan Bir Mıknatısal Alan İçinde Devinimi

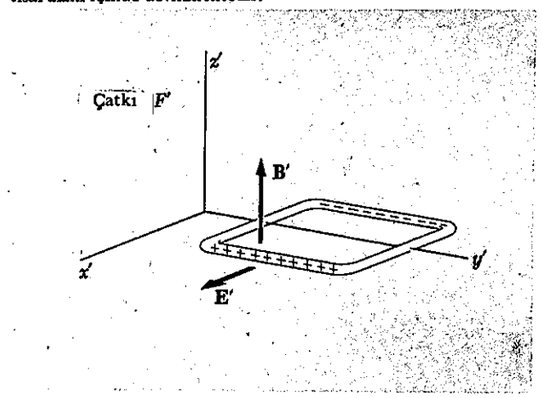
Bir iletken telden Şek. 7.5'de görüldüğü gibi dörtgen biçimli bir parçayı biteviye $\mathbf{B}$ mıknatısal alanı içinde sabit hızla devindirirsek ne olacağını kestirebilmek için, F' çatkısına geçerek, böyle bir ilmeği biteviye bir elektrik alanı içine koyduğumuz zaman ne olacağını araştırmamız gerekir. Açıkca gö-



Şek. 7.4. (a) Çubuğun devinimsiz durduğu F' çatkısındaki elektrik alanı. Bu alan bütün uzayı biteviye dolduran E' genel alanı ile, yüzey yük dağılımı alanının üstüste gelmesi ile oluşmuştur. Sonuçta (b)' de ayrıntılı biçimde görüldüğü gibi çubuğun içindeki alan sıfırdır. Bunu Şek. 7.3 ile karşılaştırınız.



Şek. 7.5. (a) Burada bir tel çerçeve biteviye bir **B** mıknatısal alanı içinde devinmektedir.



(b) Çerçevenin devinimsiz bulunduğu F' çatkısında gözlenince, alanlar $\mathbf{B}'$ ve $\mathbf{E}'$ olur.

rüleceği gibi, dörtgenin kıyıları kenarları bir tutam yük edinir, hepsi bu kadar. Şimdi F çatkısındaki $\mathbf{B}$ alanı, zamanla değil, ama uzay içinde değişsin. Böyle bir alanı gözünüzde canlandırabilmek için, Şek. 7.6'da, alan kaynağı olarak kullanılan kısa bir sarmalın oluşturduğu $\mathbf{B}$ alanını çizdik. Bu sarmal ve akım kaynağı F çatkısının başlangıç noktasına yakın bir yerde durmaktadır. (Daha önce, F çatkısında elektrik alanı bulunmadığını söyledik; mıknatısal alan uyarmak için belirli dirençte bir sarmal kullanırsak, bataryaya ve çevrime bağlı bir elektrik alanı bulunacaktır. Ama bu problemimiz için önemli değildir ve bunu bilmezlikten gelebiliriz, ya da sarmalı ve bataryayı bir metal kutu içine kapayabiliriz.)

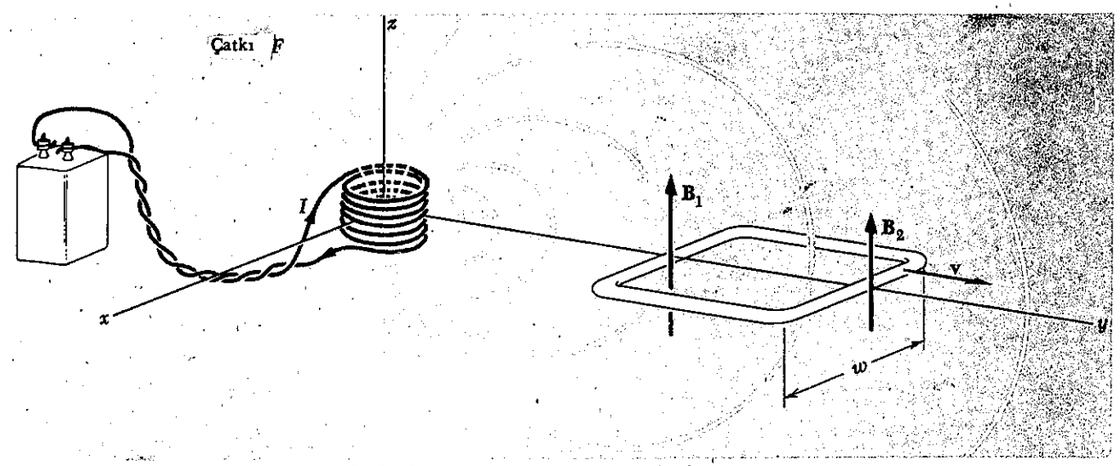
Şimdi F çatkısı içinde y doğrultusunda v hızı ile devinen iletken ilmeğinin bir t anında sol kıyısının bulunduğu yerdeki alan yeğinliği B_1 ve sağ kıyısınınkinde ise B_2 olsun (Şek. 7.6). Bu iletken ilmeği ile birlikte devinen bir q yüküne etkiyen kuvveti f ile gösterelim. Bu kuvvet bu anda, yükün ilmek içindeki yerine bağlıdır. Şimdi f'nin ilmek çevresi boyunca çizgi tümlevini hesaplayalım: İlmeğin devinim doğrultusuna koşut kıyıları boyunca, f, yola diktir ve bu tümleve hiç bir katkıda bulunmaz. Uzunlukları w, olan devinim doğrultusuna dik öteki iki kıyı boyunca alınan tümlevlerin tüm çizgi tümlevine katkısı,

$$\int \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s} = \frac{qv}{c}(B_1 - B_2)w \qquad (4)$$

olur. Eğer q yükünün bütün ilmek boyunca yeterince kısa bir süre içinde devindiğini ve bu nedenle, bu süre içinde ilmeğin yerini pek fazla değiştirmediğini düşünürsek Denk. 4, f kuvvetinin gördüğü işi verir. *Yük birimi başına görülen iş* $(1/q)\int \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s}$'dir. *Elektromotor kuvvet* dediğimiz bu niceliği $\mathcal{E}$ simgesi ile göstereceğiz ve adını "emk" olarak kısaltacağız. $\mathcal{E}$'nin boyutu elektrik gerilimininkinin aynıdır ve CGS birimlerinde statvolt ile ya da yük birimi başına erg ile ölçülür:

$$\mathcal{E} = \frac{1}{q}\int \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s} \qquad (5)$$

Elektromotor kuvvet terimi daha önce Kes. 4.10'da ortaya atılmıştı. O zaman bu kavram, bir volta pilinin beslediği bir çevrimde bir yük dolandığı zaman, yük birimi başına görülen iş olarak tanımlanmıştı. Şimdi bu emk kavramı tanımını, bir yükü, kapalı bir yol boyunca dolanmasını sağlayan herhangi bir eylemi içerecek şekilde genişletiyoruz. Eğer yol direnci R olan gerçek bir çevrim ise, o zaman $\mathcal{E}$ emk'i çevrimden ohm yasası uyarınca bir akım geçmesine yol açacaktır: $I = \mathcal{E}/R$. Ele aldığımız özel halde f, mıknatısal alan içinde devinen bir yüke etkiyen kuvvet-



Şek. 7.6 Burada F'den gözlenen $\mathbf{B}$ alanı biteviye bir alan değildir. Bu alan bir noktadan ötekine hem doğrultu hem de büyüklükçe değişir.

tir, ve $\mathcal{E}$ emk'sinin büyüklüğü:

$$\mathcal{E} = \frac{vw}{c}(B_1 - B_2) \qquad (6)$$

olur. Denk. 6'nın verdiği elektromotor kuvvet, ilmekten geçen *mıknatısal akının değişim hızına* çok yalınca bağlıdır. İlmekten geçen mıknatısal akı diye, $\mathbf{B}$'nin, çevresi ilmek üzerine oturan bir yüzeyden geçen yüzey tümlevini anlıyoruz. Kapalı bir eğriden ya da Şek. 7.7 a'daki C ilmeğinden geçen akı, $\mathbf{B}$'nin S_1 üzerinde alınan yüzey tümlevi ile verilir:

$$\Phi_{(S_1)} = \int_{S_1} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a}_1 \qquad (7)$$

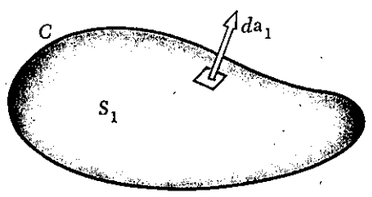
C ile sınırlı sonsuz sayıda yüzey çizebiliriz. Örneğin Şekil 7.7 *b*, S_2 ile gösterilmiş başka bir yüzeydir. Akıyı hesaplarken hangi yüzeyi kullandığımızı belirtmeye gerek görmüyoruz. Çünkü $\int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a}$ bütün bu yüzeyler boyunca aynı değeri verir. Burada biraz durarak bu noktayı, bir daha dönmemek üzere, kesin bir sonuca bağlayalım. S_2'den geçen akı $\int_{S_2} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a}_2$ 'dir. Burada $\mathbf{da}_2$ yöngüsünü S_2'nin üst yüzünden dışarıya doğru çıkardığımıza dikkat edin, böylece S_1'deki artı yüzey seçimi ile bağdaşır halde kaldık. C'den geçen akı yukarı doğru yönelmiş ise bu anlaşma, artı bir sayı verecektir:

$$\Phi_{(S_2)} = \int_{S_2} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a}_2 \qquad (8)$$

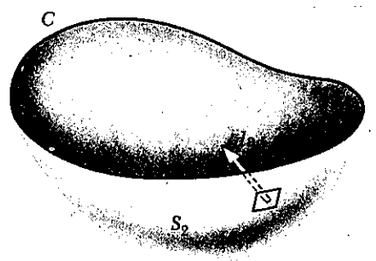
Kes. 6.2'de mıknatısal alanın ıraksamasının sıfır olduğunu öğrenmiştik: $\text{ırak}\,\mathbf{B} = 0$. O halde S herhangi bir *kapalı* yüzey ise, ve sınırladığı oylum V ise, Gauss yasasını

$$\int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} = \int_V \text{ırak}\mathbf{B}\, dv = 0 \qquad (9)$$

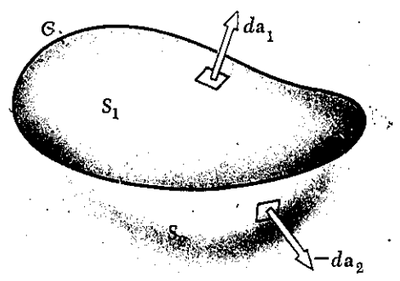
sonucu izler. Şimdi bu sonucu Şek. 7.7*c*'de görüldüğü gibi S_1 ve S_2 yüzeylerini bir yere getirerek oluşan tencere biçimli kapalı yüzeye uygulayalım. S_2 üzerinde dışa yönelmiş dikit C'den geçen akıyı hesaplamakta kullandığımız $\mathbf{da}_2$ yöngüsü ile *zıt* yönlüdür. Böylece



Şek. 7.7. (a) C 'den geçen akı $\Phi = \int_{S_1} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a}_1$ 'dir.



(b) S_2, C 'nin sınırladığı başka bir yüzeydir. Φ 'nin hesaplanması için bu yüzey de öteki gibi uygundur.



(c) S_1 ile S_2 'yi kapalı bir yüzey oluşturacak şekilde bir yere getirirsek, bu yüzeyde $\int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a}$ sıfıra eşit olacaktır ki, bu da $\int_{S_1} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a}_1 = \int_{S_2} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a}_2$ olduğunu tanıtlar,

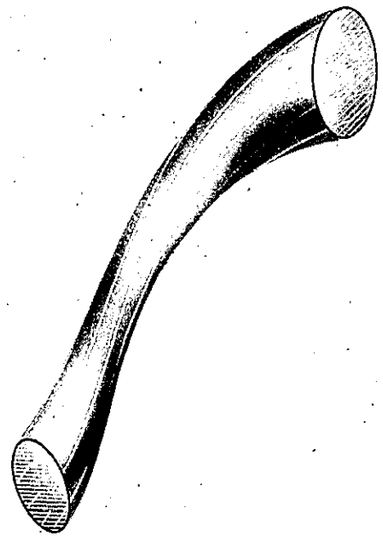
veya
$$0 = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} = \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a}_1 + \int \mathbf{B} \cdot (-d\mathbf{a}_2)$$
$$\int_{S_1} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a}_1 = \int_{S_2} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a}_2 \qquad (10)$$

olur. Bu bize C'den geçen akıyı hesaplamak için kullandığımız yüzeyin bir önemi olmadığını gösteriyor. Bu ırak $\mathbf{B} = 0$ koşulunu akının uzay içinde bir çeşit korunumunu anlattığını bilirsek bu sonuç oldukça açıktır. Bir yüzeye giren akı ne tutarda ise çıkan da o tutardadır. (Bütün uzaydaki durumu bir anda ele alıyoruz.) Zaman zaman akı "boru"larını gözde canlandırmak yararlı olur. Bir akı borusu (Şek. 7.8) öyle bir yüzeydir ki, her yerinde mıknatısal alan çizgileri bu yüzey içinde kalır. Başka bir deyimle bu yüzeyden hiç bir akı geçmez; akı borusunu, bir telefon kablosu içinde belli sayıda tel bulunması gibi, içinde belli tutarda akı bulunan bir yüzey olarak düşünebiliriz. Akı borusunun çevresine sıkıca sarılmış herhangi bir kapalı eğriden geçen akı, borudaki akıya eşittir. $\mathbf{E}$ elektrik alanı için aynı şeyi ancak elektrik yüklerinin bulunmadığı bir bölge halinde söyliyebiliriz, çünkü ırak $\mathbf{E} = 4\pi\rho$ 'dur. Oysa mıknatısal alanın ıraksaması her yerde hep sıfırdır.

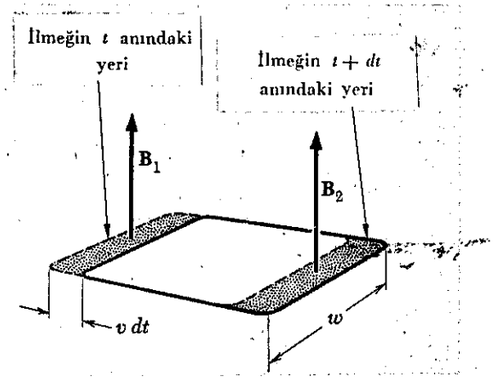
Şimdi devinen dörtgen ilmeğe dönelim ve bu ilmekten geçen akının *değişim hızının* ne olduğunu bulalım. İlmek dt, süresi içinde $v\,dt$ yolunu alır. Bu devinim ilmeğin üzerine yerleşmiş herhangi bir yüzey üzerinde hesaplanan $\int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a}$ akısını iki bakımdan değiştirir. Şek. 7.9'da kolayca göreceğimiz gibi akının değeri sağ yanda $B_2 w v\,dt$ tutarınca artar, oysa solda $B_1 w v\,dt$ tutarında azalır. İlmekten geçen akının dt zamanı içindeki $d\Phi$, değişimi

$$d\Phi = -(B_1 - B_2) w v\,dt \qquad (11)$$

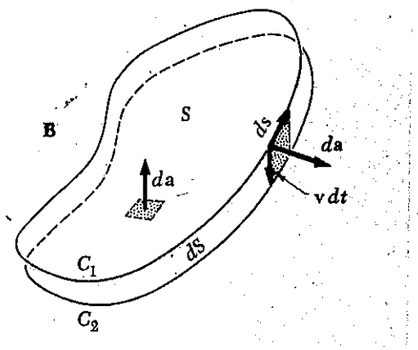
olur. Denk. 11'i Denk. 6 ile karşılaştırırsak elektromotor kuvvetin, hiç değilse bu örnek için



Şek. 7.8 Bir akı borusu. Mıknatısal alan çizgileri bu borunun yüzeyi içinde bulunmaktadır. Boru belli tutarda Φ akısı sarmaktadır. Boruyu neresinden keserseniz kesin $\int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a}$ bu kesitler boyunca hep aynı Φ değerini verecektir. Bir akı borusunun kesitinin yuvarlak olması gerekmez. Alanın içinde bir yerden, herhangi bir kesitten başlıyabilirsiniz; alan çizgilerinin gidişi boru boyunca ilerledikçe kesitin şeklini ve büyüklüğünü belirler.



Şek. 7.9 Bir dt zaman aralığı içinde, ilmek $B_2 w v\,dt$ tutarında bir akı değişimi kazanacak ve $B_1 w v dt$ tutarında bir akı değişimi yitirecektir.



Şek. 7.10. İlmek bir dt süresi içinde C_1 konumundan C_2 konumuna geçmiştir.

$$\mathcal{E} = -\frac{1}{c}\frac{d\Phi}{dt} \qquad (12)$$

biçiminde yazılabileceği görülür.

Bu bağıntının çok genel ve her biçimde bir ilmeğin herhangi bir devinimi için doğru olduğunu gösterebiliriz. Şek. 7.10'daki C ilmeği bir t, anında C_1 konumunda iken devinerek $t + dt$ anında C_2 konumunu almış olsun. Bu ilmeğin bir ds öğesi de $\mathbf{v}$ hızı ile yeni konumuna taşınmış bulunur. S, t anında ilmeğe oturmuş yüzeydir. Bu anda ilmekten geçen akının değeri

$$\Phi(t) = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} \qquad (13)$$

olur. $\mathbf{B}$ mıknatısal alanı, gözlem çatkımıza göre belli bir noktada duran zaman içinde sabit kaynaklarca oluşturulmaktadırlar. Daha sonraki bir $t + dt$ anında, ilmek üzerine oturan yüzey ilk S, yüzeyi ile, buna eklenen dS. çeperinin toplanmasından oluşan yüzey kadardır. (İlmekten geçen akıyı hesaplamak için bunun üzerine yerleşen herhangi bir yüzey üzerinde hesap yapabileceğimizi anımsayınız.) Böylece:

$$\Phi(t + dt) = \int_{S+dS} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} = \Phi(t) + \int_{dS} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} \qquad (14)$$

bulunur. O halde dt, zamanı içindeki akı değişimi, dS, "çevre çeperi"nden geçen akı kadardır, yani bu, $\int_{dS} \mathbf{B}\,d\mathbf{a}$'dır. Bu çevre çeperi üzerindeki bir da yüzey öğesi $(\mathbf{v}\,dt) \times ds$, şeklinde yazılabilir, şöyle ki, dS yüzeyi üzerindeki tümlev, C, yolu çevresinde bir tümlev haline girer:

$$d\Phi = \int_{dS} \mathbf{B} \cdot da = \int_C \mathbf{B} \cdot [(\mathbf{v}\,dt) \times ds] \qquad (15)$$

burada dt tümlev hesabı bakımından sabit olduğu için toplam simgesi dışına çıkarılabilir ve böylece

$$\frac{d\Phi}{dt} = \int_C \mathbf{B} \cdot (\mathbf{v} \times ds) \qquad (16)$$

bulunur. Daha önce Cilt I'de öğrendiğimiz sayıl üçlü çarpım kurallarına göre, $\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = -(\mathbf{b}\times\mathbf{a})\cdot\mathbf{c}$. özdeşliğini Denk. 16 içindeki yazımı düzenlemek için kullanırsak,

$$\frac{d\Phi}{dt} = -\int_C (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot ds \qquad (17)$$

buluruz. Şimdi, ilmek boyunca sürüklenen bir q yüküne etkiyen kuvvetin değeri $q(\mathbf{v} \times \mathbf{B})/c$ olduğuna göre, elektromotor kuvvet, yani yük birimi başına kuvvetin ilmek boyunca çizgi tümlevi,

$$\varepsilon = \frac{1}{c}\int_C (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot ds \qquad (18)$$

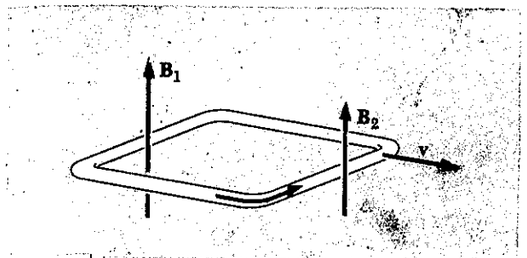
olur. Denk. 17 ile Denk. 18'i karşılaştırırsak daha önce Denk. 12'de verdiğimiz yalın bağıntıyı elde ederiz; ama bu kez yazım, iletken ilmeğin herhangi bir biçimi ve herhangi bir devinimi için geçerlidir. (Bu sonucu elde etmek için v 'nin ilmeğin bütün kesimleri için aynı olması gerekmez!) Özetlersek, devinen kapalı bir ilmek boyunca $\mathbf{f}/q$, nün yani yük birimi başına kuvvetin çizgi tümlevi, bu ilmekten geçen akının değişim hızının $-1/c$ katına eşittir.

Çizgi tümlevinin (ε 'nin) yönü ve akının artı sayıldığı yön, (akı artarsa) sağ vida kuralı ile birbirine bağlıdır. Örneğin Şek. 7.6'da akı ilmekten *yukarı doğrudur* ve tutarı *azalmaktadır*. Denk. 12'deki (–) imini hesaba katarak, bu kuralımız, ilmek içindeki artı yükleri, ilmekten aşağı doğru bakınca, saat iğneleri ile zıt yönde dönmeğe zorlayacaktır. (Şek. 7.11).

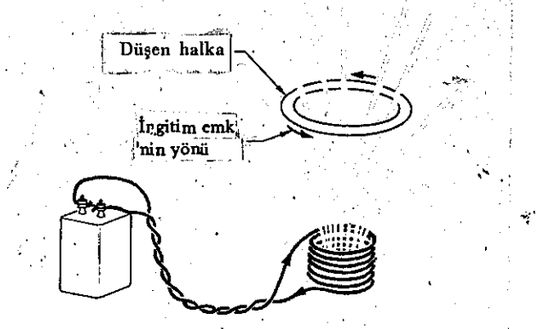
Bu im ve doğrultu sorununu anlamak için daha iyi yollar var. Şu noktayı unutmayın: Şek. 7.11'de görülen durumda, irgitimle oluşan elektromotor kuvvet doğrultusunda bir akım aksa idi, bu akım da ilmekten bir akı geçirecek ve bu akı, asıl akı *değişimine karşı koyacaktı*. Bu temel bir fiziksel olgudur, imler ve doğrultular ile ilgili gönlümüzce bir anlaşmanın sonucu değildir. Bu dizgelerin değişimlere karşı direnme eğiliminin bir görünüşüdür, ve bu şekil altında buna Lenz yasası denilegelmiştir.

Lenz yasasının başka bir örneği Şek. 7.12'de gösterilmiştir. İletken bir halka bir akım kangalının mıknatısal alanı içinde düşmektedir. Halkadan geçen akı *aşağı doğru* yönelmiştir ve düşme yüzünden tutarı *artmaktadır*. Bu değişimi karşılamak için yukarı yönelmiş yeni bir akı gerekir. Bu ise halkanın içinde okla gösterilen yönde bir akım geçmesi ve bu akımın karşılayıcı akıyı oluşturması ile sağlanabilir. Lenz yasası irgitim emk'nin, böyle bir akım verebilmek için uygun doğrultuda doğmasını sağlar.

Eğer elektromotor kuvvet Şek. 7.6'da ve 7.11'da görülen ilmeklerden bir akım geçmesine yol açarsa tellerin direnci yüzünden bir tutam enerji yitiği olacaktır; bu enerji nereden gelir? Bu soruyu yanıtlamak için, akım Şek. 7.11'deki okun gösterdiği yönde ise, ilmeğin B_2, alanında bulunan sağ kıyısının



Şek. 7.11 İlmekten geçen akı yukarıya doğru yönelmiştir ve zaman ilerledikçe azalmaktadır. Ok emk yönünü yani artı yüklerin zorlandığı doğrultuyu göstermektedir.



Şek. 7.12 Halka düşerken aşağı yönelik akı artmaktadır. Lenz yasası irgitim emk'sinin okla gösterilen yönde olduğunu söyler; çünkü halkadan yukarıya doğru bir akı geçirebilecek akım doğrultusu budur. Dizgenin tepkisi, olan değişime karşı koyacak yöndedir.

sağa yönelmiş bir kuvvetin, B_1 alanında bulunan sol kıyısının ise sola doğru bir kuvvetin etkisi altında kaldığına bakalım. Ama burada B_1 , B_2,den daha büyüktür, şöyle ki, ilmeğe etkiyen net kuvvet sola doğrudur, yani *devinime karşı* koyan bir kuvvettir. İlmeğin devinimini sabit bir hızla sürdürmek istersek, bir dış eylemin iş görmesi gerekir, ve bu şekilde çevrime yatırılan enerji, telde ısı şeklinde kendini gösterir. Eğer Lenz yasasını çiğneyen bir durum olsa idi, veya ilmeğe etkiyen kuvvet ilmeğin devinimine yardım eden doğrultuda olsaydı ne olurdu düşünün!

Elektrikli makinalarda ve elektrik aygıtlarında çok rastlanan bir düzenek, bir mıknatısal alan içinde dönen bir akım kangalı ya da bir akım ilmeğidir. Az önce öğrendiğimizi Şek. 7.13'deki yaklaşıkca biteviye saydığımız bir mıknatısal alan içinde sabit hızla dönen tek sarımlı bir ilmek haline uygulayalım. Şekilde dizgenin mekanik parçaları, dönme mili, bilyalı yataklar ve döndürücü kuvvet gösterilmemiştir. $\mathbf{B}$ alanı sabit iki kangalca sağlanır. İlmeğin radyan/s olarak ω açısal hızı ile döndüğünü düşünüyoruz. Bunun herhangi bir andaki konumu θ açısı ile belirtilmiş ise, $\theta = \omega t + \alpha$ olacaktır ki, burada ilmeğin $t = 0$ anındaki konumunu gösteren sabit bir sayıdır. $\mathbf{B}$ alanının ilmek düzlemine dik olan bileşeni B sin θ'dır. Bu yüzden ilmekten bir t anında geçen akı

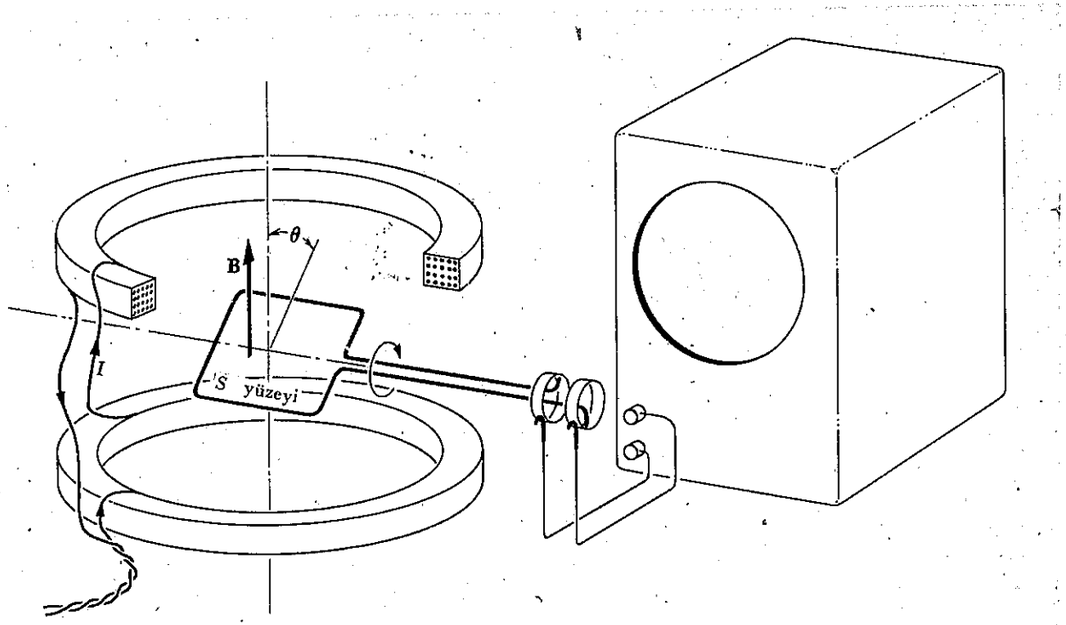
$$\Phi(t) = SB \sin(\omega t + \alpha) \qquad (19)$$

olur; burada S ilmeğin yüz ölçümüdür. İrgitimle doğan elektromotor kuvvetin değeri,

$$\varepsilon = -\frac{1}{c}\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{SB\omega}{c}\cos(\omega t + \alpha) \qquad (20)$$

bulunur. Eğer ilmek kendi üzerine kapalı olacak yerde kaygan bileziklerle, Şek. 7.13'deki gibi, dış tellere bağlanmış olursa, bu çıkış uçları arasında sinüs değişimli bir dalgalı gerilim gözleriz.

Burada sayıca bir örnek, birim sorunlarını açıklığa kavuşturur. Bu örnekte B mıknatısal alan yeğinliğinin 500 gauss, dönme hızının saniyede 30 dönme, ilmek yüzölçümünün 100 cm^2 olduğunu düşünelim.



Şek. 7.13 Buradaki iki kangal, ilmeğin bulunduğu bölgede yaklaşıkça biteviye bir **B** mıknatısal alanı oluşturur. Düzgün olarak ω açısal hızı ile dönen ilmekte irgitimle sinüsel biçimde değişen bir emk doğar.

Buna göre $\omega = 2\pi \times 30$ veya 188 rad/s ve titreşimli elektromotor kuvvetin genliği yani uzanımının en büyük değeri,

$$\mathcal{E}_{\text{tepe}} = \frac{SB\omega}{c} = \frac{(188\ \text{s}^{-1})(100\ \text{cm}^2)(500\ \text{gauss})}{(3 \times 10^{10}\ \text{cm da}^{-1})}$$
$$= 3{,}1 \times 10^{-4}\ \text{gauss-cm ya statvolt} \qquad (21)$$

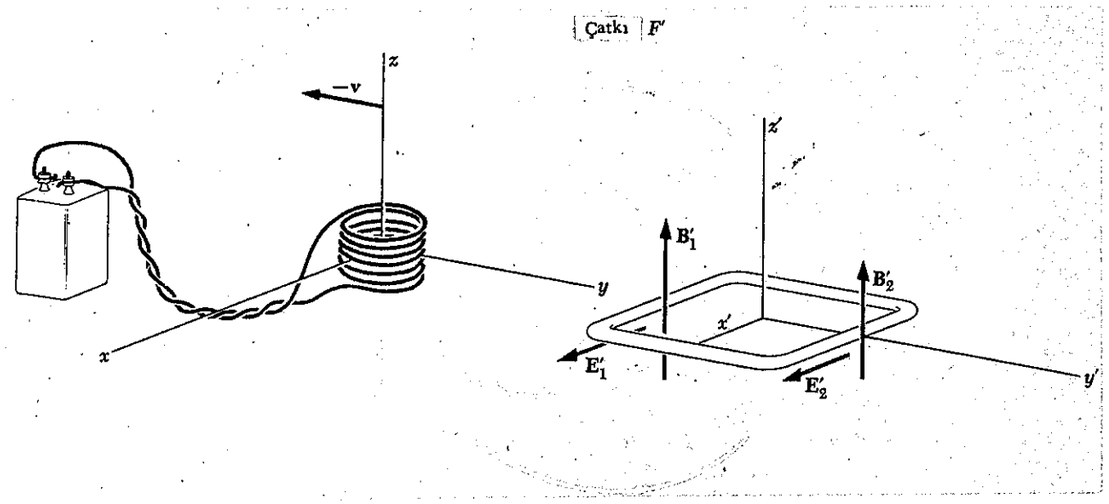
bulunur. $\mathcal{E}$ yük birimi başına iş olduğuna göre sonuç kullanmakta olduğumuz CGS birimlerinde yani statvolt olarak çıkmalıdır. Denk. 21'deki birimlerin gauss-cm'ye indirgendiğini gözden kaçırmayın. CGS birimlerinde E elektrik alan yeğinliği ile B mıknatısal alan yeğinliğinin boyutları aynıdır. Örneğin, $\mathbf{E}' = (v/c) \times \mathbf{B}$, gibi bir dönüşüm denkleminde mıknatısal alan yeğinliğini boyutsuz bir nicelik olan v/c ile çarpmakla, elektrik alan yeğinliğini elde ediyoruz. (Elektrik alan yeğinliği birimi olan statvolt/cm'nin mıknatısal alandaki gauss gibi bir adı yoktur.) Buna göre 1 gauss-cm doğrudan 1 (statvolt/cm)-cm'ye yani 1 statvolta çevrilir. Bu örnekteki elektromotor kuvvetin genliği "kılgın" birim olan volt cinsinden, $3{,}1 \times 10^{-4} \times 300$ veya 0,093 volt olur.

7.4 Devinimli Alan Kaynağı ile Devinimsiz Bir İlmek

İstersek Şek. 7.6'daki olaylara ilmek ile devinen bir gözlem çatkısından bakabiliriz. Böyle bir gözetleme yeri fiziği değiştiremez, yalnız fiziği anlatmak için kullandığımız sözler değişir. Şimdi devinimsiz gördüğümüz ilmeğe bağlı konumluk çatkısı F', ve konumluklar da x', y', z', olsun (Şek. 7.14). Alanı oluşturan ve F çatkısında devinimsiz olan akım kangalı ile batarya şimdi $-y'$ doğrultusunda $v' = -v$ hızı ile devinmektedir. F' çatkısındaki bir gözlemcinin bir t' anında ilmeğin iki yanındaki alanlar için ölçtüğü değerler B_1' ve B_2' olsun. Bu konumlarda F' çatkısında bir elektrik alanı bulunacaktır. Denk. 6.62,

$$\mathbf{E}_1' = -\frac{\mathbf{v}' \times \mathbf{B}_1'}{c} = \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{B}_1'}{c}$$
$$\mathbf{E}_2' = -\frac{\mathbf{v}' \times \mathbf{B}_2'}{c} = \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{B}_2'}{c} \qquad (22)$$

olduğunu söyler.



Şek. 7.14 F' çatkısından gözlenince, ilmek devinimsiz alan kaynağı devinimlidir. $\mathbf{B}'$ ve $\mathbf{E}'$ alanlarının her ikisi de vardır ve konum ve zamanın işlevleridir.

F' 'deki gözlemci için bu gerçek bir elektrik alanıdır. Ama bu bir durgun yük alanı değildir. Bu demektir ki, genel olarak, $\mathbf{E}'$ 'nün F' çatkısındaki kapalı bir yol boyunca çizgi tümlevi sıfır değildir. Gerçekten, $\mathbf{E}'$ 'nün dörtgen biçimli ilmek boyunca alınan çizgi tümlevi:

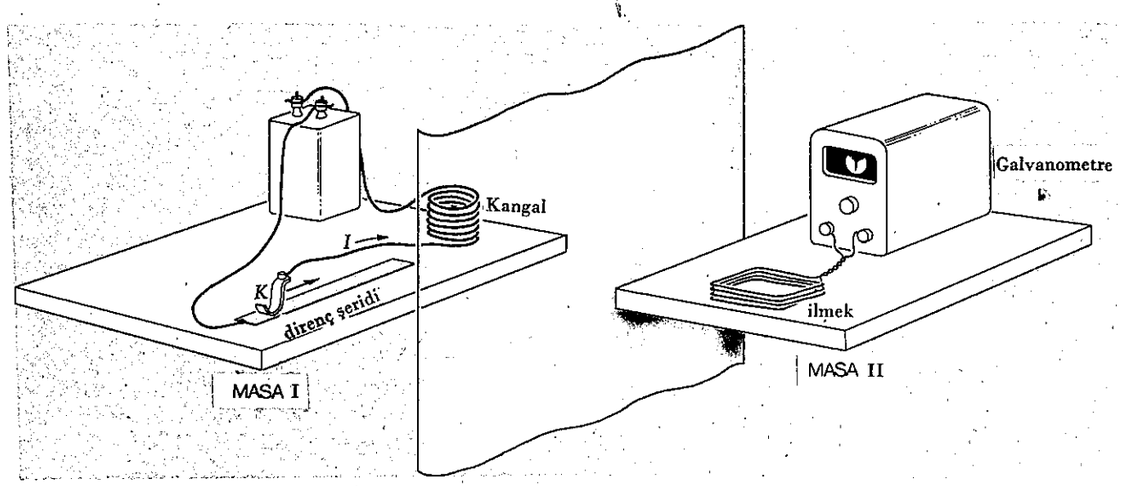
$$\int \mathbf{E}' \cdot d\mathbf{s}' = \frac{wv}{c}(B_1' - B_2') \qquad (23)$$

olur.

Denk. 23'deki çizgi tümlevine bu yol üzerindeki $\mathcal{E}'$ elektromotor kuvveti diyebiliriz. Eğer yüklü bir parçacık bu yol üzerinde bir kez dolanmış ise, $\mathcal{E}'$ bu yük üzerinde yük birimi başına görülen iştir. $\mathcal{E}'$, ilmekten geçen akının değişim hızı ile ilgilidir. Bunu görmek için, ilmek devinimsiz iken, *mıknatısal alan örneğinin*, kaynaklar gibi $-v$ hızı ile devindiğini gözden kaçırmayın. O halde ilmeğin her iki ucunda bir dt' zaman aralığı içinde kazanılan ya da yitirilen akılar için, Denk. 11'e benzer bir sonuç elde ederiz ve bundan

$$\mathcal{E}' = \frac{1}{c}\frac{d\Phi'}{dt'} \qquad (24)$$

sonucuna varırız.



Şek. 7.15 Ya masaların devinebildiği ya da her iki masa devinimsiz olduğuna göre kangaldan geçen akımın değiştirilebildiğini düşünüyoruz.

O halde $\mathbf{B}$'yi uyaran kaynakların devinimsiz bulundukları F, gözlem çatkısını ve ilmeğin devinimsiz bulunduğu F', çatkısını ele almakla olayın anlatımını şöyle özetleyebiliriz:

F'de bulunan bir gözlemci şöyle der: "Burada uzay içinde büteviye olmasa da zamanla değişmeyen bir mıknatısal alanımız var. Çatkımızda elektrik alanı yok. Şu karşıdaki ilmek v hızı ile mıknatısal alandan geçip gitmektedir, şöyleki, iletken tel içindeki yükler yük birimi başına $(\mathbf{v}/c) \times \mathbf{B}$ din'lik bir kuvvet etkisi altında kalmaktadırlar. Bu yük birimi başına kuvvetin ilmek boyunca alınan çizgi tümlevi $\mathcal{E}$ elektromotor kuvvetidir, ve değeri $-(1/c)(d\Phi/dt)$. dir. Buradaki Φ akısı ilmeğin üzerine oturmuş S yüzeyince benim saatıma göre, bir t anında alınan $\int \mathbf{B} \cdot da$ tümlevine eşittir."

F' çatkısındaki bir gözlemci ise şöyle der: "İlmek devinimsizdir ve bunun içinde bulunan yükleri ancak bir elektrik alanı devinime geçirebilir. Gerçekten burada bir $\mathbf{E}'$ elektrik alanı var. Bu alanın nedeni şu karşıki oldukça kuvvetli bir $\mathbf{B}'$ mıknatısal alanı uyaran ve şu anda $-v$ hızı ile uzaklaşıp giden mıknatısa benzeyen cisim olabilir. Bu elektrik alanının tutarı, devinimsiz ilmek boyunca alınan

$\int \mathbf{E}' \cdot ds'$ tümlevi sıfırdan farklı ve $-1/c$ ile ilmekten geçen akının $d\Phi'/dt'$ değişim hızı çarpımına eşit olacak kadardır. Bu Φ' akısı ise, ilmek üzerine oturan bir yüzey boyunca, bu yüzeyin bütün noktalarında benim saatımla bir t' anında ölçülen B' alanının

$\int \mathbf{B}' \cdot da'$ tümlevine eşittir."

Bu sonuçlarımız buraya dek görelice doğrudur. Sonuçlar $v \leqq c$ koşulunu yerine getirdikçe herhangi bir hız için doğrudur, yeter ki, $\mathbf{B}$ ile $\mathbf{B}'$ ve t ile t' vb. arasındaki farkları titizlikle gözönünde tutalım. Eğer $v \ll c$ olur da v^2/c^2'ye göz yumabilirsek o zaman B' pratikçe B'ye eşit olacak ve t ile t' farkını da görmezlikten gelmekte bir sakınca bulunmayacaktır.

7.5 Evrensel Bir İrgitim Yasası

Şek. 7.15'de görülen düzenek ile üç deney yapalım. Şekilde görülen masalar tekerlek üzerindedir ve kolayca devindirilebilir. Yukardan beri kullandığımız dörtgen biçimli ilmeğin uclarına duygun bir akımölçer bağlanmıştır ve irgitimle doğabilecek bir elektromotor kuvvetin tutarını artırabilmek için sarımları artırılmıştır. İrgitim olayının oluşacağı bu kangala *irgitlik* diyeceğiz ama içtenlikle söylersek şekilde görülen mıknatısal alan kaynağının zayıf oluşu yüzünden aygıtımızın duyarlığı ancak yeterli olabilir. Siz laboratuvarda deneyin daha kullanışlı bir şeklini düzenleyebilirsiniz.

Deney *I.* Kangaldan geçen akım sabit tutulurken ve masa 1 devinimsiz dururken ve masa 2 sağa doğru v hızı ile devindirilir. *Akımölçerin göstergesi oynar.* Buna şaşmıyoruz; bu durumu daha önce Kes. 7.3'de inceledik.

Deney *II.* Kangaldan geçen akım sabit iken masa 2 devinimsiz tutulur, ve masa 1 sola doğru v hızı ile devindirilir. *Akımölçer sapar.* Bu olay da bizi şaşırtmaz, deney I ile deney II'nin birbirine eşdeğer olduğunu incelemiştik ki, bu eşdeğerlik Lorentz değişmezliğine veya masanın küçük hızlarında da Galileo değişmezliğine eşdeğerdir. Her iki deneyde de akımölçerin sapması $\mathbf{B}$ alanının ilmekten geçirdiği akının değişim hızına bağlıdır.

Deney *III.* Her iki masa devinimsiz tutulurken direnç şeridi üzerindeki K değme noktası kaydırılarak kangaldaki I akım yeğinliği değiştirilir. Bu öyle yapılır ki, dörtgen kangalın bulunduğu yerdeki $\mathbf{B}$ alanının *zayıflama hızı* Deney I ve II'deki ile aynı olsun. *Akımölçerde sapma görülür mü?*

Masa 2'deki kangalın yakınlarındaki mıknatısal alanı zaman ve konuma bağlı olarak ölçen bir gözlemci için deney I, II, ve III'ü birbirinden ayırdetmek olanaksızdır. İki masa arasında siyah bir perde bulunduğunu düşünün. Deney II ve III hallerindeki alan yapıları arasında bir takım ufak ayrımlar olsa da, perdenin arkasında ne olduğunu bilmeyen bir gözlemci, yalnız kendi bölgesindeki $\mathbf{B}$ ölçülerine dayanarak perdenin arkasında ne olduğu, yani yukarıki üç eylemin hangisinde bulunduğu üzerinde bir karar veremez. Bu nedenle akımölçer deney III de aynı ölçüde sapmamış yani aynı tepkiyi göstermemiş ise bu, bu bölgedeki mıknatısal ve elektriksel alanlar arasındaki bağıntının, uzak bir kaynağın yapısına bağlı olduğu anlamına gelebilirdi. Bundan, yerel özellikleri aynı olan iki mıknatısal alanın, biri $\int \mathbf{E} \cdot ds \neq 0$ gibi bir elektrik alan ile ortaklaştığı halde ötekinin ortaklaşmadığı gibi yanlış bir sonuç çıkardı.

Deneyerek gördüğümüze göre deney III deney I ve II ye eşdeğerdir. Akımölçer öncekilerde olduğu kadar sapmaya uğramıştır. Faraday deneyi bu temel olguyu gösteren ilk çalışmadır. Gözlediğimiz elektromotor kuvvet, yalnız $\mathbf{B}$ akısının değişim hızına bağlıdır, başka hiç bir şeye bağlı değildir. Faraday'ın irgitim yasasını evrensel bir bağıntı halinde şöyle deyimleyebiliriz:

> Eğer C, x, y, z, konumluklarında devinimsiz duran kapalı bir eğri, ve eğer S bu eğri üzerinde oturan bir yüzey ise ve $\mathbf{B}(x,y,z,t)$ x, y, z, de bir t anında ölçülen mıknatısal alan ise, (25)
>
> $$\mathcal{E} = \int_C \mathbf{E} \cdot ds = -\frac{1}{c}\frac{d}{dt}\int_S \mathbf{B} \cdot da = -\frac{1}{c}\frac{d\Phi}{dt}$$

olur.

Yöngü türevi dönülünü kullanarak, bu yasayı diferansiyel şekli ile anlatabiliriz. Eğer,

$$\int_C \mathbf{E} \cdot ds = -\frac{1}{c}\frac{d}{dt}\int_S \mathbf{B} \cdot da \qquad (26)$$

bağıntısı, herhangi bir C eğrisi ve bu eğri üzerinde oturan bir S yüzeyi için yasanın dediği gibi doğru ise, bunu, herhangi bir noktada

$$\text{dönül } \mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{d\mathbf{B}}{dt} \qquad (27)$$

sonucu izler. Denk. 27'nin Denk. 26'yı izlediğini göstermek için, her zaman olduğu gibi, C eğrisinin, $\mathbf{B}$

işlevi için ayrıcalı olmayan bir noktaya doğru büzüldüğünü düşünüyoruz. O zaman ereye vardığımızda C eğrisi üzerine oturan küçük bir a yüzeyi üzerinde $\mathbf{B}$'nin değişimi önemsenmeyecek kadar küçük olacaktır ve yüzey tümlevi basitce $\mathbf{B}\cdot\mathrm{a}$ değerine yaklaşacaktır. Şimdi Tanıma göre (Denk. 2,76) küçük yüzey büzülürken $\int_C \mathbf{E}\cdot ds$'nin yaklaştığı sınır yalnızca a dön $\mathbf{E}$.dir. O halde ereye varıldığı zaman

$$\text{a}\cdot\text{dönül}\,\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{d}{dt}(\mathbf{B}\cdot\mathrm{a}) = \mathrm{a}\cdot\left(-\frac{1}{c}\frac{d\mathbf{B}}{dt}\right) \quad (28)$$

değerini buluruz. Bu söylediğimiz sonsuz küçük bir a yüzeyi için geçerli olduğuna göre*,

$$\text{dönül}\,\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{d\mathbf{B}}{dt} \quad (29)$$

olmalıdır. B'nin zamana olduğu kadar konuma da bağlı olabileceğini gözönüne alarak $d\mathbf{B}/dt$. yerine $\partial\mathbf{B}/\partial t$ yazmak gerekir. O zaman irgitim yasası için tümüyle farklı şu iki eşitliği buluruz:

$$\boxed{\begin{aligned}&\int_C \mathbf{E}\cdot ds = -\frac{1}{c}\frac{d}{dt}\int_S \mathbf{B}\cdot da\\ &\text{dönül}\,\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}\end{aligned}} \quad (30)$$

Denk. 30'da $\mathbf{E}$ elektrik alanı durgun elektrik birimler cinsinden yani statvolt/cm olarak, $\mathbf{B}$ ise gauss ile ölçülmelidir. Buna göre $\mathcal{E} = \int_C \mathbf{E}\cdot ds$ elektromotor kuvveti statvolt olarak elde edilecektir. Kılgın hesaplarda, elektromotor kuvveti çoğu kez volt ile ölçtüğümüz halde mıknatısal alan yeğinlik birimi olarak gauss'u alakoyuyoruz. 1 statvoltun 300 volta eşdeğer olduğunu anımsayarak, $\mathcal{E}$ ile akının değişim hızı arasındaki bağıntının

$$\underset{\text{(volt)}}{\mathcal{E}} = \int_C \underset{\text{(volt/cm)}}{\mathbf{E}}\cdot \underset{\text{(cm)}}{ds} = -(10^{-8})\frac{d}{dt}\int \underset{\text{(gauss)}}{\mathbf{B}}\cdot \underset{\text{(cm}^2\text{)}}{da}$$
$$= -(10^{-8})\frac{d\Phi}{dt} \qquad \left(\frac{\text{gauss-cm}^2}{\text{s}}\right) \quad (31)$$

olduğunu görürüz.

dönül $\mathbf{E} = -(1/c)\partial\mathbf{B}/\partial t$ diferansiyel yazımı, alan bağıntılarının, daha önce açıklamağa çalıştığımız yerel niteliğini tam olarak ortaya koyar. Başka bir deyimle $\mathbf{B}$'nin bir yörede zamanla değişimi, o komşuluk içinde dönül $\mathbf{E}$'yi tümcek belirler, bunun için başka hiç bir şey gerekmez. Kuşkusuz bu belirleme $\mathbf{E}$'nin kendisini tümünce vermez. Zira bu alana, dön $\mathbf{E}=0$ olan bir durgun yük alanı bağıntıyı bozmaksızın katılabilir.

Somut bir örnek Şek. 7.16'da görülen kangallardan doğru akım yerine 50 hertz frekanlı dalgalı akım geçirmektir. Akım ve mıknatıslık alanı sin $(2\pi.50.t)$ ya da sin 314t gibi değişir. Akımın genliği o tutarda olsun ki, $\mathbf{B}$ mıknatısal alanı merkez bölgesinde 50 gauss'luk tepe değeri bulsun. Şimdi Şek. 7.16'da görülen 10 cm yarıçaplı dairesel yol üzerindeki elektriksel irgitim alanını ve elektromotor kuvveti araştırmak istiyoruz. Bu dairenin içindeki bölgede bir anlık B alanının kılgında biteviye olduğunu varsayıyoruz:

$$B = 50\sin 377t \quad (32)$$

B gauss ve t s olarak alınmıştır. C ilmeğinden geçen akı

$$\Phi = \pi r^2 B = \pi\times 10^2\times 50\sin 377t$$
$$= 15{,}700\sin 377t \qquad (\text{gauss-cm}^2) \quad (33)$$

olur. Volt olarak emk hesaplamak için Denk. 31'i kullanarak

$$\mathcal{E} = -(10^{-8})\frac{d\Phi}{dt} = -(10^{-8})(377)(15{,}700)\cos 377t$$
$$= -0{,}059\cos 377t \qquad (\text{volt}) \quad (34)$$

bulunur. $\mathcal{E}$ en çok 49 milivoltu bulur. Eksi simgesi doğrultularımızı tutarlı şekilde tanımladığımıza göre Lenz yasasına uyulduğunu anlatır. Φ ile $\mathcal{E}$'nin her ikisinin de zamanla değişimi Şek. 7.17'de gösterilmiştir.

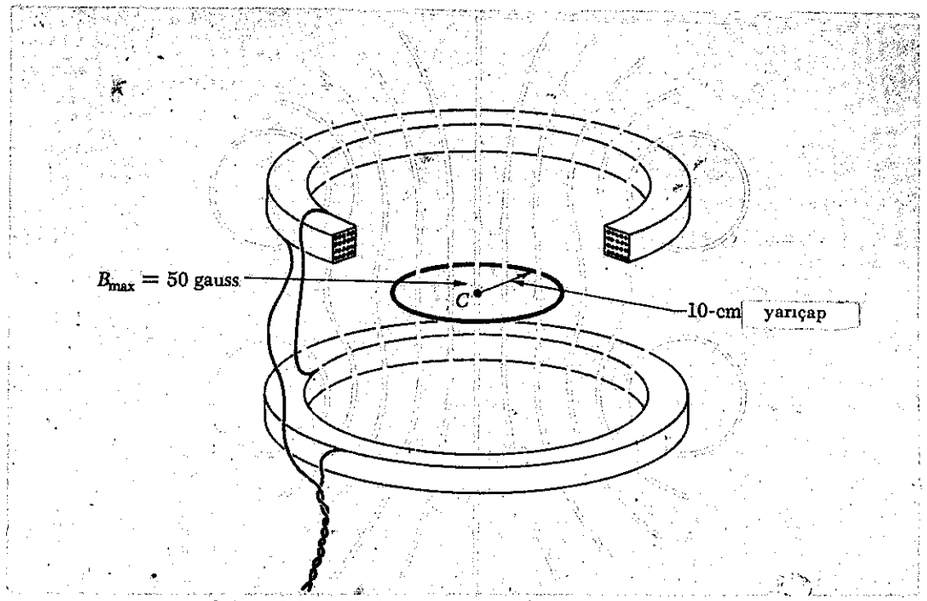
Ya elektrik alanı ne oldu? Genellikle yalnız dönül $\mathbf{E}$'nin bilinmesinden $\mathbf{E}$'yi çıkarmak olanaksız ise de buradaki C yolumuz, bakışımlı bir yapının merkezi çevresinde alınmış bir dairedir. Eğer oralarda başka *herhangi bir elektrik alanı* yok ise, C, eğrisi üzerinde, $\mathbf{E}$'nin bu eğri düzlemi içinde bulunduğu ve değerinin sabit olduğu düşünülebilir.

zaman $\int_C \mathbf{E}\cdot ds = 2\pi rE = \mathcal{E}$,'dir, ve bunu daha önce hesaplamıştık. Bu halde, daire üzerindeki elektrik alanının belli bir andaki değeri, Şek. 7.18a'dakine benzeyebilir. Eğer Şek. 7.18b'de görüldüğü gibi eksen üzerine bir artı ve bir eksi yük yerleştirilmiş olsa, dairenin yakınlarındaki elektrik alanı, bu iki yükün durgun yük alanı ile, irgitilen elektrik alanının üstüste gelmesinden oluşacaktır.

7.6 Karşılıklı İrgitim

İki çevrim ya da C_1 ve C_2 gibi iki ilmek birbirine göre sabit konumlarda durmaktadır (Şek. 7.19),

* Bu açık değilse, a'yı x doğrultusunda seçmek $(\text{dön}\mathbf{E})_x = -\frac{1}{c}\frac{dB_x}{dt}$'yi verir; ve bu düşünüş böyle sürer gider.



Şek. 7.16. Kangallardan geçen dalgalı akım bir mıknatısal alan uyarır ki bu alan merkezde, yukarı doğru 50 gauss ile aşağı doğru yönelmiş 50 gauss arasında salınır. C halkasının içinde alan herhangi bir anda çok yaklaşık olarak biteviye kalmaktadır.

bir batarya ve değişken bir direnç yardımıyle C_1 çevriminden ayarlayabildiğimiz bir I_1 akımı geçirilsin. Şimdi, C_1'den geçen sabit I_1, akımının uyardığı mıknatısal alan $\mathbf{B}_1(x,y,z)$ olsun ve bu $\mathbf{B}_1$ alanının C_2 çevriminden geçirdiği akının değeri Φ_{21} ile gösterilsin:

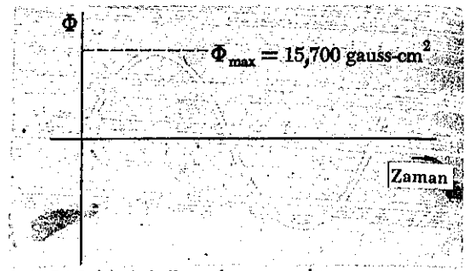
$$\Phi_{21} = \int_{S_2} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a}_2 \qquad (35)$$

dır, burada S_2, C_2 ilmeği üzerine oturan bir yüzeydir. Ele aldığımız iki devrenin şekilleri ve bağıl konumları değişmezse Φ_{21} akısı I_1 ile oranlı olacaktır:

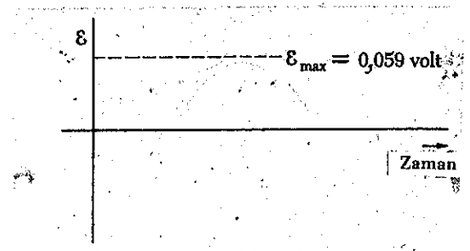
$$\frac{\Phi_{21}}{I_1} = \text{sabit} \qquad (36)$$

Şimdi I_1'in zamanla değiştiğini düşünelim, ama bu değişim yeterince yavaş olsun ki C_2 yakınlarında bir noktadaki $\mathbf{B}_1$ alanı ile C_1'deki I_1 akımı aynı bir anda, kararlı akımlar halinde olduğu gibi bağlı bulunsunlar. (Böyle bir kısıtlamanın niçin gerekli olduğunu görmek için, C_1 ile C_2'nin 10 m aralıkla durduklarını, ve C_1'deki akımın tutarını 10 nanosaniye içinde iki katına çıkardığımızı düşünün!) Φ_{21} akısı, I_1'in değişim oranında değişecektir. Bu durumda C_2 devresinde irgitimle bir emk oluşacaktır ve bunun büyüklüğü

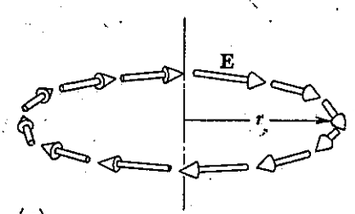
$$\mathcal{E}_{21} = -\frac{\text{sabit}}{c}\frac{dI_1}{dt} \qquad (37)$$



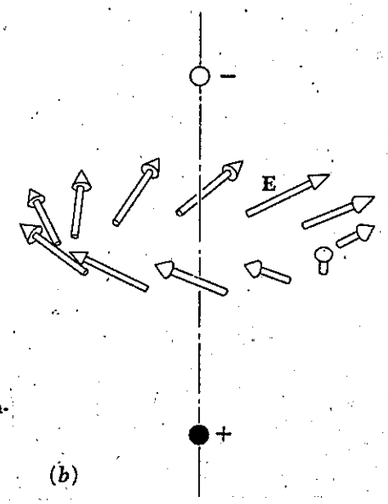
Şek. 7.17. (a) C halkasından geçen akı.



(b) C yolu üzerindeki emk.

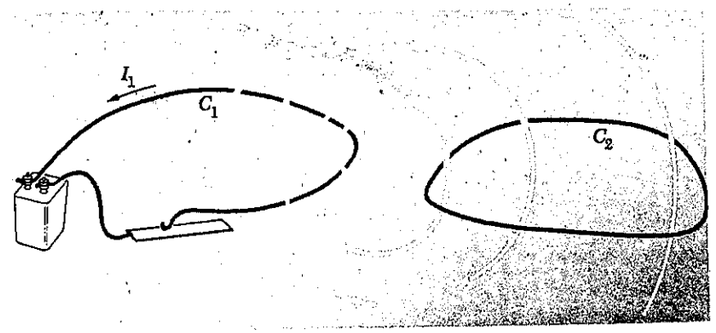


(a)



(b)

Şek. 7.18 Dairesel bir yol üzerindeki elektrik alanı: (a) Titreşen bakışımlı akımdan başka kaynak bulunmadığı zaman; (b) Eksen üzerinde bulunan iki kaynağın elektrik alanı ile birlikte.



Şek. 7.19 C_1 ilmeğindeki I_1 akımı, C_2 ilmeğinden Φ_{21} gibi bir akı geçirir.

olacaktır. Buradaki sabit sayı Denk. 36'dakidir. Bu denklemin paydasındaki c'yi sabitin içine alarak M_{21} ile göstereceğimiz bir tek sabit kurarsak, Denk. 37'yi

$$\mathcal{E}_{21} = -M_{21}\frac{dI_1}{dt} \qquad (38)$$

şeklinde yazabiliriz.

Bu M_{21} sabitine *karşılıklı irgitim* ya da irgitleşim katsayısı denir. Bunun değeri ilmekleri düzenleyen geometrik durum ile belirlenir. Bu sabitin birimi $\mathcal{E}$, I, ve t için seçtiğimiz birimlere bağlıdır. Kılgın birim dizgesinde $\mathcal{E}_{21}$ volt, I_1 ampere olarak alınırsa M *henry** ile verilir. Bu demektir ki, I_1 akımı 1 ampere/s hızla değişirken, C_2 çevriminde 1 volt'luk bir irgitim uyarırsa M_{21} karşılıklı irgitim katsayısı 1 henry olur.

Bir örnek olarak Şek. 7.20'de aynı düzlem içinde biri küçük C_2, ve öteki çok daha büyük C_1 gibi aynı merkezli iki halka düşünelim. Bu halde M_{21} nedir? C_1'den geçen akım şiddeti I_1 olduğuna göre bunun merkezindeki B_1 alanı

$$B_1 = \frac{2\pi I_1}{cR_1} \qquad (39)$$

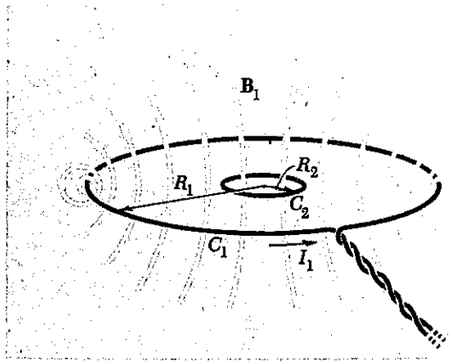
ile verilir; burada I_1 esb/s, B_1 ise gauss'tur. (Bir akım halkasının merkezindeki alanı nasıl bulduğumuzu anımsamazsanız Kes. 6.5'in başındaki Denk. 6.42'nin türetimini gözden geçirin). Burada $R_2 \ll R_1$ dedik, şöyle ki, B_1'in küçük halkanın sardığı bölge boyunca değişimine göz yumulabilsin. O zaman küçük halkadan geçen akının değeri,

$$\Phi_{21} = (\pi R_2^2)\frac{2\pi I_1}{cR_1} = \frac{2\pi^2 I_1 R_2^2}{cR_1} \qquad (40)$$

olur ve bu özel halde Denk. 36'daki "sabitin" değeri $2\pi^2R_2^2/cR_1$,'dir. Bu durumda C_2'de irgitimle oluşan emk'in değeri

$$\mathcal{E}_{21} = -\frac{1}{c}\cdot\frac{2\pi^2R_2^2}{cR_1}\cdot\frac{dI_1}{dt} \qquad (41)$$

* Bu ad, zamanın ileri gelen fizikçisi Joseph Henry (1797—1878)'yi anmak için alınmıştır. Elektromıknatısal İrgitim Faraday'ın deneyleri sırasında ondan bağımsız olarak Henry tarafından da bulundu. Henry özirgitimi ilk gözleyen, elektromıknatısları ve elektrik motorunun ilk prototipini geliştiren, elektrik röleyi bulan ve telgrafın kendisinden başka her şeyini geliştiren fencidir.



Şek. 7.20 C_1 halkasındaki I_1 akımı, C_2 halkasının bulunduğu bölgede yaklaşık olarak biteviye bir **B**, alanı uyarır.

olur ki, burada $\mathcal{E}_{21}$ statvolt ve I_1 esb/s olarak alınmıştır. Karşılıklı irgitliği henry ile ölçersek 1 statvoltun 300 volt ve 1 (esb/sn)= I(ampere) $\times$ 3 $\times 10^9$ olduğunu anımsayalım, şöyle ki,

$$\mathcal{E}(\text{volt}) = -\frac{2\pi^2 R_2^2}{R_1} \times 10^{-9} \frac{dI}{dt} \ (\text{amp/s}) \quad (42)$$

olur. Böylece R_2 ve R_1 cm alınırsa M_{21}'in henry olarak değeri

$$M_{21} = \frac{2\pi^2 \times 10^{-9} R_2^2}{R_1} \quad (43)$$

olur. Bu arada, buraya dek sürüklediğimiz (−) imi şu anda çok bir şey söylemiyor. Elektromotor kuvvetin C_2,'de akımı hangi yönde akmağa zorladığını bilmek isterseniz, Lenz yasası sizin için en iyi kılavuzdur.

Eğer C_1 çevrimi bir tek sarım yerine N_1 sarımdan oluşmuş ise, merkezdeki B_1 alanı, verilen I_1 akımı için N_1 kez daha kuvvetli olacaktır. Aynı şekilde C_2 ilmeği (yani irgitlik) R_2 yarıçaplı N_2 sarımdan oluşmuş ise her sarımdaki emk kendinden önceki sarımda oluşana eklenecek ve böylece çevrimdeki toplam emk tek sarımdakinin N_2 katını bulacaktır. Böylece her kangalda birden fazla sarım için karşılıklı irgitim katsayısı

$$M_{21} = \frac{2\pi^2 \times 10^{-9} N_1 N_2 R_2^2}{R_1} \quad (44)$$

ile verilecektir.

Bütün bu dediklerimizde her kangalın sarımlarının sıkı bir demet oluşturduğunu ve demetin kesitinin kangalın yarıçapına bakınca küçük olduğunu düşünüyoruz. Bununla birlikte M_{21} karşılıklı irgitim katsayısı herhangi iki çevrimin herhangi bir şekli ve herhangi bir bölüşümü için oldukça belirli bir anlam taşır. Bu, çevrim 1'deki akım yeğinliğini değiştirmekle çevrim 2'de doğan emk'in volt tutarını I_1 akımının amp/s değişim hızına oranıdır. Böylece,

$$M_{21}(\text{henry}) = \frac{\mathcal{E}_{21}\ (\text{volt})}{\left(\frac{dI_1}{dt}\right)\left(\frac{\text{amp}}{\text{s}}\right)} \quad (45)$$

olur.

7.7 Bir "Karşılılık" Teoremi

C_1 ve C_2 çevrimlerini ele aldığımız zaman, C_2 'deki akım değişikliğinin C_1'de irgitimle uyardığı emk'nin ne olduğunu araştırabilirdik. Bu, başka bir M_{12} karşılıklı irgitim katsayısı işe karıştırır:

$$M_{12} = \frac{\mathcal{E}_{12}}{\left(\frac{dI_2}{dt}\right)} \quad (46)$$

Herhangi iki çevrim için,

$$M_{12} = M_{21} \quad (47)$$

olması ilginç bir olgudur.

Bu geometrik bir bakışımdan kaynaklanan bir özellik değildir. Şek. 7.20'de verilen yalın örnek

halinde bile iki çevrim birbirine göre bakışımlı değildir. M_{21}'i veren yazıma R_1 ve R_2'nin farklı yollardan girdiğine bakınız; birbirine benzemeyen bu iki çevrim için Denk. 47'ye göre eğer

$$M_{21} = \frac{2\pi^2 \times 10^{-9} N_1 N_2 R_2^2}{R_1},$$

ise

$$M_{12} = \frac{2\pi^2 \times 10^{-9} N_1 N_2 R_2^2}{R_1}$$

olması gerektiği sonucunu verir ki, bu, birinde 1'ler yerine 2'ler almakla ötekine geçmeyi sağlayan bir değişim değildir!

Denk. 47 teoremini tanıtlamak için, C_2 çevriminden geçen I akımı dolayısıyle C_1'den Φ_{12} akısı geçiyorsa, bunun, C_1 çevriminden aynı I akımı geçtiği zaman 2 çevriminden geçen Φ_{21} akısına eşit olduğunu göstermemiz gerekir. Bunu göstermek için yöngü gerilimi kavramını kullanıyoruz.

Stokes teoremine göre,

$$\int_C \mathbf{A} \cdot ds = \int_S (\text{dönül}\mathbf{A}) \cdot da \quad (48)$$

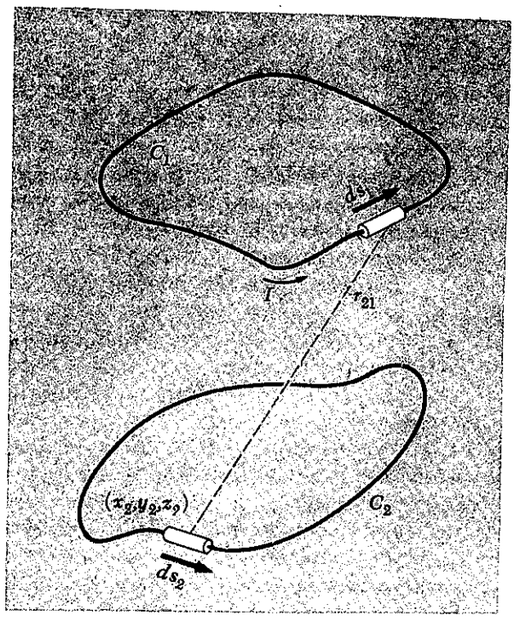
dır. Özellikle eğer **B** mıknatısal alanın yöngü gerilimi **A** ise, yani, eğer **B** = dönül **A** ise

$$\boxed{\int_C \mathbf{A} \cdot ds = \int_S \mathbf{B} \cdot da = \Phi_S} \quad (49)$$

olur. *Başka bir deyimle, yöngül gerilimin bir ilmek boyunca alınan çizgi tümlevi* **B***'nin bu ilmekten geçirdiği akının değerine eşittir.* Şimdi Yöngül gerilim kendi kaynağı olan akıma Denk. 6.35 uyarınca şöyle bağlıdır:

$$\mathbf{A}_{21} = \frac{I}{c} \int_{C_1} \frac{ds_1}{r_{21}} \quad (50)$$

burada $\mathbf{A}_{21}$, C_1 çevriminden akan I (esb/s) akımının uyardığı mıknatısal alanın herhangi bir (x_2,y_2,z_2) noktasındaki yöngü gerilimidir; ds_1 ise C_1 akım ilmeğinin bir öğesidir; r_{21}'e gelince, bu akım öğesinden (x_2,y_2,z_2) noktasına olan uzaklığı gösterir.



Şek. 7.21 C_1'den geçen I akımı dolayısı ile C_2'den geçen Φ_{21} akısının hesabı.

Şekil 7.21 C_1 ve C_2 ilmeklerini ve C_1'den akan I akımını gösteriyor. Burada (x_2,y_2,z_2), C_2 ilmeği üzerinde bir nokta olsun. O zaman C_1'deki I akımı dolayısı ile C_2 den geçen akı

$$\Phi_{21} = \int_{C_2} \mathbf{A}_{21} \cdot ds_2 = \int_{C_2} ds_2 \cdot \mathbf{A}_{21} = \frac{I}{c} \int_{C_2} ds_2 \cdot \int_{C_1} \frac{ds_1}{r_{21}} \quad (51)$$

olur. Benzerince, C_2'den akan I akımı dolayısı ile C_1'den geçen akının değeri

$$\Phi_{12} = \frac{I}{c} \int_{C_1} ds_1 \cdot \int_{C_2} \frac{ds_2}{r_{12}} \quad (52)$$

ile verilecektir.

Burada $r_{12} = r_{21}$ dir, zira bu iki nicelik yöngüsel değildir, doğrudan bir uzaklıktır. Buna göre yukarki iki tümlevin anlamı şudur: Herbiri bir ilmekten olmak üzere bir çift çizgi öğesinin sayıl çarpımını alınız, bunu bu öğeler arasındaki uzaklığa bölünüz ve bütün çiftler üzerinden toplamını alınız. Denk. 51 ile Denk. 52 arasındaki bir tek ayrım bu işlemin yapılma sırasındadır, ve bu sıra toplamın sonucunu etkiliyemez. O halde $\Phi_{12} = \Phi_{21}$ olduğuna göre, bunu doğrudan $M_{12} = M_{21}$ sonucu izler. Artık, M_{12} ile M_{21} arasında bir ayrım gözetmek zorunda kalmayız. Dolayısıyla herhangi iki çevrim halinde bunların karşılıklı M irgitiminden söz etmeğe hakkımız olur.

Bu gibi teoremlere çoğu zaman "karşılıklı oluş" teoremleri denir. Elektrik çevrimlerinde daha başka karşılıklı oluş teoremleri vardır ki, onlar da bundan bağımsız değildir. Bu size Kes. 3.6'da değindiğimiz ve Prob. 3.27'de işlediğimiz $C_{jk} = C_{kj}$ bağıntısını anımsatabilir. Genel olarak bir karşılıklı oluş bağıntısı, bir dizgenin yapısında yüzeyden görünmeyen genel ve derin bir bakışım yasasını anlatır. Elektromıknatısal dalgaların iletimini incelediğiniz zaman, çok sürükleyici ve bir görüşe göre çok şaşırtıcı bir karşılıklı oluş yasası ile karşılaşacaksınız.

7.8 Öz-irgitim

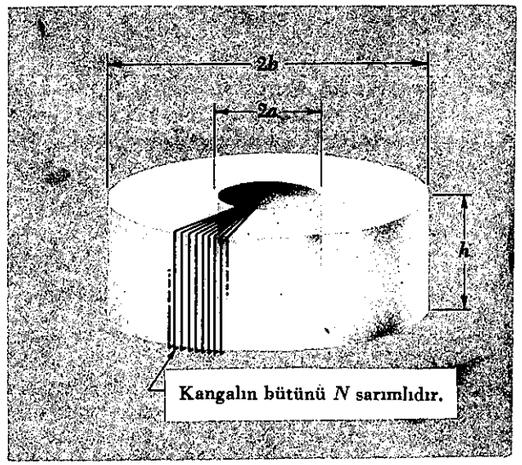
Bir C_1 çevriminden geçen I_1 akımı değişmekte ise, yüzeyinden geçen akı da değişir ve aynı çevrim de irgitimle bir emk doğar. Buna $\mathcal{E}_{11}$ diyelim. Akı kaynağı ne olursa olsun irgitim yasası geçerlidir:

$$\mathcal{E}_{11} = -\frac{1}{c}\frac{d\Phi_{11}}{dt} \qquad (53)$$

burada Φ_{11} çevrim 1'den geçen I_1 akımının uyardığı B_1 alanının yine çevrim 1'den geçirdiği akıdır. Eşitlikteki (–) imi elektromotor kuvvetin her zaman *akım* değişimine *karşı* çıktığını anlatır ki, bu da yine Lenz yasasıdır. Buradaki Φ_{11} akısı I_1 akımıyla oranlı olacağından

$$\mathcal{E}_{11} = -L_1\frac{dI_1}{dt} \qquad (54)$$

yazabiliriz. Buradaki L_1 sabitine çevrimin *özirgitim* katsayısı denir.



Şek. 7.22. Dörtgen kesitli bir simit: sarımlardan bir kesimi gösterilmiştir.

Öz-irgitim katsayısı hesaplanabilecek bir çevrime *örnek* olmak üzere, Şek. 7.22'de görülen ve Prob. 6.19'da işlenmiş olan dörtgen kesitli simid kangalını ele alalım. Eğer bu problemi işlemiş iseniz, N sarımlı böyle bir kangaldan geçen I, tutarında bir akımın, kangalın ekseninden r yarıçap uzaklığında bir noktada uyardığı alan yeğinliğinin $B = 2NI/cr$ ile verildiğini görmüşsünüzdür. Kangalın bir sarımından geçen akı bu alanın kangalın bütün kesiti boyunca alınan tümlevine eşittir:

$$\Phi\,(\text{bir sarım}) = h\int_a^b \frac{2NI}{cr}\,dr = \frac{2NIh}{c}\ln\left(\frac{b}{a}\right) \qquad (55)$$

N sarımlı bir çevrimden geçen akının değeri N kez daha büyük olacaktır:

$$\Phi = \frac{2N^2Ih}{c}\ln\left(\frac{b}{a}\right) \qquad (56)$$

Buna göre irgitimle oluşan $\mathcal{E}$ elektromotor kuvveti

$$\mathcal{E} = -\frac{1}{c}\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{2N^2h}{c^2}\ln\left(\frac{b}{a}\right)\frac{dI}{dt} \qquad (57)$$

olur. Buna göre kangalın öz-irgitim katsayısı,

$$L = \frac{2N^2h}{c^2}\ln\left(\frac{b}{a}\right) \qquad (58)$$

ile verilir. Formüldeki I esb/s, ve $\mathcal{E}$ statvolt olarak ölçülmüşse Denk 58 ör-irgitim katyasınını doğru verir. Ama: I ampere ve $\mathcal{E}$ volt için L'ye uygun birim, karşılıklı irgitimde olduğu gibi henry'dir. Bu birimlere dönüştürerek

$$\text{L (henry)} = 2\times 10^{-9}N^2h\ln\left(\frac{b}{a}\right) \qquad (59)$$

bulunur.

Öz-irgitim hesaplamasına bir örnek olarak daha önceki halkaları almanın basit olacağını düşünebilirsiniz. Ama yalın dairesel bir tel ilmeğinin irgitim katsayısını hesaplamaya kalkıştığımız zaman beklemediğimiz bir güçlükle karşılaşırız. Problemi yalınlaştırmak için telin çapını sıfır almak iyi bir düşünce gibi görülebilir. Ama hemen görürüz ki, sıfır çaplı bir tel ilmekten sonlu bir akım geçirsek, ilmek yüzeyinden geçen akı sonsuz olur! Bunun nedeni, çok ince bir akım telinin yakınlarındaki B alanının, telden r uzaklığı için, $1/r$ ile oranlı oluşudur; ve

r sıfıra doğru giderken $B\times$ yüzey yazımı, $\int(dr/r)$

gibi ıraksak olur. Bu güçlüğü gidermek için, telin yarıçapını sıfır değil sonlu alırız, ve bu daha gerçekci bir düşünüş olur. Bu hesapları biraz daha güçleştirebilirse de bizi çok tasalandırmaz. Asıl gerçek güçlük, telin ayrı kesimlerinin ayrı çevrimler gibi görünmesi, ve buralardan ayrı tutarda akı geçmesidir. Çevrimden geçen akı sözü ile ne anlatmak istediğimize artık pek güvenemeyiz. Gerçekten bu çevrimi çok ince tel halkalarından (ilmeklerden) oluşmuş gibi düşünürsek bu ilmeklerde doğan emk'ler ayrı olacağından, halkada hızla değişen bir akım aktığında ayrı yeni bir akım yoğunluk dağılımı olur. Bu nedenle çevrimin irgitim katsayısı I,'nın değişim hızına bağlıdır ve Denk. 54'ün istediği gibi artık kesin bir sabit olamaz.

Simit kangalı halinde bu sıkıntıyı gidermek için, kangalın ayrı sarımlarının hemen yakınlarındaki alanı bilmezlikten geldik. Burada akının çoğu tellerden geçmez, geçtiği hallerde ise, az önce kaygılandığımız etki burada artık önemli değildir.

7.9 Öz-İrgitimli bir Çevrim

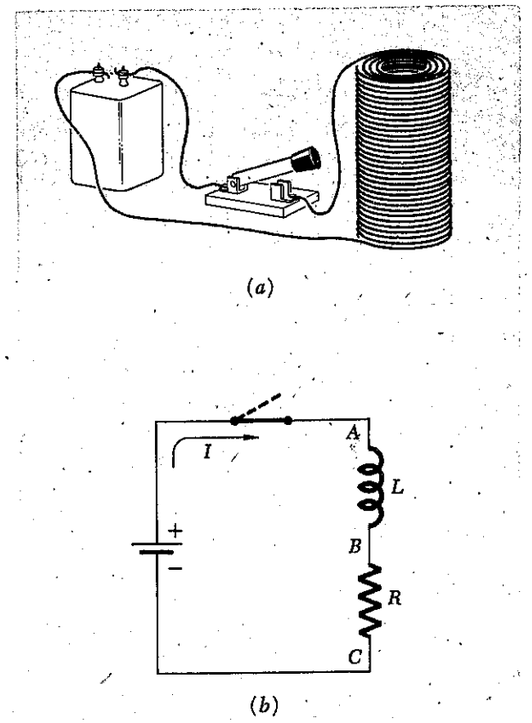
$\mathcal{E}_0$ emk'ini veren bir batarya ve öz-irgitim katsayısı L olan bir akım kangalı ya da irgitgi ile Şek. 7.23a'da görüldüğü gibi bir çevrim kurduğumuzu düşünelim. Kangalın kendisinin, bağlama tellerinin, hatta bataryanın bile dirençleri var. Bu dirençlerin çevrimin çeşitli kesimleri üzerindeki dağılımına pek önem vermiyoruz. Bunların tümü, Şek. 7.23b'de gösterilen R gibi bir dirençte toplanmış sayılabilir. Aynı şekilde, çevrimin geriye kalan kesimi, özellikle bağlama telleri bütün çevrimin irgitim katsayısına bir katkıda bulunurlar; bunların da tümünü L içinde toplanmış sayıyoruz. Başka bir deyimle, Şek. 7.23b gerçek çevrimin ülkül halini gösterir: ⏦ simgesi ile gösterilen bir L irgitgisinin* direnci yoktur; R direncinin de irginliği yoktur. Şimdi çözümleyeceğimiz çevrim bu ülkül çevrimdir.

Çevrimden geçen I akımı, dI/dt hızı ile değişir ise, bu değişime karşı koyacak doğrultuda $L\,dI/dt$ gibi bir irgitim emk doğacaktır. Bundan başka çevrimdeki bataryanın sabit $\mathcal{E}_0$ emk'si vardır. Çevrimdeki artı akım doğrultusu olarak, bataryanın çevrimden akım geçirmeye zorladığı doğrultuyu alırsak bir andaki net emk, $\mathcal{E}_0 - L\,dI/dt$ olacaktır. R direncinden I akımını geçiren bu emk'dir. Öyle ise

$$\mathcal{E}_0 - L\frac{dI}{dt} = RI \qquad (60)$$

yazabiliriz.

* Irgitgi : İndüktör Irginlik : İndüktans



(a) (b)

Şek. 7.23 İrgimlikli (a) ve dirençli (b) yalın bir çevrim.

Bu durumu şöyle de anlatabiliriz: *İrgitginin uçları arasındaki gerilim yani,* A ve B noktaları arasındaki gerilim farkı; $L\,dI/dt$'dir, ve I akımı şekilde gösterilen doğrultuda *artmakta ise* irgitginin üst ucu artıdır. B ile C arasındaki gerilim farkı, yani R direnci üzerindeki gerilim ise direncin üst ucu artı olmak üzere RI'ye eşittir. Böylece gerilimin irgitgi boyunca tutarı ile direnç boyunca tutarının toplamı $L\,dI/dt + RI$ olur. Bu toplamın bataryanın uçları arasındaki $\mathcal{E}_0$ gerilimine eşit olması gerekir (bataryamızın iç direnci yoktur). Öyle ise

$$\mathcal{E}_0 = L\frac{dI}{dt} + RI \tag{61}$$

yazabiliriz ki, bu Denk. 60'den başka bir şey değildir.

Denk. 60'ın matematiksel çözümünü aramazdan önce, $t = 0$ anında çevrimin düğmesi kapanınca bu çevrimde ne olacağını kestirmeğe çalışalım. Düğmeyi kapamazdan önce $I = 0$ olması gerektiği açıktır. Çevrim kapandıktan uzunca bir süre sonra akım yeğinliği sabit I_0 gibi kararlı bir değere ulaşacaktır; bundan sonra artık $dI/dt \approx 0$ ve Denk. 60

$$\mathcal{E}_0 = RI_0 \tag{62}$$

biçimine indirgenecektir. Sıfır akım yeğinliğinden I_0 kararlı akım haline geçiş $t = 0$ anında birden olamaz, zira, bu dI/dt 'nin sonsuz olması demektir. Gerçekten, $t = 0$ anından hemen sonra, akım öylesine küçük olacaktır ki, Denk. 60'da ikinci RI terimi savsanabilecektir, böylece

$$\frac{dI}{dt} = \frac{\mathcal{E}_0}{L} \tag{63}$$

elde edilecektir. L öz-irgitim (irginim) akımın artış hızını sınırlar.

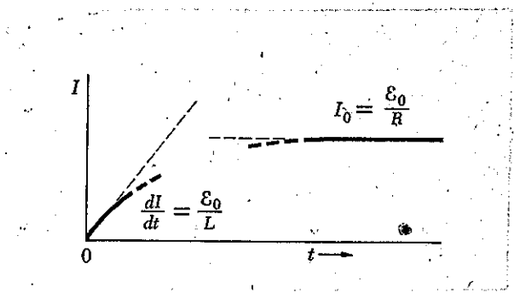
Şimdiye dek öğrendiklerimiz Şek. 7.24a'da özetlenmiştir. yalnızca tüm değişimin nasıl olduğunu bulmak kalıyor. Denklem 60 daha önce Kes. 4.11'de ve Cilt Böl. 6'da gördüklerimiz gibi bir diferansiyel denklemdir. Bunun üzerinde durmaksızın Denk. 60'ın çözümü olarak, $t = 0$. anında ilk akımın $I = 0$ yeğinliği koşulunu doğrulayan ,

$$I = \frac{\mathcal{E}_0}{R}(1 - e^{-(R/L)t}) \tag{64}$$

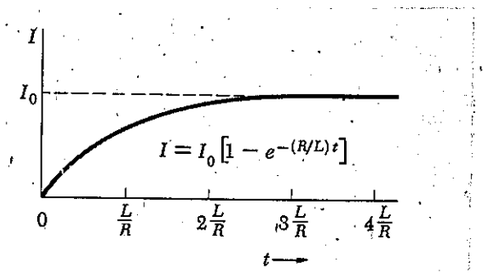
yazımını verebiliriz.

Şek. 7.24b'deki eğri, akımın I_0 kavuşmaz* değerine üstel olarak yaklaştığını göstermektedir. Bu çevrimin "zaman sabiti" L/R niceliğidir. Eğer

* Kavuşmaz : Asimtot



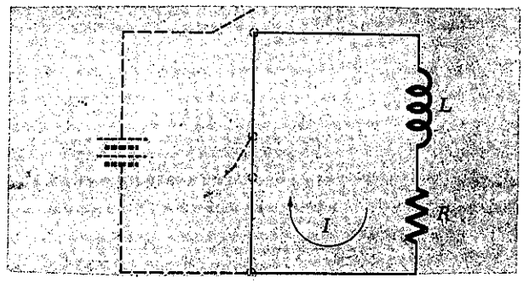
Şek. 7·24 (a) Akımın başlangıçtaki davranışı nedir, bu davranış uzun bir süre sonra ne olabilir?



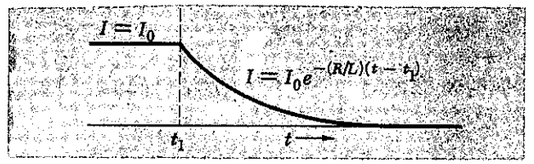
(b) Şek. 7.23'teki çevrimden geçen akımın zamana göre değişiminin tümü.

L henry ve R ohm olarak alınmışsa bu zaman sabiti saniye olarak çıkar, zira, henry, volt/(ampere/s)'dir ve ohm ise volt/ampere'dir.

Şimdi I_0 akımı kurulduktan sonra düğmeyi birden açar ve böylece akımı sıfıra düşmeğe zorlarsak ne olur? Böyle bir durum $L\,dI/dt$ terimini eksi sonsuz bir değere getirir! Bu felâket matematiksel olmaktan da öteye önem kazanır. İçinde büyük irgitgi bulunan çevrimlerdeki düğmelerin açılması ile ölümlere yol açıldığı görülmüştür. Genellikle görülen, çok yüksek bir irgitim gerilimi düğmenin açılan uçları arasında bir kıvılcım ya da bir boşalma yayı oluşturur; bu ise sonunda akımın biraz daha sürmesi demektir. Bunun yerine Şek. 7.25a'da olduğu gibi



Şek. 7.25 (a) LR çevrimi.



(b) LR çevrimindeki akımın üstel sönüşü.

bataryayı ayırırken çevrimi iletken LR yolu üzerine kapayalım. Bu durumda,

$$0 = L\frac{dI}{dt} + RI \tag{65}$$

ile anlatılan bir çevrim elde etmişiz demektir; buradaki ilk koşullar $t = t_1$ anında yani çevrimin kapandığı anda akımın $I = I_0$ değerini almasıdır. Denklemin çözümü üstel azalan yalın bir fonksiyondur:

$$I = I_0 e^{-(R/L)(t-t_1)} \tag{66}$$

bu çözümün de belirtgen zamanı daha önce olduğu gibi L/R 'ye eşittir.

7.10 Bir Mıknatısal Alanda Biriken Enerji

Denk. 66'da anlatılan ve Şek. 7.25b'de gösterilen akım sönüşü sırasında, R direncinde enerji yitiği olur. Kısa bir dt süresi içinde yiten dU

enerjisinin değeri $RI^2\,dt$ olduğuna göre, t_1 anında düğmenin RL çevrimi üzerine kapanmasından sonra ki enerji yitiği

$$U = \int_{t_1}^{\infty} RI^2\,dt = \int_{t_1}^{\infty} RI_0{}^2 e^{-(2R/L)(t-t_1)}\,dt \qquad (67)$$

olacaktır. Burada $x = 2R\,(t-t_1)/L$ olarak ile U-nun değeri kolayca hesaplanabilir:

$$U = RI_0{}^2 \left(\frac{L}{2R}\right)\int_0^{\infty} e^{-x}\,dx = \tfrac{1}{2}LI_0{}^2 \qquad (68)$$

Bu enerjinin kaynağı irgitgi ile onun mıknatısal alanıdır. Gerçekten çevrimde akımın kurulması için, $t = 0$'dan $t = t_1$ anına değin dirençteki ısıl enerji yitiğine ek olarak, bataryanın akımın kurulması için harcadığı iş tam bunca idi. Bunun genel bir bağıntı olduğunu göstermek için, bir irgitgide artan bir I akımı varsa, bu akımı, irgitimle oluşan $L\,dI/dt$ emk'ine karşın geçirebilmek için iş yapmak gerektiğini anımsayalım. Böylece dt süreci içinde yapılan iş

$$dW = LI\frac{dI}{dt}\,dt = LI\,dI = \tfrac{1}{2}L\,d(I^2) \qquad (69)$$

olur. Bu nedenle akımı geçiren bir irgitgide biriken enerji için

$$U = \tfrac{1}{2}LI^2 \qquad (70)$$

yazımını alabiliriz. Bu akım sönerse, bu tutarda enerjinin başka bir yerde kendini göstermesi gerekir.

Daha önce, yüklenmiş bir sığacın enerjisinin elektrik alanı içinde biriktirildiğini düşündüğümüz gibi, burada da, bu enerjiye irgitginin mıknatısal alanı içinde birikmiş gibi bakmak doğaldır. V gerilimi altında yüklenmiş bir sığacın enerjisi, $\frac{1}{2}CV^2$ idi ve bu enerjinin elektrik alanının Σ yeğinliğinde olduğu bir yerde dv oylum öğesine düşen tutarını $(1/8\pi)\,E^2\,dv$'ye eşit olduğunu görmüştük. Bir irgitgi içinde biriken enerji tutarının da tam buna benzer bir yazım ile verilebildiğini görmek beklenmedik bir şey değilse de, hoşa giden bir durumdur. Yani, mıknatısal alana $(1/8\pi)\,B^2$ gibi bir enerji yoğunluğu tanıyabiliriz, ve bütün alanda biriken toplam enerjinin $\frac{1}{2}LI^2$ tutarını bulduğunu hesaplayabiliriz.

Bunun bir örnek üzerinde nasıl işlediğini gösterebilmek için L öz-irgitim katsayısını daha önce Kes. 7.8'de hesapladığımız simit kangalına dönelim. Bu durumda

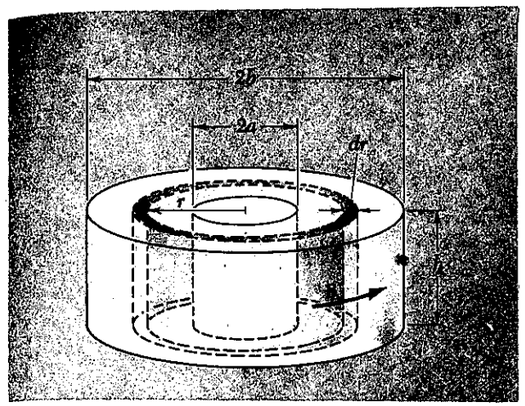
$$L = \frac{2N^2h}{c^2}\ln\left(\frac{b}{a}\right) \qquad (71)$$

idi (Denk. 58). I akımı geçerken oluşan mıknatısal alanın B yeğinliği

$$B = \frac{2NI}{cr} \qquad (72)$$

ile verilmişti. Şimdi $B^2/8\pi$ enerji yoğunluğunun oylumca tümlevini hesaplayabilmek için, Şek. 7.26'da çizilmiş silindir diliminin oluşturduğu oylum öğesini kullanabiliriz ki, bunun da tutarı $2\pi rh\,dr$ 'dir. Bu silindir dilimi $r = a$'dan $r = b$'ye kadar genişlerse mıknatısal alanı kapsayan bütün uzayı taramış olur. (Unutmayalım ki, simidin dışında bulunan her noktada B alanı sıfırdır.)

$$\frac{1}{8\pi}\int B^2\,dv = \frac{1}{8\pi}\int_a^b \left(\frac{2NI}{cr}\right)^2 2\pi rh\,dr = \frac{N^2hI^2}{c^2}\ln\left(\frac{b}{a}\right) \qquad (73)$$



Şek. 7.26 Şek. 7.22'deki simit kangalının mıknatısal alanında biriken enerjinin hesaplanması.

bu sonucu Denk. 71 ile karşılaştırarak

$$\frac{1}{8\pi}\int B^2\,dv = \tfrac{1}{2}LI^2 \qquad (74)$$

olduğunu görüyoruz.

Denk. 1.36'da elektrik alanı için olduğu gibi burada da daha genel bir yazım yani, herhangi bir $B(x,y,z)$ mıknatısal alanına bağlı U enerji tutarı için

$$\boxed{U = \frac{1}{8\pi}\int_{\text{Tüm}} B^2\,dv} \qquad (75)$$

buluruz.

B gauss, ve v cm^3 alınırsa Denk. 75'deki U erg olarak çıkar. Denk. 70'de henry ve ampere (L ve I, için) kullanırsak, U joule olarak çıkacaktır.

7.11 "Bir Eksiklik Var"

Alanlar ve yükler arasındaki bağıntıları yeniden gözden geçirelim. Böl. 2'de öğrendiğimiz gibi Coulomb yasasına eşdeğer bir yazım,

$$\text{ırak}\,\mathbf{E} = 4\pi\rho \qquad (76)$$

diferansiyel bağıntısıdır; bu yazım bölgedeki ρ elektrik yük yoğunluğunu $\mathbf{E}$ elektrik alanına bağlar. Bu dediğimiz hem duruk yükler hem de devinimliler için doğrudur. Yani, ρ uzay konumlukları gibi zamanın da fonksiyonudur. Böl. 5'de belirttiğimiz gibi Denk. 76'nın devinen yükler için geçerli olması *yük değişmezliği* ile bağdaşır: yalıtılan bir yüklü parçacıklar dizgesinin devinimi ne olursa olsun, $\mathbf{E}$'nin bu yükleri saran bir yüzey üzerinde alınan tümlevi ile ölçülen yük tutarı, bütün gözlem çatkılarında aynı çıkar.

Devinen elektrik yükleri elektrik akımı demektir. Yük hiç bir zaman yaratılamadığına ya da yokedilemediğine göre ρ yük yoğunluğu ile $\mathbf{J}$ akım yoğunluğu her zaman,

$$\text{ırak}\,\mathbf{J} = -\frac{\partial\rho}{\partial t} \qquad (77)$$

koşuluna uymak zorundadırlar. Buna Denk. 4.9'daki gibi "süreklilik denklemi" diyeceğiz. Eğer $\mathbf{J}$ akım yoğunluğu zaman içinde sabit ise, (ıra $\mathbf{J}$ 0) buna kararlı (durgun) bir akım dağılımı denir. Kararlı bir akım dağılımının mıknatısal alanı

$$\text{dönül}\,\mathbf{B} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{J} \qquad (78)$$

denklemine uyar. Bu bağıntıyı daha önce Böl. 6'da işlemiştik.

Şimdi zamanla değişen yük dağılımları ve alanlarla ilgileniyoruz. Bunun için $\partial\rho/\partial t \neq 0$ olan $\rho(x,y,z,t)$ gibi, bir yük dağılımı karşısında olalım. Örneğin bu, bir direnç üzerine boşalmakta olan bir sığaç durumu olabilir. Denk. 77'ye göre $\partial\rho/\partial t \neq 0$ koşulu

$$\text{ırak}\,\mathbf{J} \neq 0 \qquad (79)$$

olmasını gerektirir. Ama herhangi bir yöngü fonksiyonunun dönülünün ıraksaması sıfıra özdeş olduğundan (Bak. Prob. 2.15) Denk. 78'e göre

$$\text{ırak}\,\mathbf{J} = \frac{c}{4\pi}\,\text{ırak}\,(\text{dönül}\mathbf{B}) = 0 \qquad (80)$$

olması gerekir. Buradaki çelişim gösteriyor ki, Denk. 78 yük yoğunluğu zamanla değişen yapılar için *doğru olamaz*. Gerçi bunun doğru olması gerektiğini

savunan olmadı; Denk. 78'in *geçerli* olduğu kararlı bir akım dağılımında, hem **J** akım yoğunluğu hem de yük yoğunluğu zamana bağlı değildir.

Problem biraz değişikce ortaya atılabilir ve Şek. 7.27'deki sığacın bir yaprağından yük götüren telin çevresinde mıknatısal alanın çizgi tümlevi ele alınarak işlenebilir. Stokes teoremi uyarınca

$$\int_C \mathbf{B}\cdot d\mathbf{l} = \int_S \text{dönül}\mathbf{B}\cdot d\mathbf{a} \qquad (81)$$

eşitliği yazılabilir.

Buradaki S yüzeyi değişen I akımının akmakta olduğu iletkeni kesiyor. İletkenin içinde dön **B** sonlu bir değer alır ki, bu da $4\pi\mathbf{J}/c$ dir ve buna göre sağdaki tümlevin değeri $4\pi I/c$'ye eşit olur. Bu demektir ki, C eğrisi tele yeterince yakın ve sığacın yaprakları arasındaki boşluktan yeterince uzak ise, buradaki mıknatısal alan aynı akımı geçiren herhangi bir iletkenin çevresindeki alandan değişik değildir.

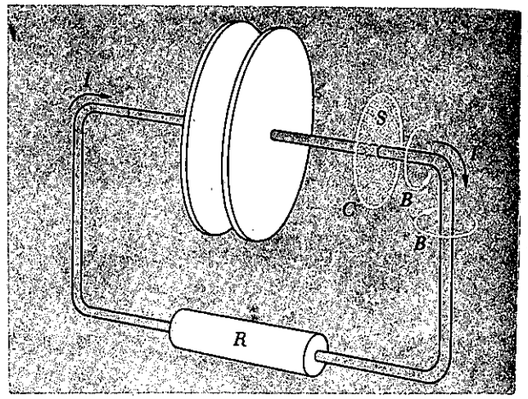
Şek. 7.28'de görülen S' yüzeyi de aynı C eğrisi üzerine oturmuştur ve Denk. 81'in deyimlediği Stokez teoremine aynı nedenle uymak durumundadır. Ama bu yüzeyden (yani S 'den) geçen hiç bir *net akım* yoktur! Demek ki dönül **B**'nin değeri S' yüzeyi üzerinde sıfır olmakla Stokes teoremini çiğnemektedir. Bu nedenle dönül **B** yöngüsü, S' yüzeyi üzerinde, **J** akım yoğunluğundan başka bir şeye bağlı olmak zorundadır.

Bundan ancak şu sonucu çıkarabiliriz: Denk. 78, değişen yük dağılımları gibi genel durumlarda başka bir bağıntıya yerini bırakmak zorundadır. Bunu anlatmak üzere,

$$\text{dönül}\mathbf{B} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{J} + (?) \qquad (82)$$

yazalım ve bu (?)'nin ne olduğunu bulmaya çalışalım.

Başka bir düşünceden esinlenerek yanıtın ne olabileceğini kestirebiliriz. Elektromıknatısal alanın Denk. 6.58'de verilen dönüşüm yasalarının **E** ve **B** cinsinden tümcek bakışımlı olduklarını anımsayınız.



Şek. 7.27 Sığaç sağ levhası artı olacak biçimde yüklendikten sonra bir direnç üzerinden boşalmaya başlamıştır.
Telin çevresinde bir **B** mıknatısal alanı vardır; dönül **B**'nin teli kesen bir yüzey boyunca alınan tümlevinin değeri $4\pi I/c$'ye eşittir.

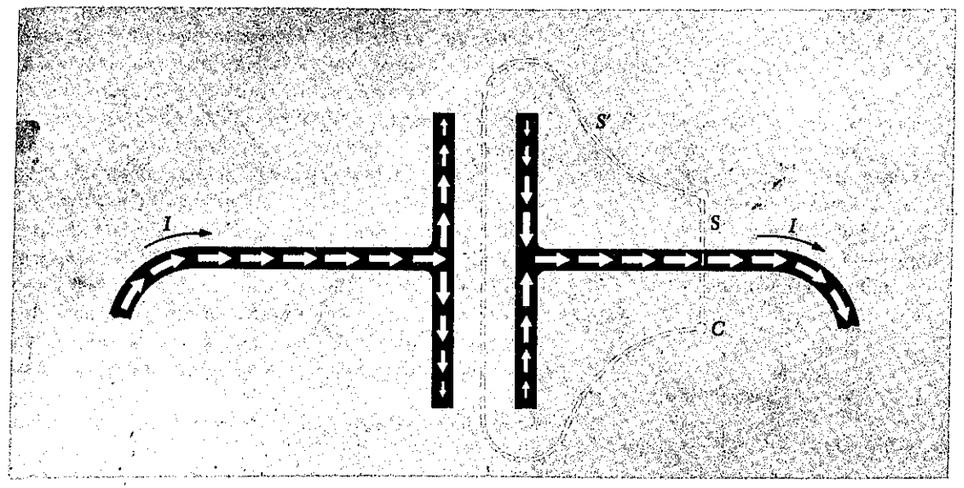
Faraday'ın irgitim olayında *değişen bir mıknatısal alana* Denk. 30'un verdiği biçimde bir *elektrik alanı* eşlik eder:

$$\text{dönül}\,\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \qquad (30)$$

bu yüklerin doğrudan işe karışmadığı, boş uzay içinde elektriksel ve mıknatısal alanları bağlayan yerel bir bağıntıdır. **E** ve **B**'ye göre bakışım özelliği öncelik kazanmakta ise, değişen bir elektrik *alanının bir mıknatısal alan* : uyarmasını beklemeliyiz. Öyle ise burada Denk. 30'dakine benzer bir eşitliğin betimlediği bir irgitim olayı bulunmalı ve bu olayda **E**'nin ve **B**'nin rolleri yer değiştirmiş olmalıdır. İlerde göreceğimiz gibi bu arada bir imleme değişiminden, başka bir değişiklik yoktur:

$$\text{dönül}\,\mathbf{B} = \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \qquad (83)$$

Bu bağıntı Denk. 82'de eksikliğini gördüğümüz terimi sağlayacaktır. Bunu denemek için



Şek. 7.28 Beyaz oklar iletkenlerden geçen akımı gösteriyor. C eğrisi üzerine oturan S yüzeyinden geçen bir akım bulunduğu halde S' yüzeyinden de geçen bir akım yoktur.

$$\text{dönül}\,\mathbf{B} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{J} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \qquad (84)$$

yazalım ve iki tarafında ıraksamasını alalım:

$$\text{ırak}\,(\text{dönül}\mathbf{B}) = \text{ırak}\left(\frac{4\pi}{c}\mathbf{J}\right) + \text{ırak}\left(\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\right) \qquad (85)$$

daha önce uyardığımız gibi, denklemin sol yanı sıfır olmak zorundadır. Öteki yanın sağ teriminde uzay ve zaman konumluklarına göre alınan diferansiyellerin sırasını değiştirebiliriz. Böylece Denk. 76'dan yararlanarak

$$\text{ırak}\left(\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\right) = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(\text{ırak}\mathbf{E}) = \frac{4\pi}{c}\frac{\partial \rho}{\partial t} \qquad (86)$$

bulunur. Buna göre Denk. 85'in sağ yanı,

$$\frac{4\pi}{c}\text{ırak}\,\mathbf{J} + \frac{4\pi}{c}\frac{\partial \rho}{\partial t} \qquad (87)$$

haline girer ki, bu da Denk. 77'deki sürekiilik koşulu dolayısı ile sıfıra eşittir.

Görülüyorki yeni terim Şek. 7.28'in ortaya çıkardığı güçlüğü çözmektedir. Yükler sığaçdan dışarı aktıkça herhangi bir andaki elektrik alan çizgilerinin yeğinliği Şek. 7.29'da görülen biçimde, azalır. Bu halde $\partial\mathbf{E}/\partial t$ yöngüsü **E**'ye karşı nelmiştir. Şek. 7.30'da $\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$ yöngü işlevi siyah oklarla gösterilmiştir. Artık dönül $\mathbf{B} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{J} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$ yazımı iledönül **B**'nin S' yüzeyince alınan tümlevinin değeri S yüzeyince alınan tümlevinkinin aynıdır. S' yüzeyince alınan tümlevde bütün katkı ikinci terimden gelmektedir; S yüzeyinde ise **J** 'li terim, yani birinci terim tek etken oluyor.

7.12 Yer Değiştirim Akımı

Anlaşılıyor ki, $\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$ yöngü alanı, iletim akım dağılımının bir uzantısı gibi görülmektedir. Maxwell bunun adına *yer değiştirim ya da sürüm akımı* demişti; bu terim bugün pek uygun görünmese de artık tutunup kaldı. Daha kesin olabilmek için $\mathbf{J}$ iletim akım yoğunluğundan değişik olarak "yer değiştirim akımı yoğunluğu" diyeceğimiz bir "$\mathbf{J}_d$" niceliği tanımlayabiliriz ve bunun için Denk. 84'ü

$$\text{dönül}\,\mathbf{B} = \frac{4\pi}{c}(\mathbf{J} + \mathbf{J}_d) \qquad (88)$$

biçiminde yazabiliriz $\mathbf{J}_d \equiv \frac{1}{4\pi}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$ istediğimiz akım yoğunluğunu tanımlar.

Bu yeni terim, akım ile mıknatısal alan arasındaki bağıntının, zamanla değişen iletim akımları halinde, süreklilik denklemi ile bağıbağdaşmasını sağlamak için gerekti. Eğer bu terim koyduğumuz yerde iyi duruyorsa, bundan, değişen elektrik alanlarına bir mıknatısal alanın eşlik etmesi gibi yeni bir irgitim olayının varlığını çıkarmak zorundayız. Eğer böyle bir etki gerçekten var ise, bunu Faraday niçin görememiştir? Bunun başta gelen nedeni, Faraday'ın böyle bir etkiyi aramamış olmasıdır; ama onun yaptığı denel çalışmaların Denk. 84'deki son terime yorulabilecek yeni etkiler ortaya çıkarmamasının daha derin ve daha temelli nedenleri vardır. İçinde değişen elektrik alanları bulunan herhangi bir aygıtta, aynı zamanda, iletim akımları yani devinen yükler vardır. Aygıtın çevresinde her yerde oluşan $\mathbf{B}$ mıknatısal alanı, bu iletim akımlarından beklediğimiz alan tutarındadır. Gerçekten çevrimin sürekli olamayabileceğini bilmezlikten gelip de, her iletim akımı öğesinin katkısını almakla uzayın herhangi bir noktasındaki alanı hesaplamak için Denk. 6.38'de verilen Biot-Savart yasasını kullanırsanız alan hemen aynı çıkacaktır.

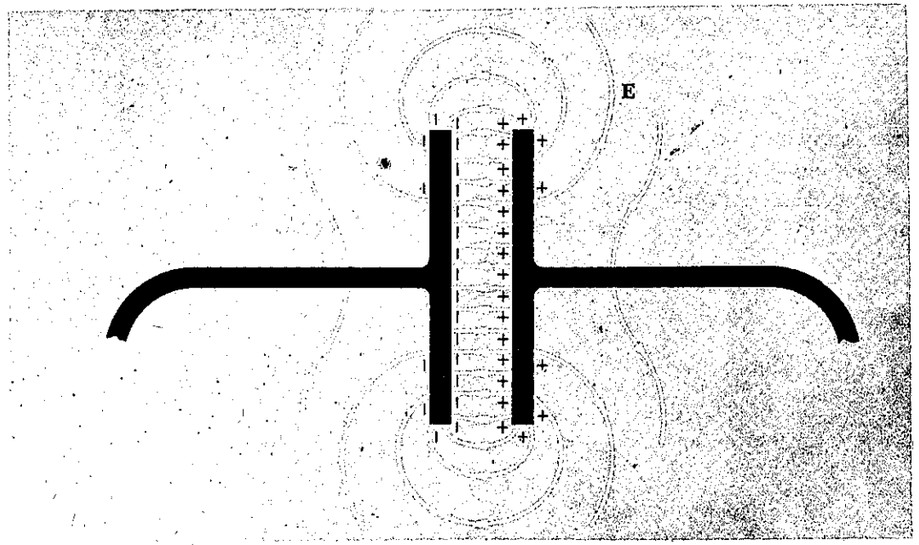
Örneğin Şek. 7.31'deki boşalan sığacın yaprakları arasındaki uzayda bulunan P noktasını ele alalım. Tellerdeki iletim akımının her öğesi ve yapraklar üzerindeki akımın her öğesi, P'deki alana, Biot-Savart yasası uyarınca bir katkıda bulunurlar. Acaba bu hesaba "yer değiştirim akımının" $\mathbf{J}_d$ öğelerini de sokmalı mıyız? Yanıt daha çok şaşırtıcıdır. $\mathbf{J}_d$'yi hesaba sokabiliriz; ama bu akımların tümünü hesaba sokacak ölçüde titiz davranırsak, yeterince yavaş değişen alanlar halinde, bunun $\mathbf{J}_d$'nin etkisinin sıfır olduğunu görürüz. Bunun nedenini anlamak için, Şek. 7.30'da siyah oklarla gösterilen $\mathbf{J}_d$'yöngü işlevinin, Şek. 7.29'daki $\mathbf{E}$ elektrik alanı ile aynı biçimde olduğunu gözden kaçırmayın. Bu elektrik alanı bir durgun yük alanıdır, ama bu yavaş yavaş sönen bir alandır. Bu nedenle alanın dönülünün kılgınca sıfır olmasını beklemeliyiz ki, bu da dön $\mathbf{J}$'nin sıfır olmasını gerektirir. Daha kesin söylemek gerekirse elimizdeki $\mathbf{J}_d = \frac{1}{4\pi}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$ yer değiştirim akımından dön $\mathbf{J}_d$'yi hesaplar, diferansiyel sırasını değiştirir ve bu yazım içine dönül$\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$'yi taşırsak

$$\text{dönül}\,\mathbf{J}_d = \frac{1}{4\pi}\text{dönül}\left(\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\right) = \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial t}(\text{dönül}\,\mathbf{E}) = -\frac{1}{4\pi c}\frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} \qquad (89)$$

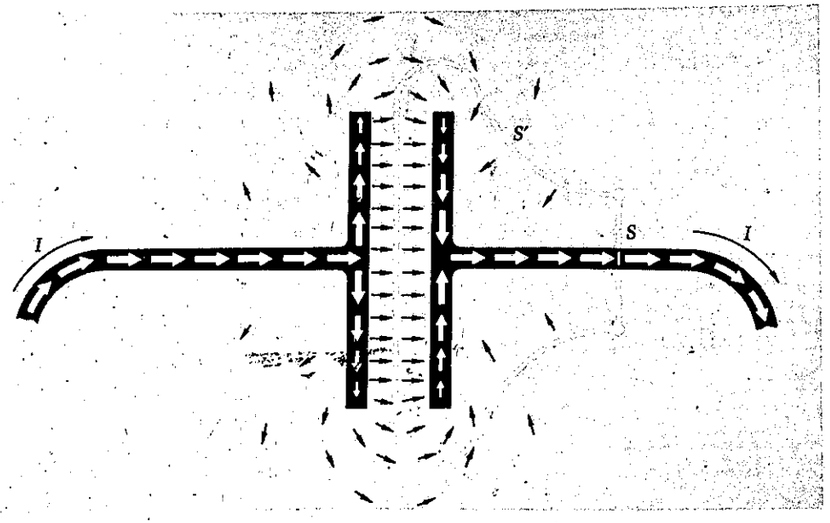
bağıntısını elde ederiz. Bu yeterince yavaş değişen alanlar için savsanabilir bir niceliktir. Yavaş değişen bir alana *hemen hemen durgun* alan diyebiliriz.

Eğer $\mathbf{J}_d$ dönülsüz bir alan yöngüsü ise, durgun elektrik alanın nokta yüklerden kaynaklanan bir alan olması gibi, bu da, bir kaynak noktadan dışa doğru akan, ya da karşıt kaynak noktasına doğru akan ışınsal akımların üstüste gelmesinden oluşmuş gibi düşünülebilir (Şek. 7.32). Ama Biot-Savart yasasına göre hesaplanan, ışınsal bakışımlı bir akım dağılımının mıknatısal alanı, bakışım dolayısıyle sıfır olmak zorundadır, zira, hiç bir yerde ışınsal doğrultudan başka bir benzeri olmayan eşsiz doğrultu yoktur.

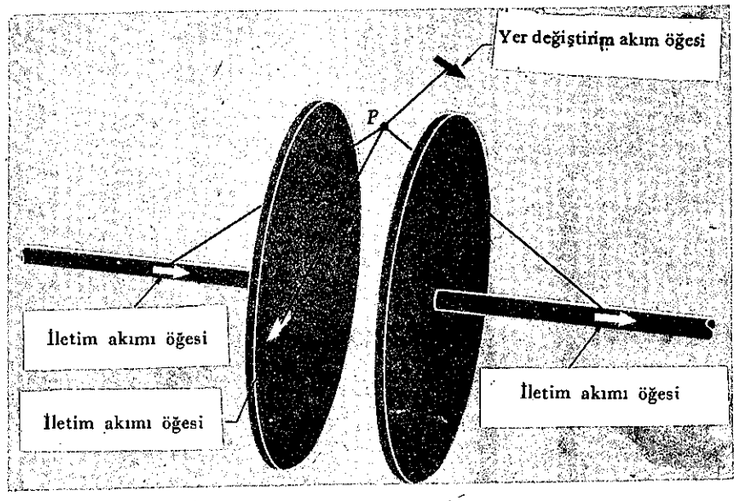
O zaman *hemen hemen duruk* alan içinde, mıknatısal alanı hesaplamak için kullanılacak *kaynaklar* yalnız iletim akımıdır. Başka bir deyişle, eğer



Şek. 7.29 Herhangi bir andaki elektrik alanı. $\mathbf{E}$'nin değeri zamanla her yerde küçülmektedir.



Şek. 7.30 İletim akımı (beyaz oklar) ve yer değiştirim akımı (siyah oklar).



Şek. 7.31 Yavaş değişen alanlar halinde herhangi bir noktadaki, mıknatısal alana bütün yer değiştirim akımlarının tüm katkısı sıfırdır. Biot-Savart yasasını özgür iletim akımı ögelerine uygulamakla P'deki mıknatısal alan hesaplanabilir.

Faraday Şek. 7.31'deki gibi bir düzenek kurmuş olsa idi ve P noktasındaki mıknatısal alanı diyelim bir pusula ile ölçülebilse idi, ölçülerinin sonucu onu şaşırtmazdı ve bu ölçülerini anlatabilmek için yer değiştirim akımı gibi bir kavram ortaya atmak zorunda kalmazdı.

Bu yeni irgitim olayını görebilmek için çok hızlı değişen alanlar gerekir. Daha doğrusu akım değişimlerini ışığın aygıtı geçtiği süre içinde olması gerekir. Bu yüzden konu ile ilgili doğrudan gözlenebilecek bir takım olayların ortaya konabilmesi için, Maxwell'in buluşları üzerinden yıllar geçmesi ve Hertz'in deneylerine kadar beklenmesi gerekmiştir.

7.13 Maxwell Denklemleri

James Clark Maxwell, Faraday'ın elektrik deneyleri içine dalıp bunları uzun uzun inceledikten sonra, elektrik ve mıknatıslık üzerine matematiksel bir kuram geliştirmeğe koyuldu. Maxwell bunu yaparken görelikten yararlanamıyordu, çünkü bu kuram, bir 50 yıl sonra ortaya çıkacaktı. Maddenin elektriksel yapısı bir giz perdesi arkasında saklı idi; hele ışık ile elektromıknatıslık arasında da bir bağıntı bulunabileceği üzerinde görünürde hiç bir ipucu yoktu. Bundan sonraki adımı atmak için bize bugün çok açık görünen bazı düşünceler o zaman düşünülebilecek şeyler değildi. Bununla birlikte, Maxwell kuramı geliştikçe, tartışmakta olduğumuz $\partial \mathbf{E}/\partial t$ terimi formüllerin içinden kendiliğinden çıkageldi. Maxwell bunun adına "yer değiştirim ya da sürüm akımı" dedi. Maxwell boşlukta olduğu kadar katı madde içindeki elektrik alanı ile de ilgilenmekte olduğu için "yer değiştirim akımı"ndan söz ederken, çoğu zaman, bunun içine devinen yükleri de sokmakta idi. Bu noktayı Böl. 9'da madde içindeki elektriksel alanı incelediğimizde aydınlığa kavuşturacağız. Gerçekte Maxwell, uzayı da bir ortam ya da "eter" olarak düşünüyordu yani katı madde bulunmadığında bile yer değiştirim akımlarının bir şey içinde oluştuklarını varsayıyordu.

Ama ne zararı var, onun çıkardığı matematiksel denklemler kusursuz ve hiçbir duraksamaya yer bırakmayacak şekilde açıktı; yer değiştirim akım. kavramını ortaya atmak Maxwell'in üstün bir kuramsal buluşudur.

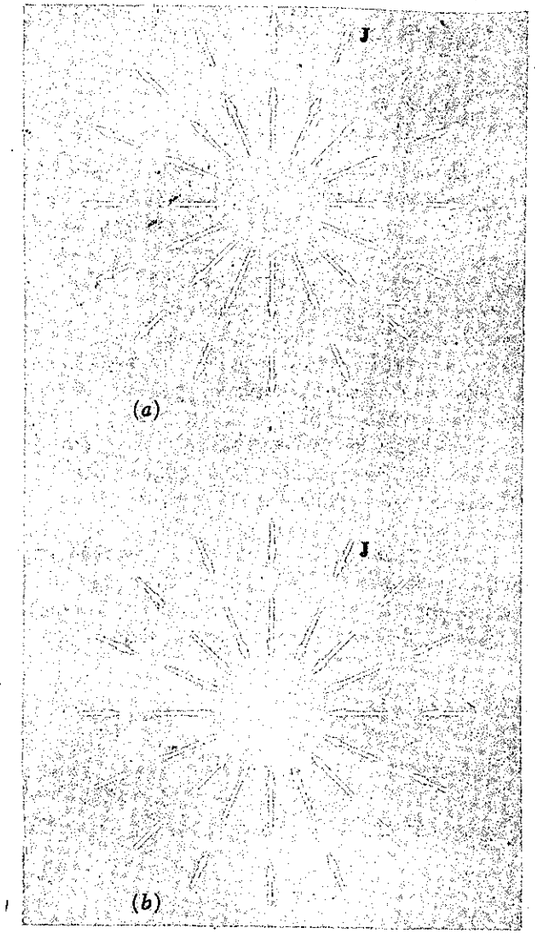
Maxwell'in elektromıknatısal alan anlatımı temelde tam ve kusursuzdur. Biz bu denklemlerin çeşitli parçalarına değişik yollardan ulaştık ve şimdi bunları geleneksel olarak *Maxwell denklemleri* adı verilen biçimde bir yere getirelim:

$$\boxed{\begin{aligned} \text{dönül}\,\mathbf{E} &= -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \text{dönül}\,\mathbf{B} &= \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\mathbf{J} \\ \text{ırak}\,\mathbf{E} &= 4\pi\rho \\ \text{ırak}\,\mathbf{B} &= 0 \end{aligned}} \qquad (90)$$

Bu denklemler, ρ yoğunluklu elektrik yüklerinin, ve $\mathbf{J}$ yoğunluklu elektrik akımının (yani devinen yüklerin) bulunduğu boşluktaki (madde içinde değil) alanlar için yazılmıştır.

Bunlardan birinci denklem Faraday'ın *irgitim yasasıdır*. İkincisi mıknatısal alanın, yer değiştirim akım yoğunluğuna (ya da elektrik alanının değişim hızına) ve iletim akımı yoğunluğuna (ya da yüklerin devinim hızına) bağlılığını söyler. Üçüncü denklem Coulomb yasasına eşdeğerdir. Dördüncü denklem akımlar dışında mıknatısal alan kaynağı bulunmadığını anlatır. Doğanın bu görünüşü üstüne Böl. 10'da başka diyeceklerimiz olacaktır.

Bu denklemlerde $\mathbf{B}$ ve $\mathbf{E}$ 'ye göre bir bakışım bulunmayışının elektrik yüklerinin ve elektrik iletim akımının varlığından ileri geldiğini gözden kaçırmayınız. Boş uzayda, ρ ve $\mathbf{J}$'li terimler sıfıra eşittir ve Maxwell denklemleri,



Şek. 7.32 Işınsal akım dağılımı sözü ile ne anladığımızı gösteren şekil. (a) Bir nokta kaynak için $\mathbf{J}$ akım yoğunluğu (b) bir nokta "çukur" için aynı yöngü; bunlar nokta yükün alanları gibidir, dönül $\mathbf{J} = 0$ olan herhangi bir akım dağılımı kaynakların ve çukurların üstüste gelmesi ile oluşturulabilir ve böyle bir oluşumun mıknatısal alanı sıfır olmalıdır.

$$\boxed{\begin{array}{ll} \text{dönül}\,\mathbf{E} = -\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} & \text{ırak}\ \mathbf{E} = 0 \\ \text{dönül}\,\mathbf{B} = \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} & \text{ırak}\ \mathbf{B} = 0 \end{array}} \quad (91)$$

olur.

olur. Burada yer değiştirim akımı terimi başta gelen bir önem kazanmaktadır. Bu terimin varlığı ve bunun birinci denklemdeki karşılığı, *elektromıknatısal dalgaların* varlığına olanak sağlar. Bunu böyle bilince, Maxwell çok parlak bir başarı ile ışığın elektromıknatısal kuramını geliştirmeye koyuldu. Siz dalgalar fiziğini ve özellikle ışık dalgalarını Cilt III'-de inceleyeceksiniz. Ama şimdiden c hızı ile yayılan elektromıknatısal sarsıntıların, Maxwell denklemleri ile bağdaştıklarını hemen gösterebiliriz. Bunu yapabilmek için bir sarsıntı halinde yayılan yalın yapılı elektriksel ve mıknatısal alan takımlarının Denk. 91'e uygun düştüklerini göstermek istiyoruz.

$t = 0$ anında $y = 0$ ve $y = 2a$ düzlemleri arasındaki bölgede bir elektrik alanı bulunduğunu varsayalım. Bu $\mathbf{E}$ elektrik alanının yalnız z bileşeni olsun ve bu z bileşeni yalnız y'ye bağ olsun.

$$\left.\begin{array}{ll} E_z = E_0\dfrac{y}{a} & (0 \leqq y \leqq a) \\ E_z = E_0\left(\dfrac{2a-y}{a}\right) & (a \leqq y \leqq 2a) \end{array}\right\} (t = 0) \quad (92)$$

Şek. 7.33*a*'da görüldüğü gibi bu "parmaklık" biçimli bir alan yeğinliği dağılımı verir; alanın maksimumu ortada $y = a$ dadır ve $y = 0$ ve $y = 2a$'ya doğru gidince çizgisel olarak sıfıra doğru düşer. Verilen bir y değeri için alan bütün x ve z konumluklarında aynıdır. Yani, şekilde yalnız y ekseni üzerinde gösterdiğimiz alan, sonsuz şerit yüzeyinin tümünü kaplamaktadır. Şekilde I ve II ile gösterilen gölgeli bölgeler bu şerit içindedir. Şeridin dışındaki tüm bölgede yani $y < 0$ ve $y > 2a$ için bu andaki elektrik alanı sıfırdır. Bu uzay şeridi içinde aynı zamanda bir $\mathbf{B}$ mıknatısal alanı yalnız x bileşeni halinde vardır, değeri,

$$\left.\begin{array}{ll} B_x = B_0\dfrac{y}{a} & (0 \leqq y \leqq a) \\ B_x = B_0\left(\dfrac{2a-y}{a}\right) & (a \leqq y \leqq 2a) \end{array}\right\} (t = 0) \quad (93)$$

olur.

Biz bu yalın alanı uydurduk. Bu alan yapısının y doğrultusunda chızı ile biçimini koruyarak yayıldığını düşünelim. Bunun için denklemleri aşağıdaki gibi yazabiliriz:

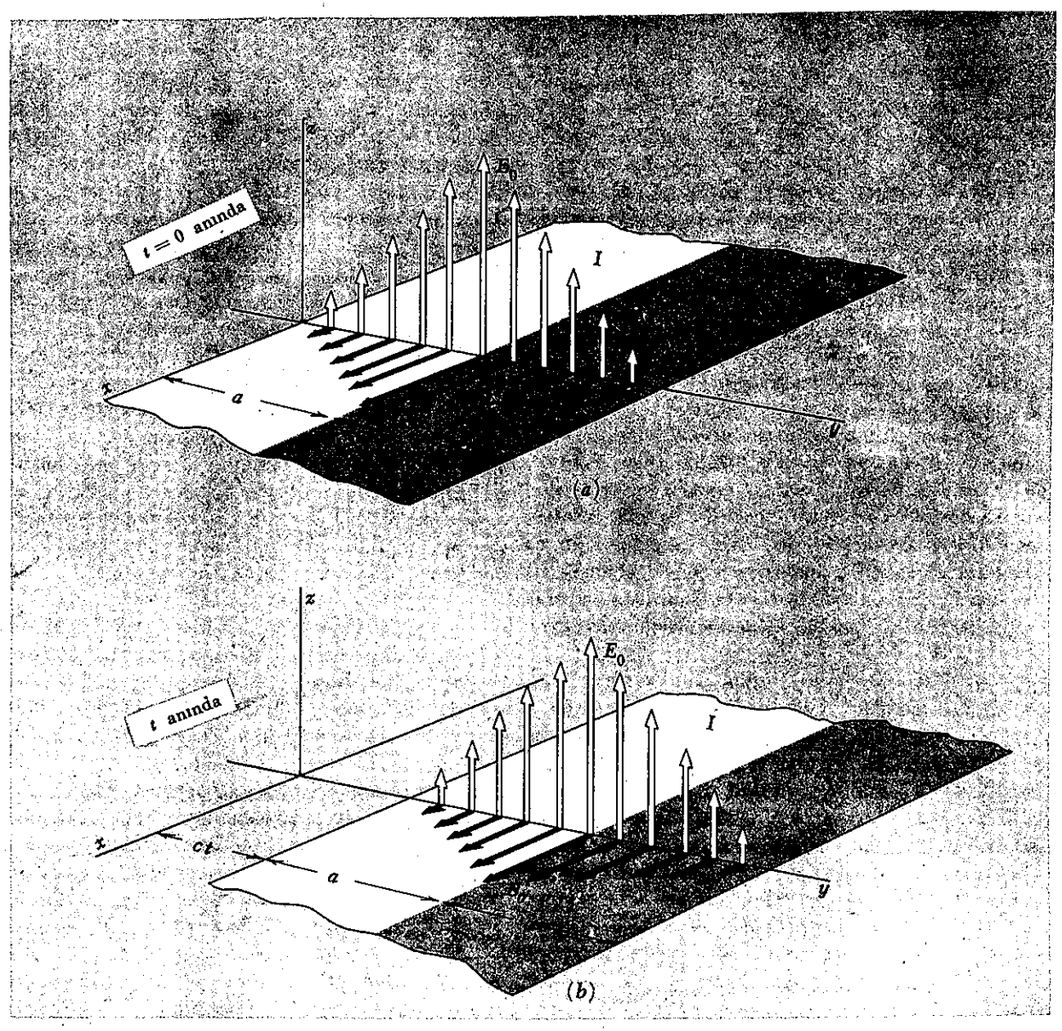
Bölge I

$$\begin{array}{ll} E_z = E_0\left(\dfrac{y-ct}{a}\right) & \\ B_x = B_0\left(\dfrac{y-ct}{a}\right) & (ct \leqq y \leqq ct + a) \end{array} \quad (94)$$

Bölge II

$$\begin{array}{ll} E_z = E_0\left(\dfrac{2a-y+ct}{a}\right) & \\ B_x = B_0\left(\dfrac{2a-y+ct}{a}\right) & (ct + a \leqq y \leqq ct + 2a) \end{array} \quad (95)$$

Bunlar alanın durumunu Şek. 7.33b'de gördüğümüz anda ya da herhangi bir t anında olduğu gibi betimler. Alanla kaplı bölge yalnız sağ yana doğru ct uzaklığı kadar yer değiştirmiştir. Buradaki I ve II bölgeleri içinde hem $\mathbf{E}$ hem de $\mathbf{B}$ alanları daha önceki biçimlerini korumuşlardır. Buna göre denklemlerimiz



Şek. 7.33 c hızı ile y doğrultusunda yayıldığı düşünülen özel elektriksel ve mıknatısal alanlar. Bu alanlar (a) $t = 0$ anında ve (b) daha sonraki bir anda gösterilmişlerdir. $B_0 = E_0$ olmak koşulu altında bu alanlar Maxwell denklemlerine uyarlar. Şekilde E ve B bağıl doğrultularına ve $\hat{y}$ yayılma doğrultusunu gözden kaçırmayın.

(yani 94 ve 95) yer değiştiren elektrik ve mıknatısal alanların düzenini betimler, ama acaba böyle alanlar var olabilir mi? Bu soruya karşılık verebilmek için, Denk 94 ve 95'in verdiği $\mathbf{E}$ ve $\mathbf{B}$ alanlarının Maxwell denklemlerine (Denk. 91) uyup uymadıklarına bakmalıyız.

Iraksama denklemleri ile işe başlayacak olursak, kolayca görüleceği gibi ırak $\mathbf{E} = 0$ ve ırak $\mathbf{B} = 0$ dır. (açıkca görüldüğü gibi $\partial E_z/\partial z = 0$'dır, $\mathbf{E}$'nin öteki bileşenleri zaten sıfırdır.) Fakat dönül $\mathbf{E}$ sıfır değildir, ve bunun değeri:

$$\text{Bölge I: } \nabla \times \mathbf{E} = \hat{\mathbf{x}} \frac{\partial E_z}{\partial y} = \frac{E_0}{a} \hat{\mathbf{x}}$$
$$\text{Bölge II: } \nabla \times \mathbf{E} = \hat{\mathbf{x}} \frac{\partial E_z}{\partial y} = -\frac{E_0}{a} \hat{\mathbf{x}} \qquad (96)$$

aynı şekilde $\nabla \times \mathbf{B}$ hesaplanacak olursa:

$$\text{Bölge I: } \nabla \times \mathbf{B} = -\hat{\mathbf{z}} \frac{\partial B_x}{\partial y} = -\frac{B_0}{a} \hat{\mathbf{z}}$$
$$\text{Bölge II: } \nabla \times \mathbf{B} = -\hat{\mathbf{z}} \frac{\partial B_x}{\partial y} = \frac{B_0}{a} \hat{\mathbf{z}} \qquad (97)$$

Bu alanların t 'ye göre tıkel diferansiyelleri:

$$\text{Bölge I: } \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = -\frac{c}{a} E_0 \hat{\mathbf{z}} \qquad \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\frac{c}{a} B_0 \hat{\mathbf{x}}$$
$$\text{Bölge II: } \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{c}{a} E_0 \hat{\mathbf{z}} \qquad \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \frac{c}{a} B_0 \hat{\mathbf{x}} \qquad (98)$$

Bu alanların Bölge I'de "irgitim" yasasına uymaları için

$$\frac{E_0}{a} \hat{\mathbf{x}} = -\frac{1}{c} \left(-\frac{c}{a} B_0 \hat{\mathbf{x}} \right)$$
$$\text{ve} \quad -\frac{B_0}{a} \hat{\mathbf{z}} = \frac{1}{c} \left(-\frac{c}{a} E_0 \hat{\mathbf{z}} \right) \qquad (99)$$

gerekir. Gerçekten $E_0 = B_0$ ise bu denklemler doğrulanabilir. Maxwell denklemleri, bölge II içinde ki alanların da aynı koşulları yerine getirmelerini ister; parmaklığın tam tepesinde ve iki uçlarında, varsaydığımız alanın matematiksel ayrıcalığı vardır. Elektromıknatısal alan denklemlerine her yerde uyulduğuna inanabilmek için, bu noktalarda başımızın derde girmeyeceğini görmemiz gerekir. Böyle üzücü bir durum söz konusu değildir, $\mathbf{E}$ ve $\mathbf{B}$ bu noktalarda süreklidir. ($\mathbf{E}$'nin ve $\mathbf{B}$'nin boş uzayda bir süreksizlik göstermesi ya da sert olarak atlaması olanaksızdır.) O halde belirttiğimiz , yer değiştiren bu özel elektromıknatısal dalga, statvolt/cm olarak alınan elektrik alanının aynı zamanda ve aynı yerde mıknatısal alan şiddetine eşit olması koşulu ile bütün alan denklemlerini doğrular. $\mathbf{E}$ ve $\mathbf{B}$'nin birbirlerine ve yayılma doğrultusuna dik olmaları bir temel koşuldur; yoksa alan denklemlerine uyulmuş olmaz.

Ele aldığımız yer değiştiren "parmaklık" dalgasının oldukça özel bir dalga oluşu sizi etkileyebilir. Gerçekten, bu yalın örnek, herhangi bir düzlem elektromıknatısal dalga için temel özelliklerin tümünü ortaya koyar! Bunun için yalnız *üstüste gelebilme* ilkesini anımsamanız yeter. Çoğu kez belirttiğimiz gibi, elektromıknatısal alan denklemleri çizgisel denklemlerdir. Eğer iki alan takımı Maxwell denklemlerini doğrularsa bunların toplamı da doğrular. Bu bakımdan uzay içinde ilerleyen "parmaklık" biçimli alanlardan aynı doğrultuda ya da değişik doğrultuda yayılanları gönlümüzce alabiliriz. (Doğal eksenlerin nasıl yönelmiş olduğu alanları ilgilendirmez, y ekseni yerine herhangi başka bir doğrultu aynı derecede uygundur.) Şek. 7.34, bu "parmaklık " ile kurabileceğiniz bazı alanları gösteriyor. Bu "parmaklık " üstüste getirmekle herhangi bir fonksiyon istenilen yaklaşıklıkla oluşturulabilir. Bu nedenle "parmaklık" biçimli alan üzerinde öğrendiklerimizi, $\mathbf{E}$ ve $\mathbf{B}$'nin yalnızca yayılma doğrultusundaki konumluğa bağlı olduğu herhangi bir alan biçimine uygulayabiliriz.

Bu genel olgular şöyle özetlenebilir:

(i) Sarsıntı c hızı ile biçimini değiştirmeden yayılır.
(ii) $\mathbf{E}$ ve $\mathbf{B}$ birbirine diktir ve yayılma doğrultusuna diktir ve $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ yöngüsü her zaman yayılma doğrultusunu gösterir (örneğimizde olduğu gibi).
(iii) Verilen bir noktada ve bir anda $E = B$'dir.

Bu özellikleri taşıyan bir elektromıknatısal alan yalın ve doyurucu şekilde bir konumluk çatkısından ötekine dönüşür. Böl. 6'da, elektriksel ve mıknatısal alanların Lorentz dönüşümünü veren yazımları türettik (Denk. 6.58). Bu denklemlere dayanan Prob. 6.11'deki sonuçları kullanarak, $E^2 - B^2$ ve $\mathbf{E} \cdot \mathbf{B}$ sayıl niceliklerinin bir eylemsizlik çatkısından ötekine dönüştükleri zaman değişmezlik özelliğini kullanalım. Bu durumda herhangi bir noktada $E = B$ olduğuna göre $E^2 - B^2$ değişmez niceliğinin tutarı sıfırdır. Aynı şekilde $\mathbf{E}$ yöngüsü $\mathbf{B}$'ye dik olduğuna göre $\mathbf{E} \cdot \mathbf{B}$ değişmez niceliği de sıfırdır. Bunun sonucu odur ki, herhangi başka bir çatkı içine dönüşmüş olan $\mathbf{E}'$ ve $\mathbf{B}'$ alanları, büyüklükçe birbirlerine eşit ve doğrultuca dik olmak zorundadırlar. Bir ışık dalgası herhangi bir gözlem çatkısında yine bir ışık dalgası olarak kalır.

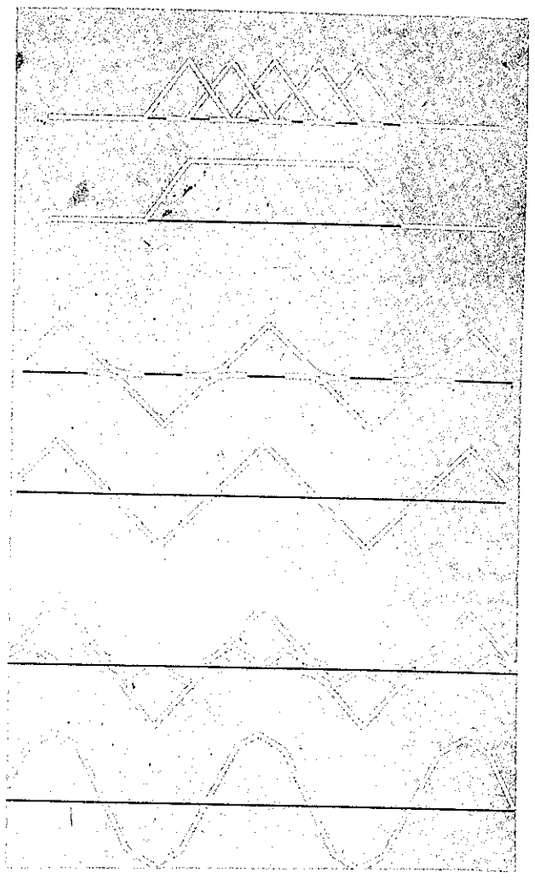
Problemler

7.1 Sarım sayısı 4000, ortalama yarıçapı 12 cm olan bir kangal yerin mıknatısal alan şiddetinin 0,5 gauss olduğu bir yerde saniyede 30 kez dönmekte ise burada oluşan elektromotor kuvvetin doruk değeri ne tutar?

Yanıt: 1,70 volt.

7.2 Dörtgen biçimli bir ilmek biteviye bir mıknatısal alan içinde öyle deviniyor ki, emk sıfır olsun ve sıfırda kalsın. İlmeğin ne biçim devindiğini anlatınız.

7.3 Kesitinin yüzölçümü A olan halka şeklinde N sarımlı bir kangal bir mıknatısın alanı içinde kendi üzerine dolanmış bir çift telle dış çevrime bağlanmıştır. Çevrimin kangalla birlikte toplam direnci R'dir. Kangaldan geçen akının Φ_i gibi bir ilk değerinden Φ_s gibi bir son değerine herhangi bir yoldan değiştini düşünün. Bu değişim sonucunda çevrimde oluşan ve çevrimde dolanan Q toplam yükünün, akının değişim hızına bağlı olmadığını gösterin. Adına "flip kangalı" denilen böyle bir kangal çoğu zaman bir mıknatısın alanını ölçmekte kullanılır. Kangal düzleminin $\mathbf{B}$ alanına dik gelecek şekilde konulmuş olduğunu düşünün. Kangal 90° çevrilecek olursa $B, NA, R,$ ile Q yükü arasındaki bağıntı ne olur? 180° döndürülürse ne olur?



Şek. 7.34 "Parmaklık" biçimli dalgaları üst üste getirerek elde edilen dalga şekilleri.

7.4 Devinen bir ilmekte doğan emk'in şekilde görüldüğü andaki tutarını hesaplayın. İlmeğin direnci büyük ve içinde oluşan akım önemsenmeyecek ölçüde zayıf olsun. Bu bakımdan ne büyüklükte bir direncin güvenli olacağını kabaca kestirin. Şekilde görülen anda ilmekten geçen akımın yönünün ne olacağını gösterin.

7.5 Şek. 7.6'da görülen ilmeğin direnci R olsun. İlmeğin öz-irgitim katsayısı savsanacak ölçüde küçük sayıldığına göre, bunu sabit hızla çeken kuvvetin dt aralığında gördüğü işin, bu aralık süresinde dirençte yitirilen enerji tutarı ile tam olarak bağdaştığını gösterin. Şek. 7.14'de ilmek devinimsiz durduğuna göre bu enerjinin kaynağı nedir?

7.6 Şek. 7.13'deki döner ilmekte oluşan emk'in sinüsel bir değişim göstereceği öngörümüz, ilmeğin dörtgen biçimli oluşuna mı, mıknatısal alanın biteviye oluşuna mı ya da her ikisine birden mi bağlıdır? Açıklayın. Dönen ilmek ve devinimsiz kangaldan bir yapı önerebilir misiniz ki, kesin olarak sinüslü olmayan bir emk versin? Böyle bir düzenek halinde osiloskopda göreceğiniz gerilim-zaman eğrisinin biçiminin ne olacağını çizimle gösterin.

7.7 Çapı 10 cm uzunluğu 2 m olan silindirsel bir akım sarmalının öz-irgitim katsayısını hesaplayın. Sarmalın sarımları tek katmanlıdır ve 1200 sarımı vardır. Sarmalın içindeki mıknatısal alanın uçlarına dek biteviye olduğunu varsayın. Bu varsayım ile yanılgınızın ne olduğunu kestirin. Sarmalın gerçek L'si sizin yaklaşık değerinizden büyük müdür yoksa daha mı küçüktür?

7.8 Öz-irgitim katsayısı küçük olan bir direnç kangalı nasıl sarılabilir?

7.9 Dairesel iki halka aynı a, yarıçaplı olduğuna ve bir mil üzerine geçmiş araba tekerlekleri gibi merkezleri arasındaki uzaklık b cm olacak şekilde düzenlendiklerine göre aralarındaki karşılıklı irgitim katsayısı için yaklaşık bir formül türetiniz. $b \gg a$ haline uygun bir yaklaşıklık kullanın.

7.10 Faraday ilk gözlediği irgitim atmasını ortaya koyan galvanoölçer kangalının, her biri bir tahta parçası üzerine sarılmış 70 m uzunluğunda bakır telden yapılmış olduğunu anlatmaktadır. İkinci sarmalın, yani tek katmanlı kangalın sarımları birincilerin arasına yerleştirilmiş ama aralarına konulan yalıtkan ile ayrılmıştı. Bakır telin kendi çapı 1,2 mm idi. Faraday tahta blokun boyutlarını ya da kangaldaki sarım sayısını vermiyor. Deneyleri sırasında bu kangallardan biri, 100 yapraklı bataryaya bağlanmış idi. Deneycinin galvanoölçerinden geçen akım atmasının ampere olarak büyüklüğünü ve kaç saniye sürdüğünü kabaca değerlendirebilir misiniz?

7.11 Şeklin (a) kısmı öz-irgitim katsayıları L_1 ve L_2 olan iki kangal göstermektedir. Bunların görüldükleri konumdaki karşılıklı irgitim katsayıları M'dir. Her kangaldaki artı emk doğrultusu ve artı akım doğrultusu oklarla belirtilmiştir. Akımları ve emk'leri bağlayan bağıntılar

$$\mathcal{E}_1 = -L_1\frac{dI_1}{dt} \mp M\frac{dI_2}{dt} \quad \text{ve} \quad \mathcal{E}_2 = -L_2\frac{dI_2}{dt} \mp M\frac{dI_1}{dt}$$

dır. M'nin her zaman artı bir sabit olduğu varsayıldığına göre, bu denklemlerdeki $\mp$ imlerin hangilerini seçelim? Artı akım ve artı emk'ler için bu doğrultuların zıtlarını seçseydik de olurdu; o zaman aşağı kangaldaki durum ne olurdu? Şimdi şeklin (b) kesiminde olduğu gibi iki kangalı bir tek çevrim oluşturacak biçimde bağlayalım. Bu çevrimin L' irgitim katsayısının L_1, L_2, ve M cinsinden değeri ne kadardır? Kangallar (c)'nin gösterdiği gibi bağlanacak olurlarsa toplam çevrimin L' öz-irgitim katsayısı ne tutar? Bu (b) veya (c) çevrimlerinden hangisinin öz-irgitimi daha büyüktür? Herhangi bir çevrimin öz-irgitimi artı bir nicelik olmak zorunda olduğuna göre (bu neden eksi olamaz?) L_1, L_2, ve M'nin bağıl değerleri ile ilgili olarak, herhangi bir kangal çifti için geçerli genel bir sonuç çıkarabilir misiniz?

7.12 Galaksimizin yıldızlararası uzayında mıknatıslık alanın 10^{-6} gauss basamağında olduğuna genel olarak inanılır. Bu uzayın içinde bulunan madde çokçası hidrojen atomlarıdır ve yoğunluğu da, cm^3 başına 1 atom kadar olup, bu atomların ısıl hızları 10^5 cm/s basamağındadır. Verilen herhangi bir oylum içinde mıknatısal alanda birikmiş olan enerji tutarının tutarı maddenin devimsel enerjisi halinde birikmiş enerji tutarına bakınca nasıldır?

7.13 Direnci 0,01 ohm ve öz-irgitim katsayısı 0,50 milihenry olan bir kangal iç direnci savsanabilir 12 volt'luk bir bataryanın uçlarına bağlanmıştır. Düğme kapandıktan ne zaman sonra akım kararlı değerinin yüzde 90'nını bulur? Bu anda mıknatısal alan içinde biriken enerjinin joule olarak değeri ne tutar? Bataryadan bu ana değin çekilmiş olan enerjinin değeri ne tutar?

7.14 Şek. 7.27'de boşalan sığacın içindeki mıknatısal alan, Şek. 7.31'de görülen iletim akım öğelerinin katkılarını toplamakla hesaplanabilir. Bu çok uzun bir iş olabilir. Eğer eksen çevresinde bir bakışım bulunduğunu varsayarsak

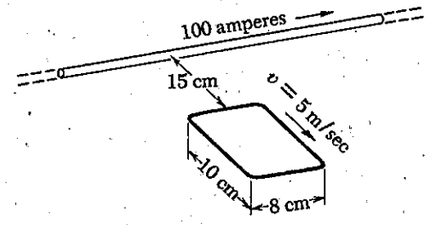
$$\int_C \mathbf{B}\cdot d\mathbf{s} = \frac{1}{c}\int_S\left(\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + 4\pi\mathbf{J}\right)\cdot d\mathbf{a}$$

kuralına dayanarak bir noktadaki $\mathbf{B}$ alanını hesaplamak çok daha kolaydır. Bunun için tümlevi bu noktadan geçen dairesel bir yola uygulamalıyız. Bunun için yalnız bu yolun sardığı toplam akımı bilmemiz gerekir. Sığaç yaprakları arasında tam ortada ve bakışım ekseninden r uzaklıkta bir P noktasındaki alanı bulmak için bu yöntemi kullanınız. (Bu hesabı Şek. 7.16'daki örnekte irgitimle oluşan $\mathbf{E}$ elektrik alanını hesaplamak için kullandığımız yöntemle karşılaştırınız).

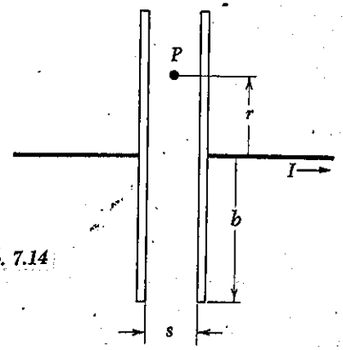
Yanıt: $2\pi rB = \dfrac{4\pi I}{c}\dfrac{r^2}{b^2}, \quad B = \dfrac{2Ir}{cb^2}$

7.15 Aşağıdaki elektromıknatısal alanın Maxwell denklemlerine uyduğunu gösteriniz:

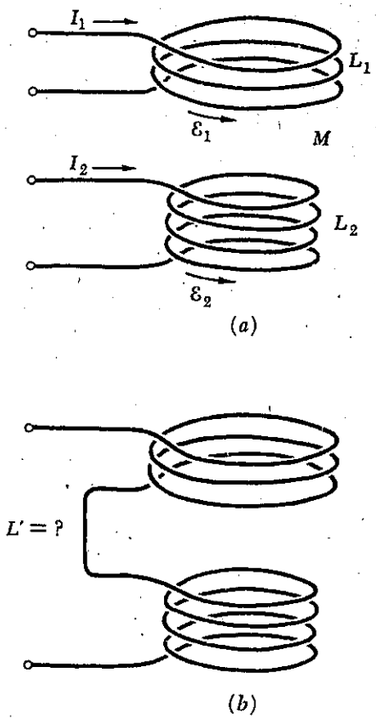
$$E_x = E_y = 0;\ E_z = \cos(y-ct)$$
$$B_x = \cos(y-ct);\ B_y = B_z = 0$$



Prob. 7.4



Prob. 7.14

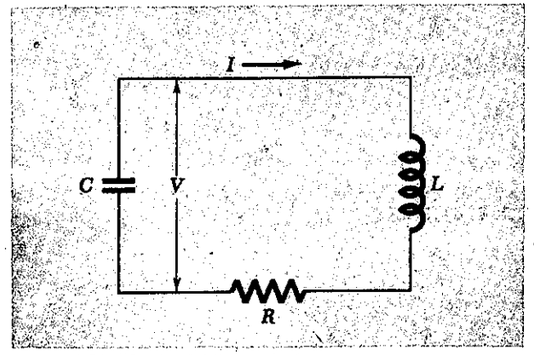


Prob. 7.11

Bölüm 8

Dalgalı Akım Çevrimleri

8.1	Bir Çınlanım (Rezonans) Çevrimi	226
8.2	Dalgalı Akım	230
8.3	Dalgalı Akım Ağları	234
8.4	Alımlık ve Dalga Direnci (Etkin Direnç)	238
8.5	Dalgalı Akım Çevrimlerinde Güç ve Enerji	240
	Problemler	243



Şek. 8.1 Bir "Sıralı RLC" çevrimi

8.1 Bir Çınlanım (Rezonans) Çevrimi

İçinde irgitgi, iletkenler, sığalık (capacitance) ve direnç bulunan bir çevrim sönümlü sinüsel titreşkene örnek olarak Cilt I Bölüm 7'de de işlenmişti. Şimdi bu dizgede neler olduğunu tümcek görebiliriz. Şek. 8.1'deki çizenek böyle bir "LCR sıralı" çevrimini göstermektedir.

Bu çevrimdeki sığacın t anındaki yükü Q olsun. Sığacın yaprakları arasındaki V ile gösterdiğimiz gerilim farkı açıkca görüldüğü gibi sıralı bağlı L irgitgisi ile R direncinin uçları arasındaki gerilimin aynıdır. Sığacın üst yaprağı artı yüklü iken V'yi artı sayıyoruz ve Şek. 8.1'deki okla artı akım doğrultusunu gösteriyoruz. İmler böylece belirlendikten sonra Q yükünü, I akımını ve sığacın uçları arasındaki V gerilimin farkını bağlayan bağıntılar aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$I = -\frac{dQ}{dt} \qquad Q = CV \qquad V = L\frac{dI}{dt} + RI \qquad (1)$$

Bu üç Q, I, ve V değişkenlerinden ikisini elemek istiyoruz. İlk iki denklemden $I = -C\,dV/dt$ elde eder ve bunu üçüncü denklemde kullanırsak,
$V = -LC\,(d^2V/dt^2) - RC(dV/dt)$ya da

*Sıralı : Seri

$$\frac{d^2V}{dt^2} + \left(\frac{R}{L}\right)\frac{dV}{dt} + \left(\frac{1}{LC}\right)V = 0 \qquad (2)$$

buluruz.

Bu sabit katsayılı ikinci basamaktan bir diferansiyel denklemdir. Buna çözüm olarak

$$V = Ae^{-\alpha t}\cos\omega t \qquad (3)$$

yazımını deneyebiliriz ki bu yazımdaki A, α ve ω sabit sayılardır. Bu işlevin birinci ve ikinci türevleri

$$\frac{dV}{dt} = Ae^{-\alpha t}[-\alpha\cos\omega t - \omega\sin\omega t] \qquad (4)$$

$$\frac{d^2V}{dt^2} = Ae^{-\alpha t}[(\alpha^2 - \omega^2)\cos\omega t + 2\alpha\omega\sin\omega t] \qquad (5)$$

dır. Bunları Denk. 2'deki yerlerine taşıyıp bütün terimlerde görünen $Ae^{-\alpha t}$ çarpanını elersek geriye

$$(\alpha^2 - \omega^2)\cos\omega t + 2\alpha\omega\sin\omega t - \frac{R}{L}(\alpha\cos\omega t + \omega\sin\omega t) + \frac{1}{LC}\cos\omega t = 0 \qquad (6)$$

kalır. Bu denklem ωt'nin tüm değerleri için ancak ve ancak $\sin\omega t$ ve $\cos\omega t$'nin her ikisinin de katsayılarının sıfır olması ile doğrulanabilir. Bu demektir ki

$$2\alpha\omega - \frac{R\omega}{L} = 0 \qquad (7)$$

ve

$$\alpha^2 - \omega^2 - \alpha\frac{R}{L} + \frac{1}{LC} = 0 \qquad (8)$$

koşullarının yerine gelmesi gerekir. Bu denklemlerden birincisi α'nın

$$\alpha = \frac{R}{2L} \qquad (9)$$

olmasını, ikinci denklemi ise

$$\omega^2 = \frac{1}{LC} - \alpha\frac{R}{L} + \alpha^2 = \frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2} \qquad (10)$$

değerini almasını gerektirir.

Titreşimin ω sabiti bir gerçek sayı olduğuna göre ω^2 eksi olamaz. O halde $R^2/4L^2 \leqq 1/LC$ koşulu ile çözüm olarak öne sürdüğümüz Denk. 3 uygun düşmektedir. Aslında incelemek istediğimiz çözüm "zayıf sönüm" yani düşük direnç haline uyan çözümdür ki bu halde devredeki R, L ve C'nin $R < 2\sqrt{L/C}$ eşitsizliğine uyan değerler aldığı varsayılıyor.

Bu $Ae^{-\alpha t}\cos\omega t$ işlevi olabilecek tek çözüm değildir. $Be^{-\alpha t}\sin\omega t$ de aynı koşullarda, yani α ve ω sabitleri Denk. 9 ve Denk. 10 isterleri için de uygun bir çözümdür. Buna göre Denk. 2'nin genel çözümü bunların toplamı olacaktır:

$$V(t) = e^{-\alpha t}(A\cos\omega t + B\sin\omega t) \qquad (11)$$

Çözüme giren ve isteğimize bağlı olan A ve B sabitleri başlangıç koşulları uyarınca ayarlanabilirler. Bu çok ilginç değildir. Verilen bir hale uygun çözümün bir sinüs işlevi mi, yoksa bir kosinüs işlevi mi, yoksa bunların üstüste gelmesinden oluşan bir işlev mi olduğu, saatin ayarlanışına bağlı yalın bir durumdur. Temel olay sönümlü bir sinüsel titreşim oluşmasıdır.

Gerilimin zamanla değişimi Şek. 8.2a'da gösterilmiştir. Bunun bütün geçmiş zaman boyunca böyle sürüp gelmediği kuşkusuzdur. Geçmiş bir anda çevrime herhangi bir yoldan enerji sağlanmış ve sonra işlemeğe bırakılmış olması gerekir. Örneğin çevrim açıkken sığaç yüklenmiş ve sonra kangal üzerine bağlanmış olabilir.

Şek. 8.2b'de zaman değişkeninin ölçeği genişletilmiş ve buna bir de I akımının değişimini gösteren noktalı eğri katılmıştır. V için Denk. 3'deki sönümlü kosinüs işlevini alalım. O zaman akım yeğinliği zamana bağlı olarak

$$I = -C\frac{dV}{dt} = AC\omega\left(\sin\omega t + \frac{\alpha}{\omega}\cos\omega t\right)e^{-\alpha t} \qquad (12)$$

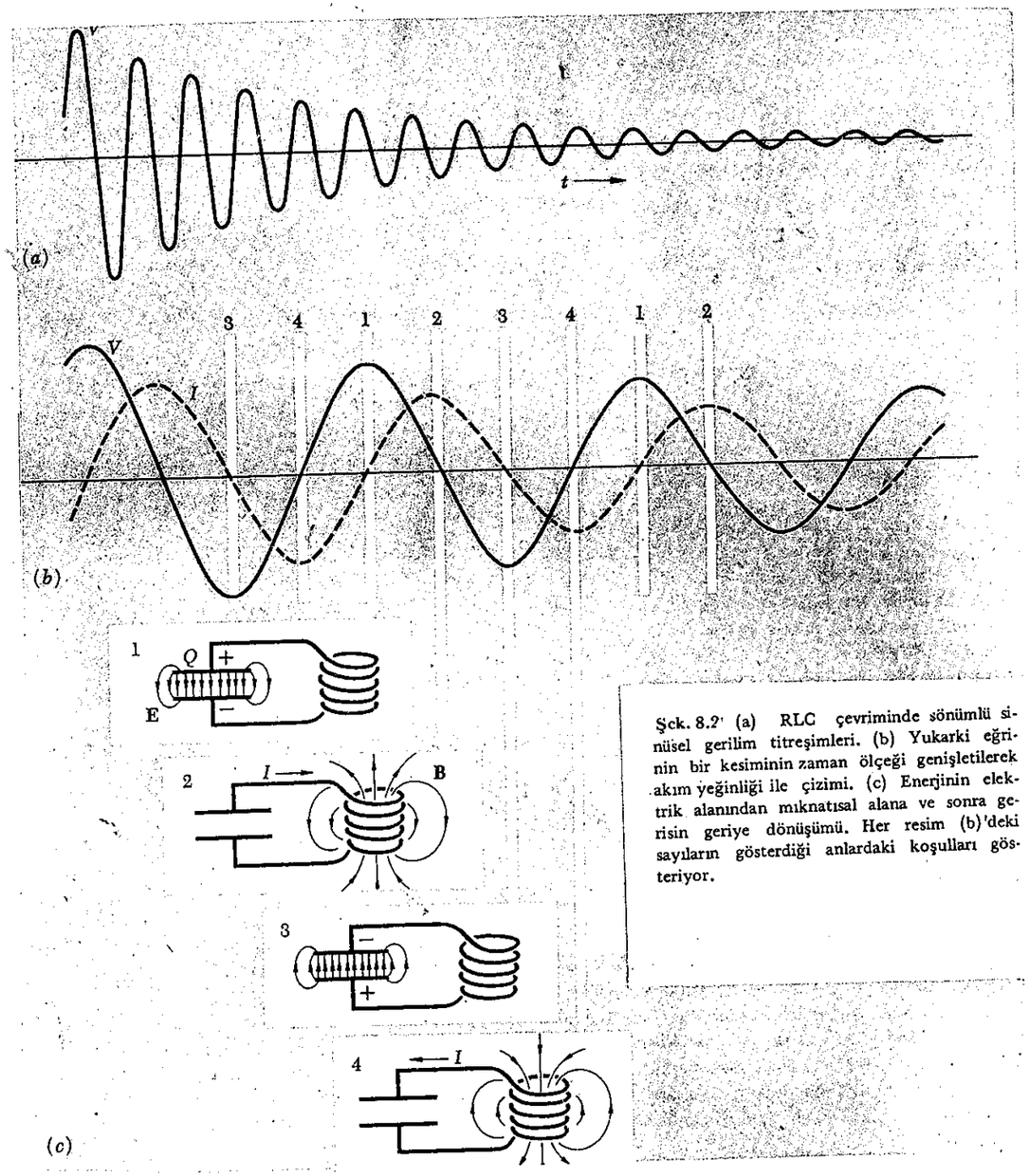
ile verilir. Buradaki α/ω oranı bir sönüm ölçüsüdür. Eğer α/ω çok küçükse genliğin azıcık sönebilmesi için birçok salınım geçmesi gerekir. Şek. 8.2 için $\alpha/\omega \approx 0{,}04$ değerini seçtik. O zaman Denk. 12'deki kosinüslü terim fazla bir şey tutmaz. Bu terimin bütün yapabildiği devinimin evresini $\mathrm{tg}^{-1}(\alpha/\omega)$ gibi küçük bir açı kadar kaydırmaktır. Böylece akım titreşiminin evresi gerilim titreşiminkinden tam bir çeyrek dönem kadar kaymış olur.

Titreşimler sığaçdan irgitgiye ya da elektrik alanından mıknatısal alana bir ileri, bir geri enerji aktarılmasını gerektirir. Şek. 8.2b'de 1 ile gösterilen anda enerjinin tümü elektrik alanındadır. Bir çeyrek dönem sonra, 2 anında sığaç boşalmıştır ve enerjinin tümü kangalın mıknatısal alanı içindedir.

Bu arada çevrimin R direnci enerjiden payını almakta ve titreşen alanlarda kalan enerji gittikce azalarak sönüp gitmektedir.

Bir titreşkenin bağıl sönümü Q sayısı denilen bir nicelik ile verilir. Bu kavram Cilt I Böl. 7'de genel olarak sinüsel titreşken tartışıldığı zaman ortaya atılmıştı. Bu Q harfi Q nitelik katsayısı anlamındadır, sığadaki Q yükü ile karıştırılmamalıdır! Gerçekte kimse bu "nitelik"

* Q harfi quality, nitelik sözcüğünden geliyor.



Şek. 8.2 (a) RLC çevriminde sönümlü sinüsel gerilim titreşimleri. (b) Yukarki eğrinin bir kesiminin zaman ölçeği genişletilerek akım yeğinliği ile çizimi. (c) Enerjinin elektrik alanından mıknatısal alana ve sonra gerisin geriye dönüşümü. Her resim (b)'deki sayıların gösterdiği anlardaki koşulları gösteriyor.

deyimini kullanmaz yalnızca "Q" der. Sönüm zayıf ise Q sayısı büyük olur. Dairesel frekansı ω olan bir titreşken için Q aşağıdaki boyutsuz oranın değeri olarak tanımlanır:

$$Q = \omega \frac{\text{biriktirilen enerji}}{\text{ortalama güç yitiği}} \tag{13}$$

Bu katsayıyı tanımlamak için ikinci bir yol titreşkende biriken enerjinin $1/e$ çarpanı kadar düşmesi için, ωt evreaçısının radyan değerini bulmaktır. Böylece incelediğimiz çevrimde biriktirilen enerji V^2 ile ya da I^2 ile ve dolayısıyla $e^{-2\alpha t}$ ile oranlı olduğuna göre enerji $t = 1/2\alpha$ süresi içinde $1/e$ değerine düşer ki bu süre $\omega/2\alpha$ radyanlık açı kaplar. Böylece RLC çevrimi için

$$Q = \frac{\omega}{2\alpha} = \frac{\omega L}{R} \tag{14}$$

yazabiliriz. Kaba bir hesapla Şek. 8.2'de gösterilen titreşimlerin Q değeri ne tutar?

Açıkca görüldüğü gibi incelemekte olduğumuz genel hal bazı basit özel halleri içerir. Eğer $R = 0$ ise hiç sönümsüz titreşken elde ederiz ki bunun ω_0 frekansı

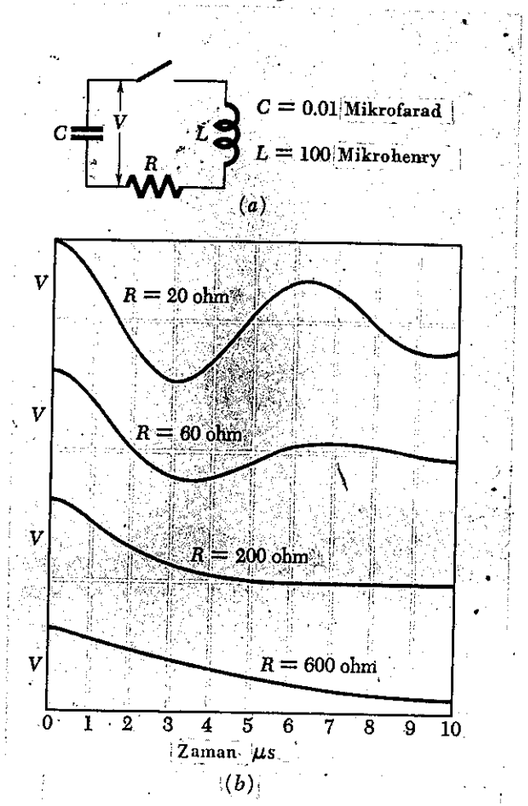
$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \tag{15}$$

ile verilmiştir. Çoğu durumlarda sönüm, frekans hesabında önemsenmeyecek kadar küçüktür. Prob. 8.9'un göstereceği gibi, bu durumda sönümün ω 'ya etkisi ancak ikinci basamaktan olur.

Konuda eksiklik bırakmamak için $R > 2\sqrt{L/C}$ gibi aşırı sönümlü çevrimlerde ne olduğunu kısaca gözden geçirelim. Bu halde Denklem 2'nin $V = Ae^{-\beta t}$ biçiminde bir çözümü vardır ve β 'nın iki değeri için genel çözüm

$$V(t) = Ae^{-\beta_1 t} + Be^{-\beta_2 t} \tag{16}$$

şeklindedir. Artık bir titreşim söz konusu değil, yalnızca biteviye bir azalma var. "Kritik" sönüm dediğimiz $R = 2\sqrt{L/C}$ özel halinde $\beta_1 = \beta_2$ olur ve Denk. 2 diferansiyel denkleminin çözümü



Şek. 8.3 (a) Sığaç yüklendikten sonra $t = 0$ anında düğme kapanıyor. (b) Dört sönüm hali; $R = 200$ ohm kritik sönüm.

$$V(t) = (A + Bt)e^{-\beta t} \tag{17}$$

biçimini alır. Bu verilen bir L ve C için çevrimdeki toplam enerjinin en hızlı şekilde harcandığı haldir. (Bak. Prob. 8.8).

Bütün bu davranış sırası Şek. 8.3'de, az sönümlü iki çevrim ile, kritik sönümlü ve aşırı sönümlü iki çev-

rim için $V(t)$ çiziti halinde gösterilmiştir. Bu çevrim lerde sığaç ve irgitgi aynı kalıyor, yalnızca direnç değiştiriliyor. Bu çevrimin $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ ile verilen doğal açısal frekansının tutarı 10^6 rad.s ediyor ki, bu da, $10^6/2\pi$, hertz ya da 159 kilohertz tutar. Çevrimimiz 1 volt gerilim farkı ile yüklendikten ve $t = 0$ anında düğme kapandıktan sonra titreşime girmiş olsun. Yani $t = 0$ anında $V = 1$ olması ilk koşullardan biridir. Bundan başka $t = 0$ anında $I = 0$'dır, zira irgitgi, akımın kesiksiz biçimde birden artmasına olanak bırakmayacaktır. Bu nedenle V üzerindeki öteki ilk koşul $t = 0$ anında $dV/dt = 0$ olmasıdır. Her dört sönme eğrisinin aynı biçimde başladığına bakınız Aşırı sönümlü halde ($R = 600$ ohm) sönüm eğrisinin büyük kesimi bir RC çevriminin yalın üstel düşüş eğrisine benzer, yalnız eğrinin sıfır eğimle devinime geçebildiği başlangıçtaki düz kısmı L irgitgisinin varlığını ortaya koyar.

8.2 Dalgalı Akım

Az önce tartıştığımız çınlanım (rezonans) çevrimi içinde bir enerji kaynağı olmadığından, geçici bir canlılık göstererek ergeç sönüp gidecek geçici bir titreşime girer. Oysa dalgalı akım çevrimlerinde, çokçası kararlı hallerle, yani sabit genlikli sinüslü titreşim yapan akım ve gerilimlerle uğraşacağız. Dizgeyi titreşimli bir elektromotor kuvvet sürer.

İçinde bir dirençle bir irgitgi bulunan bir çevrime $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \cos \omega t$ gibi bir elektromotor kuvvet uygulayalım. Bu Şek.7.13'deki çizimle gösterilen ve ekseni bir motorla sabit ω açısal hızı ile döndürülen bir üreteç ile sağlanabilir. Şek. 8.4'de elektromotor kuvvet çevrim içine bağlanmış olarak gösterilmiştir; üretecin iç direnci savsanacak kadar küçüktür ya da R içinde sayılmıştır. Burada da Denk. 7.61'in geliştirilmesinde yaptığımız gibi, çevrimin öğeleri üzerindeki gerilim düşüşleri toplamını elektromotor kuvvete eşit yazacağız. Buna göre akımı düzenleyen denklem

$$L\frac{dI}{dt} + RI = \mathcal{E}_0 \cos \omega t \qquad (18)$$

dır.

Şimdi çevrimde ilk koşullara, yani üretecin düğmesinin ne zaman ve nasıl kapandığına bağlı, geçici bir davranış olabilecektir. Ama biz yalnız kararlı hal ile, yani Denk. 18'e evre* ve genlik bakımından uyan ve sürücü em kuvvetin frekansı ile titreşen *kararlı akım* hali ile ilgiliyiz. Bunun olurluğunu göstermek için

$$I = I_0 \cos (\omega t + \varphi) \qquad (19)$$

ile verilen bir akım ele alalım. Buradaki I_0 ve φ'yi bulmak için bu akımı Denk. 18'e taşıyalım:

(20)

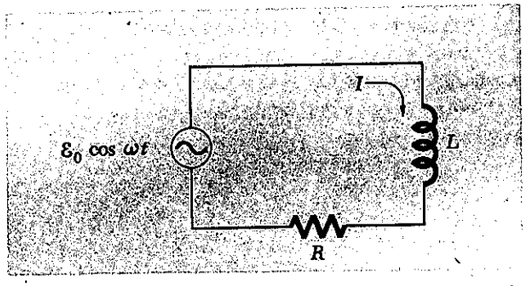
$$-LI_0\omega \sin (\omega t + \varphi) - RI_0 \cos (\omega t + \varphi) = \mathcal{E}_0 \cos \omega t$$

Bu eşitlikte $\cos \omega t$ ve $\sin \omega t$ ayrılabilir:

$$-LI_0\omega(\sin \omega t \cos \varphi + \cos \omega t \sin \varphi)$$

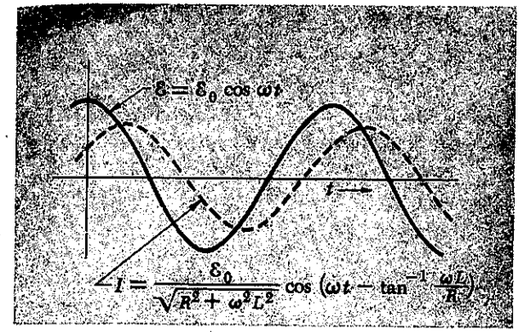
$$+RI_0(\cos \omega t \cos \varphi - \sin \omega t \sin \varphi) = \mathcal{E}_0 \cos \omega t \qquad (21)$$

elde ederiz. $\cos \omega t$ ve $\sin \omega t$ katsayılarını ayrı ayrı



Şek. 8.4 Dalgalı elektromotor kuvvetin sürdüğü irgitimli bir çevrim.

* Evre : Faz



Şek. 8.5 Bir önceki şekildeki çevrimin I akımının elektromotor kuvvetle aynı zaman ölçeği içinde gösterilmesi. Evre farkına özenle bakınız.

sıfıra eşit kılarsak, $\sin \omega t$'nin katsayısı

$$-LI_0\omega \cos \varphi - RI_0 \sin \varphi = 0 \qquad (22)$$

eder ki, bu da

$$\text{tg } \varphi = -\frac{\omega L}{R} \qquad (23)$$

verir; $\cos \omega t$'nin katsayısı ise

$$-LI_0\omega \sin \varphi + RI_0 \cos \varphi - \mathcal{E}_0 = 0 \qquad (24)$$

eder, bundan da

$$I_0 = \frac{\mathcal{E}_0}{R \cos \varphi - \omega L \sin \varphi} = \frac{\mathcal{E}_0}{R(\cos \varphi + \sin \varphi \tan \varphi)} = \frac{\mathcal{E}_0 \cos \varphi}{R} \qquad (25)$$

veya Denk. 23'den

$$\cos \varphi = \frac{R}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}$$

olduğundan

$$I_0 = \frac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \qquad (27)$$

çıkar.

Şek. 8.5 de $\mathcal{E}$ ' ile I'nın titreşimleri bir yerde çizitlenmiştir. Burada φ eksi bir açı olduğuna göre akım doruk* değerine em kuvvetten biraz sonra ulaşır. "İrgitimli bir çevrimde akım gerilimden geri kalır" deriz. Direnç boyutunda olan ve ohm ile ölçülen ωL niceliği *irgitim tepkinliği* adını alır**

Çevrimimize ωL irgitgisi yerine Şek. 8.6'da olduğu gibi bir C sığacı koyacak olursak,

$$-\frac{Q}{C} + RI = \mathcal{E}_0 \cos \omega t \qquad (28)$$

denkleminin düzenlediği bir çevrim elde ederiz. Bunun kararlı hal çözümü

$$I = I_0 \cos (\omega t + \varphi) \qquad (29)$$

dır. $I = -dQ/dt$, olduğuna göre

$$Q = -\int I\,dt = -\frac{I_0}{\omega} \sin (\omega t + \varphi) \qquad (30)$$

buluruz. Tümleyerek I'dan Q 'ye geçerken bir tümlev sabiti katma zorunluğu yoktur, zira kararlı halde Q'nün sıfırın iki yanında bakışımlı olarak salınacağını biliyoruz.
Bu çözümü Denk. 28'e aktararak

$$\frac{I_0}{\omega C} \sin (\omega t + \varphi) + RI_0 \cos (\omega t + \varphi) = \mathcal{E}_0 \cos \omega t \qquad (31)$$

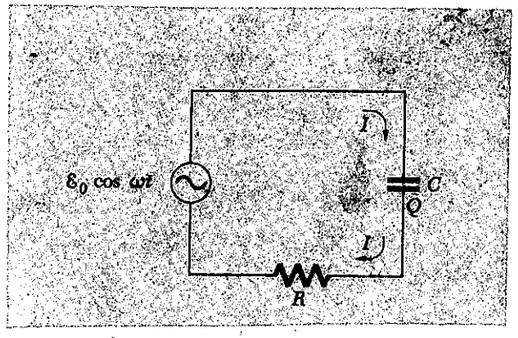
elde ederiz. Az önce olduğu gibi $\cos \omega t$ ve $\sin \omega t$ terimlerinin her ikisinin de katsayılarının sıfır olması gerektiğini uygulayarak φ ve I_0 'ın alacakları değerleri buluruz. Bu halde sonuçlar

$$\text{tg } \varphi = \frac{1}{R\omega C} \qquad (32)$$

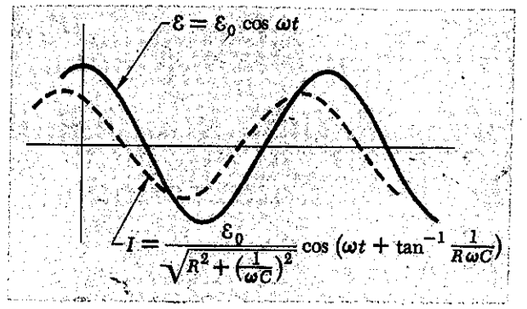
ve

$$I_0 = \frac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{R^2 + (1/\omega C)^2}} \qquad (33)$$

* Doruk : Maksimum ** Tepkinlik : Reaktans



Şek. 8.6 İçinde direnç ve sığaç bulunan bir devredeki dalgalı elektromotor kuvveti.



Şek. 8.7 Bir RC çevrimindeki akım. Buradaki evre kaymasını Şek. 8.5'deki irgitimli çevrimin evre kayması ile karşılaştırın.

dır. Evre açısının bu kez *artı* olduğuna bakınız. Yeri geldikçe, "sığalı bir devrede akım gerilimin önünde gider" denir. Bunun ne demek istediği Şek. 8.7'deki çizitle belli olmaktadır.

Matematikçe

$$I = \frac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \cos \left(\omega t - \tan^{-1} \frac{\omega L}{R}\right) \qquad (34)$$

işlevinin Denk. 18'deki diferansiyel denkleminin *özel bir tümlevi* olduğu söylenir. Buna *tamamlayıcı bir işlev* yani,

$$L \frac{dI}{dt} + RI = 0 \qquad (35)$$

türdeş* y diferansiyel denkleminin genel herhangi bir çözümü eklenebilir. Oysa bu denklem, çözümünü Kes. 7.9'da bir üstel azalım işlevi olarak bulduğumuz denklemin tam aynıdır ve çözüm için

$$I \sim e^{-(R/L)t} \qquad (36)$$

alınabilir. Bunun fizikçe anlamı şudur: İlk koşulların belirlediği geçici bir akım, Denk. 36 biçiminde azalan bir $I(t)$, bileşeni ile verilir. Bu akım $t \gg L/R$ süresi sonunda söner ve Denk. 34 özel tümlevindeki ω sürücü frekansı ile bir kararda işleyen sinüslü bir akım kalır.

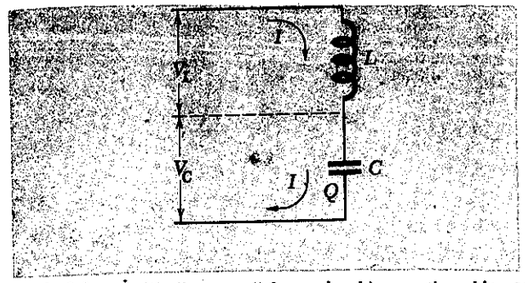
İncelediğimiz RL ve RC çevrimlerinde elde ettiğimiz sonuçların benzerliği irgitgi ile sığaçdan oluşmuş sıralı çevrimleri nasıl ele alabileceğimizi gösterir. Böyle bir düzenekten herhangi bir yolla $I = I_0 \cos (\omega t + \varphi)$ gibi bir dalgalı akım geçirdiğimizi düşünelim (Şek. 8.8'de görüldüğü gibi). İrgitginin uçları arasındaki V_L gerilimi

$$V_L = L \frac{dI}{dt} = -I_0 \omega L \sin (\omega t + \varphi) \qquad (37)$$

olacaktır. Sığacın uçları arasındaki V_L 'nin imi ile bağdaşacak V_C gerilimi ise

$$V_C = -\frac{Q}{C} = \frac{1}{C} \int I \, dt = \frac{I_0}{\omega C} \sin (\omega t + \varphi) \qquad (38)$$

* Türdeş : homojen



Şek. 8.8 İrgitimli ve sığalı sıralı bir çevrim bir tek tepken öğeye eşdeğerdir; $\omega^2 LC$ nin 1'den büyük ya da küçük oluşuna göre eşdeğer öğe irgitgili ya da sığalı olabilir.

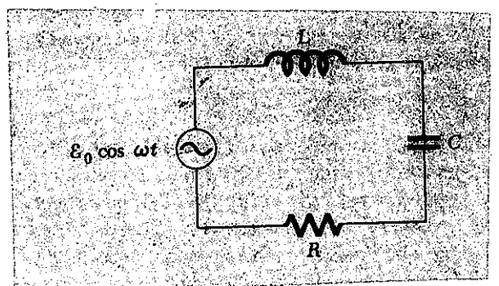
olur. Buna göre dizgemizin bütünü uçları arasındaki gerilim

$$V = V_L + V_C = -\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) I_0 \sin (\omega t + \varphi) \qquad (39)$$

dır. Verilen bir ω için, kurduğumuz düzenek açıkca görüldüğü gibi $\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$ niceliğinin artı ya da eksi oluşuna göre bir irgitgi ya da bir sığaç sayılabilecek tek bir öğeye eşdeğer olur. Örneğin $\omega L > \frac{1}{\omega C}$ olsun o zaman düzenek L' gibi bir irgitgiye eşdeğerdir ki

$$\omega L' = \omega L - \frac{1}{\omega C} \qquad (40)$$

olsun. Burada *eşdeğerlik yalnızca* özel bir frekansındaki kararlı titreşimler için, akım ile gerilim arasındaki bağıntının aynı olduğunu anlatır. Bu özellik bu frekansla işletilen herhangi bir çevrimde L ile C yerine L' koyabilmek olanağını sağlar.



Şek. 8.9 Sinüsel bir elektromotor kuvvetin sürdüğü RLC çevrimi.

Bu, anlayış Şek. 8.9'daki yalın RLC çevrimine de uygulanabilir. Bunun için $\mathcal{E}_0 \cos \omega t$ em kuvveti ile işleyen RL çevriminin Denk. 23 ve 27'de verilen çözümlerinde ωL yerine $\omega L - 1/\omega C$ almamız gerektiğini anımsamamız yeter:

$$I = \frac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}} \cos (\omega t + \varphi) \qquad (41)$$

$$\text{tg } \varphi = \frac{1}{R\omega C} - \frac{\omega L}{R} \qquad (42)$$

Elektromotor kuvvetin $\mathcal{E}_0$ genliği için ve L, C ve R çevrim öğeleri verildiğine göre, en büyük akım yeğinliği,

$$\omega L - \frac{1}{\omega C} = 0 \qquad (43)$$

eşitliğini sağlayan sürücü frekansta sağlandığını vurgulayalım; bu ise, $\omega = 1/\sqrt{LC} = \omega_0$ demeğe gelir ki, bu, sürücü frekansın sönümsüz LC çevriminin çınlanım frekansına eşit olması demektir. Bu durumda Denk. 41

$$I = \frac{\mathcal{E}_0 \cos \omega t}{R} \qquad (44)$$

biçimine indirgenir. Bu ise, çevrimde dirençin yalnız bulunduğu zamanki akım yeğinliğidir.

Örnek olarak Şek. 8.3a'daki çevrimin
$\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \cos \omega t$
gibi dalgalı bir emk kaynağına bağlanmış olduğu hali ele alalım. Çevrimin ω sürücü frekansı, verilen bir sığalık (0,01 mikrofarad) ve irgitgi (100 mikrohenry) için $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ yazımına göre 10^6 radyan/s(veya $10^6/2\pi$ hertz) olan çınlanım frekansından değişik olabilir. Şekil 8.10, çevrimin R direncinin ayrı üç değeri için titreşen akım genliğinin sürücü frekansın işlevi olarak değişimini gösteriyor. Her üç halde de emk'nin genliği 100 volt olarak alınmıştır. Akımın $\omega = \omega_0$ değerindeki çınlanım tepesinin, en düşük direnç halinde en keskin olduğuna bakınız. Bu R direnci, Şek. 8.3b'de en üstteki çevrimin gösterdiği sönümlü bir titreşken halindeki direncin aynıdır.

Çevrimin Denk. 14'e göre $\omega_0 L/R$ olarak* tanımlanan Q değeri $\frac{(10^6 \times 10^{-4})}{20} = 5$'dir. Genellikle bir çevrimin Q'sü ne denli büyükse, genlik tepesinin ω sürücü frekansının işlevi olarak tutarı o denli yüksek ve eğri o denli dar olur. Daha kesincesi ω_0'ın yakınlarında $\omega = \omega_0 + \Delta\omega$ gibi frekansları ele alalım. Denk. 41'in paydasındaki $\omega L - 1/\omega C$ yazımını

$$\omega L - \frac{1}{\omega C} = \omega_0 L \left(1 + \frac{\Delta\omega}{\omega_0}\right) - \frac{1}{\omega_0 C(1 + \Delta\omega/\omega_0)} \qquad (45)$$

biçiminde alabiliriz. Bu halde $\Delta\omega/\omega_0$ cinsinden birinci basamakla yetinerek ve $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ olduğunu anımsayarak bu yazım yaklaşıkca

$$\omega_0 L\left[1 + \frac{\Delta\omega}{\omega_0} - \frac{1}{1 + \Delta\omega/\omega_0}\right] \approx \omega_0 L\left(2\,\frac{\Delta\omega}{\omega_0}\right) \qquad (46)$$

biçimine girer. Tam çınlanım yerinde Denk. 41'in paydasındaki karekök içindeki yazımdan yalnızca R^2 kalır. Karekök altındaki nicelik, ω çınlanımdaki ω_0 yerinden kayarak $|\omega L - 1/\omega C| = R$ değerini alınca veya yaklaşıkca

$$\frac{2\Delta\omega}{\omega_0} = \frac{R}{\omega_0 L} = \frac{1}{Q} \qquad (47)$$

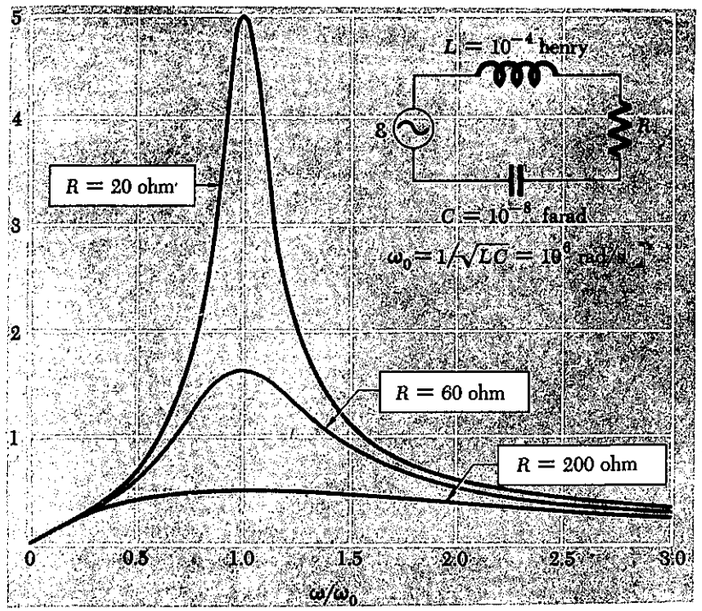
değerini bulunca iki katına çıkacaktır. Bu demektir ki $\Delta\omega/\omega_0 = 1/2Q$ olunca akımın genliği, tepe değerinin $1/\sqrt{2}$ katına düşecektir. Bu değerler "yarı-güç" noktalarıdır, zira Kes. 8.5'de anlatacağımız gibi, enerji ya da güç genliğin karesi ile oranlıdır. Çoğu kez bir çınlanım tepesinin genişliği yarı güç noktaları arasındaki tam genişlik olarak verilir. Bu ise çınlanım frekansının tam $1/Q$ katına eşittir. Çok daha yüksek Q değerleri olan çevrimlere çok rastlanır. Bir radyo alıcısı belli bir vericiyi seçebilir ve Q'sü birkaç yüzü bulan bir çınlanım çevrimi yardımı ile öteki vericileri ayırabilir. Q değeri 10^4 ve hatta 10^5'i bulan mikrodalga rezonans çevrimleri yapmak kolaydır.

Titreşimli emk'i ile akım arasındaki evre kaymasını veren φ açısı, frekansa bağlı olarak Şek. 8.11'deki gibi değişebilir. Çok alçak frekanslarda akıma karşı engelin başat kesimi sığadır ve φ artı olur. Çınlanım yerinde $\varphi = 0$'dır. Q değeri büyüdükçe ω frekansı ω_0'dan geçerken φ'nin artı açıdan eksi açıya geçişi daha keskin olur.

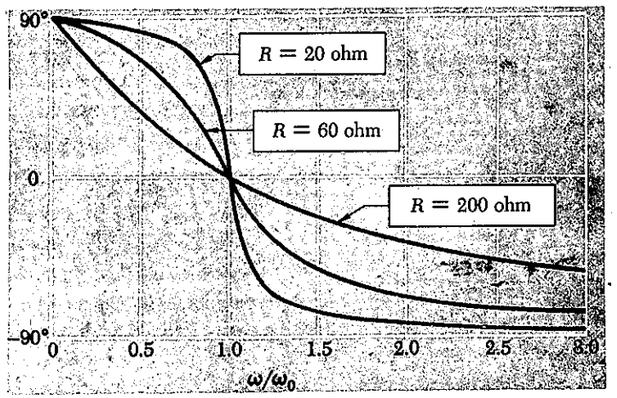
8.3 Dalgalı Akım Ağları

Bir dalgalı akım ağı, dirençlerden, sığaçlardan ve irgitgilerden oluşmuş bir kurgudur, ve bu ağdan sabit ω frekansında titreşimli bir kararlı akım ge-

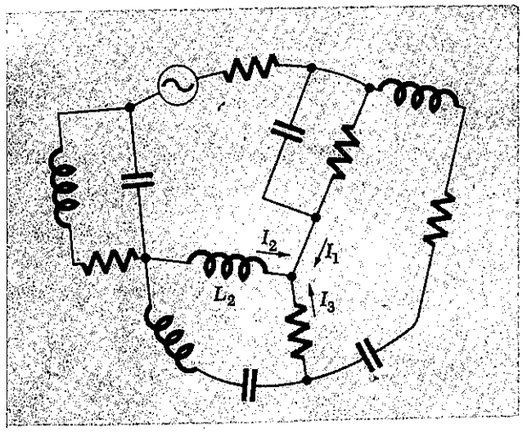
* Denk. 14'teki ω özgürce sönen titreşkenin frekansıdır ve zayıf ve orta sönümler için kılgınca ω_0'a eşittir. Biz burada ω_0'ı Q'nün tanımında kullanıyoruz. Bu tartışmada bu ω çevrime uygulamak üzere seçtiğimiz herhangi bir frekans olabilir.



Şek. 8.10 Sıralı bir RLC çevrimine 100 volt genlikli bir emk uygulanmıştır. Çevrim ögeleri Şek. 8.3'deki örnekte verilenlerin aynıdır. Akım genliği Denk. 41'e göre hesaplanmış ve $\frac{\omega}{\omega_0}$'ın işlevi olarak üç farklı direnç için çizite geçirilmiştir.



Şek. 8.11 Şek. 8.10'daki çevrimin evre açısının frekansla değişimi.



Şek. 8.12 Bir dalgalı akım ağı.

çirilir. Çevrim bu frekansta bir ya da daha çok sayıda emk ile sürülerek elektriksel titreşimde tutulur. Şekil 8.12 bir çizitini ağın göstermektedir. Dalgalı emk kaynağı ⏦ simgesi ile gösterilmiştir. Ağın bir kolunda, örneğin L_2 irgitgisinin bulunduğu kolda akımın zamanın işlevi olarak değeri,

$$I_2 = I_{02} \cos(\omega t + \varphi_2) \tag{48}$$

dır. Ağdaki akımın frekansı bütün ağ boyunca aynı olduğundan, yukarki yazımda I_{02} genliği ile φ_2 evre sabitinin bilinmesi, bu koldaki akımı tüm zaman boyunca belirler. Benzerince, bir kolun uçları arasındaki gerilim farkı (voltaj) belirli bir genlik ve bir evre ile titreşir:

$$V_2 = V_{02} \cos(\omega t + \theta_2) \tag{49}$$

Bir ağın bütün kolları üzerindeki gerilimleri ve akımları bulmuş isek, ağın tümünü çözümlemişiz demektir. Akım yeğinliklerini ve gerilimleri bulmak için gerekli bütün diferansiyel denklemleri kurarak bunları çözmek de kuşkusuz olasıdır, ve eğer bir ağın geçici davranışı ile ilgilenmekte isek böyle bir işlem gerekir. Oysa *kararlı hal için* çok daha yalın ve daha ince bir yöntem vardır. Bu yöntem şu iki düşünceye dayanır:

(i) Bir dalgalı akım ya da dalgalı gerilim bir karmal sayı ile gösterilebilir.

(ii) Devrenin bir kolu ya da bir ögesi, verilen bir frekansta, bu koldaki gerilimle akım yeğinliği arasında bir bağıntı ile belirlenebilir.

Yukarki birinci "düşünce" matematiğin ilginç bir özdeşliği olan,

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i \sin\theta \tag{50}$$

bağıntısından yararlanır: burada, $i^2 = -1$'dir. Bundan yararlanmak için aşağıki gösterim *kuralını* benimseyeceğiz.

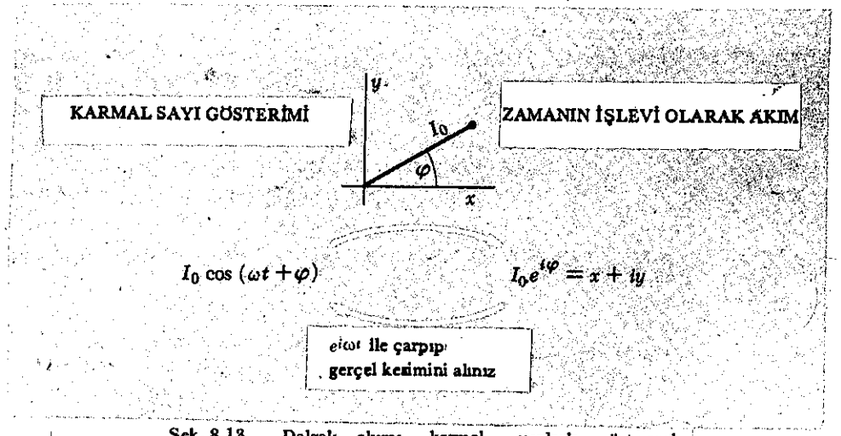
> $I_0 \cos(\omega t + \varphi)$ gibi bir dalgalı akım $I_0 e^{i\varphi}$ karmal* sayısı ile, yani gerçel** kesimi, $I_0 \cos\varphi$ ve sanal* kesimi $I_0 \sin\varphi$ olan sayı ile gösterimlenir.
> Karşı yönde giderek, eğer $x + iy$ karmal sayısı bir I akımını *gösteriyorsa* akımın zamanın işlevi olarak değeri $(x + iy)e^{i\omega t}$ çarpımının gerçek kesimi ile verilir.

Şek. 8.13 bu iki yollu raslaştırmayı özetler. $z = x + iy$ gibi karmaşık bir sayı iki boyutlu düzlem içinde bir çizitle gösterilebildiğine göre, bunun evre sabitini $\text{tg}^{-1}\, y/x$ açısı ile, ve I_0 genliğini $\sqrt{x^2 + y^2}$ modülü ile canlandırmak kolaydır.

Bütün bunları kullanışlı kılan şu olgudur: *İki akım toplamının gösterimi, bunların gösterimlerinin toplamıdır.* Şekil 8.12'de birtakım iletkenlerin birleştiği bir bağlantı noktasında, I_1 ve I_2 akımlarının toplamını ele alalım. Herhangi bir t anında akımların toplamı:

$$\begin{aligned} I_1 + I_2 &= I_{01} \cos(\omega t + \varphi_1) + I_{02} \cos(\omega t + \varphi_2) \\ &= (I_{01} \cos\varphi_1 + I_{02} \cos\varphi_2) \cos\omega t \\ &\quad - (I_{01} \sin\varphi_1 + I_{02} \sin\varphi_2) \sin\omega t \end{aligned} \tag{51}$$

* Karmal : Kompleks
** Sanal : İmajiner
*** Gerçel : Reel



Şek. 8.13 Dalgalı akımı karmal sayılarla göstermek için kurallar.

öte yandan benimsediğimiz kurala göre I_1 ve I_2'yi gösteren karmal sayıların toplamı:

$$\begin{aligned} I_{01}e^{i\varphi_1} + I_{02}e^{i\varphi_2} &= (I_{01} \cos\varphi_1 + I_{02} \cos\varphi_2) \\ &\quad + i(I_{01} \sin\varphi_1 + I_{02} \sin\varphi_2) \end{aligned} \tag{52}$$

dır; Denk. 52'nin sağ yanını $(\cos\omega t + i \sin\omega t)$ ile çarparak sonucun gerçek kesimini alacak olursak Denk. 51'in sağ yanındaki yazımın kendisini buluruz.

Bu demektir ki, zamanın periyodlu işlevi olan yazımların kendilerini toplayacak ya da çıkaracak yerde bunları gösteren karmal sayıları toplayıp çıkarabiliriz. Başka bir deyimle dalgalı akımlar cebri, toplama ve çıkarma bakımından, karmal sayılarla işlenebilirler. Bu raslaştırma çarpımlara kadar *gitmez.* $I_{01}I_{02}e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}$ karmal sayısı Denk. 51'deki akım işlevlerinin çarpımlarını göstermez.

Gerçekte akım ağlarının çözümlenmesinde, akımların ve gerilimlerin yalnız toplamlarını almak durumu ile karşılaşırız. Örneğin Şek. 8.12 de I_1, I_2 kavşak noktasında, *her an*, net akımın sıfıra eşit olması gibi fiziksel bir gerek yerine gelmektedir. Buna göre, I_1, I_2, ve I_3 *zamanın periyodlu işlevleri olduklarına göre*

$$I_1 + I_2 + I_3 = 0 \tag{53}$$

koşulunun geçerli olması gerekir. Raslaştırma ilkemiz ile bu olgu, 3 karmaşık sayının toplamının sıfır olması gibi basit bir cebirsel yazım ile verilebilir. Gerilimler de aynı şekilde ele alınabilir. Bir anda, ağın herhangi bir ilmeği boyunca alınan gerilim düşüşleri toplamı, bu ilmek içindeki emk'nin bu andaki değerine eşit olmalıdır. Periyotlu gerilim işlevlerini bağlayan bu koşul yerine, benzerince, titreşen $V_1(t)$, $V_2(t)$ v.b...işlevlerini gösteren karmal sayıların toplamları ile ilgili bir yazım alınabilir.

8.4 Alımlık ve Dalga Direnci (Etkin Direnç)*

Bir çevrim ögesinden geçen akım ile bu ögenin uçları arasındaki gerilim arasındaki bağıntı, gerilimi ve akımı gösteren karmal sayılar arasında bir bağıntı halinde yazılabilir. Şek. 8.4'deki irgitgi-direnç düzenine göz atalım. Gerilim titreşimi $\mathcal{E}_0$ ile ve akım $I_0 e^{i\varphi}$ ile gösterimlenir ki, burada $I_0 = \mathcal{E}_0/\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}$ ve $\text{tg}\,\varphi = -\omega L/R$ dir. Buradaki φ evre farkı ile, akım genliğinin gerilim genliğine oranı, çevrimin bu frekanstaki özellikleridir. Şimdi

(54)

$$\varphi = \text{tg}^{-1}\left(-\frac{\omega L}{R}\right) \text{ olduğuna göre } Y = \frac{e^{i\varphi}}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}$$

olacak şekilde bir | karmal. nicelik tanımlıyoruz. O halde R ile L'nin oluşturduğu sıralı düzenlenişin gerilimini gösterimleyen karmai sayı V, akımı gösterimleyen karmal sayı ise I olduğuna göre,

$$I = YV \tag{55}$$

bağıntısı geçerlidir. Burada Y'ye *alımlık (admitans)* denir. Bu iletkenlik boyutunda bir niceliktir. Aynı bağıntı Y'nin tersini kullanarak belirtilebilir ki, bu Z ile gösterilir ve adına *etkindirenç* ya da *dalga direnci* denir:

$$V = \left(\frac{1}{Y}\right) I = ZI \tag{56}$$

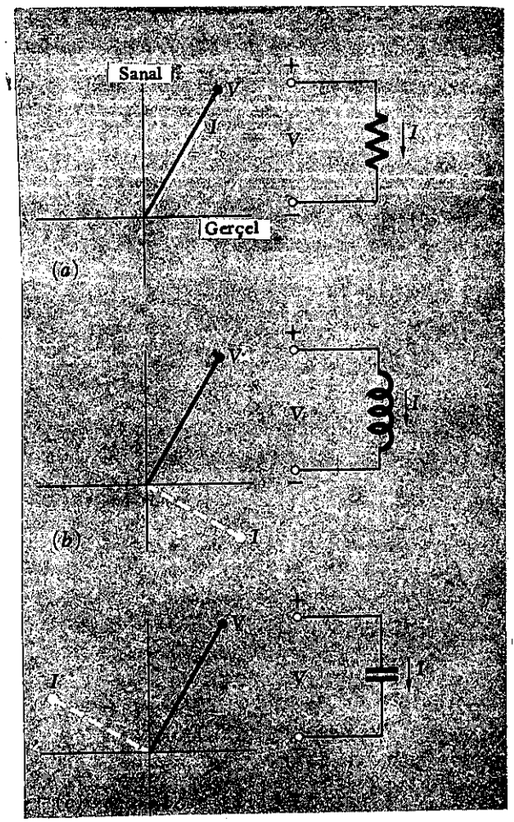
Burada iki karmal sayının çarpımını almakta isek de, bu sayılardan yalnız biri dalgalı akımı ya da dalgalı gerilimi gösterimler. Öteki ise dalga direnci ya da alımlıktır*.

Dalga direnci ohm ile ölçülür. Gerçekten, çevrim ögesi eğer yalnız R direncinden oluşsa idi, dalga direnci R'ye eşit gerçel bir sayı olurdu, şöyle ki, Denk.56 bir doğru akım çevrimi ile ilgili ohm yasasına dönüşürdü:

$$V = R\,I$$

O halde işlemlerimiz, örneğin dalgadirençlerini ve akımları gösterimleyen iki tür karmal sayıları kapsar. İki "dalgadirenci sayısının" çarpımları, iki akım sayısı çarpımında olduğu gibi hiç bir şey anlatmaz.

* Dalgadirenci : İmpedans
Alımlık : Adimitans



Şek. 8.14 V ve I bir çevrim ögesinin uçları arasındaki gerilim farkını ve akım yeğinliğini gösteren karmal sayılardır. Akım titreşimi ile gerilim titreşimi arasındaki evre farkı burada "yöngü"ler arasındaki açı ile belirmektedir.
(a) Direnç üzerinde akımla gerilim aynı evrededir.
(b) İrgitim akımı gerilimden geri kalır.
(c) Sığaçla akım gerilimin önünde gider.

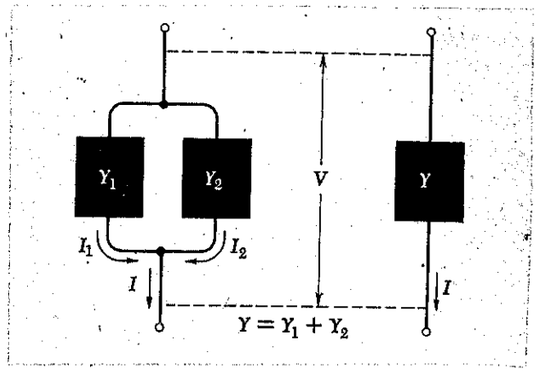
Dirençsiz bir irgitginin alımlığı $Y = -i/\omega L$ sanal niceliğidir. Bunu Denk. 54'de R'yi sıfıra götürmekle görebiliriz. Buradaki $-i$ çarpanı, akım titreşiminin gerilim titreşiminden $\pi/2$ evre farkınca geri kaldığını gösterir. Karmal sayılar çiziminde, eğer gerilim V ile gösterilmişse (Şek. 8.14*b*), akım beyaz kesikli çizgi ile gösterilen I ile gösterimlenir. Sığacın alımlığı Şek. 8.7'deki akım için verilen yazımdan görülebileceği gibi $Y = i\omega C$ 'dir. Bu halde V ile I bağlılığı Şek. 8.14c'deki gibidir. Bu şekillerin her birindeki çizenekler V ile I'nın bağıl imlerinin nasıl kesinleştirileceğini gösteriyor. Böyle bir kesinleştirme yapılmadıkça "önde gider" ve "arkada kalır" deyimlerinin bir anlamı yok. Şu noktayı belirtelim ki, artı akım doğrultusunu, dirence uygulanan artı gerilimin artı yönde bir akım geçmesini sağlayacağı düşüncesiyle tanımlıyoruz (Şek. 8.14a).

Üç temel çevrim öğesinin özellikleri aşağıda özetlenmiştir:

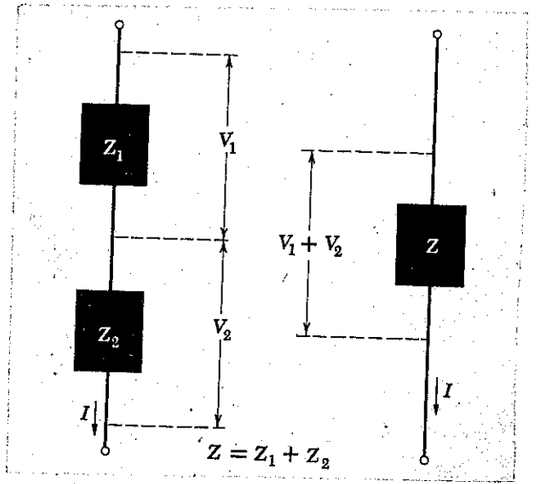
Simge	*Alımlık* Y	*Dalga direnci* $Z = \frac{1}{Y}$
R	$\frac{1}{R}$	R
L	$\frac{-i}{\omega L}$	$i\omega L$
C	$i\omega C$	$\frac{-i}{\omega C}$
	$I = YV$	$V = ZI$

Bu ögelerden yola çıkarak herhangi bir çevrimi kurabiliriz. Bu ögeler ya da bu ögelerden oluşan düzenekler koşut çevrimler halinde bağlandıkları zaman alımlıkları kullanmak uygundur, zira bu durumda alımlıklar toplanır. Şek. 8.15'de alımlıkları Y_2 ve Y_1 olan iki "kapalı kutu" koşut bağlanmışlardır. Öyle ise

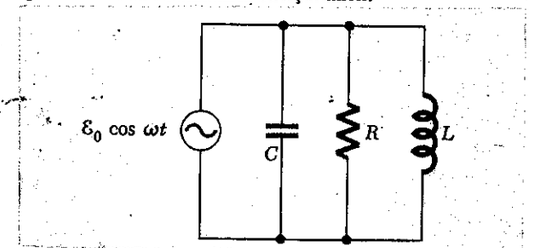
$$I = I_1 + I_2 = Y_1 V + Y_2 V = (Y_1 + Y_2)\,V \tag{57}$$



Şek. 8.15 Koşut alımlılıkların birleştirilmesi.



Şek. 8.16 Sıralı alımlılıkların birleştirilmesi.



Şek. 8.17 "Koşut" bir çınlanım çevrimi. Buradaki üç ögenin, Denk. 58'de olduğu gibi karmal alımlılıklarını toplayınız.

yazabiliriz ki, bu da tümünün yerine geçen bir tek kapalı kutunun alımlılığınınY = Y1 + Y2olmasını gerektirir. Şek. 8.16'da açıkca görüleceği gibi sıralı öğelerin dalga dirençleri birbirine eklenirler. Her şey sanki bir doğru akım ağından söz ediyormuşuz gibidir! Gerçekten bütün dalgalı akım ağı problemlerini bir doğru akım ağı problemi haline indirgedik, yalnız arada bir ayrım var: kullandığımız sayılar karmal sayılardır.

Bir örnek olarak Şek. 8.17'de görülen bir "koşut RLC" çevrimini alalım. Buradaki üç koşut kolun bir yere gelmiş alımlığı

$$Y = \frac{1}{R} + i\omega C - \frac{i}{\omega L} \tag{58}$$

dır. Gerilim yalnız $\mathcal{E}_0$ 'dır ve böylece karmal akım

$$I = YV = \mathcal{E}_0\left[\frac{1}{R} + i\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)\right] \tag{59}$$

olur. Akım titreşiminin genliği, yani I karmal sayısının modülü$\mathcal{E}_0[(1/R)^2+(\omega C - 1/\omega L)^2]^{1/}$niceliğidir; evre açısı ise $\text{tg}^{-1}(R\omega C - R/\omega L)$.

Biz bu biçimde yalnızca çizgisel çevrim ögeleri ile, yani akımın gerilimle oranlı olduğu durumları işliyebiliriz. Başka bir deyişle, çevrimimiz çizgisel bir diferansiyel denklemle betimlenebilmesi gerekir. Çizgisel olmayan bir öge ile bir dalgadirencini bile tanımlayamazsınız. Çizgisel olmayan çevrim öğeleri çok önemli ve çok ilgi çekici düzeneklerdir. Bunlardan bazılarını laboratuvarda incelediniz, ve bunların niçin böyle bir çözümlemeye gelmediklerini anlıyorsunuzdur.

Bunların tümü, sabit frekansta işleyen sürekli titreşimler için öngörülmüştü. Çevrimin geçici davranışı farklı bir problemdir. Ama çizgisel çevrimler için geliştirdiğimiz araç, geçici haller için de yararlı olabilir. Bunun nedeni şudur: Çeşitli frekansta bir çok kararlı titreşimleri üstüste getirmekle, kararlı olmayan bir davranışı gösterimleyecek hale gelebiliriz; dizgenin ayrı frekanslara verdiği karşılık, bu frekans yapayalnız bulunsa idi hesaplanacak karşılığın aynı olur. Bu dediklerimiz cilt III'e bırakılabilir.

8.5 Dalgalı Akım Çevrimlerinde Güç ve Enerji

Bir R direncinin uçları arasındaki gerilim $V_0 \cos \omega t$ ise, akımyeğinliği$I = (V_0/R) \cos \omega t$'dir. Bir andaki güç yani enerjinin direnç içinde bir andaki harcanma hızı

$$P = RI^2 = \frac{V_0^2}{R}\cos^2 \omega t \tag{60}$$

dır. Burada $\cos^2 \omega t$ 'nin birçok tam dönem üzerinde alınan ortalaması $\frac{1}{2}$ olduğuna göre, çevrimde harcanan ortalama güç

$$\bar{P} = \frac{1}{2}\frac{V_0^2}{R} \tag{61}$$

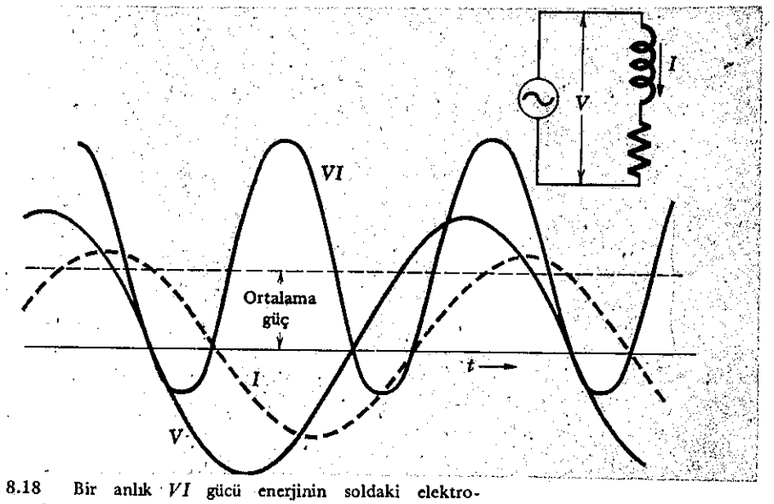
olur. Bir dalgalı akım çevriminde gerilim genliğini ve akım genliğini değil bunların $1/\sqrt{2}$ katını vermek bir alışkanlık olmuştur. Buna çoğu kez "kare-ortalama-kök" (kısaca kök "rms"), ya da etkin değer denir. Bu tanım Denk. 61'deki $\frac{1}{2}$ 'yi açıklar. Böylece

$$\bar{P} = \frac{V_{\text{kok}}^2}{R} \tag{62}$$

elde edilir. Örneğin şehir ağındaki gerilim 220 volt ise, buna 220 $\sqrt{2}$ volt'lık bir genlik raslar. Odanızdaki elektrik prizinin uçları arasındaki gerilim farkı (gerilim normal değerinde ise)

$$V(t) = 311 \cos 377t \tag{63}$$

olur; burada V volt ve t saniyedir. Bir dalgalı akım ölçeri akımın genliği 1,414 ampere iken 1 amp gösterecek biçimde ayarlanmıştır.



Şek. 8.18 Bir anlık VI gücü enerjinin soldaki elektromotor kuvvet kaynağından sağdaki çevrim ögesine aktarılma hızıdır. Yatay noktalı çizgi bunun zaman içindeki ortalamasını gösteriyor.

Genellikle bir çevrim ögesine bir anda verilen enerjinin veriliş hızı, yani giriş gücü, imlemede uyanık davranmak koşulu ile, bir andaki gerilim ile o andaki akımın VI çarpımına eşittir. Akım geçişinin bu görünüşünü Şek.8.4'deki yalın LR çevriminde ele alalım. Şek. 8.18'de akım ve gerilim eğrilerini yeniden çizdik ve buna VI çarpımı ile oranlı bir eğri kattık. Artı VI değerleri, LR düzeneğine bir emk kaynağından enerji aktarıldığını anlatır. Bir dönemin kimi kesimlerinde VI'nın eksi olduğunu gözden kaçırmayın. Bu sırada bir tutam enerji üretece geri verilmektedir. Bunu irgitginin mıknatısal alanında birikmiş enerjinin salınımı ile yorumlayabiliriz. Birikmiş enerji $\frac{1}{2}LI^2$ dir ve her tam dönem içinde iki kez doruktan geçer.

Ortalama güç, yani $\bar{P}$, kesikli çizilmiş yatay doğruya uyar. Bunun değerini hesaplamak için, $V = \mathcal{E}_0 \cos \omega t$ ve $I = I_0 \cos(\omega t + \varphi)$ olduğuna göre VI çarpımının ne olduğuna bakalım:

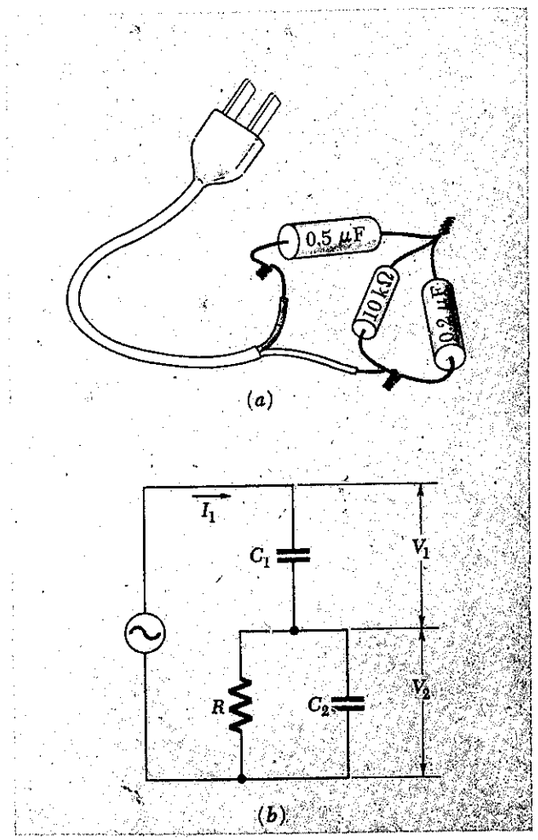
$$\begin{aligned} VI &= \mathcal{E}_0 I_0 \cos \omega t \cos(\omega t + \varphi) \\ &= \mathcal{E}_0 I_0(\cos^2 \omega t \cos \varphi - \cos \omega t \sin \omega t \sin \varphi) \end{aligned} \tag{64}$$

Burada $\cos \omega t \sin \omega t$ ile oranlı terimin zamanca ortalaması bu çarpımı $\frac{1}{2}\sin 2\omega t$ biçiminde yazarak kolayca görebileceğiniz gibi, sıfırdır; oysa $\cos^2 \omega t$ nin ortalaması $\frac{1}{2}$ 'dir. Öyle ise gücün zamanca ortalaması için

$$\bar{P} = \overline{VI} = \tfrac{1}{2}\mathcal{E}_0 I_0 \cos \varphi \tag{65}$$

buluruz. Burada hem akım hem de gerilim kok olarak volt ve ampere ile ölçülecek olursa,

$$\underset{(\text{wat})}{\bar{P}} = \underset{(\text{volt})}{V_{\text{kok}}} \quad \underset{(\text{amp})}{I_{\text{kok}}} \cos \varphi \tag{66}$$



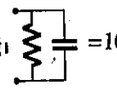
Şek. 8.19 Gerçek bir ağ (a) bir elektromotor kuvvet kaynağına bağlanmıya hazır ve (b) çevrimin çiziti.

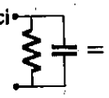
bulunur. Bu çevrimde harcanan enerji girdisinin bütünü R direncine girer. Doğal olarak herhangi bir gerçek irgitginin bir de direnci vardır. Çevrimin çözümlenmesinde bu direnci R içinde saydık. Isının dirençte oluştuğu kuşkusuzdur.

1. Kes. 8.4'de geliştirdiğimiz yöntem üzerinde bir uygulama yapmış olmak için Şek. 8.19a'daki çevrimi çözümleyelim. 10000 ohm'luk, 1 watt'lık bir direnç, sığaları 0,2 ve 0,5 mikrofarad (μF) olan iki sığaça bağlanmıştır. Bu düzeneği 120 volt'luk ve 60 hertz'lik bir kaynakla beslemek istiyoruz. *Soru:* 1 watt'lık direnç çok aşırı ısınacak mıdır? R direncinde harcanan ortalama gücün 1 watt değerini aşıp aşmadığını bulabilmek için, çevrim içinde ölçebileceğimizi düşündüğümüz kimi gerilimleri ve akımları hesaplayalım. Bu çevrimi çözümlemenin bir yolu ana çizgileriyle aşağıda verilmiştir.

(i) C_2'nin alımlığı $= i\omega C_2 = (377)(2 \times 10^{-7})i$
$= 0{,}754 \times 10^{-4} i$ ohm^{-1}

(ii) Direncin alımlığı $= \frac{1}{R} = 10^{-4}$ ohm^{-1}

(iii) Çevriminin alımlığı  $= 10^{-4}(1 + 0{,}754i)$ ohm^{-1}

(iv) çevrimin dalgadirenci 
$= \frac{1}{10^{-4}(1 + 0{,}754i)}$
$= \frac{10^4(1 - 0.754i)}{1^2 + 0{,}754^2}$
$= (6360 - 4800i)$ ohm

(v) C_1'in dalgadirenci $C_1 = -\frac{i}{\omega C} = -\frac{i}{(377)(5 \times 10^{-7})}$
$= -5300i$ ohm

(vi) Bütün çevrimin dalgadirenci $= (6360 - 10\,100i)$ ohm

(vii) $I_1 = \frac{120}{6360 - 10\,100i} = \frac{120(6360 + 10\,100i)}{(6360)^2 + (10\,100)^2}$
$= (5{,}37 + 8{,}53i) \times 10^{-3}$ amp

Burada 120 volt, gerilimin etkin değeri olduğuna göre akım şiddeti de etkin değerdir. Yani I_1 karmal sayısının modülü olan $[(5{,}37)^2 + (8{,}53)^2]^{1/2} \times 10^3$ amp veya 10,0 miliampere (mA) sayısı akımın etkin değeridir. Çevrimin ana koluna sıralı bağlanacak bir dalgalı akım ölçeri 10 mA gösterecektir. Bu akımın ağ gerilimine göre $\varphi = \text{tg}^{-1}(0{,}853/0\,537)$ ya da 1,01 radyanlık bir evre farkı vardır. O halde bütün çevrime giren toplam ortalama güç:

(viii) $\bar{P} = (120 \text{ volt})(0{,}010 \text{ amp}) \cos 1{,}01 = 0{,}64$ watt olur. Bu çevrimde direnç enerji harcayan biricik öğedir, ve bulduğumuz sayı direnç içinde harcanan ortalama güçtür. yalnız sınamış olmak için, direncin uçları arasındaki V_2 gerilimini bulabiliriz:

(ix) $V_1 = I_1\left(\frac{-i}{\omega C}\right) = (5{,}37 + 8{,}53i)(-5300i)10^{-3}$
$= (45{,}2 - 28{,}4i)$ volt

(x) $V_2 = 120 - V_1 = (74{,}8 + 28{,}4i)$ volt

R içindeki I_2 akımı V_2 ile aynı evrededir ve R'de harcanan ortalama güç

$$\bar{P} = \frac{V_2^2}{R} = \frac{(74{,}8)^2 + (28{,}4)^2}{10^4} = 0{,}64 \text{ watt} \qquad (67)$$

olur ki, bu da yukardaki verilen sonucu tam tutuyor.

Görülüyor ki, direncin üzerinde yazılı güç tutarı aşılmamıştır. Aslında direncin çok fazla ısınıp ısınmayacağı sorunu yalnız harcadığı ortalama güce değil, aynı zamanda, ısıyı ne kolaylıkla üzerinden atabileceğine bağlıdır. Bir direncin üzerindeki güç sayısı ancak kaba bir kılavuzdur.

Problemler

8.1 120 Volt'luk ve 60 watt'lık bir ampul, 240 volt'luk ve 60 hertz'lik bir çevrimde kullanılmak isteniyorsa, bu ampule sıralı ne büyüklükte bir irgitgi bağlanmalıdır ki, düzenek normal işleyebilsin? (Önce gerekli irgitim tepkenliğini bulunuz. İrgitginin direncini ve ampulün irgitgiliğini savsayabilirsiniz.)

8.2 2000 ohm'luk bir direnç ve 1 μ F'lık bir sığa 120 volt (etkin)'lik ve 60 hertz'lik bir devreye çevrime sıralı bağlanmışlardır.
(*a*) Dalgadirenci ne kadardır?
(*b*) Akımın etkin değeri ne kadardır?
(*c*) Çevrimde harcanan güç ne kadardır?
(*d*) Bir dalgalı akım voltölçeri direncin uçlarına ya da sığanın uçlarına bağlandığına göre ne gösterir?

(*e*) Bir katot ışınları tüpünün yatay yaprakları bu direncin uçlarına ve düşey yaprakları ise sığacın uçlarına bağlanmışlardır. Tüpün perdesi üzerinde ne görmeyi beklersiniz?

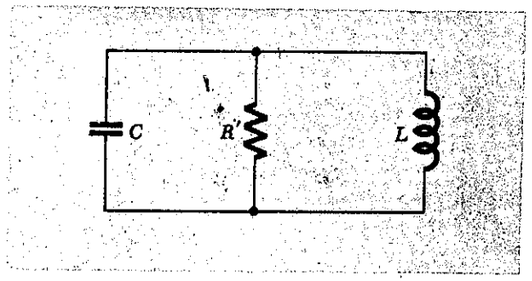
8.3 1000 ohm'luk bir direnç, 500 pF'lik bir sığaç ve 2 mH'lik bir irgitgi koşut bağlanmışlardır. Bu düzeneğin 10- khertz'lik bir frekanstaki dalgadirenci ne kadardır? 10 M Hz'lik bir frekanstaki dalgadirenci nedir? Dalgadirencinin salt değerinin en büyük olduğu frekans nedir?

8.4 Şekildeki çınlanım çevriminde güç harcayıcı R' direnci, LC düzeneğine sıralı olacağına koşut bağlanmıştır. Bu çevrime uygulanabilecek Denk. 2'ye benzer bir denklem çıkarınız. sıralı RLC çevrimindeki çözüme benzer çözüm elde etme koşullarını bulunuz. Eğer sıralı bir RLC çevrimi ile koşut $R'LC$ çevriminin L, C ve Q değerleri özdeşine R' ile R ne biçimde bağlıdırlar?

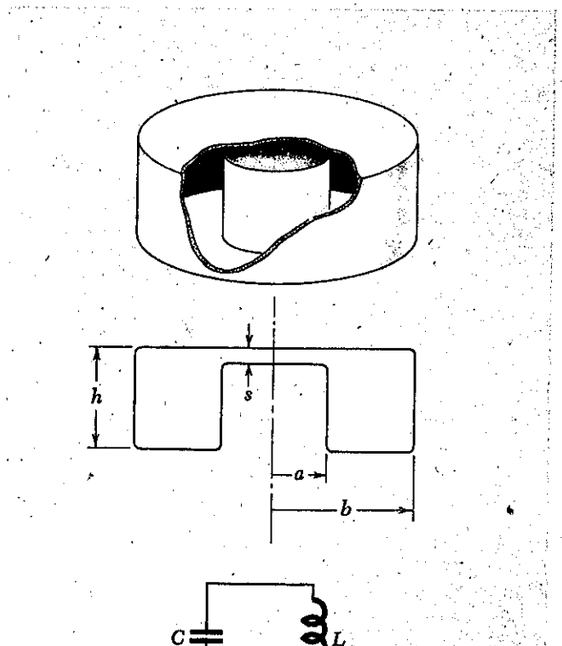
8.5 Şek. 8.1 çevriminden geçen akımı Denk. 12 vermiş olsun. Çevrimde $t = 0$ anında biriken enerjiyi hesaplayın. Sonra çevrimde bir çeyrek dönem sonra $t = \pi/2\omega$ anında toplanan enerjiyi bulun. Aradaki farkın bu süre içinde R direncinde harcanan enerjiye eşit olduğunu sınayın. Bu problem için sönümün zayıf olduğunu. varsayın, yani, $\alpha/\omega \ll 1$ olsun ve α^2 ile oranlı nicelikleri savsayın.

8.6 Şek. 8.3*a*'daki çevrim için $R = 600$ ohm olduğuna göre, yani çevrim aşırı sönümlü ise, β_1 ve β_2 katsayılarının değerlerini hesaplayınız. Bundan başka Denk. 16'daki B ve A sabitlerinin oranlarını bulunuz.

8.7 Şekilde gösterilen biçimde bir çınlanım koğuğu bir mikrodalga titreşkeninin temel parçasıdır. Bu yalın bir "LC" çevrimi gibi görülebilir. İrgitim katsayısı bir sarımlı bir metal simidin aynıdır; bu irgitgi koşut yapraklı bir sığaca doğrudan bağlanmıştır. Bu çevrimin çınlanım frekansı için bir yazım bulunuz, ve elektriksel ve mıknatısal alanları çizim halinde gösteriniz.



Prob. 8.4



Prob. 8.7

Bölüm 9

Madde İçindeki Elektrik Alanları

9.1	Dielektrikler	246
9.2	Bir Yük Dağılımının Kutuplanım Döngüleri	248
9.3	İkizkutbun Elektriksel Gerilimi ve Alanı	251
9.4	Bir Dış Alanda Bulunan Bir İkizkutba (Dipole) Etkiyen Kuvvet ve Kuvvet Döngüsü	253
9.5	Kutuplanırlık Gergisi (Tensoru)	259
9.7	Doğal İkizkutup (Dipol) Döngüleri	261
9.8	Kutuplu Maddenin Elektrik Alanı	263
9.9	Dielektrik Dolu Bir Sığalık	268
9.10	Kutuplu Bir Kürenin Alanı	271
9.11	Biteviye Bir Alan İçinde Bir Dielektrik Küre	274
9.12	Dielektrik Ortam İçindeki Bir Yükün Alanı ve Gauss Yasası	275
9.13	Elektriksel Alınganlık ile Atomsal Kutuplanırlık Arasındaki İlişki	278
9.14	Kutuplanımda Enerji Değişimleri	282
9.15	Kutuplu Moleküllerden Olma Dielektrik	283
9.16	Değişen Alanlarda Kutuplanma	284
9.17	Bağlı Yük Akımı	284
	Problemler	289

BÖLÜM 9 MADDE İÇİNDE ELEKTRİK ALANLARI

9.1 Dielektrikler

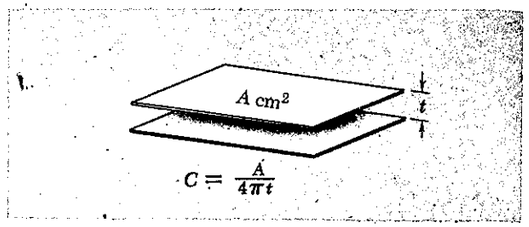
Böl. 3'de incelediğimiz sığaçlar iki iletkenden başka bir şey değildir; bunlar biribirinden yalıtılmışlardır ve aralarında hiç bir şey yoktur. Böyle iki iletkenden oluşmuş bir dizgenin C. sığası, sığacın Q yükünü (yapraklardan biri üzerindeki artı Q yükü ya da öteki üzerindeki eşit eksi Q yükü) iki iletken arasındaki V_{12} gerilim farkına bağlayan bir sabit idi:

$$C = \frac{Q}{V_{12}} \qquad (1)$$

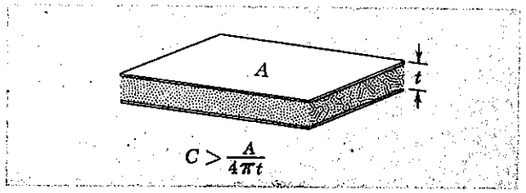
Herbirinin yüzölçümü A cm² olan iki yapraktan yapılmış koşut yapraklı bir sığaç halinde, yaprakları aralığı t ise sığasının

$$C = \frac{A}{4\pi t} \qquad (2)$$

ile verildiğini görmüştük. Bu gibi sığaçlar birçok elektrik aygıtlarında kullanılır. Bunların adına *boşluk sığaçları* denir ve havası iyice boşaltılmış şişeler içine yerleştirilmiş yapraklardan başka bir şey değillerdir. Bunlar çokçası, hızla değişen çok yüksek gerilimlerde kullanılırlar. Oysa elektronikte kullanılan sığaçların yaprakları arası iletken olmayan sıvı veya katı bir madde ile doldurulmuştur. Laboratuvarda kullandığınız sığaçların çoğu bu çeşittir; herhangi bir radyo ya da televizyon aygıtının içinde düzinelerle bu gibi sığaçlar vardır. Maddesel bir ortam içine batırılmış iletkenler için Denk. 2, deneyin verdiği ölçülerle bağdaşmaz. Şek. 9.1*a*'da görülen iki yaprak arasını Şek. 91*b*'de görüldüğü gibi plastik bir dilim ile doldurduğumuzu düşünelim. Bu yeni sığaçla deney yapılınca, yüklerle gerilim farkları arasında yine basit bir oranlılık buluruz, şöyle ki, düzeneğin sığası yine Denk. 1 ile *tanımlanabilir*. Ama bulduğumuz C, Denk. 2'nin öngördüğünden önemli ölçüde *büyüktür*.



Şek. 9.1 (*a*) Paralel iletken yapraklardan oluşan bir sığalık



(*b*) Aynı sığalığın içinde yalıtkan bir madde var.

Yalnız, sığaç dediğimiz özel yapılı düzeneklerde değil, çevremizdeki uzayın her yerinde, elektriksel ve mıknatısal alanlar boşlukta değil, madde dolu uzayda oluşurlar; bu madde yoğun olmasa bile, en azından hava gibi gaz halindedir. Bunu anımsatmaktan amacımız, şimdiyedek Böl. 4'de değindiğimiz maddenin elektriksel iletkenliği konusu dışında, bazı noktasal yüklerin ya da gevşek yük dağılımlarının dolduruduğu boş uzay içindeki elektromıknatısal alanları incelemekte olduğumuzdur. Şimdi elektriksel ve mıknatısal alanların yoğun madde ile etkileşimini anlamaya çalışalım.

Elimizdeki soruna değişik iki yaklaşım yolu açıktır. Bunlardan biri büyük ölçek ya da *genil* görüşe bağlı kalınarak, Şek. 9.1*b*'deki plastik dilim gibi türdeş bir madde kesmesinin, kendi dışındaki alanda ne gibi bir değişiklik oluşturduğunu görmeğe çalışmaktır. Bunun için, iletken ya da yalıtkanlardan oluşan bir dizgede, bu gibi etkileri yeterince betimleme olanağı verecek yalın yasalar bulmaya çalışabiliriz. Bu çalışmalarla türdeş maddelerin genil elektriksel davranışlarının, oldukça yalın biçimde tam olarak belirlenebileceği sonucuna varırız. Örneğin madde doldurulmuş herhangi bir sığacın sığasını doğru olarak hesaplamak için, Denklem 2'nin sağ yanına özel dolgu maddesini belirleyen bir ϵ katsayısı koymak yeter; ϵ'a o maddenin *dielektrik sabiti* denir ve genel olarak maddenin kendi de, bir elektrik alanındaki davranışı ile ilgili olarak, *dielektrik* diye adlandırılır. Çok kullanılan bazı maddelerin dielektrik sabitleri Çizelge 9.1'de verilmiştir. Bir sığacı dielektrik madde ile doldurmak ve sığasını ölçmek ile hesaplayabileceğimiz dielektrik sabiti bir kez bulunursa, artık yalnız iki yapraklı bir sığaçta değil, herhangi biçimde iletkenlerden ve dielektrik maddeden oluşmuş herhangi bir durgun yük dizgesinin davranışını önceden kestirebiliriz. Bu demektir ki, dizgenin iletken kesimleri üzerinde bulunacak belli yükler ya da gerilimler için, dielektriğin dışında bulunan boşluktaki elektrik alanının ne olduğunu kestirebiliriz.

Çizelge 9.1 Çeşitli maddelerin dielektrik sabitleri

Madde	*Hali*	*Dielektrik sabiti*
Hava	0°C, 1 atm gaz	1,00059
Klorlu hidrojen HCl	0°C, 1 atm gaz	1,0046
Su, H_2O	110°C, 1 atm gaz	1,0126
	20°C sıvı	80
Benzen C_6H_6	20°C sıvı	2,28
Amonyak NH_3	−34°C sıvı	22
Trafo yağı	20°C sıvı	2,24
Sodyum klorür NaCl	20°C kristal	6,12
Kükürt, S	20°C katı	4,0
Kuartz SiO_2	20°C kristal (optik eks I)	4,34
	20°C kristal (optik eks II)	4,27
Polyetilen	20°C katı	2,25–2,3
Neopren	20°C katı	4,1
Porselen	20°C katı	6,0–8,0
Parafin	20°C katı	2,1–2,5
Pyreks cam	20°C katı	4,00

Bunu tümcek gerçekleştirebilecek bir kuram 19. yüzyıl fizikçilerince geliştirildi. Bu fizikçilerin elinde maddenin atomlu yapısı üzerine hiçbir bilgi bulunmadığı için, olayların genil (makroskopik) anlatımı ile yetinmek zorunda idiler. Bu anlatıma göre, bir dielektrik belirli bir karakter göstermeyen, kusursuz süreklilikte bir "matematiksel pelte" gibi davranır ki, bunu boşluktan ayırdeden biricik elektriksel özelliği dielektrik sabitinin 1'den farklı oluşudur.

Eğer maddenin, elektrik alanı içindeki halini betimlemek için yalnız genil (makroskopik) bir kuram geliştirirsek pek açık bazı soruların yanıtını bulmakta, daha doğrusu, anlamlı bir yanıt alabileceğimiz sorular sorabilmekte güçlük çekeriz. Örneğin Şek. 9.1*b*'deki metal yapraklar belirli tutarda yüklenirse aradaki plastik kesmenin içinde elektrik alan yeğinliği ne olur? Elektriksel alan yeğinliği bir sınama yüküne etkiyen kuvvet olarak tanımlanır. Kusursuz, yoğun ve katı bir madde içine, o maddede hiç bir karışıklığa yolaçmadan, bir sınama yükü nasıl yerleştirebiliriz ve bu yüke etkiyen kuvveti nasıl ölçebiliriz? Bu kuvveti ölçmüş isek, bunun anlamı nedir? Maddenin içinde sınama yükünün devinebileceği genişlikte bir koğuk açarak yükü oraya koyup özgür bir parçacıkta olduğu gibi yüke etkiyen kuvveti ölçebileceğimizi düşünebiliriz. Ama o zaman dielektrik madde içindeki elektrik alanını değil, o dielektrik içinde açtığımız kovuğun içindeki elektrik alanını ölçmüş oluruz ki, bu ikisi aynı şey değildir.

Bereket versin elimizde, problemi işleyecek ikinci bir yol var ; bu da minil (mikroskoplük) düzeyden yani atom düzeyinden geçen bir yoldur. Bil-

* Sığalık: Capacitance

Sığaç: Kondansatör denilen gereç.

diğiniz gibi madde atomlardan ve moleküllerden kuruludur; bunlar da yüklü ögesel parçacıklardan oluşmuşlardır. Bu atomların büyüklükleri, ve yapıları üzerine kristaller, sıvılar ve gazlar içindeki düzenlenişleri üzerine epey şey biliyoruz. Dielektrik dilimi boşluğu dolduran yapısız bir jel gibi betimleyecek yerde, boşluğu dolduran bir molekül yığını olarak ele alabiliriz. Bir tek molekül, elektrik alanı içinde yalnız iken, yüklerinin davranışlarını nasıl anlayabilirsek, böyle iki molekülün boşlukta belli bir aralıkla bulundukları zamanki davranışlarını anlamamız olanağı vardır. Bunun için yalnız, her molekülün uyardığı elektriksel alanın, öteki moleküle etkisini hesaplamak gerekir. Bu boşlukta geçen bir olaydır. Bundan sonra yapılacak bütün iş anladıklarımızı, yine boşlukta 1 cm^3 'lük bir oylum içinde sayısı 10^{20}'yi bulan molekül nüfusuna genişletmektir; böylece gerçek dielektriği elde ederiz. Bu işlemi yapabilmek için 10^{20} tane değişik problem yaratmamayı umuyoruz.

Bu program yürütülebilirse iki bakımdan verimli olacaktır. Böylece madde içindeki elektriksel ve mıknatısal alanlar üzerine anlamlı bir şey söyleme yeteneği edineceğimiz gibi, yukarda ileri sürülen soruları da yanıtlama yolunu bulacağız. Bundan da değerlisi, madde içindeki minil düzeyde elektriksel ve mıknatısal alanların neden oluştuğunu ve bunun dayandığı atomlu yapının ne olduğunu anlayacağız. Elektriksel ve mıknatısal olayları ayrı ayrı incelemek istiyoruz. İşe dielektriklerle başlayacağız. İlk amacımız, bir atomun ya da bir molekülün uyardığı elektrik alanını betimlemek olduğuna göre, küçük bir yük dizgesi dışındaki durgun yük alanı üzerine bazı genel gözlemlerde bulunmak bize yardımcı olacaktır.

9.2 Bir Yük Dağılımının Kutuplanım Döngüleri*

Bir atom ya da bir molekül uzayda birkaç angström küb (10^{-24} cm^3)'lük yer tutan elektrik yüklü taneciklerden oluşmuş bir yapıdır. Şimdi oldukça karışık bir yük dağılımı gösteren bu oylumun dışında oluşan elektrik alanı ile ilgilenmekteyiz. Bu arada özellikle kaynaktan çok uzak noktalardaki alanlarla uğraşmak istiyoruz; çok uzak derken, kaynağın boyutlarına bakınca uzak yerleri anlıyoruz. Bu uzak noktadaki alanı belirleyen, kaynağın hangi özelliğidir? Bu soruyu yanıtlayabilmek için, gelişigüzel düzenlenmiş bir yük dağılımı ele alalım ve bunun, dışında bir noktada uyardığı alanı nasıl hesaplayabileceğimizi anlamaya çalışalım. Şekil 9.2 konumluk eksenleri başında bulunan bir çeşit yük dağılımını göstermektedir. Bu artı yüklü birçok çekirdekle çok sayıda elektrondan oluşmuş bir molekül olabilir. Her ne ise, bunu verilen $\rho(x,y,z)$ yük yoğunluğu işlev ile anlatılabilen bir yapı sayıyoruz. Buradaki ρ elektronların bulunduğu yerlerde eksi, çekirdeklerin bulunduğu yerler de artıdır. Uzak bir noktadaki elektrik alanını bulabilmek için bu yük dağılımının uyandırdığı gerilimi hesaplamakla işe başlayabiliriz. Örneğin dışta z ekseni üzerinde bir A noktası ele alalım. (Yük dağılımında herhangi bir bakışım bulunduğunu düşünmediğimize göre, burada z ekseninin hiç bir özelliği yoktur.) A'nın konumluklar başlangıcına uzaklığı r olsun. A noktasında, φ_A ile gösterdiğimiz elektrik gerilimi, yük dağılımının bütün öğelerinin katkılarını toplamakla bildiğimiz yoldan elde edilir:

$$\varphi_A = \int \frac{\rho(x',y',z')\, dv'}{R} \tag{3}$$

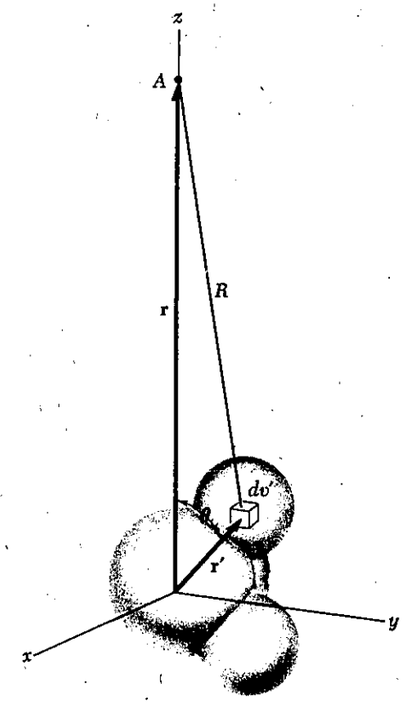
Tümlev içindeki dv' yük dağılımı içinde bulunan bir oylum öğesi, $\rho(x',y',z')$ bu oylum öğesinin bulunduğu yerdeki yük yoğunluğu, yazımın paydasındaki R ise, A noktasının ele aldığımız bu oylum öğesine uzaklığıdır. Tümlev işlemi kuşkusuz x', y', z' konumlukları üzerinden alınmıştır, ve içinde yük bulunan tüm bölge üzerine genişletilmektedir. R'yi r ve başlangıç noktasından yük ögesine olan r' uzaklığı cinsinden yazabiliriz. Kosinüsler yasasını kullanmak ve θ açısı, r' ile A'nın üzerinde bulunduğu z ekseni arasındaki açı olmak üzere:

$$R = [r^2 + r'^2 - 2rr' \cos\theta]^{1/2} \tag{4}$$

yazabiliriz. Tümlev içinde R yerine bu yazımı alarak:

$$\varphi_A = \int \rho\, dv' [r^2 + r'^2 - 2rr' \cos\theta]^{-1/2} \tag{4a}$$

* Döngü: Moment. Burada söz konusu olan kuvvet döngüsü değildir. Bu döngüler bu kesimde az aşağıda tanımlanacaktır.



Şek. 9.2 Bir molekülsel yük dağılımının bir A noktasında oluşturduğu gerilimin hesabı.

elde edilir. Şimdi uzakta bir A noktası için, yük dağılımının bütün kesimleri ile ilgili r' 'nün r'den çok daha küçük oluşundan yararlanmak istiyoruz. Bu bize Denk. 4'de karekök altındaki yazımın r'/r 'nin üslü bir işleyi halinde açılabileceğini anlatır. Böylece

$$[r^2 + r'^2 - 2rr' \cos\theta]^{-1/2} = \frac{1}{r}\left[1 + \left(\frac{r'^2}{r^2} - \frac{2r'}{r}\cos\theta\right)\right]^{-1/2} \tag{5}$$

yazabiliriz ve $(1+\delta)^{-1/2} = 1 - \frac{1}{2}\delta + \frac{3}{8}\delta^2 \ldots$ açılımını kullanarak, r'/r cinsinden aynı üslü terimleri bir yere toplar ve

$$[r^2 + r'^2 - 2rr' \cos\theta]^{-1/2} = \frac{1}{r}\left[1 + \frac{r'}{r}\cos\theta + \left(\frac{r'}{r}\right)^2 \frac{(3\cos^2\theta - 1)}{2} + \left(\begin{array}{c}\text{daha yüksek}\\ \text{üslü terimler}\end{array}\right)\right] \tag{6}$$

yazımını elde ederiz. Burada tümlev bakımından r bir sabittir ve bunu dışarıya alarak A noktasındaki gerilim yazımı şöyle olur:

$$\varphi_A = \underbrace{\frac{1}{r}\int \rho\, dv'}_{K_0} + \underbrace{\frac{1}{r^2}\int r' \cos\theta\, \rho\, dv'}_{K_1}$$

$$+ \underbrace{\frac{1}{r^3}\int r'^2 \frac{(3\cos^2\theta - 1)}{2}\rho\, dv'}_{K_2} + \cdots \tag{7}$$

yukarki K_0, K_1, K_2 vb tümlevlerin her birinin değeri yalnız yük dağılımının yapısına bağlıdır. Öyle ise z ekseni boyunca alınan bütün noktalar için gerilimin değeri $1/r$ 'nin sabit katsayılı bir üslü dizisi olarak yazılabilir:

$$\varphi_A = \frac{K_0}{r} + \frac{K_1}{r^2} + \frac{K_2}{r^3} + \cdots \tag{8}$$

Problemi bitmiş saymak ve elektriksel alanı bayır φ olarak hesaplayabilmek için, alanının bütün öteki noktalardaki değerini bulmalı idik. Ama yine de, önemli noktaları ortaya koyabilecek ölçüde ilerlemiş bulunuyoruz: Gerilimin kaynaktan uzak bir noktadaki davranışını, bu dizi içinde, katsayısı sıfırdan farklı olan ilk terim başat olarak belirleyecektir.

Bu katsayılara biraz daha yakından bakalım. Bunlardan K_0 katsayısı $\int \rho\, dv'$ 'ye eşittir, ve bu da

dağılım içindeki net yükten başka bir şey değildir. Ilın (nötral) bir molekül halinde olduğu gibi, eğer eşit tutarda artı ve eksi yüklerle uğraşmakta isek, K_0 sıfır olacaktır. Bir kez iyonlaşmış bir molekül halinde ise K_0 'ın değeri e'ye eşit olur. Eğer K_0 'ın değeri sıfır değilse, yeterince uzak bir noktaya gidecek olursak K_1, K_2 v.b. katsayıları ne denli büyük olurlarsa olsunlar K_0/r terimi baskın çıkacaktır.

Bunun ötesinde, gerilim, konumluklar başında bulunan bir nokta yükün gerilimine yaklaşacak, alan da buna uygun bir değer alacaktır. Bunun şaşılacak yanı yoktur.

Şimdi ılın bir molekülümüz bulunduğunu, yani K_0 'ın sıfır olduğunu düşünelim. Bu kez ilgimiz ikinci terim üzerine, yani, $K_1 = \int r' \cos\theta\, \rho\, dv'$ katsayılı terim üzerine kayar. Buradaki $r' \cos\theta$, yalınca görüleceği gibi, z' 'ye eşittir yani eksi ve artı yüklerin A'ya giden doğrultudaki bağıl kaymalarının bir ölçüsüdür. Artı ve eksi yük yoğunluklarının ayrı ayrı belirtildiği Şek. 9.3'deki yük dağılımı durumunda bu nicelik sıfır değildir. Aslında Şek. 9.3'de gösterilen bütün dağılımlarda K_1 yaklaşıkca aynı değerdedir

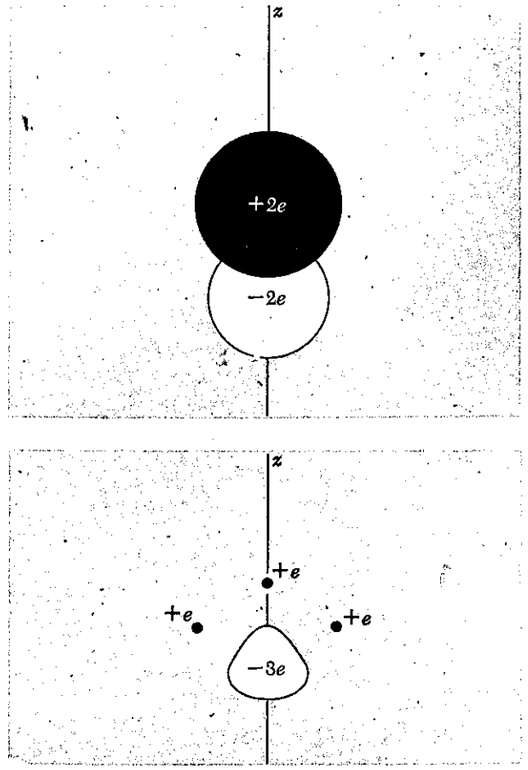
Eğer yük dağılımı ılın ise, K_1 'in konumluklar başının yerine bağlı olmadığını vurgulayalım.. Başka bir deyişle, z' yerine $(z' + z_0')$ alacak, yani başlangıç noktasını kaydıracak olursak, tümlevin değerinde bir değişiklik olmayacaktır:

$$\int (z' + z_0')\rho\, dv' = \int z'\rho\, dv' + z_0' \int \rho\, dv'$$

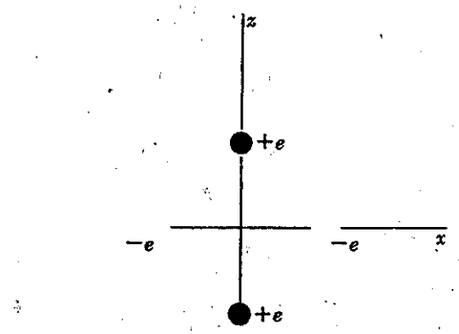
ılın bir dağılım için son tümlev her zaman sıfıra eşittir.

Açıkca görüldüğü gibi $K_0 = 0$ ve $K_1 \neq 0$ ise, gerilim kavuşmazcasına* (asimptotik olarak) $1/r^2$ 'ye yaklaşır. O halde elektrik alanının, bir nokta yük halinde olduğu gibi $1/r^2$ 'ye bağlı bir değişim değil, $1/r^3$ ile oranlı kavuşmaz bir davranışını beklemeliyiz. Kuşkusuz biz yalnız z ekseni üzerindeki gerilimi tartıştık.

* Kavuşmaz: Asimptotik



Şek. 9.3 $K_0 = 0, K_1 \neq 0$ haline uyan yük dağılımları. Bunların net yükleri sıfır ama ikizkutup döngüleri sıfırdan farklıdır.



Şek. 9.4 Bu yük dağılımı için $K_0 = K_1 = 0$, ama $K_2 \neq 0$'dır. Bu dördüzkutup döngüsü sıfır olmayan bir yük dağılımıdır.

Sorunu genel olarak gözden geçirdikten sonra, alanın tam biçiminin ne olduğu konusuna dönerek üzerinde önemle duracağız.

Eğer K_0 ve K_1 'in ikisi de sıfır ama K_2 sıfırdan farklı ise; uzak noktalardaki gerilim $1/r^3$ gibi davranacak, ve alan yeğinliği uzaklığın dördüncü kuvveti ile ters oranlı olarak düşecektir. Şekil 9.4, K_0 ve K_1 'in ikisinin de sıfır olduğu ve z ekseni hangi doğrultuya yönelse bunların sıfır kaldığı, oysa K_2 'nin sıfırdan farklı olduğu bir yük dağılımını göstermektedir.

Yukarda karşılaştığımız $K_0, K_1, K_2, \ldots$ niceliklerı yük dağılımının *döngüleri* dediğimiz niceliklere bağlanırlar. Bu dili kullanarak yalnız net yükü veren K_0 niceliğine *tekkutup (monopol) döngüsü* diyeceğiz. K_1 ise yük dağılımının *ikizkutup (dipol)* döngüsünün bir bileşenidir. İkizkutup döngüsünün boyutu *yük çarpı yerdeğiştirmeğe eşittir* ve bu yöngüsel bir niceliktir. K_1 niceliği bu yöngünün z bileşeni olur.

* Kaynağın bir takım *çoklukutuplara* ayrıltırılmasının yalnız yük dağılımının özelliklerine bağlı olduğu gösterilebilir. Başka bir deyimle, eğer bütün çoklu kutupların yeğinliklerini bilyorsak, "ilke olarak" (x', y', Z')'yü elde edebiliriz. Bu çok yararlı değil. Kuadrupoller ve daha yukarı döngüler, yöngüsel değil daha karışık yapılardır.

Üçüncü K_2 sabiti yapının dördüzkutup (kudrupol) döngüsü, ondan sonra gelen *sekizli (oktupol)* kutup döngüsü olur ve bu böyle gider.*

Yük dağılımını böyle bir döngüler zinciri ile anlatımın üstünlüğü, dağılımın uzak bir noktadaki alanını belirleyen yanını ortaya koymasıdır. Eğer bir yük dağılımının hemen yakınında bulunan elektrik alanı ile ilgilense idik yaptığımız verimsiz bir uğraşı olurdu. Ana çabamız olan, dielektriğin içinde ne olduğunu anlama uğraşımız bakımından molekül yapı taşlarının yalnız tekkutup ve ikizkutup döngülerinin önemli olduğu ortaya çıkmıştır. Bütün öteki döngüleri bilmezlikten gelebiliriz. Ve eğer bu yapı taşları ılın iseler, ele alacağımız yalnız bunların ikizkutup döngüleri olacaktır.

9.3 İkizkutbun Elektriksel Gerilimi ve Alanı

Konumluk başlangıcından r uzaklıkda bir A noktasındaki gerilime ikizkutbun katkısı

$(1/r^2)\int r' \cos\theta\, \rho\, dv'$. ile verilmiştir. Burada $\mathbf{r}'$ 'nün A'ya giden doğrultu üzerindeki izdüşümü olan $r' \cos\theta$ 'yı $\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}'$ şeklinde yazabiliriz. Böylece herhangi bir eksene bağlı kalmaksızın gerilim

$$\varphi_A = \frac{1}{r^2}\int \hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}' \rho\, dv' = \frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2} \cdot \int \mathbf{r}' \rho\, dv' \qquad (9)$$

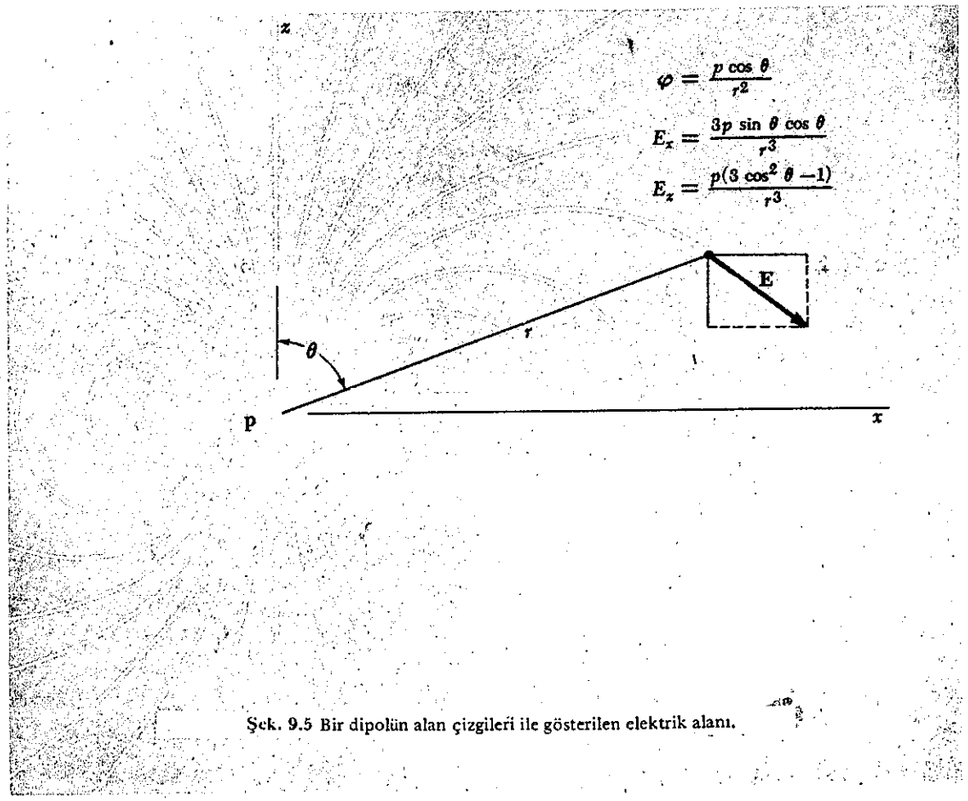
yazılır; bu herhangi bir noktadaki gerilimi bulmamıza yarayan bir yazımdır. Denk. 9'un sağ yanındaki tümlev, yapının ikizkutup döngüsüdür. Bu açıkca görüldüğü gibi boyutu *yük çarpı uzaklık* olan bir yöngüdür. ve bunu $\mathbf{p}$ ile göstereceğiz:

$$\mathbf{p} = \int \mathbf{r}' \rho\, dv' \qquad (10)$$

Bu $\mathbf{p}$ döngüsünü kullanarak Denk. 9'u

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{p}}{r^2} \qquad (11)$$

yazabiliriz.



Şek. 9.5 Bir dipolün alan çizgileri ile gösterilen elektrik alanı.

Elektrik alanı bu gerilimin eksi bayırgısına eşittir. Dipol alanının ne biçimde olduğunu görmek için konumluk başlangıcına z doğrultusunda yönelmiş bir **p ikizkutup döngüsü** yerleştirdiğimizi düşünelim (Şek. 9.5) Bu düzenlenişe göre,

$$\varphi = \frac{p \cos\theta}{r^2} \qquad (12)$$

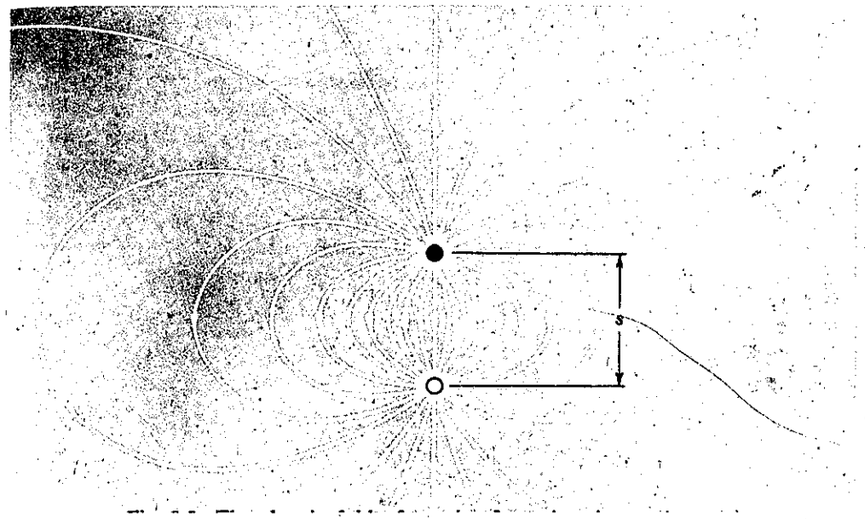
olur. Gerilimin ve alanın z-ekseni yöresinde bakışımlı oldukları açıktır. Şimdi xz düzlemi içinde çalışalım; burada $\cos\theta = z/(x^2 + z^2)^{1/2}$ dir. O halde bu düzlem içinde

$$\varphi = \frac{pz}{(x^2 + z^2)^{3/2}} \qquad (13)$$

olur. Buradan hemen elektrik alanının bileşenlerini türetebiliriz:

$$E_x = -\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{3pxz}{(x^2 + z^2)^{5/2}} = \frac{3p \sin\theta \cos\theta}{r^3}$$

$$E_z = -\frac{\partial\varphi}{\partial z} = p\left[\frac{3z^2}{(x^2 + z^2)^{5/2}} - \frac{1}{(x^2 + z^2)^{3/2}}\right] = \frac{p(3\cos^2\theta - 1)}{r^3} \qquad (14)$$



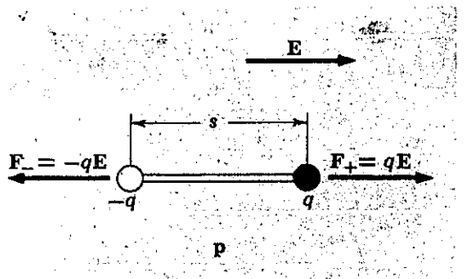
Şek. 9.6 Eşit ve zıt imli bir çift nokta yükün elektrik alanının, uzakta bulunan noktalarda bir **ikizkutup alanı ile gösterilebilir.**

İkizkutuptan çıkarak herhangi bir doğrultuda ilerleyecek olursak, elektrik alan yeğinliğinin beklediğimiz gibi $1/r^3$ ile oranlı olarak azaldığını görürüz. z ekseni boyunca alan **p ikizkutup döngüsü** ile oranlıdır, ve değeri $2p/r^3$'e eşittir. Ekvator düzlemi içinde ise, alan **p**'ye koşut zıt doğrultudadır ve değeri $-\mathbf{p}/r^3$'e eşittir.

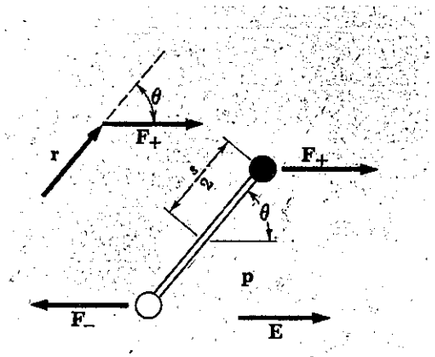
Bu alan size daha önce rasladıklarınızdan birini anımsatabilir. İletken bir yaprağın üst yanında bulunan nokta yükle bunun "görüntü yükünü" anımsayın. Dipol döngülü en yalın yapı s aralığı ile duran, $-q$ ve $+q$ gibi iki yükün oluşturduğu yük dağılımıdır. Bir nokta yükler dizgesi halinde Denk. 10 bir toplam şekline girer. Ele aldığımız nokta yük çiftinin döngüsü tam qs.'dir ve döngü yöngüsü eksi yükten artı yüke doğru yönelmiştir. Şek. 9.6'da bu yük çiftinin alanını çizmemizin nedeni, yüklerin yakınlarında alanın **ikizkutbunki** ile aynı *olmadığını* belirtmek içindir. Bu yük dağılımının bir çok, aslında sonsuz sayıda **çokkutuplu döngüleri** var, ve bu yüzden yalnız "uzak alan" yani $r \gg s$ uzaklıkları için alan bir dipol alanı olarak gösterilebilir. Tam başlangıç noktasında, tam bir dipol alanı uyarabileceği için, s'nin sıfıra doğru büzülmesini sağlarken q'yü sınırsız büyütmek gerekir ki, $p = qs$ sonlu kalabilsin. Bu çok ayrıklı soyutlama öylesine ilginç değildir. Molekül içi yük dağılımlarının, yakın alanlar halinde çok karışıklıklara yol açacağını bildiğimiz için, yakın bölgeyi nasıl olsa kolay gösterimleyemeyiz. Ama buna gerek de olmayacaktır

9.4 Bir Dış Alanda Bulunan Bir İkizkutba (Dipole) Etkiyen Kuvvet ve Kuvvet Döngüsü

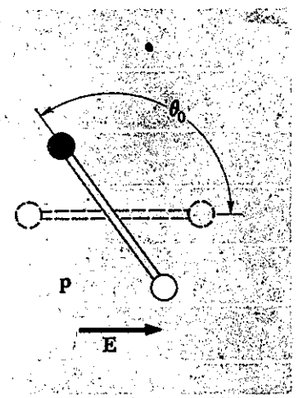
Mekaniksel olarak birbirine bağlı q ve $-q$ gibi iki yükün s aralığının **değişmediğini** düşünelim. Bunun için s uzunluğunda yalıtkan kısa bir çubuğun uçlarına tutturulmuş yükler **taslamını** alabilirsiniz. Bu düzeneğin p dipol **döngüsü** yalnızca qs.'dir. Bu dipolü bir dış elektrik alanı, yani başka kaynakların uyardığı bir elektriksel alan içine koyalım. Şimdi **ikizkutbun** kendi alanı ile ilgilenmiyoruz. Önce Şek. 9.7*a*'da olduğu gibi biteviye bir elektrik alanı ele alalım. Dipolün artı ucu sağa doğru, eksi ucu ise



Şek. 9.7 (a) Biteviye bir alan içinde bulunan bir ikizkutup



(b) İkizkutba etkiyen kuvvet döngüsü $\mathbf{N} = \mathbf{p} \times \mathbf{E}$'dir; $\mathbf{N}$ şekil yüzeyine dik ve arkaya doğru giden bir yöngüdür.



(c) İkizkutbun alana koşut doğrultudan şekilde gösterilen doğrultuya çevirmek için yapılması gereken iş $pE(1-\cos\theta_0)$ 'dır.

sola doğru Eq.'lük bir kuvvetle çekilir. Cisme etkiyen net kuvvet sıfır olduğu gibi bu konumda döndürücü döngü de sıfırdır. Alan doğrultusu ile Şek. 9.7*b*'de olduğu gibi bir θ açısı yapan bir ikizkutup görüldüğü gibi, bir kuvvet momenti etkisinde kalır. Genel olarak $\mathbf{N}$ kuvvet **döngüsü** $\mathbf{r} \times \mathbf{F}$'dir, burada $\mathbf{F}$, konumluklar başında $\mathbf{r}$ uzaklığında etkiyen kuvveti göstermektedir (Cilt I, Böl. 6). Baş noktayı ikizkutbun merkezinde alırsak $r = s/2$olacak ve

$$\mathbf{N} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}_+ + (-\mathbf{r}) \times \mathbf{F}_- \qquad (15)$$

bulunacaktır. Burada $\mathbf{N}$ şekil düzlemine dik bir yöngüdür, ve büyüklüğü

$$N = \frac{s}{2} Eq \sin\theta + \frac{s}{2} Eq \sin\theta$$

$$= sqE \sin\theta = pE \sin\theta \qquad (16)$$

dır. Buna göre **kuvvet döngüsü** yalınca

$$\mathbf{N} = \mathbf{p} \times \mathbf{E} \qquad (17)$$

şeklinde yazılabilir.

Şek. 9.7*a* daki **ikizkutup** yönelişi ile en alçak enerji değerini alır. Onu başka bir konuma döndürmek için iş görmek gerekir. Dipolü alana koşut doğrultudan, Şek. 9.7*c*'de görüldüğü gibi farklı bir θ_0 açısı kadar çevirmek için gerekli işin ne olduğunu hesaplayalım. **İkizkutbu** küçük bir $d\theta$ açısı kadar döndürmek $N\,d\theta$. kadar iş ister. Buna göre görülecek toplam iş

$$\int_0^{\theta_0} N\,d\theta = \int_0^{\theta_0} pE \sin\theta\,d\theta = pE(1 - \cos\theta_0) \qquad (18)$$

olacaktır. İkizkutbun yönelişini büsbütün ters çevirip kutuplarına yer değiştirtmek $\theta_0 = \pi$ açısına rastlar ve bu $2pE$'ye eşit bir iş ister.

Bir ikizkutba *biteviye* bir alan içinde etkiyen net kuvvet, açıkca görüldüğü gibi, yönelişi ne olursa olsun sıfırdır. Biteviye olmayan bir alan içinde ise onun iki ucuna etkiyen kuvvetler, genel olarak, tam eşit ve zıt yönde olmayacak, ve bu yüzden cisme etkiyen bir net kuvvet kalacaktır. Bunun yalın bir örneği, bir Qnokta yükünün alanındaikizkutbun bulunmasıdır.Şek. 9.8*a*'da görüldüğü gibi ışınsal doğrultuda ve artı ucu artı Q yükü yanında bulunacak şekilde durursa, net kuvvet dışa doğru

$$F = (q)\frac{Q}{r^2} + (-q)\frac{Q}{(r+s)^2} \qquad (19)$$

değerinde olacaktır. $s \ll r$ hali için, bu kuvveti s/r cinsinden birinci basamağa kadar dizi halinde açmakla yetinebiliriz ki, bu da

$$F = \frac{qQ}{r^2}\left[1 - \frac{1}{\left(1 + \frac{s}{r}\right)^2}\right] \approx$$

$$\frac{qQ}{r^2}\left[1 - \frac{1}{1 + \frac{2s}{r}}\right] \approx \frac{2sqQ}{r^3} \qquad (20)$$

verir. Bu kuvvetin $p$ikizkutbu cinsinden değeri yalınca,

$$F = \frac{2pQ}{r^3} \qquad (21)$$

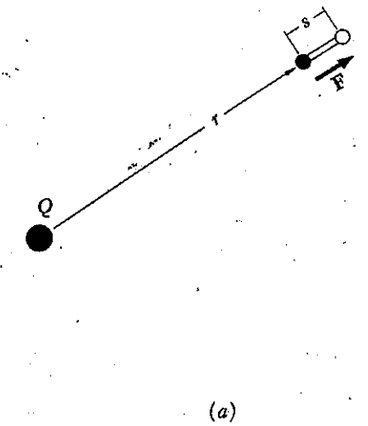
dür.

Şek. 9.8*b*'de olduğu gibi alanla açı yapanikizkutup halinde de bir kuvvet bulunur.Çünkü bu halde ikizkutbun uçlarına etkiyen kuvvetler eşit olsalar da tam koşut ve zıt yönlü değillerdir.

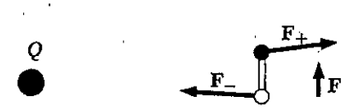
Biteviye (düzgün) olmayan bir elektrik alanı içindeki dipole etkiyen kuvveti veren genel bir yazım elde etmek güç değildir. Kuvvet aslında alanın çeşitli bileşenlerinin bayırgılarına bağlıdır. Momenti $\mathbf{p}$ olan ikizkutba etkiyen kuvvetin x bileşeni genel olarak

$$F_x = \mathbf{p} \cdot \text{bayır}\, E_x \qquad (22)$$

dır, ve öteki F_y ve F_z bileşenleri için de benzer eşitlikler yazılabilir.



(*a*)



(*b*)

Şek. 9.8 Biteviye olmayan bir alan içinde bulunan bir ikizkutba etkiyen kuvvet. (a) Bu konumda ikizkutba etkiyen net kuvvet ışınsal doğrultuda ve dışa doğrudur. (b) Bu halde ona etkiyen net kuvvet yukarı doğrudur.

9.5 Atom ve Molekül İkizkutupları: İrgitim İkizkutup Döngüleri

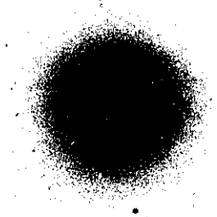
Bir atomun ya da bir molekülün yük dağılımını anlatırken, kuantum mekaniğine uyan bir dizgeyi klâsik terimlerle anlatmak zorunda kalacağız. Bundan başka, içindeki parçacıklar bir anlamda sürekli devinimde bulunan bir yapıyı durgun bir yapı imiş gibi işleyeceğiz. Dersin daha ilerisinde Cilt IV'de kuantum mekaniğinin, tasarlamaya çalıştığımız bu modeli çürütmedikten başka onu destekleyeceğini göreceğiz.

Şimdi, atomların en yalını olan ve bir çekirdek ile bir tek elektrondan oluşan hidrojen atomunu ele alalım. Eksi yüklü elektron, artı çekirdek çevresinde, güneşin gezegenleri gibi dolandığını tasarlayacak olursanız, (Niels Bohr'un ilk atom taslamı), bundan atomun herhangi bir anda bir elektrik ikizkutup döngüsü olması gerektiği sonucunu çıkarırsınız. *Bunun p ikizkutup döngüsü elektron-proton ışınsal yöngüsüne koşut yönelmiştir, ve büyüklüğü, e kez elektron-proton uzaklığına eşittir.* Elektron yörüngesi üzerinde dolandıkça bu yöngünün doğrultusu hızla değişir. Hidrojen atomunun **p** momentinin *zaman içindeki ortalamasının*, dairesel yörünge için sıfır olacağını kesin olarak söyleyebiliriz; ama periyodlu olarak değişen dipol döngüsü bileşenlerinin hızla titreşen elektrik alanlarına ve elektromıknatısal ışımaya yol açmasını beklemeliyiz. Normal hidrojen atomunda böyle ışımaların olmayışı, kuantum fiziğinin ilk biçiminin büyük çelişkilerinden biri idi. Çağdaş kuantum mekaniği evrendeki hidrojen atomlarının en aşağı enerji halinde bulunan büyük çoğunluğunun küresel bakışım gösteren bir yapıda olduğunu yani elektron yük dağılımının zaman içinde ortalamasının çekirdeği saran bir yük bulutu halinde bulunduğunu söyler. Yani bu görüşe göre atom içinde dolanan ya da titreşen bir şey yoktur. Eğer 10^{-16} s'den daha kısa süreli bir anlık resim çekebilseydik, çekirdekten belli bir uzaklıkta bir elektron bulunduğunu seçebilirdik. Ama bundan çok daha uzun süren olaylar işe karışınca, bunların tüm etkisi, çekirdeği saran eksi yükün, sürekli bir dağılım halinde görünmesine ve çekirdekten dışa doğru gidince her yönde sürekli olarak azalan bir yoğunluk göstermesine yol açar. Bu dağılımdaki toplam yük tam $-e$ tutarında, yani bir elektronun yükü tutarındadır. Bunun kabaca yarısı, 0,5 angström ($0{,}5 \times 10^{-8}$ cm) yarıçaplı bir kürenin içinde kalır. Dışa doğru gittikçe yoğunluk üstel bir işlev halinde azalır; yarıçapı 2,2 angström olan bir küre yükün yüzde 99'unu içine alır.

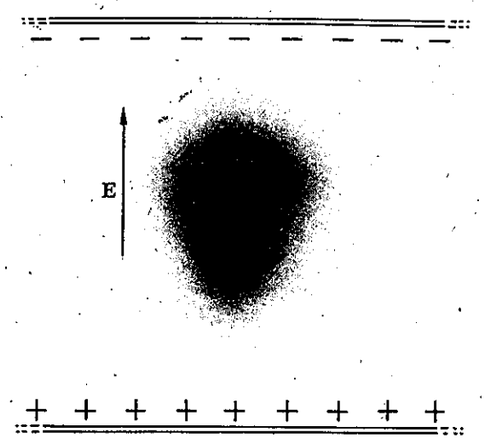
Başka atomlar ve moleküller için de benzer bir taslam almak yapabileceğimiz en iyi iştir. Moleküller içindeki çekirdekleri bir takım nokta yükler gibi alabiliriz; bu andaki işimiz için bunların boyutu bizi rahatsız etmeyecek ölçüde küçüktür. Bir molekülün tüm elektriksel yapısı, yoğunluğu sürekli olarak değişen eksi bir tek yük bulutu halinde tasarlanmalıdır. Bu bulutun biçimi ve yük yoğunluğunun bunun içindeki değişimi kuşkusuz ayrı moleküller için ayrı olacaktır. Ama bulutun sınırları üzerinde yoğunluk her zaman üstel bir işlev halinde azalacak, böylece molükülsel yük yoğunluğunun büyüklüğü ya da biçimi üzerinde konuşmanın bir anlamı olabilecektir

Şekil 9.9 normal H atomunda yük bulutu dağılımını göstermektedir. Bu şekil, küresel bakışımlı bulutun gölge halinde gösterilen yoğunluğunun bir kesitidir. Açıkca görüldüğü gibi böyle bir dağılımın dipol döngüsü sıfırdır. Aynı şey kaç elektronu olursa olsun en alçak enerji halinde bulunan herhangi bir atom için de doğrudur, zira bütün bu gibi hallerde elektron dağılımı küresel bakışım göstermektedir. Aynı şey iyonlanmış bir atom için de, böyle bir atomun tekkutup döngüsü bulunduğu halde yine doğrudur.

Buraya dek pek ilginç bir şey söylemedik. Ama şimdi bu hidrojen atomunu Şek. 9.10'da görüldüğü gibi, bir dış kaynağın uyardığı bir elektriksel alan içine koyalım. Elektrik alanı atomun eksi yükünü aşağı ve artısını yukarıya sürerek atomun biçimini bozar, ve artı yüklerinin "ağırlık merkezi" ile eksi yüklerin ki artık bir yere düşmeyeceği için bir ikizkutup döngüsü doğar.



Şek. 9.9 Olağan hidrojen atomunda yük dağılımının zaman içindeki ortalaması. Gölgeleme elektronun eksi yük yoğunluğunu gösterir.



Şek. 9.10 Bir elektrik alanı içinde eksi yükler bir yönde artı çekirdek ise zıt yönde sürülür. Denge sağlanınca atom hafifce şekil değiştirmiştir.

Hidrojen atomu için, şu andaki işimizi görecek yaklaşık bir taslam kullanarak, bu atomda beklediğimiz biçim değişikliğinin ne ölçüde olduğunu büyüklük basamağı bakımından kestirebiliriz. Bunun için elektrik alanı dışında iken bütün eksi e elektrik yükünün a yarıçaplı bir küre içine sabit yoğunlukla dağılmış olduğunu ve bu küre dışında yoğunluğun sıfır olduğunu varsayalım. Şek. 9.9'daki gerçek yük dağılımı yerine aldığımız bu kaba taslam Şekil 9.11'de çizilmiştir. Şimdi atoma bir **E** alanı uygulanırsa, bu alanın eksi yükü, biçimine ve yoğunluğuna zarar vermeden çekirdeğe göre biraz kaydırdığını, şöyle ki, çekirdeğin bu kez kürenin merkezinden b gibi bir uzaklığa düştüğünü düşünelim (Şek. 9.12). Denge halinde, çekirdeğe **E** alanının etkilediği yukarıya yönelmiş eE kuvvetininin, bu çekirdeği, merkeze çekmeğe çalışan ve eksi yük bulutundan gelen aşağı yönelmiş kuvvetle dengelenmesi gerekir. Bu son kuvvetin büyüklüğünü bulmak için, küresel yük dağılımı içinde ve merkezden b cm uzakta bulunan bir noktadaki elektrik alanının, yarıçapı b olan kürenin içinde kalan yüklerden ileri gelen alan olduğunu anımsayalım. Bu halde b yarıçaplı kürenin içinde kalan yük tutarı $(b/a)^3 e$'ye eşittir, zira yarıçapı a olan tüm küre içinde kalan yük tutarı e 'dir. Buna göre çekirdeğin bulunduğu yerde elektron bulutunun uyardığı alan $(1/b^2)e(b/a)^3$ veya eb/a^3 olur. Bu alan yeğinliğini uygulanan E alanına eşit yazacak olursak denge koşulunu elde ederiz:

$$E = \frac{eb}{a^3} \qquad \text{buradan da} \qquad b = \frac{a^3 E}{e} \tag{23}$$

İyi bir yaklaşıklıkla a için kabaca 1 angström ya da 10^{-8} cm alalım. Bu yarıçapta bir kürenin gerçek yük dağılımının büyük bölümünü kapsayacağını belirtmiştik. E için 100 statvolt/cm yani 30000 volt/cm alalım ki bu, laboratuvarlarda oldukça kuvvetli bir alandır. Buna göre Denk. 23'den b'nin değerini

2×10^{-13} cm buluruz. Biçim değişikliği çok azdır. Yer değiştirme atom yarıçapının yaklaşık olarak 10^{-5} 'i kadardır, yani çekirdek yarıçapından pek büyük değildir. Bundan doğan elektrikikizkutup *eb* olur ki, bu taslama göre, uygulanan alan ile ikizkutup döngüsü arasındaki bağıntı,

$$p = eb = a^3E \qquad (24)$$

dır. ikizkutup döngüsü yukarıya yönelmiştir, yani, bu döngü elektrik alanına koşut bir yöngüdür.

Bu ikizkutup döngüsünün uygulanan alanla doğru oranlı olduğunu gözden kaçırmayın. Bunun gerçek bir atom halinde de hiç değilse küçük biçim bozulmaları için doğru olmasını bekleyebiliriz; hesaplarımız, ölçülü bir alanın bir atomun biçimini çok az bozacağını anlatır. Herhangi bir atom bu yolla kutuplanabilir. Buna $\mathbf{E}$ elektrik alanının irgitimle oluşturduğu İkizkutup döngüsü deriz. Böyle oluşan bütün döngüler için $\mathbf{p}$'nin $\mathbf{E}$ ile oranlı olduğunu görürüz:

$$\mathbf{p} = \alpha\mathbf{E} \qquad (25)$$

Buradaki α sabiti atomun bir özelliğini belirler ve adına *atomsal kutuplanma yatkınlığı* denir.

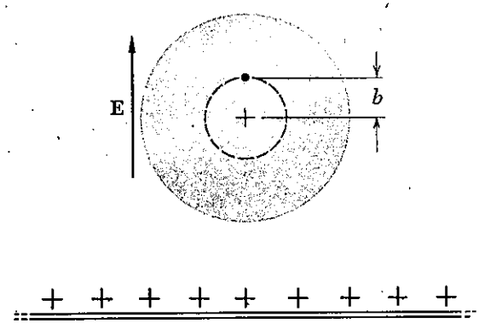
Hidrojen atomu modelimiz için α kutuplanma yatkınlığı a^3 'e eşittir. α 'nın bir oylum boyutunda olduğuna bakınız. Hidrojen atomunun kutuplanma yatkınlığı için kuantum mekaniğine göre yapılan tam bir hesap $\alpha = (9/2)a_0^3$ değerini verir; burada a_0 "Bohr yarıçapı"dır ve taban halinde bulunan hidrojen atomu için değeri $0{,}52 \times 10^{-8}$ cm gibi belirleyici bir uzaklıktır. Birçok atom türü için deneyle bulunan elektriksel kutuplanma katsayıları Çizelge 9.2'de verilmiştir. Verilen örnekler artan elektron sayısına göre düzenlenmiştir.

Çizelge 9.2 10^{-24} cm³ birimleri cinsinden atomların kutuplanabilme katsayıları

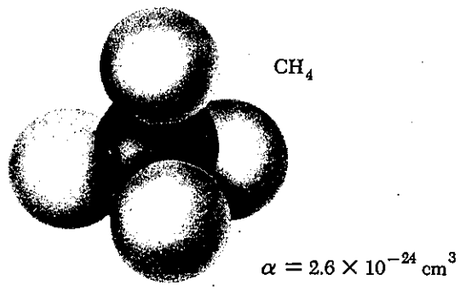
Elementler	H	He	Li	Be	C	Ne	Na	A	K
$\alpha =$	0,66	0,21	12	9,3	1,5	0,4	27	1,6	34



Şek. 9.11 Kaba bir atom taslamı Eksi yük yarıçapı a olan ve merkezi çekirdek üzerinde bulunan bir küreyi biteviye doldurmaktır.



Şek. 9.12 Dış alan içinde denge hali kurulunca çekirdek ve eksi küresel yük dağılımının merkezi b kadar ayrı düşerler.



Şek. 9.13 Dört hidrojen ve bir karbon atomundan oluşan metan molekülü.

Değişik elementlerin α değerlerinin ne denli geniş sınırlar arasında değiştiğini gözden kaçırmayın. Eğer elementlerin Periyotlar Çizelgesini tanıyorsanız, burada dizgeli bir durum bulunduğunu sezebilirsiniz. Hidrojen ile lityum, sodyum ve potasyum gibi Periyotlar Çizelgesinde birinci sütunu alan alkali metal elementlerinin α değerleri büyüktür ve bu sayı bu atomların artan atom numarasına göre hidrojenden potasyuma doğru büyür. Soy gazların atomsal kutuplanma yatkınlıkları çok daha küçüktür, ama bu sınıfın içinde de helyumdan neona ve kriptona doğru gittikçe katsayının büyüdüğü görülür. Anlaşıldığına göre alkali atomlar bir sınıf olarak elektrik alanı içinde biçimi kolayca bozulabilen atomlardır; oysa soy gaz atomlarının elektron yapısı çok daha sağlamdır. Alkali atomların kolayca kutuplanabilmeleri, atom yapısına gevşek şekilde bağlanmış olan dış ya da "valans" elektronu yüzündendir.

Bir molekülde de, bir elektrik alanı uygulandığında, irgitimle ikizkutup döngüsü oluşur. Şek. 9.13'de gösterilen metan molekülü, merkezdeki karbon atomunun çevresinde, bir eşkenar dört yüzlünün köşelerinde yerleşmiş bulunan dört hidrojen atomundan oluşmuştur. Bu cismin deneyle ölçülen elektriksel kutuplanma yatkınlığı,

$$2{,}6 \times 10^{-24}\ \text{cm}^3$$

dır. Bu sayıyı, bir karbon atomunun ve ayrı ayrı alınan dört hidrojen atomunun kutuplanma yatkınlıkları toplamı ile karşılaştırmak ilgi çekicidir. Denel verileri çizelge 9.2'den alarak $\alpha_C + 4\alpha_H = 4{,}1 \times 10^{-24}$ cm³ buluruz. Atomların bir molekül içinde bağlanmalarının bunların elektronsal yapısında bir değişikliğe neden olduğu açıktır. Atomların ve moleküllerin kutuplanma yatkınlıklarının ölçülmesi, uzun zamandan beri, kimyacılar tarafından molekül yapısını anlama yolunda bir ip ucu olarak kullanılır.

9.6 Kutuplanırlık Gergisi (Tensoru)

Moleküllerin atomlardan daha az bakışımlı oluşu bir zorunluktur. Bu durum, irgitimle oluşan bir ikizkutup döngüsünün, oluşturan elektriksel alan ile koşut olmayabilmesine yol açar. Karbondioksit molekülünü alınız. Bu, atomları Şek. 9.14*a*'da görüldüğü gibi "yaprak purosu" biçimli bir moleküldür. Bu elektron yapısının, boyuna ve enine yönelmiş biçim değişikliklerine karşı aynı ölçüde sert davranmasını görmek şaşırtıcı olurdu. Genel olarak molekülün eksenine koşut uygulanmış bir elektrik alanının oluşturduğu ikizkutup döngüsünün molekül eksenine dik doğrultuda uygulanmış ayn yeğinlikte alanın oluşturduğu döngüden farklı olmasını beklemeliyiz. Gerçekten CO_2 molekülü, eksenine koşut uygulanmış bir alan etkisi için gözlenen kutuplanma yatkınlığı 4,05 X 10^{-24} cm³ olduğu halde, dikine bir alan için bu sayının yarısından biraz daha küçüktür. Molekülün $\alpha_\parallel$ ve $\alpha_\perp$ ile gösterebileceğimiz iki kutuplanma yatkınlığı var. Şek. 9.14*b*'de görüldüğü gibi başka doğrultuda bir alan uygularsak ne olur? Bunu kestirmek kolaydır. Çünkü burada uğraştığımız çizgisel bir olaydır (neden ile sonuç doğru oranlı) ve üstüste gelme ilkesi işleyebilir*. $\mathbf{E}$ elektrik

* Biz çizgisel (yani atomları bir çizgi boyunca dizilmiş moleküllerle de uğraşırız. Her iki kullanımda *çizgiselin* tümcek ayrı anlamları vardır.

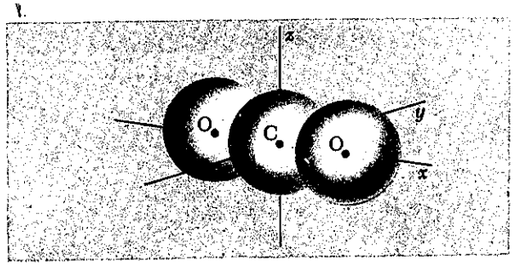
alanını biri molekül eksenine koşut öteki dik olmak üzere iki bileşene ayırabiliriz. $E_\parallel = E\cos\theta$ ve $E_\perp = E\sin\theta$. Bu alan bileşenlerinin ayrı ayrı uygulandıklarını ve oluşan döngü yöngülerinin bileşkesinin alındığını düşünebiliriz. $E_\parallel$ alanı molekül ekseni boyunca $p_\parallel = \alpha_\parallel E_\parallel = \alpha_\parallel E\cos\theta$ gibi bir döngü oluşturur. $E_\perp$ ise, eksene dik bir döngü oluşmasına yol açar: $p_\perp = \alpha_\perp E\sin\theta$. Bunlar birleşerek **E** alanının irgitlediği **p** döngüsünü oluştururlar. Eğer $\alpha_\parallel \neq \alpha_\perp$ ise **p** döngüsü **E** alanına koşut değildir. Döngü kolay kutuplanma doğrultusuna daha yatık olur. (Bu davranış için mekaniksel bir benzerlik düşünebilir misiniz?)

Bu yalın örnek, molekülsel kutuplanma yatkınlığının, yalın bir sayı, bir sayıl nicelik değli, amia, bir yöngünün, buradaki örneğimizde **p** yöngüsünün bileşenlerinin, başka bir yöngünün, **E** yöngüsünün bileşenlerine çizgisel biçimde bağlı olduğunu anlatan bir katsayılar kümesi olduğunu gösterir. Böyle bir katsayılar kümesine bir *gergi* (tensor) denir. Bu çeşit en genel bir bağıntı, 9 katsayı işe karıştırır ki, bunlar şöyle yazılabilir.

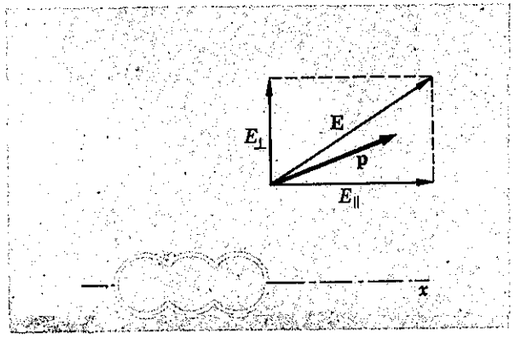
$$\begin{aligned} p_x &= \alpha_{xx}E_x + \alpha_{xy}E_y + \alpha_{xz}E_z \\ p_y &= \alpha_{yx}E_x + \alpha_{yy}E_y + \alpha_{yz}E_z \\ p_z &= \alpha_{zx}E_x + \alpha_{zy}E_y + \alpha_{zz}E_z \end{aligned} \qquad (26)$$

Böylece tanımlanan 9 tane α sayısı kutuplanma gergisi diye bilinen niceliği oluştururlar.

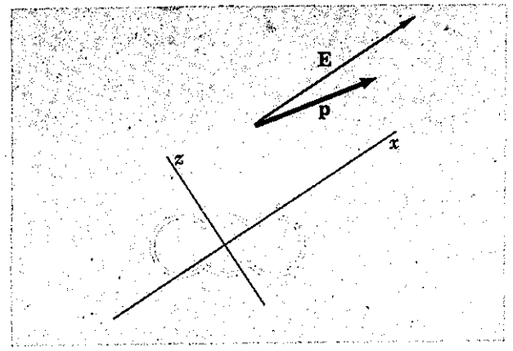
Karbondioksit molekülü örneğinde x eksenini molekül ekseni boyunca yöneltecek olursak, katsayılar $\alpha_{xx} = \alpha_\parallel$; $\alpha_{yy} = \alpha_{zz} = \alpha_\perp$ olur ve öteki altı katsayı sıfırdır. Konumluk ekseni olarak başka bir doğrultu, diyelim molekül ekseni ile 30°'lik açı yapan bir doğrultu seçseydik, Şek. 9.14*c*'de olduğu gibi, x doğrultusundaki bir **E** alanı, z doğrultusunda bir bileşeni olan bir **p** ikizkutup döngüsü oluşturdu. Böylece α_{xz} sıfır olamazdı. (Bir döngünün değerinin ne olduğunu bulabilmek için **E** alanını molekül eksenine koşut ve dik bileşenlerine ayırıp bu bileşenlerin oluşturdukları kutuplanmayı bulur ve sonra bileşkenin z bileşenini alırdık.) Böylece kutuplanma gergisinin ögeleri konumluk eksenleri-



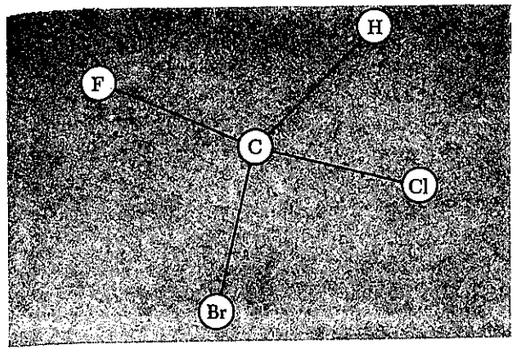
Şek. 9.14 Karbondioksit molekülü eksenine koşut doğrultuda eksene dik doğrultudan daha kolay kutuplanır.



(b) Bu demektir ki, uygulanan alanın $E_\parallel$ bileşeni $E_\perp$ bileşeninden daha etkilidir.



(c) Bu nedenle irgitimle oluşan **P** kutuplanması uygulanan **E** alanına koşut değildir.



Şek. 9.15 Hiç bir bakışım göstermeyen Bromoklorofluoro metan molekülü. Bu üç farklı halojen atomunun hidrojenler yerine geçmesi ile oluşan bir metan molekülüdür. Molekül içindeki bağ boyları ve düzgün dört yüzlünün kıyılarının hepsi biraz değişiktir.

nin yönelmesine bağlı olacaktır. Bunlar konumluk eksenlerinin çevrilmesi ile öyle dönüşürler ki, **E** yöngüsü ile **p** yöngüsü arasındaki bağıntı değişmezliğini koruyabilsin, Bu bağıntı yalnız **E** doğrultusunun molekülün fiziksel eksenine göre nasıl yöneldiğine bağlı olabilir ve bizim x, y ve z eksenlerini nasıl yönelttiğimizle bir ilgisi yoktur. Biz burada gergi katsayılarının hangi kurallara göre dönüştüklerini işleyecek değiliz. Bunlar bir yöngü bileşenlerinin dönüşüm kurallarına benzerler. Bunun en az bir uğraşma ile nasıl yürütülebileceğini görmek isterseniz, Prob. 9.23-de iki boyutlu bir hal için verilen örneği işleyebilirsiniz.

Kutuplanma gergisi α 'nın dokuz katsayısında yalnız altısı bağımsızdır. Bunlardan $\alpha_{xy}=\alpha_{yx}$ $\alpha_{xz} = \alpha_{zx}$ ve $\alpha_{yz} = \alpha_{zy}$ olduğu tanıtlanabilir. Başka bir deyişle, dokuz sayıdan oluşan kare ağı "sağ aşağı" köşegene göre hep bakışımlıdır. Gerginin bakışımlı oluşu, üzerinde durup düşünülmesi gereken en ilginç bir özellik anlatır. Bunun anlamı odur ki, x doğrultusunda uygulanan **E** alanının yol açtığı kutuplanmanın z bileşeni, z doğrultusunda uygulanan eşit bir alanın yolaçtığı kutuplanmanın x bileşenine her zaman tam olarak eşit çıkar. Eğer bu dediğimizin, tanıt istemeyecek kadar açık olduğunu düşünüyorsanız, bunun Şek. 9.15'de görülen molekülde olduğu gibi, hiç bakışım göstermeyen moleküller için bile doğru olması üzerinde durunuz. Bu daha önce Kes. 7.7'de tanıtladığımız karşılıklı irgitim katsayısının eşitliğindeki gibi bir karşılıklı oluş özelliğidir ve yalın bir geometrik bakışımdan değil daha genel bir kaynaktan gelmektedir. Bunun nasıl tanıtlanacağını merak ederseniz Prob. 9.22 buñu size gösterecektir.

Bu α katsayısının bakışımlı oluşunun önemli bir sonucu eksenleri molekül çatkısına göre o şekilde yöneltmenin mümkün olduğudur ki, "köşegen" dışındaki α_{xy} vb katsayıları her zaman sıfır olsunlar. Bu konumluklar içinde molekülün kutuplanma yatkınlığı üç tane α_{xx}, α_{yy}, α_{zz} sayısı ile tam olarak anlatılabilir. Bu dediklerimiz hiç bir bakışım göstermeyen moleküller için bile doğrudur. Bu olguları dielektrikler üzerindeki bu sınırlı incelememiz sırasında kullanacak değiliz. Bunlar moleküllerin optik özelliklerinin incelenmesi bakımından çok önemlidir ve bu günün fizikçilerinden çok kimyacılarının uğraştığı konulardır. Kutuplanma gergisi ile konudan ayrılmamızın temel nedeni gözönünde kolayca canlandırılabilir bir örnek yardımı ile bir gerginin yapısını tanıtmaktadır.

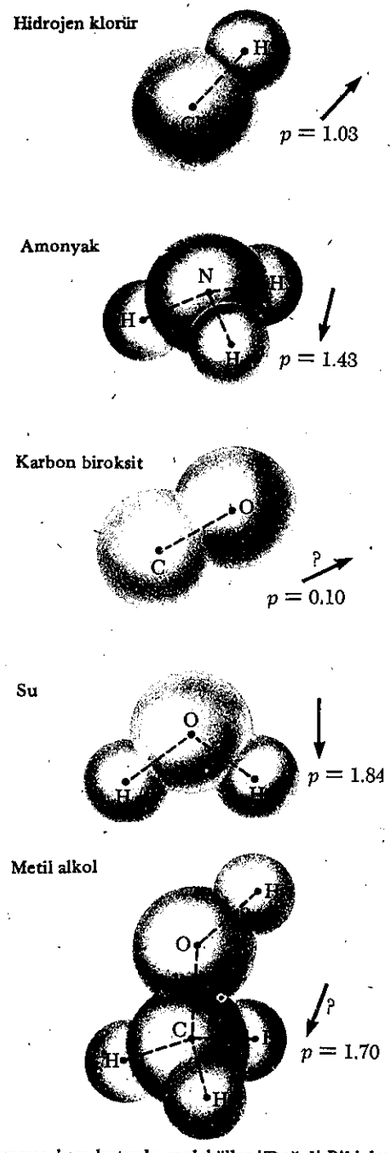
9.7 Doğal İkizkutup (Dipol) Döngüleri

Bazı moleküller yapıları gereği elektrik alanı yokken de doğal bir ikizkutup döngüleri vardır. Bu moleküller olağan hallerinde de bakışımlı değildirler. Şek. 9.15'de görülen molekül bunun bir örneğidir. Bunun daha yalın bir örneği, HCl klorlu hidrojen gibi, farklı iki atomdan oluşmuş bir moleküldür. Bu molekülün ekseni üzerinde, molekülün öne veya arkaya doğru bakışımlı olabileceği bir nokta yoktur; molekülün iki ucu fiziksel olarak farklıdır. Böyle bir kuruluşta artı yüklerin "ağırlık merkezi" nin eksi yüklerinki ile eksen üzerinde aynı bir noktaya düşmesi büyük bir raslantı olurdu. Başlangıçta küresel bakışım gösteren H ve Cl atomları HCl molekülünü kurarken, hidrojen atomunun elektronu, bir bölüğü ile klor üzerine giderek hidrojen çekirdeğini yarı çıplak bırakacaktır. Böylece molekülün hidrojen ucunda bir artı yük fazlalığı, klor ucunda ise

buna uygun tutarda eksi yük fazlalığı bulunur. Bunun sonucu oluşan elektrik **ikizkutup döngüsü** $1{,}03 \times 10^{-18}$ esb-cm'dir ki, bu da, bir elektronun aşağı yukarı 1/5 angström yer değiştirmesine eşdeğerdir. Bunun tersine 30 kilovolt/cm'lik bir alan içinde bulunan bir hidrojen atomu, kutuplanma yatkınlığı Çizelge 9.2'deki tutarında ise 10^{-22} esb-cm'den daha küçük bir irgitim **döngüsü** edinir. Doğal **ikizkutup döngüleri** genellikle laboratuvarlarda sağlanan elektrik alanlarının irgitimle oluşturdukları dipol **döngülerinden** pek çok kez daha büyüktürler*. Bu nedenle "öz yapı" **kutup döngüsü** bulunan ve adına *kutuplu (polar)* denilen moleküllerle, *kutupsuz (polar olmayan)* moleküller arasında oldukça keskin bir ayrım bulunur.

Kes. 9.5'in başlangıcında hidrojen atomunun her an bir dipol döngüsü bulunduğunu, ama elektronun hızlı devinimi yüzünden bu **döngünün** zaman içindeki ortalamasının sıfır olduğunu belirttik ve bu döngüyü umursamadık. Oysa şimdi, molekülleri, uçlarındaki yükleri rahatça inceleyebileceğimiz devinimsiz bir çubuk gibi, dipol döngülerinden söz etmeğe koyulduk. Moleküller elektronlara bakınca daha yavaş devinirler ama bunların devinimleri de bizim ölçeğimize göre hızlıdır. Öyle ise bunlara "sürekli" bir elektrik **ikizkutupluluk** nasıl tanıyabiliyoruz? Bu çelişme sizi rahatsız ediyorsa, buna bir çare bulmalıyız. Bunun tam yanıtı biraz kuantum mekaniği olmadan verilemez; ama aradaki ayrım aslında devinimin zaman ölçeği ile ilgilidir diyebiliriz. Bir molekülün çevresi ile etkileşimi için gerekli süre, genel olarak, molekülün kendi devinimi ile dipol döngüsünün ortalamasını sıfıra düşürmek için gerekli zamandan *daha kısadır*. Böylece molekül gerçekten, sözünü etmekte olduğumuz **döngüsü** varmış gibi davranır. Bir molekül ve onun çevresi bakımından çok kısa bir zaman "sürekli" diye nitelenebilir.

*Bunun bir nedeni var. Bir atomun ya da bir molekülün iç elektrik alanı $e/(10^{-8}\ \text{cm})^2$ basamağındadır ki, bu kabaca 10^9 volt/cm eder! Böyle bir alanı laboratuvarda bulunan maddelere uygulayamayız çünkü bu alan bir maddeyi parçalar.



Şek. 9.16 Tanınmış bazı kutuplu moleküller. "Doğal" ikizkutup döngüsünün ölçülen değerinin büyüklüğü 10^{-18} esb-cm birimleri cinsinden verilmiştir.

İyi bilinen bazı kutuplu moleküller doğal kutup döngülerinin doğrultusu ve büyüklüğü ile Şek. 9.16'da gösterilmişlerdir. Su molekülünün kutuplu oluşunun nedeni ortasından bükülmüş olması ve O-H eksenleri arasında yaklaşıkça 105° 'lik bir açı bulunmasıdır. Bu, sonucu çok önemli bir yapı yabansılığıdır. Suyun bir çözücü olma özelliği geniş ölçüde molekülünün dipol momentinden gelmektedir ve bu durum, sulu ortam içinde yürüyen kimyanın yapısında önemli bir rol oynar. Eğer H_2O molekülü, CO_2 molekülü gibi düz yapıda olsa idi, çevremizdeki dünya nasıl bir biçim alırdı, bunu kestirmek zordur; ama bu dünyayı gözlemek için herhalde biz burada olamazdık. Sözlerimize hemen şunu ekleyelim ki, H_2O molekülünün biçimi doğanın bir kapılgısından (kaprisinden) ileri gelmemiştir. Kuantum mekaniği, sekiz elektronlu bir atom ile bir elektronlu iki atom bir molekül kurunca ancak ortasından bükülmüş bir molekül kurabileceklerini açıkca ortaya koymuştur.

Bir dielektrik olarak kutuplu maddelerin davranışı kutupsuzlarınkinden çok açık biçimde değişiktir. Suyun dielektrik sabiti yaklaşıkca 80, metil alkolünki 33 olduğu halde kutupsuz bir sıvının dielektrik sabiti 2 yakınlarındadır. Kutupsuz bir maddeye bir elektrik alanı uygulanması, her molekül içinde irgitimle bir ikizkutup oluşturur. Kutuplu moleküllerin zaten çok kuvvetli döngüleri vardır, ama bunlar, bir dış alan bulunmadığı sürece, her yöne gelişigüzel yönelmişlerdir ve geniş ölçekte bir etkileri gözlenmez. Bir elektrik alanının uygulanması onları belli bir ölçüde yöneltir. Bununla birlikte, her iki halde de gözlediğimiz **mmil** etki, oylum birimi başına düşen bir net **kutuplanma** tutarı ile belirlenir.

9.8 Kutuplu Maddenin Elektrik Alanı

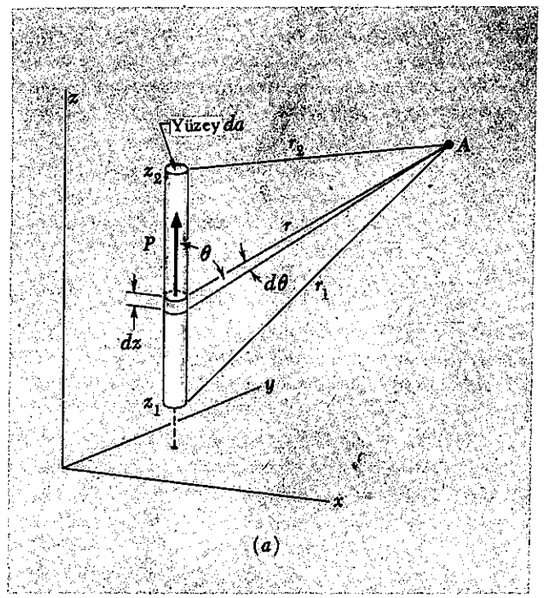
Önce boş bir uzay bölgesini çok büyük sayıda moleküle doldurmakla bir madde kesmesi oluşturduğumuzu düşünelim. Bundan başka bu moleküllerin hepsi aynı doğrultuda kutuplanmış olsun. Şimdilik bu moleküllerin yapılarının ne olduğu ya da bunların kutuplanma durumunun nasıl sürdürüldüğü konusu ile ilgilenmiyoruz. İlgilendiğimiz yalnızca, moleküller bu koşullar içinde bulunduklarına göre, uyardıkları elektrik alanının ne olduğudur; sonra yakın çevrede bulunabilecek daha başka kaynakların uyardığı alanları da hesaba katabiliriz. İsterseniz, bu moleküllerin doğal döngüsü yani kutuplu moleküller olduklarını ve iyice hizaya getirildikten sonra yerlerinde dondurulduklarını düşünebilirsiniz. Burada yalnız cm^3 'deki N ikizkutup sayısının ve her ikizkutbun p döngüsünün ne olduğunu kesinleştirmek gerekir. Bu N sayısını öylesine büyük sayıyoruz ki, genil (makroskopik) ama küçük bir dv oylumu içinde çok büyük sayıda dipol bulunsun. Böyle bir oylum içindeki toplam ikizkutup i $pN\,dv$'dir. Bu oylum ögesinden kendi boyutlarına göre çok uzak sayılabilecek bir noktada bu özel dipollerin uyardıkları elektrik alanı, ayni yerde bulunan $pN\,dv$ yeğinlikli bir tek dipol döngünün uyardığı alanla aynı olacaktır. Buradaki pN niceliğine kutuplanma yoğunluğu diyeceğiz; boyutu yük-cm/cm³ ya da yük/cm² olan bu yöngül niceliği $\mathbf{P}$ ile göstereceğiz. Buna göre bu oylum öğesine bağlı ikizkutup döngüsü $\mathbf{P}\,dv$ olacaktır. Bu arada şunu belirtelim ki, elimizdeki madde, sadece ılın moleküllerden oluşmuştur; moleküllerin hiç biri üzerinde ya da tüm dizgede net yük yoktur; böylece uzak bir noktadaki alanın değerini hesaplama bakımından yalnızca ikizkutup döngüleri almak zorundayız.

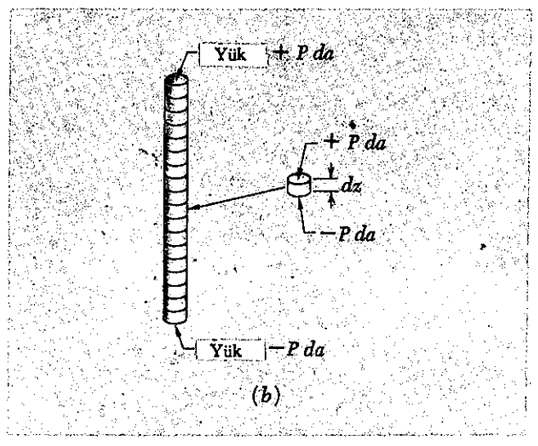
Şek. 9.17'de bu kutuplu maddeden yapılmış ince bir çubuk ya da silindir görülmektedir. Bu çubuğun kesiti da'dır ve boyu z_1 den z_2 'ye dek uzanmaktadır. Sütun içindeki $\mathbf{P}$ kutuplanma yoğunluğu boylu boyunca artı z ekseni doğrultusunda yönelmiş bitеviye gidiyor. Şimdi bu kutuplanma çubuğunun dışında ki noktalarda uyardığı elektrik gerilimini hesaplamak istiyoruz. Yüksekliği dz olan bir silindir ögesinin dipol döngüsü $P\,dv = P\,da\,dz$'dir. Bu ögenin A noktasındaki gerilime katkısını, bir dipolün gerimi için Denk. 12 ile verilen yazımı kullanabiliriz:

$$d\varphi_A = \frac{P\,da\,dz\cos\theta}{r^2} \tag{27}$$

Buna göre bütün çubuğun uyardığı gerilim,

$$\varphi_A = P\,da\int_{z_1}^{z_2}\frac{dz\cos\theta}{r^2} \tag{28}$$





Şek. 9.17 (a) Kutuplanmış maddeden bir çubuk dışta bir A noktasında, alt ve üst uçlarında bulunan iki yükün alanına eşit bir alan oluşturur (b).

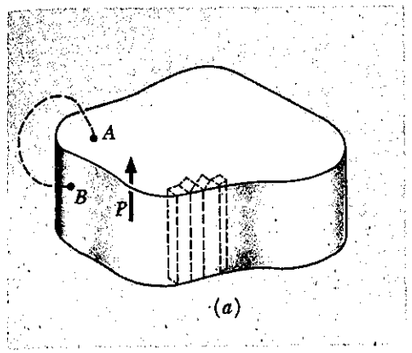
dır. Bu göründüğünden de yalındır: Zira $dz \cos\theta$ tam $-dr$'ye eşittir. Böylece tümlev simgesi altındaki yazım $d(1/r)$ gibi bir tam diferansiyel şekline girer. Buna göre tümlev hesabının sonucu

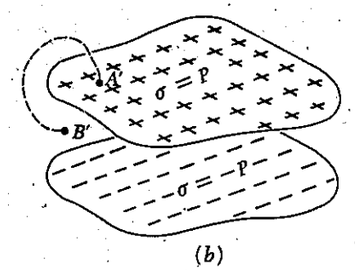
$$\varphi_A = P\,da\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right) \tag{29}$$

olur.

Denklem 29, iki nokta yükün A'da uyardığı gerilimin tam özdeşidir; şöyle ki bu iki yükten biri A'dan r_2 uzaklıkta çubuğun tepesine yerleşmiş $P\,da$ artı yüküdür; öteki ise, çubuğun alt ucuna yerleşmiş aynı değerde eksi yüktür. Demek ki biteviye kutuplanmış maddeden bir çubuğun hiç değilse *dışta* uyardığı alan bakımından davranışı, iki noktaya toplanmış iki yükünkine eşdeğerdir.

Biz bunu hiç matematiğe başvurmadan değişik bir yoldan giderek yine tanıtlayabiliriz. Çubuğun içinde, $P\,da\,dz$ tutarında ikizkutup döngülü dz boyunda küçük bir parça alalım. Aynı büyüklükte kutuplanmamış yalıtkan maddeden bir parça alarak, bunun üst yüzeyine $+P\,da$ ve alt ucuna $-P\,da$ yükleri yerleştirmek bu parçanın yerini tutabilecek bir benzerini kuralım. Bu küçük pulun kutup döngüsü yukarki çubuk kesmesininkinin özdeşi olacaktır, ve dolayısı ile uzakta bulunan bir A noktasındaki alana katkısı ötekininkine eşit olacaktır. Benzerince içindeki ya da çok yakınlarındaki alan çubuk parçasınınkinden biraz değişik olabilir; ama buna aldırmıyoruz.) Şimdi bu gibi birçok pul hazırlayalım ve bunları kutuplanmış ilk çubuğu kuracak biçimde üstüste yığalım. Bunlar da A'da tüm çubuğunkinin özdeşi bir alan uyarırlar; çünkü yığının her parçası, çubuğun her parçasına özdeş katkıda bulunur (Şek. 9.17*b*). Ama şimdi ne elde ettiğinize bir bakın! İki parçanın bitiştiği yerde, altta kalan pulun üst yüzündeki artı yükler bir üstteki pulun alt yüzündeki eksi yüklerle bir yere gelerek buradaki yükü sıfıra eşitler. Karşılanmamış biricik yük çifti tabanda kalan pulun alt yüzündeki $-P\,da$ eksi yük ile, tepedeki pulun üst yüzündeki $+P\,da$ artı yüktür. A gibi uzakta bulunan bir noktadan bakılınca bunlar birer nokta yük gibi





Şek. 9.18 Kutuplanmış bir madde kesmesi (a), dışta uyardığı alan bakımından iki yük katmanına eşdeğerdir (b).

davranacaklardır. Öyleyse bu iki yük A'da kutuplanmış madde çubuğununki ile aynı alanı uyarır.

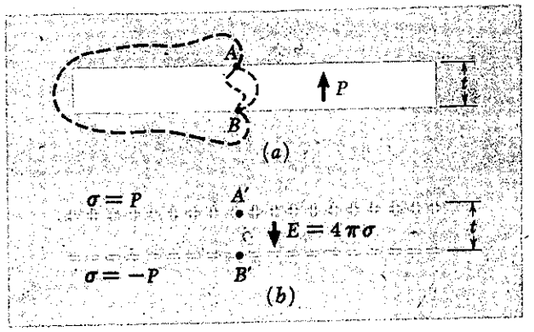
Bu sonucu, koşut yüzeylerine dik doğrultuda biteviye kutuplanmış herhangi boyutta iri bir dilime ya da bir dik silindir kesmesine genişletebiliriz (Şek 9.18*a*). Bunun için dilim bir takım çubuk demetleri halinde ayrılabilir ve dıştaki bir noktanın geriliminin hesaplanması bakımından, çubukların katkıları toplamı alınabilir; bunun için de yalnızca uçlarındaki yükler alınabilir. Her çubuk üst başında bulunan $P\,da$ yükü, dilimlerin yüzeyi üzerinde yüzey birimi başına $\sigma = P$ gibi biteviye bir yüzey yoğunluğu oluşturur. Öyle ise biteviye kutuplanmış bir dilimin ya da silindir kesmesinin dışında bulunan tüm noktalardaki gerilimin, dilimin üst ve alt yüzeylerinin yerlerinde bulunan ve yük yoğunlukları $\sigma = +P$ ve $\sigma = -P$ olan iki yük katmanının uyardığı gerilimle tam özdeş olduğu sonucunu çıkarabiliriz (Şek. 9.18*b*).

Dilimin *içindeki* alan üzerinde herhangi bir şey söyleyecek durumda henüz değiliz; ama üst, alt ve yan yüzeylerindeki, gerilimin ne olduğunu biliyoruz. Böylece yüzeye yakın iki A ve B noktaları arasında, tümcek dış alandan geçen bir yol boyunca hesaplanan $\int \mathbf{E}\cdot d\mathbf{s}$'nin değeri, tüm dış alanca belirlenir.

Bu tümlevin Şek. 9.18*b*'deki $A'B'$ yolu boyunca alınan tümlevle özdeş olması gerekir. Dielektriğin tam yüzeyinde oturan bir nokta, moleküllerin "yakın alanı" dediğimiz kuvvetli alanlar bölgesinde bulunabilir; biz bunu hesap dışı bırakmıştık. Bu bakımdan, dielektrik madde sınırının, en dışta bulunan atom çekirdeklerinden 10 ilâ 20 angström uzağından geçen bir yüzey olduğunda anlaşalım; bu sınırın dışında kalan herhangi bir yol boyunca A'dan B'ye giden tümlev değerine atomların "yakın alanı"nın katkısı önemsenmeyecek ölçüde az olacaktır.

Bu noktayı aklımızda tutarak, kesiti Şek. 9.19*a*'da çizilen t kalınlığında, kutuplanmış oldukça geniş yassı bir dilim ele alalım. Şek. 9.19*b* buna eşdeğer yük katmanlarını kesit halinde göstermektedir. Böyle iki yük katmanı dizgesinin aradaki ve dış uzaydaki alan yeğinliğinin ne olduğunu biliyoruz. Arada ve kıyılardan uzak bir noktadaki alan aşağı doğru yönelmiş ve $4\pi\sigma$ değerinde olmalıdır; yani buna göre A' ve B' noktaları arasındaki gerilim değişimi $4\pi\sigma t$ statvolt olur. *Aynı gerilim değişimi*, kutuplanmış dilimin iki yüzeyindeki A' ve B' noktalarına karşılık gelen A ve B noktaları arasında da bulunmak zorundadır, çünkü iki dizgenin dış alanları tümcek aynıdır.

Alan içde de tam özdeş midir? Kesenkes hayır Çünkü dilimin içinde kıyamet gibi artı çekirdekler



Şek. 9.19 (a) E'nin A'dan B'ye kadar çizgi tümlevi içten ya da dıştan geçen bütün yollar için aynıdır; zira, içteki "minil" ya da "atomsal" elektrik alanları da korunumludur (dönü$\mathbf{E} = 0$)Eşdeğer yük katmanlarının (b) dış alanı aynıdır.

ve elektronlar var ki, bunların yakınlarında cm başına milyonlarca voltu bulan ve bir noktada bir yöne, ötekinde başka bir yöne yönelmiş alanlar uyarılmıştır. Ama bir şey dıştaki ile *aynıdır:* Alanın A'dan B'ye giden *herhangi* bir iç yol boyunca hesaplanan çizgi tümlevinin değeri tam $\varphi_B - \varphi_A$'ya eşit olmalıdır ki bu da daha önce gördüğümüz gibi değeri $4\pi\sigma t$ ya da $4\pi Pt$ olan $\varphi_{B'} - \varphi_{A'}$ ile aynıdır. Bunun böyle olmasının nedeni, atom yüklerinin dağılımı nasıl olursa olsun, $\int \mathbf{E} \cdot ds$'nin yola bağlı olmaması ya da dön$\mathbf{E} =$ 0 eşitliği ile deyimlenen elektrik alanının korunumlu olma özelliğinin geçerli bulunmasıdır.

Şek. 9.19b'deki iki yük katmanı arasındaki gerilim değişimi hemen her yerde özdeştir, zira çok kıyılara varmadıkça içerdeki elektrik alanı biteviye bir alan sayılabilir. Bu nedenle kutuplanmış dilimin orta bölgelerinde üst ile alt arasındaki gerilim değişimi sabit olmalıdır. Bu bölgede dilimin üst yüzünde bulunan herhangi bir A noktasından alt yüzünde ki bir B noktasına dek herhangi bir yol boyunca hesaplanan $\int_A^B \mathbf{E} \cdot ds$ çizgi tümlevinin değeri aynı $4\pi Pt$ vermelidir. Şekil 9.20'de dilimin orta bölgesinin "büyütülmüş bir görünüşü" çizilmiştir; burada kutuplu moleküller H_2O biçimlidir, ve hepsi bir yönelmişlerdir. Şekilde moleküller arasında ve içinde bulunan yeğin alanları göstermeğe yeltenmedik (Denk. 14 ve Çizelge 9.1'den kolayca görebileceğiniz gibi, bir su molekülünün 10 angström uzağında bir noktadaki alan yüzlerce kilovolt/cm değerini bulur.) Her molekülün yakın komşuluğu içinde daha da karışık bir alan bulunacağını düşünmeniz gerekir. Burada $\int \mathbf{E} \cdot ds$ içindeki $\mathbf{E}$ alanı molekülün içinde ya da dışında verilen herhangi bir noktadaki *toplam elektrik alanını* göstermektedir yani bunun içinde az önce değindiğimiz bu karışık ve yeğin alanlar da vardır. Böylece ulaştığımız çok ilginç sonuç şudur: Bu karma karışık alanlar ve yükler bölgesi içinde seçtiğimiz moleküllerin içinden ya da dışından geçen herhangi bir yol boyunca hesaplanan tümlev hep aynı değeri, yani Şek. 9.19b'deki yapıda $4\pi P$ yeğinliğindeki biteviye alanın verdiği değeri verir.

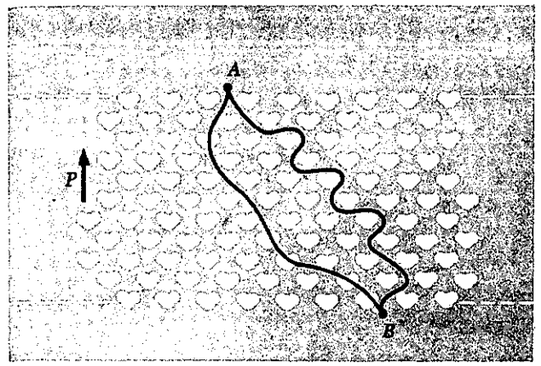
Dediklerimiz kutuplanmış dilim içindeki elektrik alanının *uzayca ortalamasının* $-4\pi\mathbf{P}$'ye eşit olması gerektiğini anlatır. Bir $\mathbf{E}$ alanının bir V oylumu içinde uzayca ortalaması deyince $\langle \mathbf{E} \rangle_V$ ile gösterdiğimiz,

$$\langle \mathbf{E} \rangle_V = \frac{1}{V} \int_V \mathbf{E}\, dv \tag{30}$$

yazımını anlıyoruz.

V hacmının ayrılabildiği eşit dv parçalarını alan bakımından yan tutmadan örneklemenin bir yolu, birbirine çok yakın koşut çizgilerin oluşturduğu bir "tel demeti" boyunca alanı ölçmek olurdu. Az önce gördüğümüz gibi $\mathbf{E}$'nin böyle çizgiler boyunca alınan çizgi tümlevi, $-4\pi\mathbf{P}$'lik sabit bir elektrik alanı içinde bulacağımız değerin aynıdır. $\langle \mathbf{E} \rangle = -4\pi\mathbf{P}$ sonucumuzun dayandığı düşünce budur.

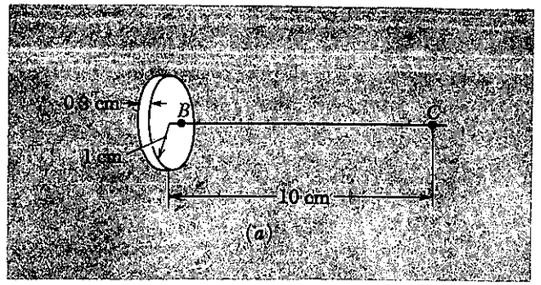
Bu ortalama alan *genil (makroskopik)* bir niceliktir. Ortalamayı hesapladığımız hacmın çok büyük sayıda molekülü alacak kadar büyük olması gerekir;

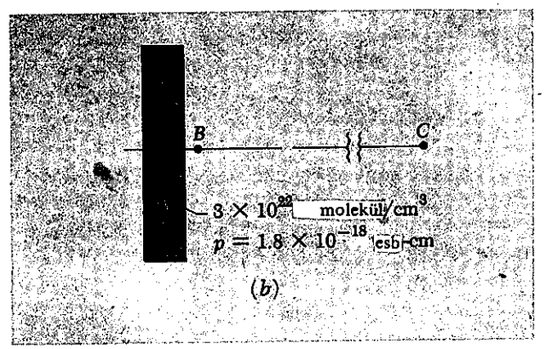


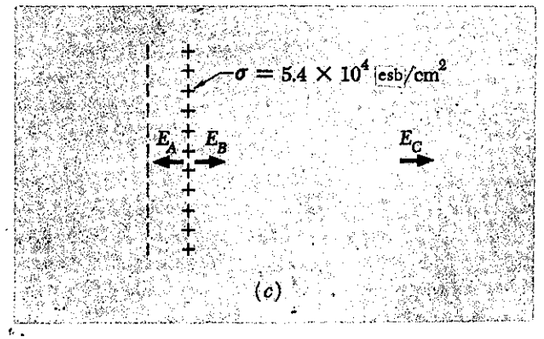
Şek. 9.20 Gerçek minil alanın A'dan B'ye giden herhangi bir yol boyunca çizgi tümlevi aynıdır.

yoksa, bir hacımdan yanındakine geçince ortalama değerde bir takım dalgalanmalar olur. Denk. 30 ile tanımladığımız bu ortalama $\langle \mathbf{E} \rangle$ alanı dielektriğin içinde gerçekten sözünü edebileceğimiz biricik genil elektrik alanıdır. "Dielektrik maddenin içindeki elektriksel alan nedir?" sorusu ile karşılaşacak olursak bu ortalama alan kavramı, maddenin genil anlatımı bakımından doyurucu tek yanıtı verir.

Denk. 30'un sağ yanındaki tümlev simgesi altındaki $\mathbf{E}$'ye *minil (mikroskopik)* alan diyebiliriz. Çizgi tümlevini hesaplamak için gerekli alanı ölçmek üzere birini oraya göndermiş olsak, onun ölçeceği, elektrik yüklerinin önündeki boşlukta uyarılmış elektrik alanıdır. Ölçü yapana çok küçük aygıtlar gerekecektir, çünkü, bu ölçülerin kimi, bir molekülün bir ucunun iç yanındaki özel bir noktadaki alanın ölçülmesi olabilir. Bu bakımdan, acaba, bir molekülün kuzey-batı köşesi açığından geçip ondan sonraki molekülün içinden bir içgeçitle süren bir yol boyunca $\mathbf{E}$ alanının çizgi tümlevini almaktan sözetmeğe hakkımız var mı? Evet! Bunu hakh gösteren açık kanıt, elektromıknatısal yasaların atomdan çok küçük ölçeklerde bile geçerli olmasıdır. Bir atomun boyutları sınırı içinde bulunan bir yol boyunca elektrik alanının minil ortalamasını ölçmemizi olanaklı kılacak bir deney bile betimleyebiliriz. Bunun için bütün yapacağımız, mad-







Şek. 9.21 (a) Tüm ikizkutup döngüleri özdeş ve eksene koşut doğrultuda yönelmiş kutuplu moleküllerden oluşmuş bir pul.
(b) Pulun kesiti.
(c) Eşdeğer pul yükünün kesiti.

denin içine yüksek enerjili, yüklü bir parçacık, örneğin bir alfa parçacığı atmaktır. Bunun momentumunun net değişim tutarından bütün yolu boyunca etkilendiği elektrik alanının ortalama değerini çıkarabiliriz.

Kutuplu maddenin işe karıştığı sayısal bir örnek işleyelim. Şek. 9.21*a*'da olduğu gibi 1 cm yarıçapında ve 0,3 cm kalınlığında bir pulun içindeki molekül yoğunluğu 3×10^{22} molekül/cm^3 olsun. Bütün bunlar, her birinin döngüsü $1{,}8 \times 10^{-18}$ esb-cm olan kutuplu moleküller olsun. Son olarak bütün bu moleküllerin Şek. 9.20'deki gibi ikizkutup döngüleri aynı doğrultuya, pulun eksenine koşut dizilmiş olsunlar (bu son koşul oldukça zorakidir). Şimdi pulun içinde bir A noktasında, ve de hemen dışında bir B noktasında ve pulun 10 cm uzağında eksen üzerinde bulunan bir C noktasındaki alanın değerini tartışacağız. Buradaki P kutuplanma yeğinliği

$$P = Np = (3 \times 10^{22}\ \text{cm}^{-3}) \times (1{,}8 \times 10^{-18}\ \text{esb-cm}) = 5{,}4 \times 10^{4}\ \text{esb/cm}^2 \qquad (31)$$

dir. Buna eşdeğer yük katmanları Şek. 9.21*c*'de gösterilmiştir. Eğer bu katmanların boyutu sonsuza doğru uzanacak olursa, ikisi arasında A noktaşındaki alan $4\pi\sigma$ ya da $6{,}8 \times 10^5$ statvolt/cm olacaktır. İncelediğimiz hal için bu oldukça iyi bir yaklaşıklıktır, zira bu halde katmanlar aralığı bunların boyutlarına bakınca oldukça küçüktür. Aslında alan bundan biraz daha küçüktür. Katmanın dışında B noktasındaki alan sonsuz genişlikte katmanlar halinde sıfır olurdu; ama bu halde sağa doğru zayıf bir alan bulunur. Böylece artı katmanın bulunduğu yerdeki süreksizlik tam $4\pi\sigma$ ya da $4\pi P$.'ye eşit olacaktır. A veya B noktalarındaki ortalama alanları kesin değerleri ile hesaplamak gerekirse, Böl. 2'de bir yüzey yükü pulunun alanı için çıkardığımız yazımı kullanabilir ve uygun biçimde yerleştirilmiş böyle iki pulun alanlarını bir yere getirerek alanları hesaplayabiliriz. Uzak (C gibi) bir noktadaki alanı bulmak için, bütün bilmemiz gereken, cismin toplam kutupsal döngüleridir. C'den bakılınca ayrı ayrı ikizkutupların dağılımı pek önemli değildir. Pulun bütünü $p_{\text{tot}} = \text{oylum} \times P = 0{,}942\ \text{cm}^3 \times 5{,}4\ 10^4\ \text{esb/cm}^2 = 5{,}1 \times 10^4$ esb-cm değerinde bir tek ikizkutup gibidir. Böyle bir dipolün ekseni üzerinde 10 cm uzakta bulunan bir noktadaki alan,

$$E_C = \frac{2p_{\text{top}}}{r^3} = \frac{10{,}2 \times 10^4\ \text{esb-cm}}{(10\ \text{cm})^3}$$

$$= 102\ \text{statvolt/cm} \qquad (32)$$

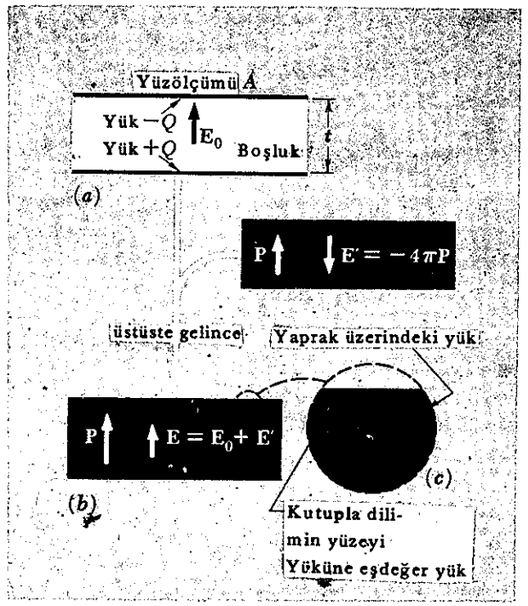
olur.

9.9 Dielektrik Dolu Bir Sığalık

Dielektrik dolu bir sığalığa varabilmek için epey yol almak gerekti; ama şimdi bu problemi olgunlaştırarak dielektriğin kendisinin de anlaşılmasını sağlıyacak açıklık getirebiliriz. İlkin boşlukta iki iletken yaprak ele alalım; bunların üstte olanı $-Q$ ve alttaki ise $+Q$ yükü taşısınlar. Şekil 9.22*a*, bu bölüme başlarken ele aldığımız Şek. 9.1*a*'nın kesit halinde görünüşüdür. Yapraklar arasındaki $\mathbf{E}_0$ alanı $4\pi Q/A$'ya eşittir ve yukarıya doğru yönelmiştir. Yapraklar arasındaki φ_{12} gerilim farkı $4\pi Qt/A$'ya eşittir. C_0 sığası bildiğimiz bağıntı uyarınca

$$C_0 = \frac{Q}{\varphi_{12}} = \frac{A}{4\pi t} \qquad (33)$$

olur. Şimdi yapraklar arasına bir dielektrik yerleştirelim. Elektrik alanı dielektriğin moleküllerini ya da atomlarını kutuplandıracaktır. İşin bu basamağında, her molekülde irgitimle oluşan dipol döngünün tutarının ne olduğunu kestiremeyiz, zira, bu durumda moleküllere etkiyen kuvvet yalnız $\mathbf{E}_0$ alanı değildir, buna ek olarak öteki müleküllerin katkısı da işe karışmalıdır. Ama ne olursa olsun, eşyönlü bir dielektrik için kutuplanmanın doğrultusu $\mathbf{E}_0$ 'a koşut olacaktır. Kutuplanma yoğunluğunu, tutarı ne olursa olsun $\mathbf{P}$ ile gösterelim.



Şek. 9.22 Dielektrik dolu bir sığaç (c) boş sığaç ile kutuplanmış maddeden oluşan bir dilimin üstüste getirilmesi ile çözümlenebilir. (b).

Şimdi elimizde Şek. 9.22*c*'de görülen gerçek iki yük katmanı ile, kutuplanmış bir madde dilimiden oluşmuş bir dizge var. Daha önce çözümlediğimiz Şek. 9.22*a* ve 9.19*a*'daki ve burada Şek. 9.22*b*'de yeniden verdiğimiz yük dağılımlarının *bir yere gelmesi durumu* ile karşı karşıyayız. Öyle ise elektrik alanı bu iki yük dağılımının, yani yüzeyce yük yoğunluğu $\sigma = Q/A$ olan gerçek yük katmanının uyardığı $\mathbf{E}_0$ alanı ile kutuplanmış dilime eşdeğer iki yük katmanının $\sigma' = P$, yük yoğunluğunun uyardığı $\mathbf{E}'$ alanının toplamına eşit olacaktır. Burada $\mathbf{P}$, $\mathbf{E}_0$ alanı ile aynı yönlü olduğu için $\mathbf{E}'$ alanının $\mathbf{E}_0$ ile zıt yönlü olduğuna bakınız; artı eşdeğer yük katmanı eksi yüklü yaprağa bitişiktir. Bunun nedeni kuşkusuz, yaprağın eksi yüklerinin dielektrik atomlarının artı uçlarını çekmesi ve eksi kısımlarını itmesidir; böylece artı yükler eksi yaprak yakınına sürüklenerek dielektrik kutuplanır. Buna göre sığalık içindeki $\mathbf{E}$ elektrik alanı

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 + \mathbf{E}' = \mathbf{E}_0 - 4\pi\mathbf{P} \qquad (34)$$

olur. Yapraklar arasındaki gerilim farkının büyüklüğü

$$\varphi_{12} = (E_0 - 4\pi P)t \qquad (35)$$

olur. Sığalık üzerindeki yükler değişmedi. Eğer yapraklar bir tel ile bağlanmış olsalardı, Q yükü çekilecek, ve bu arada dielektrik kutuplanmamış haline dönerek gevşeyecekti. Bu gerilim farkı, aynı yükü taşıyan boş sığacın gerilim farkına bakınca $(E_0 - 4\pi P)/E_0$ katsayısı kadar düştüğüne göre, $C = Q/\varphi_{12}$ sığası bu çarpanın tersi kadar büyümüş olur:

$$C = C_0 \frac{E_0}{E_0 - 4\pi P} \qquad (36)$$

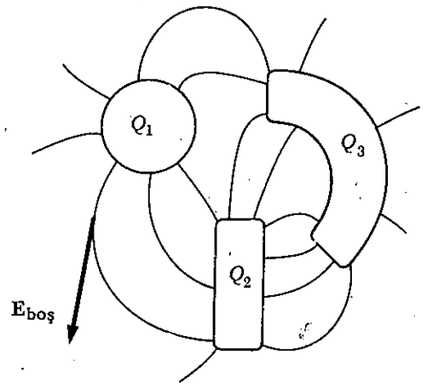
Şimdi bunu sığalık içinde bulunan ve genil alan ya da ortalama alan dediğimiz $\mathbf{E}$ cinsinden deyimlemek daha uygun olur. Denk. 34'e göre $E_0 = E + 4\pi P$ olduğuna göre,

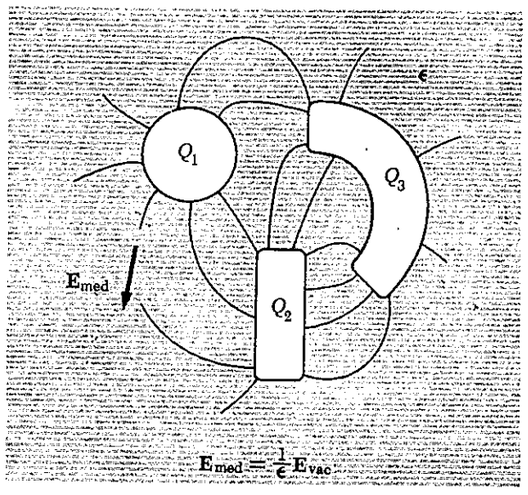
$$C = C_0 \frac{E + 4\pi P}{E} = C_0 \left(1 + 4\pi \frac{P}{E}\right) \qquad (37)$$

elde ederiz. Burada P'nin E'ye oranı dielektrik maddenin kendine özgü bir özelliğidir. Bu oranın adına maddenin *elektrik alınganlığı* (süseptibilitesi) denir ve χ_e simgesi ile gösterile gelmiştir. Bu oran boyutsuzdur. Denk. 37'de ayraç içinde bulunan deyimlemenin bütününe maddenin *dielektrik sabiti* denir ve ϵ ile gösterilir.

$$P = \chi_e E \qquad \epsilon = 1 + 4\pi\chi_e \qquad (38)$$

Bunlar bir takım tanımlardan başka bir şey değil fiziğin kendisi Denk. 34 ile Denk. 37 içindedir. Kesin konuşmak gerekirse, boş sığalığı dielektrik doldurmakla sığasının tam ϵ katsayısınca artması, yalnız yaprakları arası değil, çevresindeki tüm uzayda bu dielek-





Şek. 9.23 İletkenler üzerinde bulunan aynı yükler için, dielektrik çevrenin bulunması bütün alan yeğinliklerini ve dolayısı ile bütün gerilim farklarını $1/\epsilon$ çarpanı kadar düşürür. Buradaki Q_1, Q_2 ve Q_3 yükleri, iletkenleri boşaltmak için akacak yüklerdi.

trikle doldurulursa ancak doğrudur. Yukarki örnekte açıkca belirmiş olmasa da yaprakların t aralığının genişliğine bakınca küçük olduğunu ve "kıyı etkisi" nin, ve dış yüzeylerine kaçabilecek yüklerin az olduğunu düşünüyoruz. (Bak. Şek. 3.11b). Herhangi bir şekil ve düzenlenişte bulunan bir iletkenler dizgesinin türdeş ve eşyönlü bir dielektrik içine örneğin büyük bir yağtenekesiiçine batırmakla genel hal sağlanabilir. Çeşitli iletkenler üzerinde bulunan herhangi Q_1, Q_2 vb yükler için, dielektrik ortamın içinde herhangi bir yerdeki genil $\mathbf{E}_{ortam}$ alanı, aynı yükler aynı iletkenlerin üzerinde, ama boşlukta bulundukları zamanki $\mathbf{E}_{vac}$ alanının $1/\epsilon$ katı olur (Şek. 9.23). Böylece hiç kuşkusuz bütün gerilim farkları da aynı $1/\epsilon$ katsayısınca düşer.

Bitmeyen işimiz ayrı yapıda iki problemden oluşmuştur.

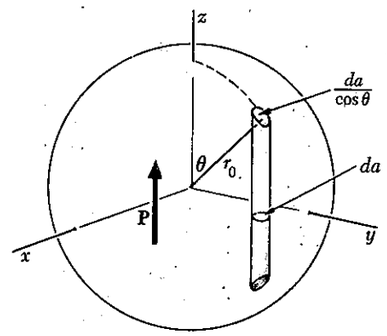
(i) Kullanılan maddelerin dielektrik sabitleri verildiğine göre herhangi bir yalıtkanlar ve iletkenler dizgesinin davranışının ne olduğunu anlamak istiyoruz. Yani iletkenler üzerindeki yükler ve gerilimler için konulmuş koşullar ne olursa olsun dielektriğin dışındaki alanı ve içindeki genil $\mathbf{E}$ alanını hesaplamak istiyoruz.

(ii) Yığılı maddenin χ_e, alınganlığı ile deyimlenen tüm kutuplanması ile, bu dielektriği oluşturan moleküllerin ve atomların kutuplanmaları arasındaki nicel ilişki giz halinde kalmaktadır. Bunu açıklığa kavuşturabilmek için, kutuplanabilen atomu saran uzaydaki ortalama alan (ya da genil alan) bilindiğine göre atomun asıl kendi duyduğu alanın ne olduğunda açıklığa varmamız gerekir. Belli bir atomun duyduğu alan uzay boyunca ortalaması alan değil, yerel dediğimiz bulunduğu yerdeki alandır. Atomun ikizkutup döngüsünün oluşturan lında bu $\mathbf{E}_{yerel}$ alanıdır. Bu soru dielektriğin içine minil düzeyden yeniden göz atmamızı gerektiriyor.

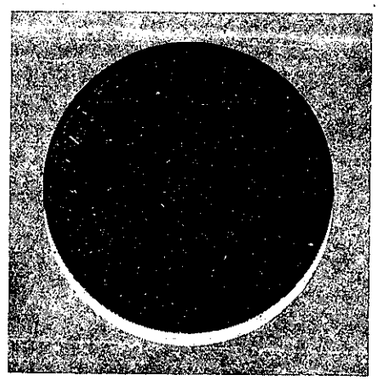
Şimdi (i) problemini ele alalım.

9.10 Kutuplu Bir Kürenin Alanı

Şek. 9.24 a'daki katı küre, Şek. 9.18a,'daki dilimin maddesi gibi biteviye kutuplanmış olsun. Kürenin içindeki ve dışındaki elektrik alanı neye benzeyecektir? Bu öğretici bir problemdir ve bulunan sonuçlar başka yerlerde de işe yarayacaktır. Şimdiye dek olduğu gibi $\mathbf{P}$ kürenin bütün hacmı boyunca doğrultu ve değerce sabit olan kutuplanma yoğunluğunu gösteriyor. Kutuplanmış madde Şek. 9.18a.'dakidilim gibi P ye koşut çubuklara ayrılabilir, ve bunlardan her biri yerine de üstte ve altta ($P \times$ çubuğun kesiti) tutarında birer yük alınabilir. Öyle ise aradığımız alan, bir küre üzerine yayılmış, yoğunluğu $\sigma = P \cos\theta$. olan bir yük dağılımının uyardığı alandır. Şekilden açıkca görüldüğü gibi $\cos\theta$ çarpanı, kesiti da olan çubuğun küre yüzeyinden ayırdığı parçanın yüzölçümününün $da/\cos\theta$ oluşundan ileri gelir Şek.9.24b bu eşdeğer yüzey vükünün bir kesitini göstermektedir ve burada, yük yoğunluğu, üstteki koyu ince ayın (artı yük yoğunluğu) ve alttaki açık ince ayın kalınlığı ile gösterilmiştir (eksi yük yoğunluğu).

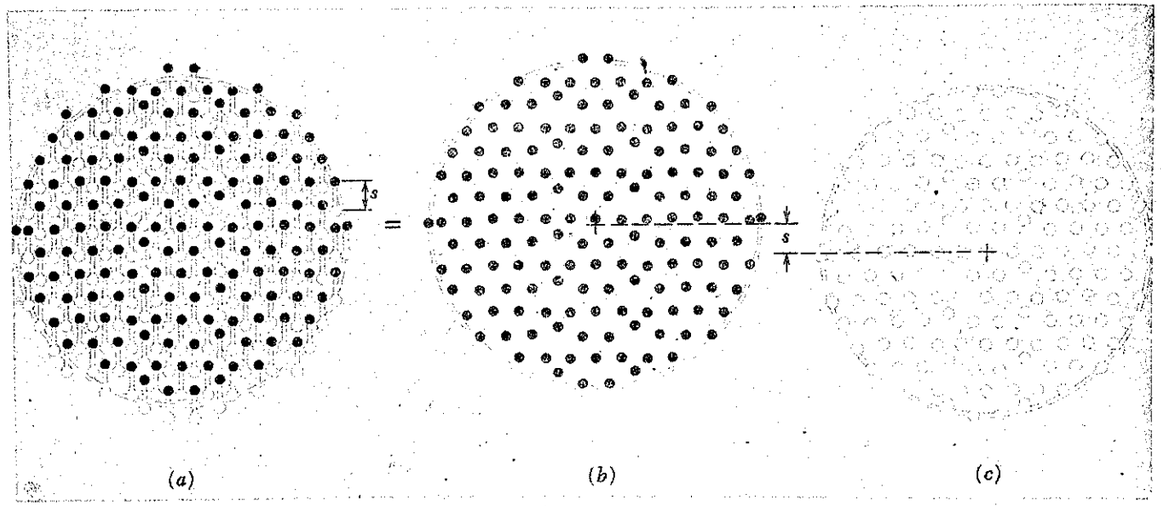


Şek. 9.24 (a) Kutuplanmış küreyi kutuplanmış çubuklar haline ayıralım ve her çubuk yerine küre yüzeyi üzerinde bulunan yüklü bir yüzey parçası alalım.



(b) Artı yük dolu bir top ile eksi yük dolu bir top merkezleri biraz ayrı düşecek biçimde üstüste gelirlerse, küre yüzeyi üzerinde, bir yük kabuğuna eşdeğer bir dizge oluştururlar.

Eğer henüz ilginizi uyarmadı ise bu biçimdeki $\mathbf{P}$ kutuplanmasının, oylumca yoğunluğu ρ, olan biteviye artı yüklü bir balon ile $-\rho$ yoğunluklu eksi bir balonun merkezleri düşey doğrultuda hafifce kaymış olarak üstüste gelmelerinden oluşmuş gibi kabul edilebileceğini düşünün. Bu bize üstte karşılanmamış bir artı yük kabuğu ile altta eksi bir yük kabuğu bırakır, ve yüzey boyunca yüklerin tutarı $\cos\theta$ ile oranlı biçimde değişir. Artı ve eksi yük yoğunluklarının üstüste bulundukları iç bölgede bunlar birbirlerini artıksız ılınlarlar. Bu görüşü ele alarak yüzey yükü katmanının dışındaki alanı kolayca hesaplıyacak bir yol bulabiliriz. Bildiğiniz gibi, küresel bir yük dağılımının dışda uyardığı alan bütün yükleri merkezde toplanmış iken uyarılan alanın aynıdır. Böylece toplam yükleri $+Q$ ve $-Q$ olan iki kürenin merkezlerinin, küçük bir s aralığınca ayrılarak üstüste gelmesi ile uyarılan alan, s cm aralıkla duran Q ve $-Q$ gibi iki nokta yükün uyardığı dış alanla aynı olacaktır. Yani bu dizge ikizkutup döngüsü $p_0 = Qs$ olan bir ikizkutup gibidir.



Şek. 9.25 Bir hizaya gelmiş molekül dipollerinden oluşmuş bir küre, azıcık yer değiştirmiş artı yüklü bir küre ile (a), eksi yüklü bir kürenin üstüste gelmesi ile oluşmuş bir dizgeye (b) eşdeğerdir.

Kutuplanmış maddenin minil anlatımı da aynı sonuca götürür. Şek.9.25*a*'da P kutuplanmasından sorumlu olan molekül dipolleri, kabaca s cm aralıkla duran q ve $-q$, gibi bir yük çiftinden oluşmuş dipol döngüleri $p = qs$ olan yapılar gibi görülmüştü. Bunlardan cm de N tane varsa $P = Np = Nqs$ olur ve bu ikizkutupların kürenin içindeki tüm sayısı, $(4\pi/3)r_0{}^3N$ olur. Ayrı görülen kürelerdeki (Şek.9.25*b*) toplam artık yük tutarı $Q = (4\pi/3)r_0{}^3Nq$ bir küre içine, ve eksi yükler de merkezi bir az kaymış bulunan benzer bir küre içinde kapanmıştır (Şek. 9.25 c). Eğer bu yük dağılımının iyice dışında bulunan noktalardaki alan ile ilgilenmekte isek, bu yük dağılımlarının her biri yerine, merkezlerinde bulunan bir yük alınabilir. Burada kullandığımız "iyice dışında" sözü ile, yük dağılımının taneli oluşunun bir etkisi kalmayacak kadar uzağında bulunan noktaları anlıyoruz; ve genil alandan söz ettiğimiz sürece, yüklerin bu taneliliğini bilmezlikten geliyoruz demektir. Böylece şu andaki işimiz açısından düzgün yoğunlukta yüklenmiş ve üstüste gelmiş küreler benzetişi ile, boşlukta varolan dipollere dayanan anlatım eşdeğerdir*, ve bu eşdeğerlik, yük dağılımının dışındaki noktalarda uyarılan alanın, merkezde yerleşmiş bir tek ikizkutbunki ile aynı olduğunu gösterir. Bu dipolün p döngüsü, kürenin toplam kutuplanmasıdır:

$$p_0 = Qs = \frac{4\pi}{3} r_0{}^3 Nqs = \frac{4\pi}{3} r_0{}^3 P \qquad (39)$$

Artık Q ve s nicelikleri ayrı ayrı alınınca bir anlam taşımazlar, ve irdelememizden düşürülebilirler.

Kutuplanmış bir kürenin dış alanının merkezdeki p_0 ikizkutbunkine eşit oluşu yalnız büyük uzaklıklar için değildir; genilde konuşmak gerekirse, kürenin yüzeyine kadar alan arı bir dipol alanıdır. Dıştaki alan çizgilerinin bir gösterilişi olan Şek. 9.26'yı çizmek için bütün yaptığımız, Şek. 9.5'in merkez çevresinde dairesel bir bölgeyi karalamak oldu.

*Bu belki çok açıktır, ama bunu böyle ayrıntıları ile incelememizin nedeni "düzgün yüklü balon" taslamının gerçek bir maddenin içindeki gerçek durumdan farklılığı dolayısı ile içinizde doğacak kuşkuyu gidermektir.

İç alan başka bir konudur. Önce $\varphi(x,y,z)$ gerilimine bakalım. Dış alanı bildiğimiz için gerilimin küresel sınırı yüzeyinin tüm noktalarındaki değerini biliyoruz. Bu $p_0 \cos\theta/r^2$ dipol gerilimidir ve yarıçapı r_0 olan küresel sınır üzerinde

$$\varphi = p_0 \frac{\cos\theta}{r_0{}^2} = \frac{4\pi}{3} P r_0 \cos\theta \qquad (40)$$

değerini alır. $r_0 \cos\theta = z$ olduğuna göre küre üzerinde bulunan bir noktadaki gerilimin yalnız z konumluğuna bağlı olduğu görülür:

$$\varphi = \frac{4\pi}{3} Pz \qquad (41)$$

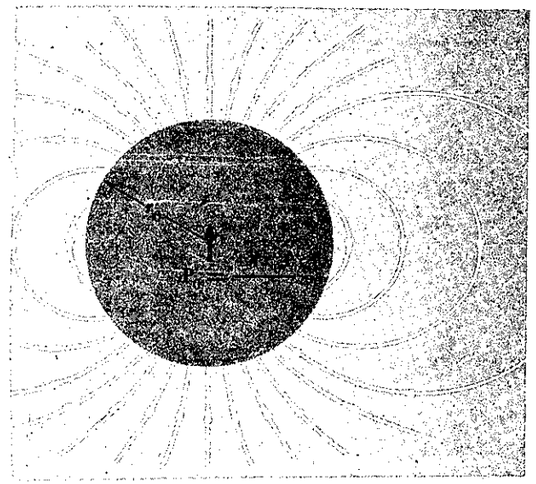
Böylece iç alanı bulma problemi şu biçime düştü: Denklem 41, Laplace denkleminin doğrulanması gereken iç bölgenin sınır üzerindeki her noktada gerilimi verir. Böl. 3'de tanıtlamış olduğumuz Eşsizlik (ya da Teklik) Teoremine göre bu yazım φ 'nın bütün iç bölgedeki değerini belirler. Eğer bir çözüm bulabilirsek bunun aradığımız tek çözüm olması gerekir. Şimdi C herhangi bir sabit olduğuna göre Cz Laplace denklemini doğrular ve böylece Denk. 41 gerilimin *küre içindeki* çözümünü verir. Bu $-z$ doğrultusunda biteviye bir elektrik alanının gerilimidir.

$$E_z = -\frac{\partial \varphi_{iç}}{\partial z} = -\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{4\pi Pz}{3}\right] = -\frac{4\pi P}{3} \qquad (42)$$

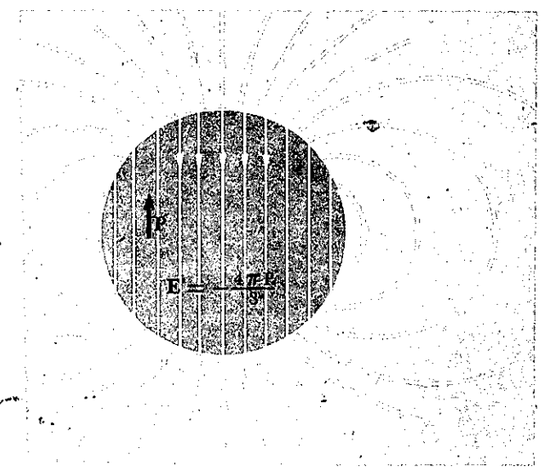
z ekseninin ayırdedici biricik özelliği P doğrultusudur, o halde sonucumuzu daha genel bir biçimde

$$\mathbf{E}_{iç} = -\frac{4\pi \mathbf{P}}{3} \qquad (43)$$

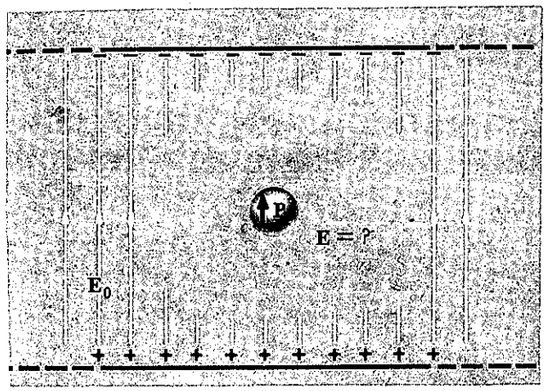
yazabiliriz. Bu kutuplanmış madde içindeki E genil elektrik alanıdır.



Şek. 9.26 Biteviye kutuplanmış bir kürenin dışındaki uyarılmış alan, kürenin merkezine yerleştirilmiş bir ikizkutbun alanına özdeştir.



Şek. 9.27 Biteviye kutuplanmış bir kürenin dışında ve içinde uyarılan alan.



Şek. 9.28 $\mathbf{E}_0$ alanının kaynakları devinimsizdir. Küre biçimli dielektrik madde $\mathbf{P}$ kutuplanması geliştirir. Toplam $\mathbf{E}_0$ alanı, $\mathbf{E}$ ile bu kutuplanmış kürenin alanının üstüste gelmesi ile oluşur.

Şekil 9.27 iç ve dış alanların her ikisini de gösteriyor. Kürenin üst kutbunda yukarı yönelmiş dış alan bir dipolün alanını veren Denk. 14'e göre

$$E_z = \frac{2p_0}{r^3} = \frac{2(4\pi r_0{}^3P/3)}{r_0{}^3} = \frac{8\pi P}{3} \quad (\text{dışta}) \quad (44)$$

olur ki, bu aşağı yönelmiş iç alanın büyüklüğünün tam iki katıdır.

Bu kutuplanmış bir ortamın yüzeyi üzerindeki alan bileşenlerinin davranışları bakımından geçerli genel kuralların bir örneğidir. $\mathbf{E}$ alanı kutuplanmış bir ortamın sınırı üzerinde $\sigma = P_n$ gibi bir yüzey yükü taşıyan boşluktaki bir yüzey halinde olduğu gibi süreksizdir. Buradaki P_n simgesi $\mathbf{P}$'nin yüzeye dik ve dışa yönelmiş normal bileşenidir. O halde $\mathbf{E}$'nin normal bileşeni $4\pi P_n$ gibi keskin bir değişim gösterdiği halde aynı $\mathbf{E}$ alanının sınıra koşut bileşeni sürekli kalır, yani, sınırın her iki yanında aynı değerde bulunur. Gerçekten küremizin kuzey kutbunda E_z 'nin net değişimi $8\pi P/3 - (-4\pi P/3)$ veya $4\pi P$ olur. Dipol alanını veren Denk. 14'e bakarak $\mathbf{E}$'nin yüzeye koşut bileşeninin, küre üzerinde her yerde, ayırma yüzeyini geçerken sürekli kaldığını sınayabilirsiniz.

Bu sonuçların hiç biri kürenin nasıl kutuplandığına bağlı değildir. Herhangi bir kürenin biteviye kutuplanmış bulunduğunu varsayarsak Şek. 9.27 bunun alanının nasıl olduğunu gösterir. Buna başka kaynaklardan gelen başka bir alan katılabilir ve böylece olabilecek birçok dizge anlatılabilir. Böyle bir durum $\mathbf{E}$'nin kutuplanmış ortamın sınır üzerindeki süreksizliğini etkileyemez. Bu nedenle az önce verilen kurallar herhangi bir dizge halinde uygulanabilir, ve $\mathbf{E}$ ' yalnız var olan kutuplanma durumu ile belirlenir.

9.11 Biteviye Bir Alan İçinde Bir Dielektrik Küre

Örnek olarak ϵ dielektrik sabiti ile belirli bir dielektrik maddeden bir kürenin Şek. 9.28'de görüldüğü gibi araları boş koşut yapraklı bir sığacın biteviye $\mathbf{E}_0$ alanı içine konulduğunu düşünelim. Bu alan kaynaklarının, yani yapraklar üzerindeki yüklerin, küreden uzak kaldıklarını ve dolayısıyla bu yüklerin, kürenin varlığı ile yer değiştirmediklerini düşünelim. O zaman kürenin yakınlarındaki alan ne olursa olsun uzaktaki alan $\mathbf{E}_0$ kalacaktır. Bu küreyi biteviye bir alan içine koymakla anladığımız budur. Küre yakınlarında toplam $\mathbf{E}$ alanı artık biteviye değildir. Bu, $\mathbf{E}$ alanı uzaktaki kaynakların biteviye $\mathbf{E}$ alanı ile kutuplanmış maddenin kendisinin uyardığı $\mathbf{E}'$ alanının toplamına eşittir:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 + \mathbf{E}' \quad (45)$$

Bu $\mathbf{E}'$ alanı dielektriğin $\mathbf{P}$ kutuplanmasına, dolayısiyle küre içindeki $\mathbf{E}'$'nin değerine bağlıdır:

$$\mathbf{P} = \chi_e \mathbf{E} = \frac{\epsilon - 1}{4\pi}\mathbf{E} \quad (46)$$

Ama $\mathbf{E}$ toplam alanının ne olduğunu yine de bilmiyoruz; yalnızca Denk. 46'nın kürenin içindeki bir nokta için geçerli olması gerektiğini biliyoruz. Eğer küre biteviye kutuplu hale gelirse sonuçlarımızın bu savımızı haklı çıkarması gerekir. Kürenin içinde kutuplanma ile kendi $\mathbf{E}'$ alanı arasındaki bağıntı Denk. 43 tarafından zaten verilmiş olur. (Denk. 43'de bu alanı göstermek için $\mathbf{E}$ simgesini kullanıyorduk; bu varolan tek alandı.)

$$\mathbf{E}'_{\text{iç}} = -\frac{4\pi\mathbf{P}}{3} \quad (47)$$

Şimdi $\mathbf{P}$ ile $\mathbf{E}'$ yü elemek ve böylece $\mathbf{E}$, ile $\mathbf{E}_0$'ı bağlayan bir denklem elde etmek için elimizde yeterince bağıntı var. Denk. 45 ve 47'yı kullanarak

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 - \frac{4\pi\mathbf{P}}{3} = \mathbf{E}_0 - \frac{\epsilon - 1}{3}\mathbf{E} \quad (48)$$

buluruz. $\mathbf{E}$ için çözersek,

$$\mathbf{E} = \left(\frac{3}{2+\epsilon}\right)\mathbf{E}_0 \quad (49)$$

çıkar. ϵ birden büyük olduğu için $3/(2+\epsilon)$ çarpanı birden küçük olacaktır. Bu demektir ki dielektriğin içindeki alan $\mathbf{E}_0$ 'dan daha zayıftır. Buna göre kutuplanma yöngüsü

$$\mathbf{P} = \frac{\epsilon - 1}{4\pi}\mathbf{E} = \frac{3}{4\pi}\left(\frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 2}\right)\mathbf{E}_0 \quad (50)$$

olur. Böylece kutuplanmanın biteviyeliği üzerindeki varsayımın tutarlı olduğu görülüyor*. Kürenin dışındaki $\mathbf{E}$ toplam alanı hesaplamak için, $\mathbf{E}_0$ 'a kürenin merkezinde oturan ve döngüsü $\mathbf{P}$ çarpı kürenin hacmına eşit olan ikizkutbun alanını yöngül olarak eklemek zorundayız. $\mathbf{E}$ alanının dielektrik kürenin içindeki ve dışındaki bazı alan çizgileri Şek. 9.29'da gösterilmiştir.

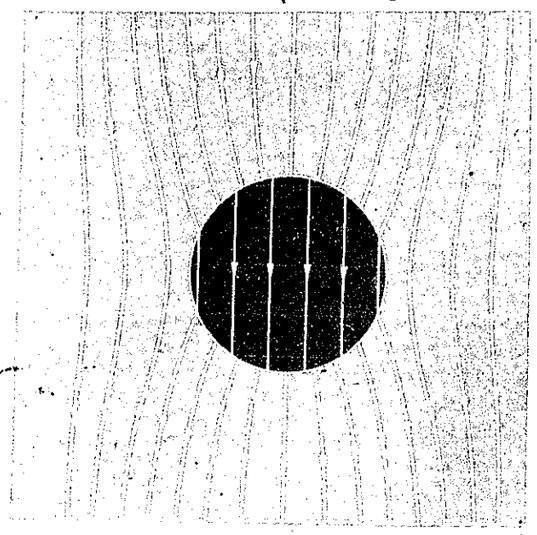
*Dizgenin işlenmesini kolaylaştıran budur. Biteviye bir alan içinde sonlu uzunlukta bir dielektrik silindir için bu varsayım işlemezdi. Örneğin uzunluğu çapı kadar olan biteviye kutuplu bir silindirin $\mathbf{E}'$ alanı silindirin içinde biteviye değildir. (Bu nasıl olabilir?) Bu nedenle $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 + \mathbf{E}'$ biteviye olamaz, ama ne olursa olsun $\mathbf{P} = \chi_e\mathbf{E}$ biteviye olamaz. Gerçekten düzgün bir alan içinde sadece küreyi özel bir hâl olarak içeren ellipsoit biçimli dielektrik maddeler biteviye bir kutuplanma edinirler.

9.12 Dielektrik Ortam İçindeki Bir Yükün Alanı ve Gauss Yasası

Türdeş ve çok büyük bir dielektrik madde hacmı içinde bir yerde, bu dielektriğin molekül yapısı dışında yoğun bir Q yükü bulunduğunu düşünelim. Örneğin küçük bir metal küre yüklenmiş ve bir yağ tenekesi içine konulmuş olsun. Daha önce görüldüğü gibi yağın içindeki elektrik alanı, Q 'nün boşlukta uyaracağı alanın $1/\epsilon$ katıdır:

$$E = \frac{Q}{\epsilon r^2} \quad (51)$$

Şimdi Gauss yasasının nasıl işleyeceğini görmek ilginçtir. $\mathbf{E}$'nin (bu genil ya da uzay ortalaması alan dır) Q, 'yu saran bir küre üzerinde alınan yüzey tümlevi Denk 51'e inanıyorsak $4\pi Q$ değil $4\pi Q/\epsilon$ verir.



Şek. 9.29 Dielektrik kürenin içindeki ve dışındaki $\mathbf{E}$ toplam alanı.

Neden böyle oldu? Bunun yanıtı Gauss yüzeyinin içinde kalan yükün yalnız Q olmadığı, Q 'den başka dielektriğin moleküllerini ve atomlarını oluşturan öteki yüklerin de varolduğudur. Genelde yağın herhangi bir hacmı elektrikçe ılın olacaktır. Ama şimdi yağ ışınsal doğrultuda kutuplandığına göre, artı olabilecek Q yükü yağ moleküllerindeki eksi yükleri çekmiş ve artı yükleri de öteye itmiştir. Bunun neden olduğu yer değiştirme, çok az da olsa Q'nün çevresinde çizeceğimiz bir küre içinde, ortalama olarak, eksi yağ molekülü yükü artı yükden daha fazla olur. Dolayısıyla küre içindeki net yük, merkezdeki Q yabancı" yükü de hesaba katarak Q 'den daha küçük, daha kesincesi Q/ϵ olur.

Çoğu zaman "yabancı" Q yükü ile dielektriğin kendi yükleri arasında bu ayrımı gözetmek ya da bir ayırım yapmak yararlıdır. Bunlardan birincisini bir ölçüde denetim altında tutabiliriz, yani, bir sığacın yaprakları gibi bir cisme yük verebiliriz ya da ondan yaprakları gibi bir cisme yük verebiliriz ya da ondan yük alabiliriz. Bu yüzden buna çoğu kez *"özgür"* yükler denir. Dielektriğin atomlarının ve moleküllerinin parçası olan öteki yükler ise "bağlı" yüklerdir. Bunlar için *yapısal yük* terimi daha uygun olabilir. Bu yükler devinimli değildir, ama yerlerine az çok esnek olarak bağlı oldukları için hafif yer değiştirme ile kutuplanmaya katkıda bulunurlar.

Sadece özgür yüklere Gauss yasası gibi bir ilişki ile bağlanan bir yöngüsel nicelik arayabiliriz. Az önce incelediğimiz, içine bir nokta yük batırılmış bir dielektrikde, $\epsilon\mathbf{E}$ yöngüsü bu özelliği taşımaktadır, yani kapalı bir S yüzeyi üzerinde alınan $\int\epsilon\mathbf{E}\cdot da$ tümlevinin değeri, bu yüzey Q'yü içermekte ise $4\pi Q$'ye, yoksa sıfıra eşit olur. Üstüste gelebilme ilkesi uyarınca, bu bağıntının türdeş sonsuz bir dielektrik ortamda yoğunluğu $\rho_{\text{özg}}(x,y,z)$ olan herhangi bir özgür yük topluluğu için de doğru olması gerekir:

$$\int_S \epsilon\mathbf{E}\cdot da = 4\pi\int_V \rho_{\text{özg}}\,dv \qquad (52)$$

Burada V , S yüzeyinin sardığı oylumdur. Bu gibi bir tümlev bağıntısı $\epsilon\mathbf{E}$ yöngü alanının ıraksaması ile özgür yük yoğunluğu arasında "yerel" bir bağıntı bulunmasını gerektirir:

$$\text{ırak}\,(\epsilon\mathbf{E}) = 4\pi\rho_{\text{özg}} \qquad (53)$$

Formüldeki ϵ ortam boyunca sabit sayıldığına göre Denk. 53 yeni bir şey söylememektedir. Ama bu eşitlik bağlı yüklerin rolünü ayırmamıza yardım eder. Ne olursa olsun, herhangi bir dizgede $\mathbf{E}$ elektrik alanı ile, $\rho_{\text{özg}}+\rho_{\text{bağ}}$ toplam yük yoğunluğu arasındaki temel bağıntı geçerli kalmaktadır:

$$\text{ırak}\,\mathbf{E} = 4\pi(\rho_{\text{özg}}+\rho_{\text{bağ}}) \qquad (54)$$

Denk. 53 ve 54'den

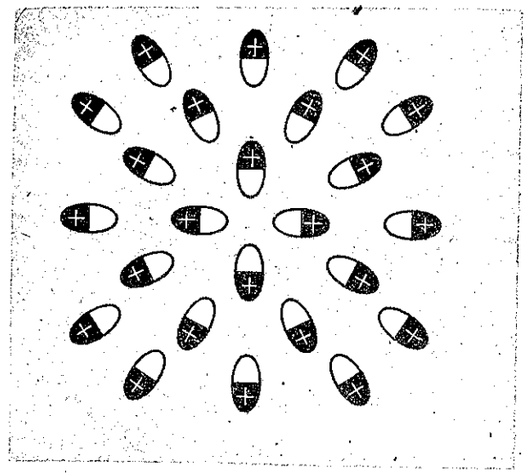
$$\text{ırak}\,(\epsilon-1)\mathbf{E} = -4\pi\rho_{\text{bağ}} \qquad (55)$$

çıkarılır. Denk. 38'e göre $(\epsilon-1)\mathbf{E} = 4\pi\mathbf{P}$ olduğundan Denk. 55'in

$$\text{ırak}\,\mathbf{P} = -\rho_{\text{bağ}} \qquad (56)$$

olması gerekir.

Denklem 56 bir komşuluk içindeki bağlı yük dağılımının değişik iki görünüşü üzerine bir yazımdır ve başka hiç bir şey söylememektedir. Bu nedenle dizgenin içinde başka yerlerdeki koşullara bağlı olamadığı gibi, yapısal yüklerin özel bir düzenlenişinin nasıl sürdürüldüğüne de bağlı değildir. Bir bölgede, oylum birimi başına herhangi bir fazlalık biçiminde, yani, çekirdek protonlarının atom elektronlarından fazlalığı gibi gözüken bir yapısal (bağlı) yük düzenlenişi, belli bir ıraksaması olan bir kutuplanmayı temsil etmek zorundadır. Böylece Denk. 56 yalnız sınırsız dielektrik için değil, evrensel olarak geçerli olmalıdır. Denk, 56'da deyimlenen özdeşliği duyabilmek için, kutuplu birkaç molekülü artı ıraksamalı bir düzenlenişe getirdiğimizi tasarlayabilirsiniz (Şek. 9.30). Burada dipoller dışa doğru yönelmişlerdir ve bu durum orta kısımda küçük bir eksi yük yoğunluğu bırakmıştır. Kuşkusuz Denk. 56, o büyüklükte hacımlar üzerinde alınan ortalamalar için geçerli olmaktadır ki $\mathbf{P}$ ve $\rho_{\text{bağ}}$ sürekli değişen nicelikler gibi işlem görebilsin.



Şek. 9.30 Molekül dipollerininırak $\mathbf{P}>0$ olacak biçimde düzenlenmesi. Eksi yüklerin orta kısımda birikmesinin Denk. 56 ile bağdaştığına bakınız.

Denk. 54 ve 56'dan

$$\text{ırak}\,(\mathbf{E}+4\pi\mathbf{P}) = 4\pi\rho_{\text{özg}} \qquad (57)$$

bağıntısı elde edilir. Bu, $\mathbf{E}$ ile $\mathbf{P}$ arasındaki bir ilişkiye bağlı değildir. Eşitlik $\mathbf{P}$'nin $\mathbf{E}$'ye oranlı olduğu, dielektrik dediğimiz maddeler hali için sınırlanmış değildir.

Bu son denklemde ortaya çıkan $\mathbf{E}+4\pi\mathbf{P}$ topluluğuna *elektriksel kayma yöngüsü* diye özel bir ad vermek ve bunu ayrıca $\mathbf{D}$ simgesi ile göstermek adet olmuştur. Yani $\mathbf{D}$'yi

$$\mathbf{D} = \mathbf{E}+4\pi\mathbf{P} \qquad (58)$$

eşitliği ile tanımlarız. Eşyönlü bir ortam içinde $\mathbf{D}$ yalınca $\epsilon\mathbf{E}$,'dir, ama

$$\text{ırak}\,\mathbf{D} = 4\pi\rho_{\text{özg}} \qquad (59)$$

bağıntısı $\mathbf{P}$, $\mathbf{E}$. ve ρ genil niceliklerinin tanımlanabildiği herhangi bir durumda geçerli bulunmaktadır.

E'nin kaynağı toplam yük dağılımı ρ olduğu anlamda, Denk. 59'un görünüşü $\mathbf{D}$'ye kaynağı ($\rho_{\text{özg}}$) özgür yük yoğunluğu dağılımı olan bir yöngü alanı gibi bakmamız gerektiğini anlatır; ama bu anlayış yanlış olur. $\mathbf{E}$ durukyük alanı (buna sabit bir alan katılması halini bir yana ayırırsak) ρ yük yoğunluğu dağılımı ile biricik bir nicelik olarak belirlenir, zira ırak $\mathbf{E} = 4\pi\rho$ yasasına dön $\mathbf{E} = 0$ biçiminde deyimlenen evrensel bir koşul daha katılır. Genel olarak dönül $\mathbf{D} = 0$ koşulu doğru değildir. Bu nedenle özgür yük dağılımı Denk. 59 yardımı ile $\mathbf{D}$'yi belirlemeye yeterli değildir. Bu belirleme için farklı dielektrik yüzeylerdeki sınır koşulları gibi başka şeyler gerekir. $\mathbf{D}$ üzerindeki sınır koşulları, Kes. 9.10'un sonlarına doğru $\mathbf{E}$ ile $\mathbf{P}$ için yazılanların değişik bir biçiminden başka bir şey olmayacaktır.

Problemi ele alışımızda, madde içindeki elektrik alanına, $\mathbf{D}$'nin de karıştırılması yapmacıklı bir tutumdur ve olayın bütünü düşünülünce pek de yararlı değildir. Burada $\mathbf{D}$'yi belirtmemizin nedeni, bunun Maxwell'den başlayarak* gelenekleşmiş olması, ve öğrencinin bu kavramı, hakettiğinden daha büyük saygı ile işleyen birçok kitapda rastlayacagını bildiğimizdendir.

Madde içinde elektrik alanı üzerinde temel sonuçlarımız şöyle özetlenebilir:

(*i*) Madde kutuplanabilir ve kutuplanma koşulu genil (makroskopik) alanla ilgilendiğimiz sürece $\mathbf{P}$ kutuplanma yoğunluğu ile tümcek anlatılabilir; kutuplanma dediğimiz oylum birimi başına dipol döngüdür. Böyle bir maddenin $\mathbf{E}$ elektrik alanı-

*Maxwell'in elektromıknatıslık kuramında $\mathbf{D}$'ye önem verilmesi ve onun bu niceliğe kayma yöngüsü adını seçmesi bu fencinin "eter" için bir taslam araırken, daha çok mekaniksel yönde yaklaşmasından olabilir. Whittaker klasik bir yapıt olan *Eter kuramlarının ve Elektriğin Tarihi* adlı kitabının Cilt 1 sayfa 226'sında bu eğilimin Maxwell'in kendisini de bir noktada, yani kuramının ışığın bir dielektrikten yansıması problemine uygulanması noktasında yanılttığını söylemektedir.

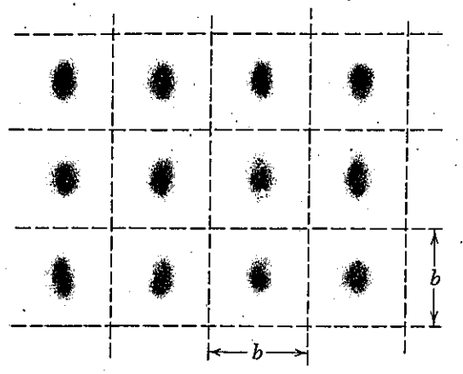
na katkısı, yoğunluğu $\rho_{bağ} = -\text{ıra}\ \mathbf{P}$ olan bir yük dağılımının boşluktaki katkısının aynıdır. Özellikle $\mathbf{P}$ bakımından bir süreksizlik gösteren kutuplu madde yüzeyinde bu yük yoğunluğu $\sigma = -P_n$ yüzey yoğunluğuna indirgenir. Bir özgür yük dağılımının katılması ile elektrik alanı toplam yük dağılımının boşlukta uyarabileceği elektrik alanı olur. Yani bu alan maddenin içindeki ve dışındaki genil $\mathbf{E}$ alanıdır; burada madde içinde deyince gerçek minil alanın uzay boyunca ortalamasının anlaşıldığını unutmayalım.

(ii) Bir madde içinde $\mathbf{P}$, $\mathbf{E}$ ile oranlı ise bu madde bir dielektriktir. Bu maddenin belirtkin birer niceliği olarak χ_e elektrik alınganlığını ve ϵ dielektrik sabitini şöyle tanımlıyoruz: $\chi_e = \mathbf{P}/\mathbf{E}$ ve $\epsilon = 1 + 4\pi\chi_e$ Bir dielektrik içine daldırılan özgür yükler, aynı yüklerin boşlukta uyardıkları alanın $1/\epsilon$ katı yeğinlikte bir alan uyarırlar.

9.13 Elektriksel Alınganlık İle Atomsal Kutuplanırlık Arasındaki İlişki

Bir madde içindeki $\mathbf{P}$ kutuplanma yoğunluğunun $\mathbf{E}$ genil elektrik alanına oranı χ_e elektrik alınganlığını verir. Maddenin, atomsal kutuplanma yatkınlığı α olan atomlardan oluştuğunu düşünelim. Bu halde $\mathbf{P}$ atomların $\mathbf{P}$ ikizkutup döngülerinin birim hacım için toplamından başka bir şey değildir. Eğer α 'yı ve atomu kutuplandırmak için kullandığımız elektrik alanını biliyorsak bu atomda irgitimle oluşan döngüyü kolayca kestirebiliriz. Öyle ise α 'yı ve birim hacımdaki atomların N sayısını biliyorsak χ_e alınganlığının ne olduğunu kestirebilmemiz gerekir. Şimdi χ_e 'yı α 'ya bağlayan bir kuram geliştirmeğe çalışalım.

Bir A atomunda irgitimle oluşan dipol döngüsü, bu atomu etkileyen tüm kaynakların uyardığı alan ile belirlenir. Bu, komşuluk içindeki genil $\mathbf{E}$ alanı ile aynı değildir. Zira, bu $\mathbf{E}$ alanında, A atomunun kendi yüklerinin de katkısı olur. Böylece ilgilendiğimiz problem daha başında ilginç bir çarpıklık gösterir. Durumu açıklığa kavuşturmak için çok özel bir yapı ele alalım. Maddemiz, küb biçimli yalın



Şek. 9.31 Bir kübsel kristal içinde atomların düzenlenişi. Atomlardan herbiri kutuplanmış olarak gösterilmiştir.

bir kristal yapısı içinde bulunan aynı tür atomların kurduğu bir örgü olsun. ve yakın iki komşunun aralığı b cm olsun. Her atomun kutuplanma yatkınlığı α 'dır. Şek. 9.31 bu örgünün bir kesitini göstermektedir. Bu bölgedeki genil $\mathbf{E}$ alanının doğrultusu kutuplanmış atomların biçim değişikliğinden belli olmaktadır. Şimdi sorumuz, bu biçim değişikliğine yolaçan alan yeğinliğinin ne olduğudur. Her atomun küb biçimli kutu içinde kaldığı düşünülebilir ve bu atomların örgü aralığından epey küçük olduğunu, ve dolayısıyla atomun bütün yükünün kutunun merkezine yakın bölgede toplandığını düşünmek akla yatkındır.

Şimdi A atomuna etkiyen alanı $\mathbf{E}_{başka}$ ile göstereceğiz. Bu alanın kaynakları dizgenin öteki atomları, dıştaki yükler ve bütün öteki varlıklardır. $\mathbf{E}_{başka}$ yöngüsü sihirli bir elle A atomunu dışarıya alıp bütün öteki yük dağılımlarının A atomu varken ki yerlerinde ve biçimlerinde dondurulduğu halde alanın A kutusu içindeki değerini verir. $\mathbf{E}_{başka}$, A kutusunun her yerinde sabit olmayacaktır; ama bunun kutu içindeki ortalama değerinin istediğimiz değere yeterince yakın olduğunu düşüneceğiz. A kutusunun sardığı oylum içindeki ortalama alan demekle bu kutunun oylumuna bölünen $\int \mathbf{E}\, dv$ tümlevini anlıyoruz. Böyle bir ortalamayı $\langle\ \rangle_{kutu}$ ile göstereceğiz.

Şimdi $\mathbf{E}_{kendi}$ A atomunun kendi alanını göstersin. Buna göre her noktadaki $\mathbf{E}_{min}$ toplam minil alanı

$$\mathbf{E}_{min} = \mathbf{E}_{başka} + \mathbf{E}_{kendi} \qquad (60)$$

olur. $\mathbf{E}$ genil alanının $\mathbf{E}_{min}$ minil alanının uzay içindeki ortalaması olduğunu biliyoruz. $\mathbf{E}_{min}$ 'in değişiminin her kutu içinde aynı olduğu kuşkusuz. Bundan başka kutular arada boşluk kalmayacakbiçimde uzayı doldururlar. Bu yüzden bir tek kutu içinde $\mathbf{E}_{min}$ 'in ortalaması, bir çok kutu içeren geniş bir bölge üzerinde alınan ortalama ile aynı olmalıdır*. O halde bunun sonucu

$$\langle \mathbf{E}_{min} \rangle_{kutu} = \mathbf{E} \qquad (61)$$

olur. Ama $\langle \mathbf{E}_{min} \rangle_{kutu} = \langle \mathbf{E}_{başka} \rangle_{kutu} + \langle \mathbf{E}_{kendi} \rangle_{kutu}$ dır. Yani bir toplamın ortalaması ortalamaların toplamına eşit olduğundan, bizim aramakta olduğumuz $\langle \mathbf{E}_{başka} \rangle_{kutu}$ alanı,

$$\langle \mathbf{E}_{başka} \rangle_{kutu} = \mathbf{E} - \langle \mathbf{E}_{kendi} \rangle_{kutu} \qquad (62)$$

ile verilir.

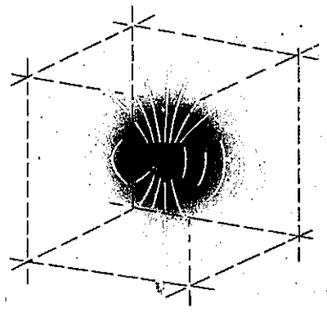
Böylece problemimiz $\langle \mathbf{E}_{kendi} \rangle_{kutu}$ 'nun yani bir atomun alanı içinde bulunduğu kutu içindeki ortalamasının hesabına indirgenmiş oldu.

$$\langle \mathbf{E}_{kendi} \rangle_{kutu} = \frac{1}{b^3} \int_{kutu} \mathbf{E}_{kendi}\, dv \qquad (63)$$

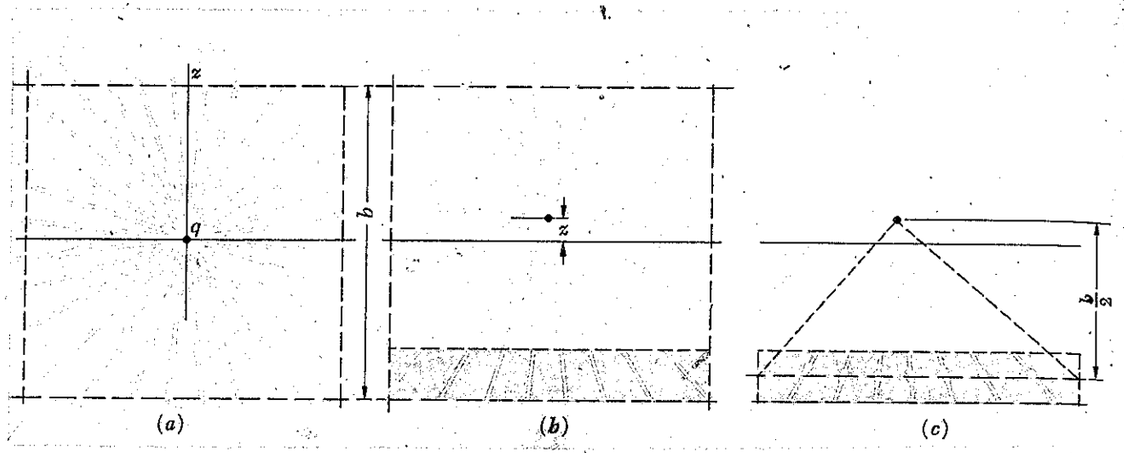
*Bu önemli söylemi düşünmeden onaylamayın. Arada aralıklar kalması her şeyi altüst ederdi. Neden?

Tümlev hesabına, kutu içinde bulunan ve atomun yük dağılımı içindeki olduğu gibi dışındaki bütün hacım öğelerini almamız gerekir. Şek. 9.32, $\mathbf{E}_{kendi}$ 'nin neye benzediğini belirtiyor. Bu işimizin ne güç olduğunu gösteriyor. Bununla birlikte her defa, bir öğeyi işe karıştıran bir yük dağılımını ele alarak işleyebiliriz. Bunun için bir tek q nokta yükünün $\mathbf{E}_q$ alanının kutu içindeki ortalamasını hesaplayalım.

Eğer nokta yük Şek. 9.33 a'da olduğu gibi kutunun merkezinde olsaydı $\int_{kutu} \mathbf{E}_q\, dv$ tümlevi sıfır olurdu. Bu kutunun içinde her oylum öğesine, alan yeğinliği eşit ama, zıt yönelmiş ikinci bir öğe raslaştıran bakışımdan ileri gelmektedir. Şimdi q yükünü Şek. 9.33 b'de olduğu gibi yukarı doğru küçük bir z uzaklığınca kaydıralım. Kutunun tabanında $2z$ kalınlığında bir katman kalır ki, bu üstte bulunan başka bir katman ile denkleşmemiştir. İşte $\int_{kutu} \mathbf{E}_q\, dv$ tümlevine katkıda bulunan sadece bu katmandır. Açıkca görüldüğü gibi sadece E_{qz}, 'nin ortalamasını hesaplamak durumundayız; E_{qx} ve E_{qy} 'nin ortalama değerleri yine de sıfırdır. Eğer E_{qz} 'nin katmanın $2z$ kalınlığı boyunca uğradığı küçük değişimi umursa-



Şek. 9.32 A atomu ile yalnız bu atomun uyardığı $\mathbf{E}_{kendi}$ alanı.



Şek. 9.33 Kutunun merkezinden biraz ayrılmış bir q nokta yükünün uyardığı alanın "kutu ortalaması"nın hesaplanması.

mazsak, E_{qz} 'nin bu katman oylumu boyunca alınan oylum tümlevi, E_{qz} 'nin katmanın orta düzlem olan kare boyunca alınan yüzey tümlevi çarpı $2z$ 'ye eşit olur (Şek.9.33 *c*.).

$$\int_{\text{katman}} E_{qz}\, dv = 2z \int_{\text{kare}} E_{qz}\, da \tag{64}$$

Burada Gauss yasası yardımımıza yetişir; zira Denk. 64'deki yüzey tümlevi merkezinde q yükü bulunan kübün bir yüzeyinden geçen akıyı veriyor. Bu akı kübün eşdeğer altı yüzeyi olduğuna göre tam $4\pi q/6$, 'ya eşit olacaktır. Bundan $2z \int_{\text{kare}} E_{qz}\, da = -2z(4\pi q/6) = -4\pi qz/3$ sonucunu çıkarırız ki bu

$$\langle E_{qz}\rangle_{\text{kutu}} = \frac{1}{b^3}\int_{\text{kutu}} E_{qz}\, dv = \frac{-4\pi qz}{3b^3} \tag{65}$$

ortalama alan değerini verir. Eksi imlemeli bir artı yükün yukarı doğru kayması, kutu içinde aşağı yönelmiş bir alanın ortaya çıkmasına yol açtığını anlatır. Benzer bir yazım, x veya y doğrultusunda bir kaymaya uygulanabilir. Bu nedenle merkezden herhangi bir doğrultudaki $\mathbf{r}$ küçük yerdeğiştirmesi kutu içindeki ortalama değeri $-4\pi q\mathbf{r}/3b^3$. olan bir alan uyarır. O halde yük yoğunluğu dağılımı $\rho(x,y,z)$, olan A atomunun bütünü için kutu içindeki ortalama alan

$$\langle \mathbf{E}_{\text{kendi}}\rangle_{\text{kutu}} = \frac{-4\pi}{3b^3}\int \mathbf{r}\rho\, dv \tag{66}$$

olacaktır. Buradaki $\int \mathbf{r}\rho\, dv$ tümlevinin yük dağılımının $\mathbf{p}$ *ikizkutup döngüsü* olduğunu görmüş olmalısınız. (Denk. 10'da verilen dipol momenti tanımı ile karşılaştırınız.) O halde şimdi

$$\langle \mathbf{E}_{\text{kendi}}\rangle_{\text{kutu}} = \frac{-4\pi}{3b^3}\mathbf{p} \tag{67}$$

buluruz.

Artık önümüz açık. Denk. 62'den hemen

$$\langle \mathbf{E}_{\text{başka}}\rangle_{\text{kutu}} = \mathbf{E} - \frac{4\pi}{3b^3}\mathbf{p} \tag{68}$$

elde ederiz. Eğer atomu kutuplamada etkili alanın $\langle \mathbf{E}_{\text{başka}}\rangle_{\text{kutu}}$ olduğunu söylersek, $\mathbf{p}$'nin bu alana atomsal kutuplanma yatkınlığı ile bağlandığını ileri sürebiliriz:

$$\mathbf{p} = \alpha\langle \mathbf{E}_{\text{başka}}\rangle_{\text{kutu}} \tag{69}$$

Denk. 68 ve 69'dan $\mathbf{p}$ ile $\mathbf{E}$'yi bağlayan bağıntıyı elde edebiliriz.

$$\mathbf{p} = \alpha\left[\mathbf{E} + \frac{4\pi\mathbf{p}}{3b^3}\right] \tag{70}$$

Bu ifade genil kutuplanma yoğunluğu olan $\mathbf{P}$ cinsinden yazılabilir. Kutuplanmış atomların santimetre kübdeki sayısı olan N, $1/b^3$, 'e eşit olduğuna göre $\mathbf{P}=N\mathbf{p} = \mathbf{p}/b^3$. 'dür. Bunu Denk. 70'e taşırsak

$$\mathbf{P} = N\alpha\left[\mathbf{E} + \frac{4\pi\mathbf{P}}{3}\right] \tag{71}$$

buluruz ki bu da düzenlenirse

$$\mathbf{P} = \left[\frac{N\alpha}{1 - (4\pi/3)N\alpha}\right]\mathbf{E} \tag{72}$$

biçimine girer. Köşeli ayraç içindeki çarpan X_e elektrik alınganlığına eşit olmalıdır.

Denk. 72'ye varan yol üzerinde iki yaklaşıklık oluradık. Birincisi atomsal yük dağılımı tümü ile kutunun merkezine yakın saydık; z ya da $\mathbf{r}$, b'ye bakınca küçük olmazsa Denk 65 ve 66, sağlam olmayacaktır. İkincisi atomu kutuplandıran alan için kutunun merkezindeki $\mathbf{E}_{\text{başka}}$ değerini alacak yerde $\mathbf{E}_{\text{başka}}$ 'nın kutu içindeki ortalamasını kullandık. Birçok kristalde olduğu gibi atomlar sıkıca yığılmış ise birinci yaklaşıklık pek gerçekci değildir, ikincisindeki sorun ise yersizdir. Gerçek kristallerin Denk. 72'ye tam tamına uymasını bekleyemeyiz.

Maddenin atomları birbirlerinden çok aralı olurlar ve $4\pi N\alpha/3 \ll 1$, olursa, Denk. 72'nin paydasındaki bu terimi savsayabiliriz ve böylece elimizde

$$\chi_e \doteq N\alpha \tag{73}$$

kalır. Bu, dipoller etkileşimine göz yumsaydık varacağımız sonuç olurdu. Bu durum normal yoğunlukta gazlara oldukça iyi uygulanabilir, çünkü bu halde atılan terim 10^{-3} basamağındadır. Bu sınır halinde atomların geometrik düzenlenişleri önemli değildir sadece santimetre kübdeki sayılarının önemi var. O halde alçak basınçlı bir gazın dielektrik sabitini keskince ölçerek, dipoller etkileşiminin hiç bir karışıklığa yol açmasına yer bırakmadan atomsal kutuplanma yatkınlığını bulabiliriz. Sonra aynı maddenin daha yoğun hali üzerinde yapılan ölçüler* Denk. 72 gibi kuramsal formüllerin sınanmasında kullanılabilir.

Denk. 72'nin paydasındaki $-4\pi N\alpha/3$ terimi kristal içindeki kutuplu atomların etkileşimini yansıtır. Şurası açıktır ki bu etkileşimin varlığı, daha büyük bir kutuplanmaya götüren bir destekleşme niteliğindedir. Matematiksel yazımlara saygı duyarsak bu şaşırtıcı bir olanak yaratır: $N\alpha$ niceliği $4\pi N\alpha/3$ katsayısını bire eşit ya da ondan daha büyük kılacak kadar büyürse ne olur? Yazımda görüldüğü gibi X_e sonsuza doğru yol alır. Bu uygulanan alan sıfır olsa da bir kutuplanma anlamına gelir. Bu saçma gibi görünse de tam öyle değildir. Kimi kristaller bilinmektedir ki kendiliğinden bir elektriksel kutuplanma göstermektedirler. Bununla birlikte bu halde, irgitimle artık kuramımız buraya uygulanamaz. Aslında $4\pi N\alpha/3$ 'ü 1'e yaklaştırmak için atomların o kadar sıkışık durmaları gerekir ki önerdiğimiz yaklaşıklıklar artık geçerli olamaz. (bak. Prob. 9.30).

*Denk. 72'de verilen bağıntının sade kübik bakışım gösteren bir kristal hali için değil uzayda gelişigüzel yerler alan bir gaz hali için de doğru olduğu gösterilebilir. Bunun en iyi denel doğrulaması, gazların dielektrik sabitlerinin oldukça yüksek basınç ve yoğunlukta ölçülmesinden gelir (Bak Prob. 9.28).

9.14 Kutuplanımda Enerji Değişimleri

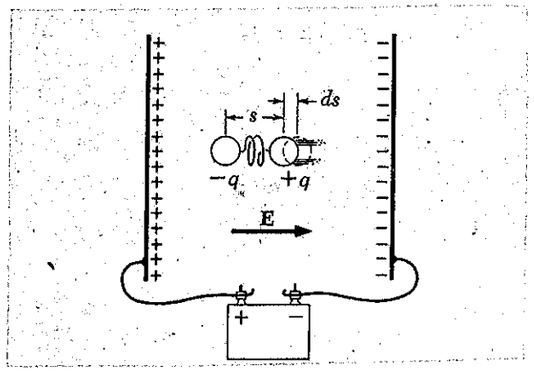
Bir sığayı bir V gerilimi ile yüklemek için $\frac{1}{2}CV^2$ tutarında iş yapılması gerekir. Sığaçı bir dış çevrim üzerinden boşaltmak ile bunca enerji yeniden geriye alınabilir. Enerji yüklü sığacın içinde birikmiş idi. Böl. 2'de duruk yüklü yapılarda biriken enerjinin, elektrik alanına, $E^2/8\pi$ ergs/cm^3 gibi bir enerji yoğunluğu tanımakla hesaplanabileceğini görmüştük. Bu bilgimizi gözden geçirmiş olmak için, içi boş, koşut yapraklı bir sığacın yaprakları yüzölçümü A ve yapraklar aralığı t, olduğuna göre, alan yeğinliğinin V/t, olduğunu, dolayısiyle $(E^2/8\pi) \times$ oylum $= V^2A/8\pi t = \frac{1}{2}CV^2$, olduğunu anımsayalım.

Eğer sığa dielektrik sabiti ϵ olan bir yalıtkan ile doldurulmuş ve aynı V gerilim farkı ile yüklenmiş ise harcanan iş ϵ, katınca büyük olacaktır, çünkü, C'nin değeri bu katsayı katınca büyüktür. Bununla birlikte E aynıdır. Bu nedenle bir dielektriğin içinde birim hacmà düşen enerji tutarı $E^2/8\pi$, değil $\epsilon E^2/8\pi$. 'dir. Bu her duruk dizge haline genelleştirilebilir. Buna göre Denk. 2.36 yerine şimdi

$$\text{Enerji} = \frac{1}{8\pi}\int \epsilon E^2 \, dv \tag{74}$$

yazımı geçerlidir.

Buradaki "artık" enerji nerede birikmiştir? Bir elektriksel alanın uygulanabildiği, çevresinden yalıtılmış kutuplanabilir bir molekül alalım. Şek. 9.34'de bu molekül esnek bir yayın uçlarına bağlanmış iki yükle gösterimlenmiştir. Bunun p dipol döngüsü, büyüklüğü qs olan bir yöngüdür. Moleküle etkiyen $\mathbf{E}$ alanı şekilde görülen batarya ve bu bataryanın bağlandığı sığaç yaprakları ile sağlanmıştır. $\mathbf{E}$ alanı var iken yükler bir ds uzunluğunca kadar aralanmış olsun. Bu durumda döngünün değeri qs'den $q(s + ds)$.ye çıkmıştır. Aynı zamanda bu sırada $\mathbf{E}$ doğrultusunda bir yük devinimi olmuştur ki bu $+q$ yükünün ds kadar yer değiştirmesine eşdeğerdir. (Dizgenin bir ucunu mu, yoksa her ikisinin birden mi devindiği önemli değil.) Böylece molekül üzerinde $Eq\ ds$ tutarında



Şek. 9.34 Kutuplanabilir bir molekül bir esnek yayla tutturulmuş iki yük gibidir. Bir E alanı içinde yay gerilir.

iş yapılmış demektir. Bu iş eninde sonunda, yine alan kaynağından sağlanır, yani Şek. 9.34'de sığaç yaprakları arasındaki sabit gerilim farkını ayakta tutan bataryadan alınır. Molekül üzerinde yapılan işi dW ile gösterirsek

$$dW = Eq\ ds = \mathbf{E} \cdot d\mathbf{p} \tag{75}$$

olur.

Bu işe karşılık gelen enerji birikimi iki yerde bulunabilir; bunlardan biri esnek yayın açılarak boyunun biraz daha uzamasında, öteki ise, iki yükü birbirinden biraz daha uzaklaşan molekül dipolünün büyümüş bulunan döngüsü dolayısı ile molekülsel dipolün elektrik alanı içindedir. Gerçek bir molekül halinde böyle bir ayırım yapamayız. Bu enerjinin tümü molekül yapısının malı olur, ve molekülün devinik yapısı içine özenle bakarsak, bu enerjiyi elektron devinimlerinin gerilimden kaynaklanan gizilgüç enerjisi ve devinim enerjisi halinde buluruz. Önemli nokta yalınca şudur: Bir molekülün kutuplanımındaki değişim için yapılması gereken $\mathbf{E} \cdot d\mathbf{p}$, işi, moleküle bağlı enerjiyi tam bu değer kadar artırır.

Dielektrikte birikmiş enerjinin ne tutarının bu yoldan verilebileceğini görelim. Birim oylumda N molekül bulunduğuna göre $P = Np$ dir. P nin dP kadar değişmesi halinde $\mathbf{E} \cdot d\mathbf{P}$, 1 cm^3 oylumdaki moleküllerin iç enerjisinin artışını verir. Ayrıca $\mathbf{P} = (\epsilon - 1)\mathbf{E}/4\pi$ olduğuna göre,

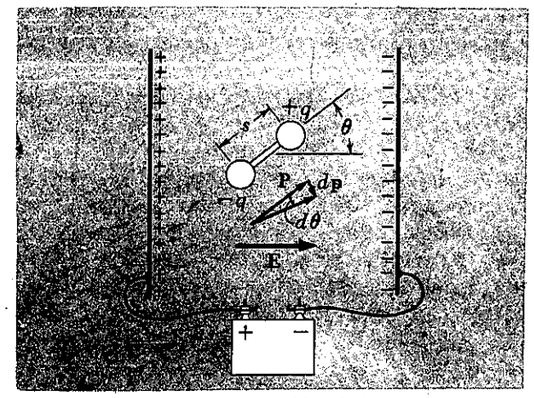
$$\mathbf{E} \cdot d\mathbf{P} = \frac{1}{4\pi}(\epsilon - 1)\mathbf{E} \cdot d\mathbf{E} = \frac{1}{8\pi}(\epsilon - 1)d(E^2) \tag{76}$$

elde edilir. Bu nedenle dielektrik içinde biriken $\epsilon E^2/8\pi$ erg'lik enerjinin, $(\epsilon - 1)E^2/8\pi$ kadar bir kısmı kutuplanmış moleküllerin artan iç enerjileri olarak tanınabilir. Geriye kalan $E^2/8\pi$, boşluk içindeki alanda birikmiş enerjidir.

9.15 Kutuplu Moleküllerden Olma Dielektrikler

Doğal ikizkutup döngülü moleküller, bir elektrik alanına karşı, o alana koşut gelmeye çalışarak tepki gösterirler. Buna uygun mekaniksel taslam, bir yayın iki ucuna tutturulmuş iki yük değil, bir çubuğun uçlarına tutturulmuş iki yüklü yapıdır (Şek. 9.35). Eğer çubuk alana koşut değilse, bu çubuğa, büyüklüğü Eqs sin θ değerinde bir kuvvet döngüsü etkiyecektir. Molekülün $d\theta$ kadar açısal yer değiştirmesi durumunda görülen iş (döndürücü döngü $\times$ açısal yer değiştirme) veya Eqs sin $\theta\ d\theta$. 'dır. Bu iş qs değerinde bir yöngü olan p ikizkutup döngüsü ile bunun $d\theta$ kadar dönmesi ile oluşan dp değişimi cinsinden de yazılabilir. Çizimde açıkca görüldüğü gibi dp'nin büyüklüğü $p\ d\theta$ 'dır ve doğrultusu öyledir ki $\mathbf{E} \cdot d\mathbf{p} = E\ dp \sin\theta$ olsun. Böylece $dW = \mathbf{E} \cdot d\mathbf{p}$ olur.
Bu beklemeniz gerektiği gibi Denk. 75 ile bağdaşır.

Çevresinden yalıtılmış bir kutuplu molekül $\mathbf{E}$ elektrik alanının kurulduğu anda Şek. 9.35'de görülen konumda idiyse, hemen alana koşut gelecek biçimde döner, ama kazandığı hızla denge konumunu aşarak bir sarkaç gibi bu konum yöresinde salınır; zira molekülün enerjisini üzerinden atma olanağı yoktur. Ama, gerçek bir molekül başka moleküllerle



Şek. 9.35 Kutuplu bir molekül sert bir çubuğun iki ucunda bulunan iki yük gibi davranır. Bir E alanı bu yapı üzerine bir kuvvet döngüsü etkiler.

sarılmıştır, bu komşuları ile enerji alış verişinde bulunabilir, bu ise titreşimleri söndüren bir çeşit "sürtünme"ye yolaçar. Bu halin bir madde içindeki bütün molekülleri için böyle olması, yani ne kadar zayıf olursa olsun, moleküllerin uygulanan alana koşut bir doğrultuda karar kılmaları beklenebilir. Ama bu ancak mutlak sıfır derecesinde böyledir; bu sıcaklıkta da moleküller hala dönebileceği varsayılır. Sıfırın üstünde, sıcaklık yükseldikçe yeğinleşen ısı kaynaşmasının gelişigüzel devinimleri, moleküllerin düzenli sıralanmasına karşı gelir. Uygulanan alan, molekül dipollerinin alana koşut yönelmesini enerjice daha elverişli hale koyar; ama bu yönelmeyi komşular durmadan bozarlar; molekülün bütün yapabileceği, doğru yönde, öteki yönlerden biraz daha uzunca kalabilmektedir. Örneğin su halinde, 1000 volt/cm'lik bir alan, 3000'de 1 molekülünün kusursuz yönelmesine eşdeğer bir kutuplanma verir. Böyle de olsa, bu, aynı alan içinde kutupsuz bir maddenin vereceği kutuplanmadan çok daha büyüktür; suyun dielektrik sabitinin, olağandan çok büyük çıkışı buradan gelir. Kutuplu bir dielektriğin kütle halinde kutuplanması genel olarak uygulanan elektrik alanının yeğinliği ile oranlı ve mutlak sıcaklık derecesi ile ters oranlıdır.

9.16 Değişen Alanlarda Kutuplanma

Buraya kadar madde içindeki sadece duruk yük alanlarını ele aldık. Bir dalgalı ak gerilime bağlı sığacınki gibi zamanla değişen elektrik alanlarının etkilerine de bakmak zorundayız. Önemli soru, kutuplanmadaki değişimlerin, alan değişimleri ile uygun adımda kalıp kalamıyacağıdır. Herhangi bir anda P'nin E'ye oranı, durgun elektrik alanı halindeki oranın aynı mıdır? Çok yavaş değişimler halinde, bir fark bekleyemeyiz; ama her zaman olduğu gibi yavaşlık bakımından ölçümüz ilgilendiğimiz özel fiziksel olaya bağlıdır. İncelemeler göstermiştir ki, irgitimle oluşan kutuplanım ve doğal dipollerin yönelmesi tepki zamanları tümünce farklı olan ayrı olgulardır.

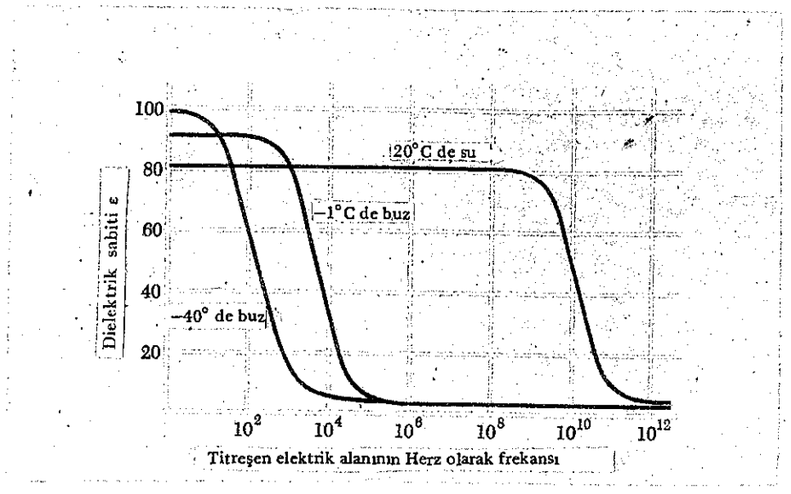
Atomların ve moleküllerin irgitimle kutuplanması, elektron yapılarının şekil değiştirmesinden ileri gelir. Burada işe karışan kütleler küçüktür ve dizge çok sert bir yapıdır; bunların doğal titreşim frekansları çok yüksektir. Başka bir deyişle atomların ve moleküllerin elektronlarının devinimleri, 10^{-16} saniye basamağında dönemlerle belirlenmiştir ki, bu süre göze görünen ışığın periyodu yakınlarındadır. Bir atom için 10^{-14} s uzun bir zamandır. Atom böyle bir süre içinde, elektron yapısını yeniden düzeltmekte pek güçlük çekmez. Bu nedenle, kutuplu olmıyan tüm maddeler, doğru gerilimlerden, göze görünür ışığın frekanslarına yakın değerlere kadar aynı biçimde davranırlar. Bu halde kutuplanma alanla uygun adımda kalır ve maddenin $\chi_e = P/E$ alınganlığı frekansa bağlı değildir. "Alan değişimi, elektron yapısının doğal frekanslarından birine doğru yaklaşırsa, ne olur?" sorusu, ilginçtir ve biz bunun incelenmesini bundan sonraki kitaba bırakıyoruz. (Sorunun sonuçlarından birisi gök kuşağıdır!).

Kutuplu moleküllerin yönelmesi ise elektron bulutunun biçim değiştirmesinden çok farklı bir olaydır. Molekül tümcek alan içinde dönmek zorundadır. Olaya minil (mikroskopik) ölçekte bakarsak, bu bir torba yer fıstığı içinde bir tanesini boylu boyunca döndürmek demektir. Engelleyici sürtünme, dönmenin, kuvvet döngüsünden geri kalmasına ve oluşacak kutuplanma genliğinin düşmesine yolaçar. Bu etkinin zaman ölçeği içinde nerede başladığı, bir kutuplu maddeden ötekine çok geniş ölçüde değişir. Suda bir dipol yönelmesinin bu "tepki zamanı" 10^{-11} s tutar. Yani suyun dielektrik sabiti 10^{10} hertz basamağındaki frekanslara kadar 80 yakınlarında sabit kalır. Bu 10^{-11} hertz frekansının üzerinde ise ϵ kutuplu olmıyan sıvıların belirtgin değerine düşer. Bu açıkca, ikizkutbun alanın bunca hızlı yön değiştirmelerini izliyememesi demektir. Başka maddelerde özellikle katılarda bu belirtkin zaman çok daha uzun olabilir. Örneğin donma noktasının tam altında olan buz için elektriksel kutuplanmanın tepki zamanı 10^{-5} s yakınlarındadır. Şekil 9.36 su ve buz için dielektrik sabitinin ölçü frekansına göre değişimini veren bazı denel eğriler göstermektedir.

Kristal gibi katı bir madde içinde bir kutuplu molekülün dönmesinin olanağının ne olduğuna sorabilirsiniz. Birçok kristalde, yakın moleküllerin titreşim halinde olması, bir molekülün "dirsek oynatacak yeterince yer" bularak birdenbire bütün halinde kayıp dönmesine yardım eder. Ama soru yine de iyi bir sorudur, zira bazı katılarda doğal kutup döngülerinin dönmesi şeklinde betimleyemeyeceğimiz bazı elektrik yükü kaymaları olabilir. Şimdi bu soruya geçeceğiz.

9.17 Bağlı Yük Akımı

Madde içindeki kutuplanma nereden gelirse gelsin zamanla bir değişime uğrarsa, orada gerçek bir yük devinimi, bir elektrik akımı vardır. Şimdi dielektriğin cm³ 'ünde N tane dipol bulunduğunu, ve bir dt süresi içinde, bunların herbirinin p'den p $+d$p.ye kadar değiştiğini düşünelim. O zaman maddenin genil P kutuplanma yoğunluğu P $= N$p'den P $+ d$P$= N$(p$+ d$p) 'ye kadar değişir. Dipol momentin dp kadar değişiminin, her atom içindeki q devinimli yükünün ds kadar yer değiştirmesinden ileri geldiğini düşünelim: $q\,ds = d$p. O zaman bir dt süresi içinde $\rho = Nq$, yoğunluğunda bir yük bulutunun $v = ds/dt$ hızı ile devinmesi durumu karşısındayızdır. Bu demektir ki, madde içinde(esk/s)/cm²'sinden J akım yoğunluklu bir iletim akımı karşısında bulunmaktayız:



Şek. 9.26 Suyun ve buzun dielektrik sabitinin frekansla değişimi. (C. P. Smyth'ın "Dielektrik davranış ve yapı" adlı kitabından alınmıştır.)

$$\mathbf{J} = \rho v = Nq\frac{ds}{dt} = N\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{a\mathbf{P}}{dt} \qquad (77)$$

Kutuplanmanın değişim hızı ile akım yoğunluğu arasındaki $\mathbf{J} = d\mathbf{P}/dt$, ilişkisi, taslamın ayrıntılarına bağlı değildir. Yani değişen bir kutuplanım, herhangi bir akımdan farklı olmıyan bir iletim akımıdır.

Böyle bir akımın bir mıknatısal alana kaynak olması doğaldır. Eğer çevrede başka hiç bir akım yoksa, Maxwell'indönül$\mathbf{B} = (1/c)(\partial\mathbf{E}/\partial t + 4\pi\mathbf{J})$ biçimindeki ikinci denklemini şöyle yazabiliriz:

$$\text{dönül } \mathbf{B} = \frac{1}{c}\left(\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t} + 4\pi\frac{\partial\mathbf{P}}{\partial t}\right) \qquad (78)$$

"Bayağı" bir iletim akımı yoğunluğu ile $\partial\mathbf{P}/\partial t$ akım yoğunluğu arasındaki tek ayrım birinin devinen özgür yükler ile ötekinin ise bağlı yükler ile ilgili olmasıdır. Bununla birlikte bunlar arasında açık bir ayrım vardır ki, o da, bağlı yüklerle, hiç değişmeden sürüp giden sürekli bir akım elde edemeyeceğiniz olgusudur. Genellikle, bağlı yükler akımı ile özgür yükler akımının hesabını ayrı tutar ve $\mathbf{J}$'yi yalnızca özgür yük akım yoğunluğunu göstermek için kullanırız. O zaman Maxwell denklemini bütün akımları içine alacak biçimde yazabilmek için şu değişik yazımı kullanırız:

$$\text{dönül } \mathbf{B} = \frac{1}{c}\left(\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t} + 4\pi\frac{\partial\mathbf{P}}{\partial t} + 4\pi\mathbf{J}\right) \qquad (79)$$

↑ bağlı yük akım yoğunluğu — ↑ özgür yük akım yoğunluğu

Bir dielektrik ortam içinde $\mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P} = \epsilon\mathbf{E}$, olduğunu hatırlarsak Denk. 79'u daha kısaca yazabiliriz:

$$\text{dönül}\mathbf{B} = \frac{1}{c}\left(\epsilon\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + 4\pi\mathbf{J}\right) \qquad (80)$$

Denk. 79'u biraz daha kısaltmak için az önce $\mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}$ olarak tanımladığımız $\mathbf{D}$ yöngüsünü eşitliğe sokmak yeter:

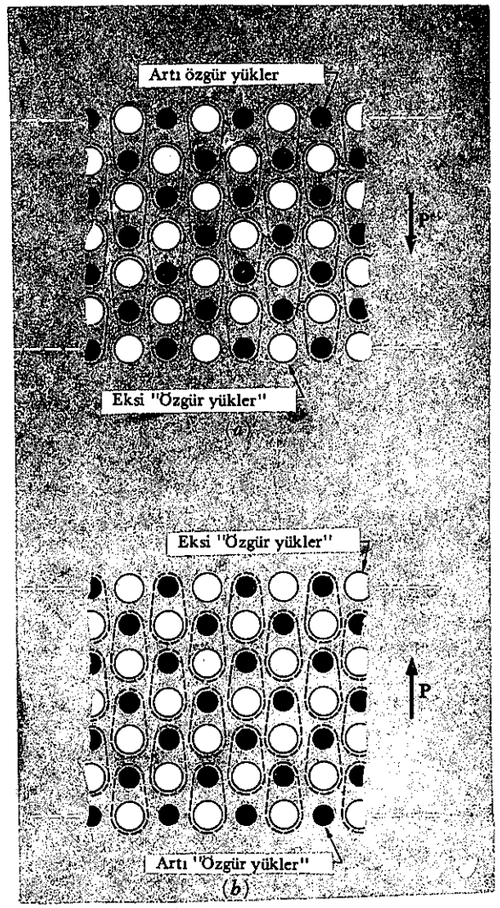
$$\text{dönül}\mathbf{B} = \frac{1}{c}\left(\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + 4\pi\mathbf{J}\right) \qquad (81)$$

Buradaki $\partial\mathbf{D}/\partial t$ terimine genel olarak kayma ya da yerdeğiştirme akımı denir. Gerçekten bunun $\partial\mathbf{P}/\partial t$'i ile ilgili bölüğü, daha önce gördüğümüz gibi, gerçek bir yük deviniminden yani düpedüz bir iletim akımından ileri gelir. Toplam akım yoğunluğunun devinen yüklerle ilgili olmıyan biricik bölüğü $\partial E/\partial t$ terimidir ki, bu Böl. 7'nin sonunda tartıştığımız gibi, boşluktan geçen gerçek bir yer değiştirme akımıdır. Bu arada akım yoğunluğunun bütün bileşenlerini, $\mathbf{J}$'ye uyan birimlerle söylemek istersek, birinci terimde 4π 'nin görünmesi gerektiğini belirtelim ve Denk. 79'u aşağıdaki gibi yazarak bu durumu düzeltelim:

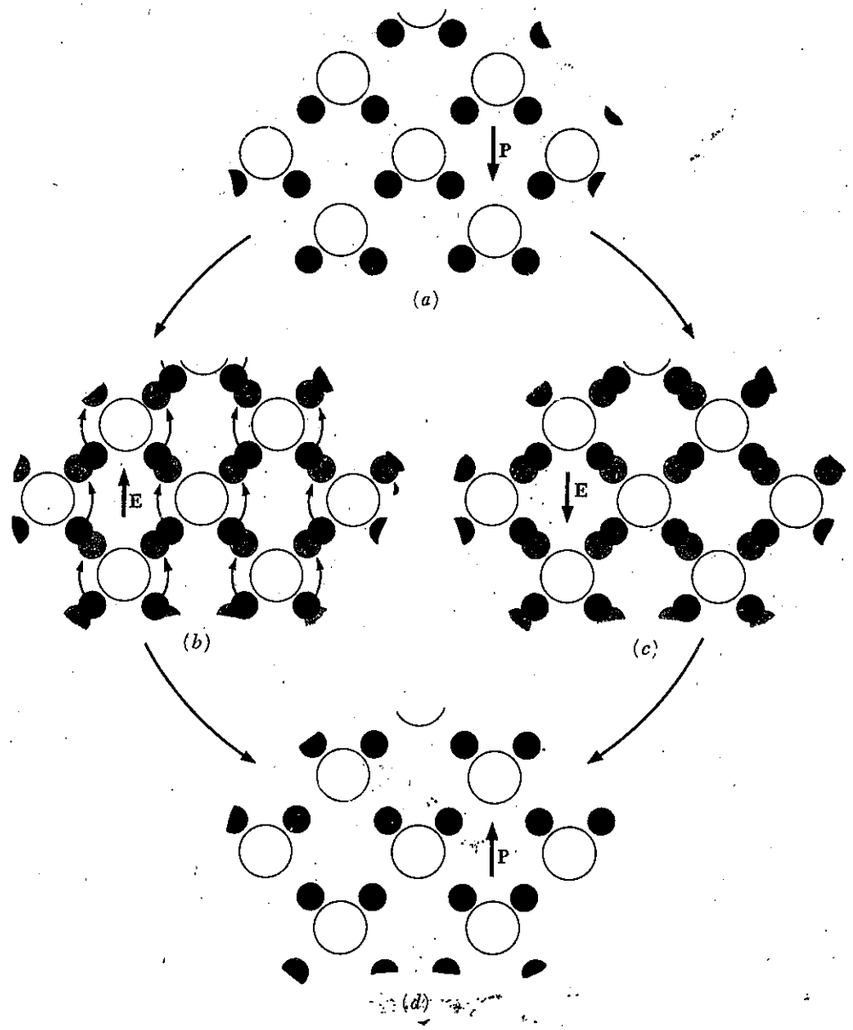
$$\text{dönül}\mathbf{B} = \frac{4\pi}{c}\left[\frac{1}{4\pi}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + \mathbf{J}\right] \qquad (82)$$

↑ boşlukta yer değiştirme akım yoğ. ↑ bağlı yük akım yoğ. ↑ özgür yük akım yoğ.

Bağlı yüklerle özgür yükler arasındaki ayrım sorunu üzerine eğilmiş değiliz: Madde içinde ve hele katı madde içinde molekülsel "dipol momentlerini" her zaman açık biçimde tanıyabilirmiyiz? Yanıt hayırdır. İnce bir sodyum klorür kristali yaprağına minil düzeyden baktığımızı düşünelim. Buradaki artı sodyum iyonlarının ve eksi klor iyonlarının düzenlenişi Şek. 1.7'de gösterilmiştir. Şekil 9.37 kristalin bir kesitidir ve bunun sağa ve sola doğru uzandığı düşünülmektedir. Eğer istersek, yanyana duran bir iyon çiftini dipol momentli bir ilın molekül gibi alabiliriz. Bunları Şek.9.37 a'da olduğu gibi kümelersek ortamın



Şek. 9.37 Yüklerini bir "molekül" oluşturacak biçimde ayrı iki türlü çiftler halinde kümelediğimiz bir iyon örgüsü: (a) Kutuplanma yöngüsü aşağı doğru yönelmiştir, (b) yukarı doğru yönelmiştir. Yapı fiziksel olarak aynıdır; sadece anlatım biçimi değişiktir.



Şek. 9.38. Kutuplu moleküller kümesi örgüsü (a), zıt yönde kutuplu bir örgü haline çevrilebilir (d), ve bu çevrilme (b) veya (c) gibi iki yoldan olur.

aşağı yönelmiş P yoğunluğunda genil biteviye bir kutuplanma yoğunluğu edindiğini söyliyebiliriz. Aynı zamanda kristalin üst başında bir artı yük katmanı, alt yanında ise eksi yük katmanı bulunduğunu görürüz ki, bunlar moleküllerimizin dışında kalmışlardır ve *özgür yükler* olarak görülmelidirler.

Ama iyonları Şek.9.37 *b*'deki gibi kümelemeyi de düşünebiliriz. Bu durumda P yukarı doğru yönelmiş bir yöngüdür, ama kristalin üst yanında eksi bir yük katmanı altta ise artı bir özgür yük katmanı kalır. *Anlatımların ikisi de doğrudur.* Aynı derecede doğru olan üçüncü bir anlatım şekli bulabilirsiniz ki, burada P sıfır çıkar ve hiç bir özgür yük yoktur. Her anlatım biçimi $\mathbf{E} = 0$. olduğunu bildirmektedir. E genil alanı gözlenebilen fiziksel bir niceliktir. Bu ancak yük dağılımına bağlı olabilir; yük dağılımının anlatım biçimine bağlı değildir.

Bu örnek gerçek atom dünyasında "bağlı yük" ile "özgür yük" gibi bir ayırımın oldukça güç olduğunu, ve de P kutuplanma yoğunluğu kavramının da isteğimize bağlı olduğunu öğretir. Molekül dipolleri kavramı yalnızca moleküllerin düzenlenişleri belli olduğu zaman, yani "bu atom şu moleküldür ve ötekinin değildir" diyebilmemiz için fiziksel bir neden bulunduğu zaman ancak iyi tanımlanmış bir kavramdır. Birçok kristalde böyle bir belirleme anlamsızdır. Bir atom ya da bir iyon bütün komşuları ile hemen hemen aynı yeğinlikle etkileşebilir; bir kristalin tümünden ancak tek bir molekül gibi söz edebiliriz.

Özgür yüklerle bağlı yükler arasındaki ayırımın gönlümüze göre oluşu $\mathbf{J}_s$ özgür yük akım yoğunluğu ile $\partial\mathbf{P}/\partial t$. arasındaki ayrım için de doğrudur. Buz gibi bir kristalin kutuplanmasını alalım. Kristal örgüsü üç boyutludur; ama Şek.9.38*b*'de oldukça benzer karakterde iki boyutlu bir örgü çizdik. Bu buz olsun. Şek.9.38 *a*'da her oksijen atomunun yakınında yalnız iki hidrojen atomu bulunduğunu görerek H_2O moleküllerini tanıyabiliyoruz. Kristal bu göründüğü biçimde kutupludur, P aşağı doğru yönelmiştir, zira bu bölümde daha önce değindiğimiz gibi, su molekülünün oksijeni yanında fazla bir eksi yük vardır Çizimde su moleküllerinin siyahla gösterilen hidrojen kesimlerini artı yük olarak alabiliriz. Şimdi bu kristalin iç koşullarını değiştiren bir şey olduğunu düşünelim, şöyleki kristalin aynı bölgesinin minil görünüşü Şek. 9.38*d*'deki biçimi almış olsun. Şimdi kutuplar ters dönmüşlerdir ve buz kristalini yukarı yönelmiş bir kutuplanım gösterir gibi betimleriz.

Bu değişim Şek.9.38*b* ve *c*'de görüldüğü gibi temelden ayrı iki yoldan oluşturulabilir. Şek.9.38b'de kristale uygulanmış yukarıya yönelik bir elektrik alanı, moleküllerinin artı uçlarını yukarıya iterek her molekülün tersine dönmesini sağlamıştır. Böylece artı yüklerin yukarı doğru net bir devinimi olur; bunun gösterdiği akım, az önce öğrendiğimiz gibi $\partial\mathbf{P}/\partial t$ terimi içinde hesaba katılmıştır. Şek.9.38 c, aşağı doğru yönelmiş bir elektrik alanı ile hidrojen atomlarına eş değiştirtmek gibi temelden ayrı bir olayı göstermektedir. Bu durumda her hidrojen atomu, yanındaki bitişik oksijen atomuna geçiyor. (Böyle bir göç gerçek kristal içinde çok kolaydır, çünkü iki oksijen atomu arasında bulunan bir H atomu bir ölçüde ikisi arasında bölüşülmüştür ki, bu kristali bir yerde tutan "hidrojen bağı"nı sağlar.) Son biçimlenim tam aynı gözükür. Dipollerin tümü ters gelmişlerdir, ama geçen olay artı yüklerin aşağı doğru akması olayıdır. Denk. 79'un sağ yanına geçirmek üzere, bu olaydaki akımı belirtmek gerekirse, daha önce olduğu gibi, yukarı doğru bir akıma karşı gelen $\partial\mathbf{P}/\partial t$, terimini koymalıyız; ama bir de aşağı doğru yönelmiş daha büyük bir $\mathbf{J}_s$ iletim akımı eklemeliyiz ki, bu da her yükün aşağı doğru tam bir *d örgü sabiti* tutarınca devinmesine uyar. Aradaki ayrım, artı yüklerin aşağı doğru *s* kadar yer kaymalarından ileriye gelen gerçek net akım tutarında olacaktır.

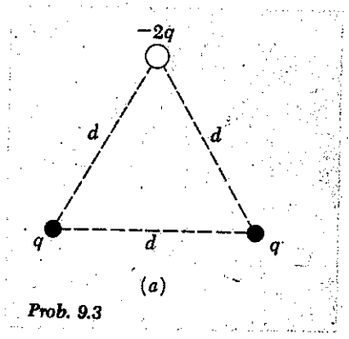
Bütün bu hallerde toplam akımın uygulanan elektrik alanı doğrultusunda olduğunu gözden kaçırmayın. Sadeçe genil ölçülere dayanarak hangi minil olgunun geçmekte olduğunu söyliyemeyiz. Gerçekten bir çokları buzdaki kutuplanma mekanizmasının ne olduğunu hala tartışmaktadırlar. Tartışmanın bir yere varabilmesi için, kristalin minil yapısı üzerinde daha çok şeyler bilmek zorundayız., ve bu arada bir molekülü başaşağı döndürmenin mi yoksa bir proton aktarmanın mı daha kolay olduğunu anlamamız gerekir. Bizim için alınacak ders sadece şudur: Bütün yüklerin gerçek minil devinimleri, özgür ya da bağlı tüm iletim akımını belirler.

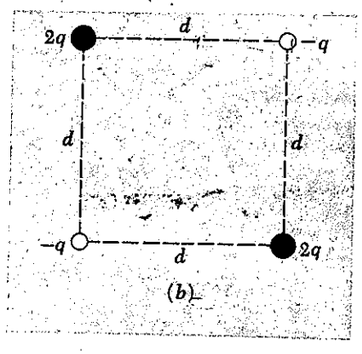
Problemler

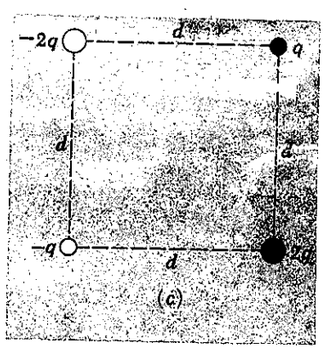
9.1 Elinizde dielektrik sabiti 2,3 olan biraz ses şeridi var; bunun genişliği 6 cm ve kalınlığı 0,003 cm'dir; bundan başka 5 cm genişliğinde ve 0,001 cm kalınlığında alüminyum şerit var. Bunlarla 0,05 μF sığalı silindir biçiminde sarılmış bir sığaç yapmak istiyorsunuz. Bunun nasıl yapılabileceğini, her iki cins şeritten ne tutarda kullanmak gerektiğini ve yaptığınız sığacın çapının ne olduğunu hesaplayın.

9.2 1746 yılında Leyden'de Profesör Musschenbroek bir şişe suyu, şişenin boynundan geçen bir telle, bu telin bir ucunu durukyük üreten makineye bağlamakla yükledi. Şişeyi elinde tutan yardımcısı öteki eli ile teli çıkarmak isteyince sert bir elektrik vurması duydu. Böylece ilk yalın sığaç fencilerin gözüne çarptı. Leyden "şişesi"nin böyle bulunması elektrik deneyciliğine bir devrim getirdi. Bundan hemen bir yıl sonra 1747'de Benjamin Franklin "Musschenbroek'ın sihirli şişesi" ile yaptığı deneyi anlatıyordu. Aslında bu şişe bir cam ile iki tarafında iki iletkenden başka bir şey değildi. Bunun neden bunca ilgi uyardığını görmek için, camının kalınlığı 2 mm, ve dielektrik sabiti 4 olan 1 litrelik bir şişenin sığasını hesaplayın. Aynı sığayı bulabilmek için havada bir kürenin çapı ne olmalıdır?

9.2 Şekilde görülen (*a*), (*b*) (ve) (*c*) yük düzenlenimlerinin dipol döngülerinin değeri ne tutar? Burada p döngü yöngüsünün doğrultusu nedir?







Prob. 9.3

9.4 Bir hidrojen klorür molekülünde klor çekirdeği ile protonun aralığı 1,28 Å 'dır. Hidrojenin elektronunu büsbütün klor atomuna aktarıldığını, ve merkezi klor çekirdeğinde bulunan küresel bakışımlı eksi bir yük dağılımı oluştuğunu düşünelim. Bu elektriksel dipol döngüsünün değeri Şek. 9.16'da verilen HCl'nin dipol döngüsünün kaç katıdır? Gerçek moleküldeki eksi yük dağılımının "ağırlık merkezi" nerede bulunmalıdır? (Klor çekirdeğinin yükü $17e$, hidrojen çekirdeğinin ise e'dir.)

9.5 Bir hidrojen klorür molekülü konumluk eksenlerinin başlangıç noktasında H-Cl doğrultusu z ekseni boyunca gelecek ve klor atomu yukarda olacak şekilde durmakta olsun. z ekseni üzerinde ve başlangıç noktasının üst yanında 10 Å uzakta bulunan bir noktadaki alanın doğrultusu ve statvolt/cm olarak yeğinliği ne tutar? Başlangıç noktasından 10 Å uzaklıkta ve y ekseni üzerinde bulunan bir noktadaki alanın değeri ve doğrultusu nedir?

9.6 Koşut yapraklı bir sığacın ölçülen sığası $C = 250$ cm'dir ve 6 statvolt'luk bir gerilim farkı ile yüklenmiştir. Levhaların aralığı 1,5 cm'dir. Burada sığacın dışında bulunan ve bizim "kaçak" alan dediğimiz ve her zaman hesaba katmadığımız alanla ilgilenmekteyiz. Özellikle sığacın boyutlarına bakınca uzakta bir noktadaki alanın değerini bilmek istiyoruz. Bu alan sığaçdaki yük dağılımını bir dipol gibi işliyerek bulunabilir. Buna göre (*a*) sığaçtan 3 m uzakta ve yapraklar düzlemi içinde bulunan bir noktadaki alanı, (*b*) aynı uzaklıkta ve yapraklara dik doğrultuda bulunan bir noktadaki alanın değerini bulun.

9.7 Kes. 4.11'de özdirenci ρ olan bir madde ile doldurulmuş bir sığacın gevşeme zamanını tartıştık. Bu tartış-

mayı yeniden gözden geçirirseniz, bu maddenin dielektrik sabiti sorununa hiç ilişmediğimizi görürsünüz. Şimdi bu unutkanlığı düzeltebilirsiniz. Göreviniz zaman sabiti yazımı içine ϵ'u uygun şekilde yerleştirmektir. Bütün canlılar için önemli olan kaçaklı bir sığa lık başka bir çok görevleri yanında iki yanındaki iki iletken sıvıyı ayıran bir yalıtkan olan canlı hücre çeperidir. Bunun elektriksel özellikleri hele sinir hücreleri halinde çok önemlidir, zira, bir sinir atımının yayılması, iç ile dış arasındaki elektriksel gerilim farkında hızlı değişimlerle birlikte olur. Kes. 3.5'in dip notunda, genel bir hücre zarı sığasının $1\ \mu F/cm^2$ yöresinde olduğu belirtildi. Hücre zarı maddesinin dielektrik sabitinin 3 yakınlarında olduğuna inanılmaktadır. Şimdi buradan, kalınlığın ne olması gerektiğini kestirebilirsiniz. Daha başka elektrik ölçüleri zarın bir yüzündeki iletken sıvıdan öteki yüzüne geçiş ile ilgili direncin $1\ cm^2$ başına 1000 ohm yakınlarında olduğunu göstermiştir. Böyle kaçaklı bir sığalığın zaman sabitinin sığalığın yüzeyine bağlı olmadığını gösterin. İzlediğiniz hal için bunun büyüklüğü ne tutar? Böyle bir zar maddesinin ρ özdirenci Şek. 4.6'daki çizelgede nerelere düşer?

9.8 Çapı 1 mm olan bir su damlasının içindeki bütün molekülsel dipoller bir yöne dönmüş olsalardı, bu damladan (a) 10 cm. uzakta bulunan bir noktada, (b) damlanın yüzeyinde en büyük alan yeğinliği ne olurdu?

9.9 Dielektrik küre için elde ettiğimiz yazım biteviye bir alan içinde bulunan bir metal küre halini de anlatabilir. Bunu göstermek için $\epsilon \to \infty$, sınır haline geçin ve bu halde dışda bulunan bir noktadaki alanının kusursuz iletken bir sınır yüzeyi haline tam uyduğunu gösterin. İçteki alan üzerinde ne diyebiliriz? Bu sınır hal için bazı alan çizgilerini çizitleyin. E_0 alanı içinde bulunan a yarıçaplı bir iletken kürede irgitimle oluşan dipol döngüsünün büyüklüğü nedir? Kusursuz iletken bir kürenin kutuplanabilme yatkınlığı hidrojen atomununkinin aynı olabilmesi için çapının ne tutarda olması gerekir?

9.10 Bir su damlacığında $(\epsilon = 81)$ irgitimle oluşan dipol döngüsü, aynı alan içinde bulunan aynı çaplı bir çelik bilyanınkinden yüzde ne tutarda değişiktir?

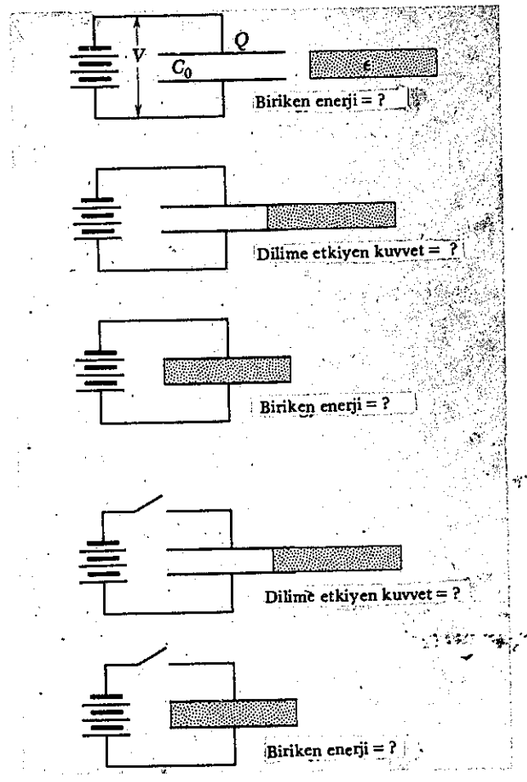
9.11 Kes. 9.10'da kutuplanmış bir kürenin içindeki alanın biteviye olduğu, gerilimin sınır üzerindeki biçiminden çıkarılmıştır. Aynı sonucu, merkezleri ayrılmış yüklü iki kürenin iç alanını üstüste getirmek ile de tanıtlayabilirdik. (a) Küresel biteviye bir yük dağılımının içinde bir noktadaki E alanının, r, ile oranlı olduğunu gösterin. (b) Şimdi yoğunlukları ρ ve $-\rho$ olan C_1 ve C_2, de merkezli küresel iki yük dağılımı alın ve bileşke alanın sabit ve C_1 'den C_2 'ye giden çizgiye koşut olduğunu gösterin. (c) Aynı şekilde uzun dairesel bir silindir çubuk eksenine dik olarak kutuplandığına göre uyardığı alanı çözümleyin.

9.12 Şekil, yüzölçümleri ve yaprakları aralığı aynı üç sığaç göstermektedir. Yaprakları arası boş olan sığacın sığasına C_0 diyelim. Ötekilerden her biri yarıya kadar dielektrik sabiti ϵ, olan bir yalıtkan madde ile doldurulmuştur; ama şekilde görüldüğü gibi bunların konuluşları farklıdır. Bunlardan her birinin sığasını bulun. (Kıyı etkisi savsanacak.)

9.13 Sığacı yalnızca enerji biriktirilecek bir düzenek olarak ele alın. Bir sığacın yaprakları arasına uygulanabilecek gerilim farkı için kılgın bir sınır, aradaki dielektrik dolgu maddesinin "dielektrik sağlamlığı" ile ölçülür, bu da bu madde içinde bir kıvılcım çıkmasına yer vermeden kurulabilecek alanın en büyük değeridir. Bu alan dielektrik sabiti $\epsilon \approx 2{,}3$ ve yoğunluğu $\rho \approx 1\ g/cm^3$ olan iyi bir sıvı dielektrik için 10^5 volt/cm yakınlarındadır. Elektrodların ve kılıfın ağırlığını savsayarak, sığaçta kilogramı başına kaç joule'luk enerji biriktirilebilir? (Bunun sığaca, biçime ve yaprak sayısı vb. özelliklere bağlı olmadığına dikkat edin.) Bu joule/kilogramı bir enerji birikimi için "nitelik sayısı" olarak alın ve, sığacın bir otomobil bataryası ile ve bir de dönen bir makine volanı ile karşılaştırın. Bunun için bir otomobil bataryasının enerji çıkışı ile ağırlığı üzerine akla yakın kimi sayılar almakla ya da volanın dönme hızlarının sınırı üzerinde bir karara varmak zorunda olacaksınız. Sığacın bir enerji biriktirme aracı olarak üstünlüğü neresindedir?

9.14 Şekildeki çizim, bir dielektrik parçasının yüklü bir sığacın yaprakları arasına farklı iki şekilde yerleştirilmesini göstermektedir. Bu olay sırasındaki enerji değişimini şekildeki sorulara göre çözümlemenizi istiyoruz. Dielektrike etkiyen kuvvetin tutarı üzerine ne söyliyebilirsiniz?

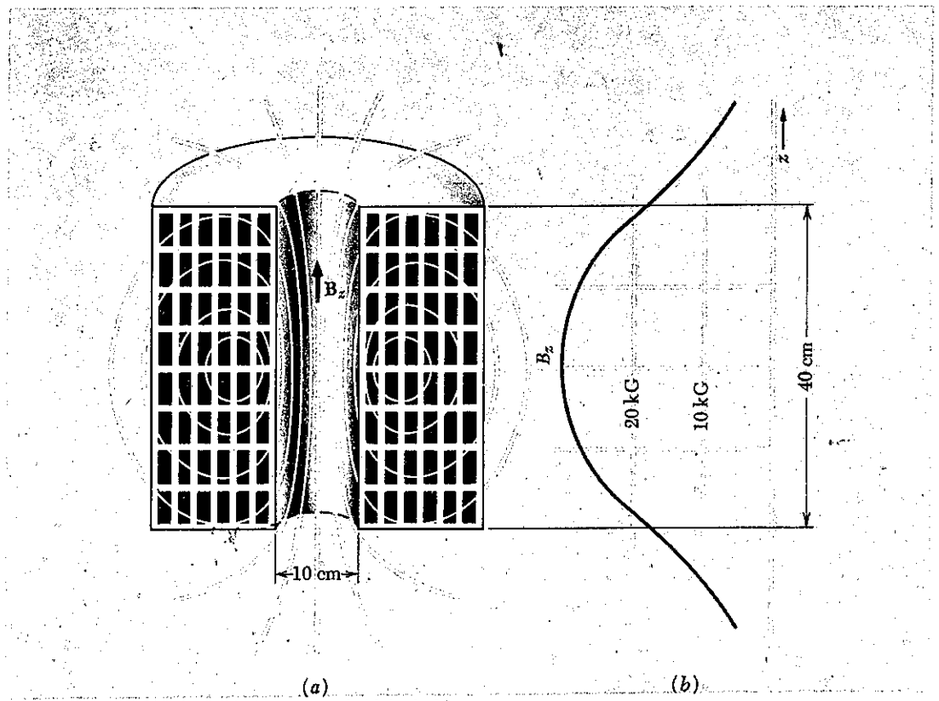
9.15 Yarıçapı a olan bir metal küre iç yarıçapı a, dış yarıçapı b, ve dielektrik sabiti ϵ olan bir dielektrik kabuğu ile sarılmıştır. Metal küre Q tutarında özgür yük taşıyor. Dielektrik üzerinde ya da içinde özgür yük yoktur. Bu yapının metal kürenin potansiyelini ve bağlı yük dağılımını bularak ayrıntıları ile inceleyiniz.



Bölüm 10

Madde İçinde Mıknatısal Alanlar

10.1	Çeşitli Maddeler Mıknatısal Alanda Nasıl Etkilenirler	294
10.2	Mıknatıs "Yük"ü Diye Bir Şey Yoktur	297
10.3	Bir Akım İlmeğinin Alanı	300
10.4	Bir Dış Alan İçerisindeki İkizkutba Etkiyen Kuvvet	305
10.5	Atomlardaki Elektrik Akımları ve Diyamıknatıslık	307
10.6	Elektron Spini, Mıknatısal Döngü ve Paramıknatıslık	312
10.7	Mıknatısal Alınganlık	314
10.8	Mıknatıslanmış Maddenin Uyardığı Mıknatısal Alan	315
10.9	Sürekli Mıknatısın Alanı	321
10.10	Özgür Akımlar ve H Alanı	325
10.11	Ferromıknatıslık	328
	Problemler	333



Şek. 10.1 (a) Kuvvetli bir mıknatısal alan uyaracak biçimde bir sarmal. Su ile soğutulan sarımlar kesitte gösterilmiştir. (b) Sarmalın ekseni üzerindeki B_z alan yeğinliği çizit olarak gösteriliyor.

10.1 Çeşitli Maddeler Mıknatısal Alanda Nasıl Etkilenirler?

Çok kuvvetli bir mıknatısal alanla bir deney yaptığımızı düşünelim. Örneğin Şek. 10.1'de görüldüğü gibi 10 cm iç çaplı ve 40 cm boyunda bir akım sarmalı yapmış olalım. Bunun dış çapı 40 cm olsun ve aradaki oylumun büyük kısmı bakır tel sarımlarıyla doldurulmuş bulunsun. Böyle bir sarmala 400 kilowatt'lık elektrik gücü verilmiş olsa sarmalın merkezinde 30000 gauss'luk sürekli bir alan doğar; bu arada oluşan ısıyı dışarıya almak için dakikada 150 litre kadar su döndürmek gerekir. Bu kılgın ayrıntılara incelenen düzeneğin olağanüstü bir yanı olmasa da epey etkileyici bir laboratuvar mıknatısı olduğunu göstermek için değiniyoruz. Sarmalın merkezindeki alan yerin mıknatısal alanının hemen hemen 10^5 katıdır, ve sizin kullanmış olabileceğiniz atnalı ya da çubuk biçimli bir demir mıknatısın yakınındaki alandan hiç değilse beş, on kez daha yeğin bir alandır. Sarmalın merkezi yakınlarında alan hemen hemen biteviye olacaktır ve eksen üzerinde her iki uca doğru gidince merkezdeki değerinin yaklaşıkça yarısına kadar düşecektir. Bu alan Şek. 6.18'deki sarmala bakınca daha az düzgündür, zîra, buradaki tel sarımları, uzunluk-çap oranı 4/1'den 1/1'e kadar değişen üstüste yerleştirilmiş sarmal katlarından oluşmuş bir yapıdır. Gerçekten tek katlı bir sarmalın ekseni üzerinde uyardığı mıknatısal alanı veren Denk. 6.44'ü kullanarak sarmalımızın ekseni üzerindeki alanı tam olarak hesaplamak güç olmaz. Eksen üzerindeki alan yeğinliğinin, merkez alanını 30 kilogauss alarak bulunan çiziti Şek. 10.1'de verilmiştir. Sarmalın tam uçlarındaki alan yeğinliği 18000 gauss'tır ve bu yakınlarda alan 1700 gauss/cm'ye yakın bir bayırgı ile değişmektedir.

Bu alan içine çeşitli maddeler koyalım ve bunlara etkiyen bir kuvvet bulunup bulunmadığını görelim. Genelde bir kuvvet varlığı gözlenir. Sarmalın kangallarından geçen akım kesilince kuvvette yiter. Üstelik örnek maddeye etkiyen kuvvetin, kangalın merkezinde B_z mıknatısal alanının en kuvvetli olduğu yerde değil, kangalın uçları yakınlarında dB_z/dz bayırgısının büyük olduğu yerde en büyük olduğu gözlenir. Demek ki bundan böyle bir örneği kangalın üst ucunun hemen iç kısmında tutalım. Şek. 10.2, bir mıknatısal alandan ileri gelen ek kuvveti gösterecek bir yay ile ona asılmış deney tüpü içindeki örneği gösteriyor. Doğal olarak, önce yalnız deney tüpü asılı iken bir "boş" ölçü almamız gerekir ki, kullandığımız örnekten başka maddelere etkiyen mıknatısal kuvvet hesabdan çıkarılabilsin.

Böyle bir deney sonunda özel bir maddeye (örneğin alüminyum metale) etkiyen kuvvetin, kütlesi ile oranlı olduğunu, (örnek çok büyük olmadıkça) biçimine bağlı olmadığını görüyoruz. (Bu sarmalda ağzından bir kaç cm içerlere kadar, küçük bir örneğe etkiyen kuvvetin kılgında sabit kaldığını gözlüyoruz; eğer 1 – 2 cm^3'ü geçmeyen küçük oylumlu örnekler kullanırsak, bunlar alanın belirttiğimiz bölgesi içinde kalabilirler.) Verilen bir madde için elde ettiğimiz nicel sonuçları $B_z = 18000$ gauss, $dB_z/dz = 1700$ gauss/cm koşulları altında örneğin gramına şu kadar kuvvet (din) olarak verebiliriz.

Ama başta bulunan nitel sonuçlar biraz şaşırtıcıdır: Tanıdığımız birçok arı madde için, gözlenen kuvvet kolayca ölçüye gelecek tutarda olduğu halde, yeğin bir mıknatısal alan elde etmek için harcadığımız çabanın yanında gülünç derecede küçük olmakta, maddenin gramı başına 10 ile 20 din dolayında kalmaktadır; yani örnek ağırlığının yüzde bir kaçından fazla değildir. Kuvvet kimi örnekler için yukarıya doğru, bazıları için ise aşağı doğru yönelmiştir. Kuvvetin yönü, sarmaldan geçen akımın yönünü çevirmekle yoklayabileceğimiz gibi, mıknatısal alanın yönü ile hiç ilgili değildir. Bunun yerine, alanın kendi yönü ne olursa olsun, bazı maddelerin artan bazılarının ise azalan alan yeğinliği yönünde çekildikleri gözlenir. $B_z = 18000$ gauss, $dB_z/dz = 1700$ gauss/cm olan bir mıknatısal alan içinde 1 g örneğe etkiyen kuvvet

Madde	*Simge*	*Kuvvet (din)*
Diamıknatısal		
Su	H_2O	–22
Bakır	Cu	–2,6
Kurşun	Pb	–37
Sodyum Klorür	NaCl	–15
Kuartz	SiO_2	–16
Kükürt	S	–16
Elmas	C	–16
Grafit	C	–110
Sıvı Azot	N_2	–10 (78°K)
Paramıknatısal		
Sodyum	Na	+20
Alüminyum	Al	+17
Bakır klorür	$CuCl_2$	+280
Nikel Sülfat	$NiSO_4$	+830
Sıvı oksijen	O_2	+7 500 (90°K)
Ferromıknatısal		
Demir	Fe	+400 000
Magnetit	Fe_3O_4	+120 000

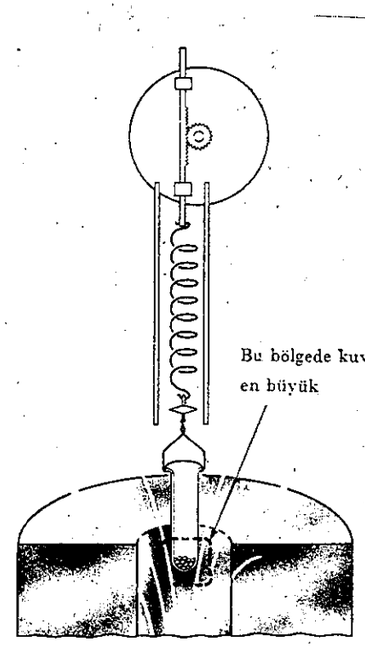
Kimi maddelerin sarmal içine doğru oldukça büyük bir kuvvetle çekildikleri görülür. Örneğin bakır klorür kristalleri, gram başına 280 dinlik bir kuvvetle aşağı çekilir. Bu deneyde, sıvı oksijenin davranışı ise gayet göz alıcıdır; bu madde sarmalın içine doğru ağırlığının aşağı yukarı 8 katı bir kuvvetle çekilir. Gerçekten ağzı kapanmamış bir şişeyi sıvı oksijenle doldurup sarmalın alt ucuna yerleştirecek olursak sıvının şişeden fırladığı görülür. (Nerede durmasını beklersiniz?) Oysa sıvı azot üzerindeki etki böylesine yeğin olmaz. 1 gram sıvı azot sarmaldan dışa doğru 10 din gibi zayıf bir kuvvetle itilir. Çizelgede böy-

* Kuvvet yönü: aşağı doğru + yukarı doğru — sayılmıştır; bütün ölçüler ayrıca belirtilmemiş ise 20°C'de alınmıştır.

le bir deneyden elde edilebilecek sonuçları verdik. Bu çizelgedeki maddeler, ve daha önce değindiklerimiz, mıknatısal davranışları bakımından geniş farklar gösteren gelişigüzel bir örnekleme sağlayacak biçimde alınmıştır.

Bildiğiniz gibi en tanınmışı demir olan birkaç madde, bütün ötekilerden daha "mıknatısal" görünüyor. Çizelgede 1-g 'lık bir demir parçasının, alan içinde öteki örneklerin bulunduğu yere konulduğu zaman etkilendiği kuvvetin değeri verilmiştir. Bu kuvvet aşağı yukarı yarım kilogram tutarında! (İçinde 5–10 gram demir bulunan bir deney tüpünü duygun yayımıza asarak mıknatısal alan içine getirmek gibi bir yanılgıya düşmemek gerekir; bunun için farklı bir yay kullanmak zorundayız!) 1 gram bakır ile 1 g demir, metal olarak, temelden bir ayrılık göstermedikleri halde aynı alan içinde etkilendikleri kuvvetlerin 10^5 'ten büyük bir çarpan kadar değişik olduğunu gözden kaçırmayın. Bu bize, bakır gibi bir madde üzerinde yapılacak inanılır mıknatısal ölçülerin pek kolay olmayacağını gösterir. Böyle bir örnek içinde, milyonda bir kaçlık demir katışkı bulunsa sonuçlarımızı geniş ölçüde yanıltır.

Çizelgedeki öteki maddelerle demir ve magnetit'in davranışları arasında bir temel ayrılık daha var. Bir örneğe etkiyen kuvvetin alanla oranlı olup olmadığına güvenebilmek için elektromıknatısın alanını değiştirerek bir yoklamaya giriştiğimizi düşünelim. Örneğin sarmaldan geçen akımın yeğinliğini yarıya düşürür ve böylece bir yandan B_z alanını, bir yandan da dB_z/dz bayırgısını yarılarız. Böylece çizelgede demirin üstünde bulunan bütün maddelere etkiyen kuvvetin ilk değerinin dörtte birine düştüğünü, oysa demire ya da magnetit örneğe etkiyen kuvvetin sadece yarıya ve hatta yarıdan biraz az değere düştüğünü görürüz. Açıkca görüldüğü gibi, hiç değilse bu koşullar altında Fe ve Fe_3O_4 için kuvvet alan yeğinliği ile hemen hemen oranlı ve geriye kalan maddeler için alan yeğinliğinin karesi ile oranlıdır.



Şek. 10.2 Bir mıknatısal alan içinde bulunan bir maddeye etkiyen kuvveti ölçmek için bir düzenek.

O halde burada değişik ve karışık birçok olayla uğraştığımız belli. Bunları anlamaya başlamak için bir kümeleme ile işe başlayalım.

Elektromıknatısın zayıfca ittiği su, sodyum klorür, Kuartz gibi maddelere diyamıknatısal maddeler denir. Organik olmayan bileşiklerin çoğu ve hemen bütün organik bileşikler diyamıknatısaldır. Olay incelenince diyamıknatıslığın *her bir* atomun ve molekülün özelliği olduğu ortaya çıkar. Eğer aldığımız örnekte zıt davranış gözlenmişse, bunun nedeni, daha kuvvetli ve değişik bir etkinin diyamıknatıslığı yenerek bir çekme etkisi gözlememize yol açmış olmasıdır.

Alanın daha kuvvetli olduğu bölgelere doğru çekilen maddelere *paramıknatısal* denir. Birçok halde, özellikle Al, Na, ve daha başka metaller halinde paramıknatıslık, gözlediğimiz diamıknatıslıktan çok daha kuvvetli değildir. Listemizde bulunan $NiSO_4$ ve $CuCl_2$ gibi daha başka maddelerde ise paramıknatısal etki çok daha kuvvetlidir. Üstelik, bu maddelerin paramıknatıslığı sıcaklık düştükçe artar ve mutlak sıfır noktasına yakın sıcaklıklarda çok büyük bir değer kazanır. Paramıknatıslığın sıcaklık düştükçe artması, sıvı oksijende gözlediğimiz büyük kuvvetin temel nedenidir. Eğer bütün bunların kolay anlaşılabileceğini sanıyorsanız, bakırın diyamıknatısal olduğu halde bakır klorürün paramıknatısal olduğuna, sodyum paramıknatısal olduğu halde sodyum klorürün diyamıknatısal olduğunu gözden kaçırmayın.

Son olarak, demir ve magnetit gibi davranan maddelere *ferromıknatısal* denir. Bu sınıfta iyi bilinen *demir, kobalt, ve nikel* gibi birçok maddeden başka ferromıknatısal alaşımlar ve kristal halinde bazı alaşımlar da vardır. Aslında bu günkü ferromıknatısal araştırmalar listeyi daha da büyütmektedir.

Bu bölüm içinde iki görev yüklenmiş bulunuyoruz. Bunlardan biri, mıknatısal maddeyi belirleyen birkaç değiştirgen arasındaki denel bağıntıların işe karıştığı genil (makroskopik) olayların incelenmesini geliştirmektir. Bu, dielektriklerde elektrik alanı ile tıkız maddenin kutuplanması arasındaki bağıntılara götüren işleniş gibidir. Buna yerine göre görüngüsel *(fenomenolojik)* kuram diyoruz. İkinci görevimiz, çeşitli mıknatısal etkilerin atomsal kaynaklarının ne olduğunu, hiç değilse genel çizgileri ile anlamaktır. Mıknatısal olaylar anlaşılınca, atom yapısının bazı temel çizgileri, dielektrik olaylardan da fazla açıklığa kavuşur.

Çizelgede genel bir olgu kendini göstermektedir. Dia-ve paramıknatıslıkta molekül enerjisi ölçeğinde çok az enerji işe karışmaktadır. Aşırı bir örnek olarak sıvı oksijeni alalım: 1 gramlık sıvı oksijeni mıknatısdan dışarıya çekebilmek için 7500 din çarpı bir kaç cm uzaklık basamağında bir iş gerekir (zira bir kaç cm'lik bir yerdeğiştirme içinde alan şiddeti önemli ölçüde düşer). Bu iş kabaca 50000 erg olsun. Oysa 1 g sıvı O_2 'nin sıcaklığını 1 derece yükseltmek 0,4 kalori ya da 1,6 joule ister ki, bu az öncekinden aşağı yukarı 300 kez daha fazla bir işe eşdeğerdir; benzerince bu kadar sıvı oksijeni buharlaştırmak, yani moleküllerini birbirinden ayırmak için gerekli enerji 30000 kez daha fazladır. O halde sıvı oksijende, mıknatısal alan etkisi ile, moleküller düzeyinde nasıl bir olay geçmekte ise, bununla ilgili enerji besbelli çok küçük bir şeydir.

Kuvvetli mıknatısal alanların bile kimyasal olaylar üzerine hiç bir etkisi olmadığını ve bunun biyokimya için de böyle olduğunu biliyoruz. Elinizi ya da kolunuzu (kol saati bulunmasın!) 30 kilogauss'luk bir sarmalın içine sokarsanız fazla bir şey duymazsınız. Kolunuzun paramıknatısal mı yoksa diyamıknatısal mı olduğunu kestirmek güçtür; ama kolunuza etkiyen kuvvet her halde 20–25 gramdan daha küçük olacaktır. Birçok fare kuşakları kuvvetli mıknatısal alanlar içinde üretilmiş yetiştirilmiş ve beslenmiş ama bununla herhangi bir değişik gözlenmemiştir. Bu satırların yazıldığı sırada da biyolojideki daha başka çalışmalar sonuçlanmış ve kimyasal olgular üzerine mıknatısal etkiler bakımından göze çarpan hiç bir şey ortaya çıkmamıştır*. Buna şaşmamak gerekir. Madde ile etkileşmede mıknatısal alan, elektriksel alandan çok farklı bir davranış içindedir. Atomlar ve moleküller yavaş devinen elektrik yüklerinden oluştukları için, moleküller sahnesine elektriksel kuvvetler eğemendir.

10.2 Mıknatıs "Yük"ü Diye Bir Şey Yoktur

Pusula iğnesi gibi mıknatıslanmış bir çubuğun dışında uyardığı alan, kutuplanmış bir çubuğun,

* Bu, bütün etkilerin sonuç vermeyeceği demek değildir. Aslında böyle bir tartışma, yerçekiminin moleküller ölçeğinde önemli olmadığını gösterir, ama bir ağaç yamaç üzerinde bile düşey olarak yukarı büyür. Bu gözlem molekül boyutuna bakınca büyük olan yaşayan birimler içinde büyük kuvvetlerin işe karıştığını gösterebilir. Gerçekten buna benzer bir "tropizim" biteviye olmayan bir mıknatısal alan içindeki tohumların büyümesi halinde denel olarak gösterilebilmiştir. Demek ki moleküllerin mıknatısal özelliklerinin biyokimyacılar için önemli olmadığını söylemek istemiyoruz. Bunun tersine kimyasal tepkimlerdeki ara maddeler bazen mıknatısal davranışları ile ortaya çıkarılabilirler ve tanınabilirler. Ama bu bir dış alanın bir kimyasal olay üzerine etkisinden başka bir şeydir. Bu arada başınızı kuvvetli bir mıknatısal alan içine koyar ve saltarsanız ağzınızda meydana gelen elektrolit akımlarının "tadını" duyabilirsiniz ki, bu da ırgıtımle oluşan elektromotor kuvveti gösterir.

yani bir ucunda artı yük, ötekinde ise eksi yük artığı bulunan bir çubuğun dışındaki elektrik alanına çok benzer (Şek. 10.3). Bu bakımdan elektriksel alanın kendini doğuran kaynaklarla ilişkisi gibi mıknatısal alanın da bir takım kaynakları bulunması beklenebilir. O zaman pusula iğnesinin "kuzey" kutbu bir çeşit "mıknatıs" yükü'nün artık bulunduğu bir bölge, güney kutbu da karşı cinsten artık yükün bulunduğu bir bölge olurdu. Burada da "kuzey yük"e artı ve "güney yük'e eksi diyebilir ve elektrik alanları ile elektrik yükleri halinde onayladığımız kuralda olduğu gibi, mıknatısal alanın artıdan eksiye doğru yöneldiğini düşünebilirdik. Tarihsel gelişme bakımından, mıknatısal alanın artı doğrultusu bu şekilde kararlaşmıştı*. Bizim az önce mıknatısal yük dediğimize mıknatısal kutup yeğinliği demeğe alışılmıştır.

Buraya dek bu düşünce kusursuz görünmektedir. Ve hele elektromıknatısal alanın temel denklemleri bakımından $\mathbf{E}$ ile $\mathbf{B}$'nin tam bakışımlı olduğunu anımsarsak bu düşünce daha da akla yakın gelir. Öyleyse alan kaynakları bakımından bir bakışım neden beklemeyelim? $\mathbf{B}$ durgun mıknatısal alanın kaynağı olarak düşünebileceğimiz mıknatısal yükler ile $\text{ırak}\mathbf{B} = 4\pi\eta$ olmalıdır, ve burada elektrik yükleri halindeki ρ yük yoğunluğunun benzeri mıknatısal yük yoğunluğunu göstermelidir. İki tane artı mıknatısal yük (ya da iki kuzey kutub) birim yeğinlikte iseler ve 1 cm aralıkla duruyorlarsa birbirlerini 1 dinlik bir kuvvetle iteceklerdir, ve benzerlik böylece sürecektir.

Ama üzülerek söyleyelim ki, gerçek durum bu değil. Doğa nedense böyle bir fırsatı kullanmamış. Çevremizdeki dünya *hiç bir mıknatısal yük* oluşturmamakta, tam bakışımsızlık içinde görünmektedir. Şimdiye dek kimse, tek çeşit mıknatısal yükten bir artık gözleyememiş örneğin bir kuzey kutup ayırıp ortaya koyamamıştır. Eğer böyle bir cisim bulunsa idi dışarı doğru giderken $1/r^2$ ile oranlı olarak azalan ışınsal bir mıknatısal alan uyarırdı. Kuşkusuz daha da şaşırtıcı bir durum, böyle bir cismin *biteviye* bir mıknatısal alan içine konulunca bir kuvvet etkisine uğraması olurdu. Bir mıknatısal kutup bir sarmal içine konulursa etkileneceği en büyük kuvvet uçlarda olacağına merkezde olurdu. Elektrik yüklü bir parçacık bir mıknatısal alan *içinde devinirken* etkilendiği kuvvetten farklı olarak, duruk bir mıknatıs kutbuna etkiyen kuvvet alana dik değil, ona koşut olacaktı.

Ayrılmış bir mıknatıs kutbunun bulunduğu bir uzay bölgesinde net bir $\mathbf{B}$ akısı bulunur. Böyle bir cismin hiç bulunmadığı hakkındaki açık gözlemler, $\text{ırak}\mathbf{B} = 4\pi\eta$ yerine yalınca

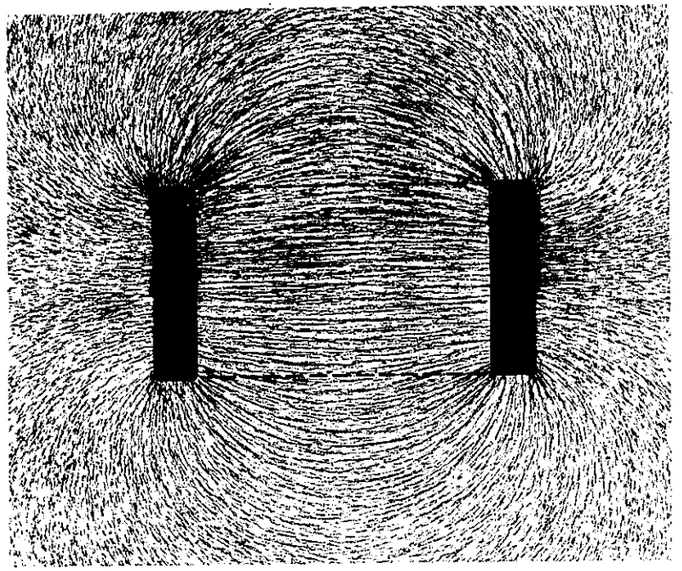
$$\boxed{\text{ırak } \mathbf{B} = 0 \qquad \textit{her yerde}} \tag{1}$$

diye özetlenebilir.

Gerçekten *her yerde* mi? Acaba birbirinden ayrılamayacak biçimde çiftler halinde bağlanmış ve her çiftin üyeleri arasındaki bölge fiziksel bakımdan incelenemeyecek kadar dar eşit ve zıt imlemeli kuzey ve güney kutuplar bulunabilir mi? Böyle düşünmemek için hiç bir neden yok; çünkü Denk. 1, $\mathbf{B}$'nin anlamlı olduğu her yerde doğrudur. Bununla birlikte, kutup çiftlerinin, temel parçacık çiftleri gibi, büyük enerjili çekirdeksel olaylar sırasında oluşup çevreye uçabilecekleri üzerinde ciddi düşler kurulmuştur. Böyle parçacıklar bulabilmek için yenilikte yapılan birçok aramalar, mıknatısal tek kutup denilen bu gibi taneleri ortaya çıkaramamıştır*. Acaba böyle bir şey yok mu-

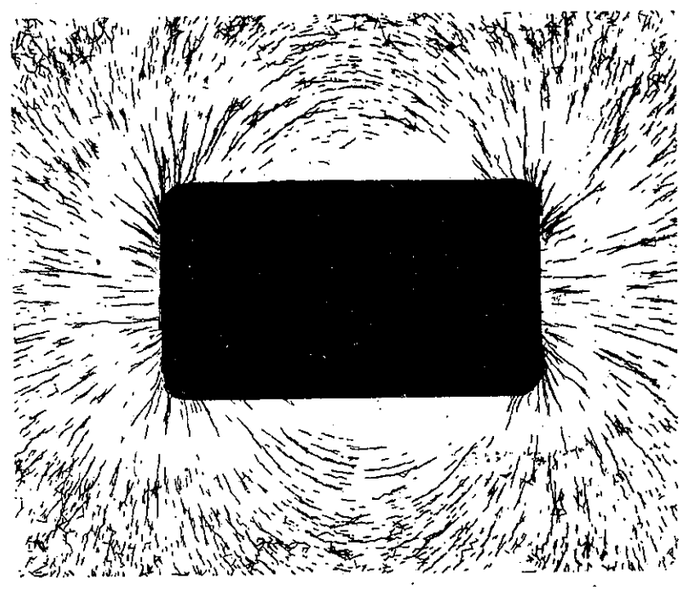
* Unutmayın ki Böl. 6'da $\mathbf{B}$'nin artı doğrultusunu sağ el kuralı ile bir akım doğrultusuna yani artı yüklerin devinimi doğrultusuna bağlayarak kurmuştuk; şimdi "kuzey kutup" sözünün anlamı mıknatıs iğnesinin "kuzeyebakan-kutbu"dur. Bu güne dek, yerin mıknatısal kutuplanmasının neden böyle olupta başka türlü olmayışının sebebini bilmiyoruz. Franklinin "artı" elektrik diye ad takmasının bununla hiç bir ilişiği yoktur. Bunların hepsinin bağdaşır kalabilmesi için, sol el kuralı değil de sağ el kuralının geçerli olması tam bir rastlantıdır.

* Bir mıknatısal biriz kutup bulabilmek için yapılan çalışmalar üzerinde Kenneth Ford'un "mıknatısal kutuplar" adlı yazısına bakın. Sci. American 209, 30 (Aralık 1963). Mıknatısal yük yokluğu biçiminde görülen "bakışımsızlık", eksi ve artı yüklerin yapıları arasındaki ayrımdan ileri gelen elektriksel bakışımsızlıktan temelde ayrıdır. Elektronlar dayanıklı eksi parçacıklardır; artı yük taşıyan protonlar ise çok daha ağır parçacıklardır. Ama bunun evrensel olması gerekmez, çünkü *karşıtparçacıklar da* var. Bütün görünüşler artı elektronlardan ve eksi protonlardan yapılmış bir madde bulunabileceğini göstermektedir; bu "karşıtmadde" evrenin bizim bulunduğumuz bölgesindeki maddenin ikizeşi olmalıdır. Biz karşıtmadde bileşenlerine laboratuvar dünyasında rastlamaktayız, ama "mıknatısal ikiz"in bileşenleri henüz görünmüş değil. Bunların gerçekten var olduğu üzerinde kuşkuluyuz; ve eğer bunlar varsa, elektrik yüklü parçacıklardan tümcek değişik olmaları gerektiği üzerinde kuvvetli kanıtlar var demektir.



Şek. 10.3. (a) Zıt yüklü iki pulun (elektrodlar kesit içinde kalın siyah çubuklar halinde gösterilmiştir) elektrik alanı; bu alan kutuplanmış bir çubuğun alanına özdeştir. Yani, böyle bir çubuğun kesik çizgilerle sınırlanmış bölge içinde kaldığını düşünürsek bunun dış alanı şekilde görülen gibidir. Buradaki elektrik alanı yağ içinde tutulan ince siyah lif kırpıntıları ile görülür hale getirilmiştir, bunlar alan doğrultusunda yönelirler. Elektrik alanı düzenlenişinin bu zarif yöntemle görünür hale getirilmesi Princeton Üniversitesinde Palmer fizik laboratuvarından Mr. Harold M. Waage tarafından gerçekleştirilmiştir ve kendisi bu resmi kitabımız için çekmiştir.

(b) Mıknatıslanmış bir silindirin çevresindeki mıknatısal alanın gliserin içine serpiştirilmiş ince nikel tel kırıntıları ile gösterilmesi. (Alışık olduğumuz demir eğintileri ile alanı gösterme yöntemini yukarki Waage tekniğine uydurmak için gösterilen çaba başarılı olmamıştır-nikel telleri uzun zincirler halinde dizilme ve sonrada kutuplara çekilme eğilimi gösterirler.)



Bu dizgedeki alanların kuramsal olarak kuruluşlarının çizimleri daha sonra Şek. 10.21'-de verilecektir.

dur, ve eğer yok ise neden yoktur sorusu halâ açıktır. Eğer, günün birinde biri çıkıp ta bir biriz kutup bulursa, bir utku gülücüğü ile Denk. 1'e şu yorumu ekliyebilir ... benim fotoğraf plağımda ya da kabarcık odamda alınan resimde ya da sayacımın yazdıklarında görülen kuzey yada güney biriz kutuplunun dışında .. ". Ama bu da bizim ana sonucumuzu fazla etkileyemez: Bayağı madde mıknatısal yüklerden değil elektriksel yüklerden oluşmuştur.

O halde, biricik mıknatısal alan kaynakların elektrik akımları olduğu sonucunu onaylamak zorundayız. Bu bizi gerilere Ampere varsayımına, yani madde içindeki mıknatıslığın o madde içine dağılmış çok sayıda, küçük halka akımlarından ileri geldiği düşüncesine götürür.

10.3 Bir Akım İlmeğinin Alanı

Kapalı bir iletken ilmek xy düzlemi içinde konumluklar başını Şek. 10.4*a*'da olduğu gibi sarmakta olsun. İlmekten esb/s olarak I yeğinliğinde sürekli bir akım akmaktadır. Bu akımın, ilmeğin yakınlarında değil, ama şekildeki P_1 noktası gibi uzakta uyardığı mıknatısal alanla ilgileniyoruz. P_1 noktasına olan r_1 uzaklığını ilmeğin herhangi bir boyutuna bakınca çok büyük sayıyoruz. Çizimi yalınlaştırmak için P_1 noktasını yz düzlemi içinde aldık; sonunda göreceğiz ki, bu bir sınırlama değildir. Bu konu, yöngü gizilgücü kavramının kullanılması için uygun bir yerdir. Bunun için önce P_1 'deki A yöngü gizilgücünü, yani $\mathrm{A}(0,y_1,z_1)$ yöngüsünü hesaplayacağız. Bundan sonra, ilmeğin uzakta bulunan bir (x,y,z) noktasındaki yöngül gizilgücün * ne olduğu kolayca ortaya çıkacaktır. Sonra A'nın dönülünü alarak B mıknatısal alan yöngüsünü elde edeceğiz.

Bir telden akan akım için, Denk. 6.35'de olduğu gibi

$$\mathrm{A}(0,y_1,z_1) = \frac{I}{c}\int_{\text{ilmek}} \frac{dl_2}{r_{12}} \tag{2}$$

bağıntısı geçerlidir. O zaman çevrimin yalnız küçük parçalarının katkıları ile ilgilenmekte idik; şimdi bütün çevrim boyunca tümlemeliyiz. Önce paydadaki r_{12} 'nin ilmek boyunca ilerleyince nasıl değiştiğini görelim. Eğer P_1 noktası uzakta ise, r_{12} 'nin ilk basamaktan değişimi dl_2 parçasının sadece y_2 konumluğuna bağlıdır, x_2 'ye bağlı değildir. Bu Şek. 10.4 *b*'deki yan görünüş çizeneğinden açıkca belli olmaktadır. Böylece, $(x_2/r_{12})^2$ ile oranlı nicelikleri savsayarak, yandan bakınca üstüste gelen r_{12} ve r'_{12} uzunluklarını eşit gibi işleme sokabiliriz. Ve genel olarak, (ilmek boyutu/P_1 'e uzaklık) oranının birinci basamağı cinsinden

$$r_{12} \approx r_1 - y_2 \sin\theta \tag{3}$$

yazılabilir. Şimdi Şek. 10.4*a*'da görülen dl_2 ve dl'_2 gibi iki akım ögesine bakalım. Bunlar için dy_2 'ler eşit ve zıt yönlüdür ve daha önce belirttiğimiz gibi r_{12} 'ler ilk basamak yaklaşıklığı ile eşittirler. Öyleyse bu basamak içinde, bunların (dy'lerin) çizgi tümlevine katkıları birbirini götürür ve bu söylediğimiz bütün ilmek için doğru olur. O halde P_1 noktasında A'nın y bileşeni bulunmayacaktır. Açıkca görüldüğü gibi bunun z bileşeni de bulunmayacaktır, zira akım yolunuz kendisinin hiç z bileşeni yoktur. Yöngü gizilgücünün x bileşeni ise, yol tümlevinin dx kesiminden gelir. Böylece

$$\mathrm{A}(0,y_1,z_1) = \hat{\mathbf{x}}\frac{I}{c}\int \frac{dx_2}{r_{12}} \tag{4}$$

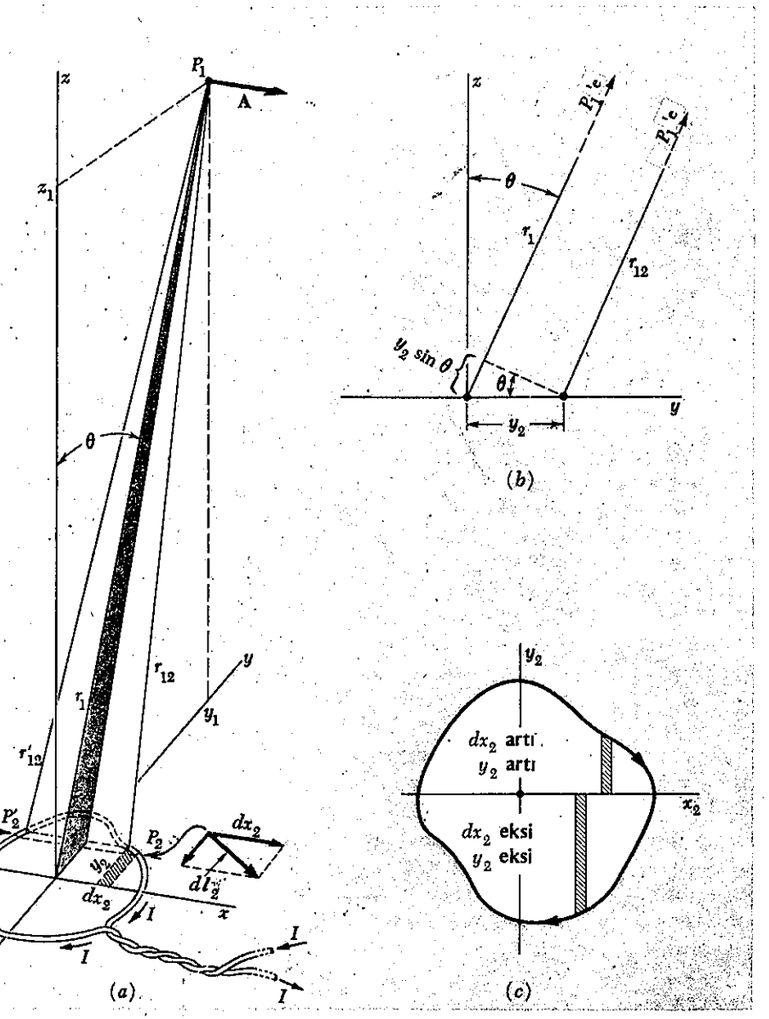
yazılabilir. İlk basamak yaklaşıklığımızı hiç bozmadan Denk. 3'ü

$$\frac{1}{r_{12}} \approx \frac{1}{r_1}\left(1 + \frac{y_2 \sin\theta}{r_1}\right) \tag{5}$$

şekline çevirebiliriz ve bunu tümlev simgesi altındaki yazım yerine kullanarak,

$$\mathrm{A}(0,y_1,z_1) = \hat{\mathbf{x}}\frac{I}{cr_1}\int\left(1 + \frac{y_2 \sin\theta}{r_1}\right) dx_2 \tag{6}$$

* Yöngül gizilgüç: vektör potansiyeli



Şek. 10.4 (a) Akım ilmeğinin uzakta bulunan bir noktadaki A yöngül gizilgücünün hesaplanması.
(b) x ekseni boyunca baktığımıza göre yan görünüş, burada $r_1 >> y_2$ ise $r_{12} \approx r_1 - y_2 \sin\theta$'dır.
(c) Tümlev $\int_{\text{ilmek}} y_2\, dx_2$ 'nin ilmeğin yüzölçümüne eşit olduğunu gösteren tepeden görünüş.

elde edilir. Tümlev hesabında r_1 ve θ sabittirler. Kolayca görüldüğü gibi $\int dx_2$ ilmek boyunca yok olmaktadır. Şimdi ilmek boyunca hesaplanan $\int y_2\, dx_2$ ilmeğin biçimi ne olursa olsun yüzölçümünü verir (Bak. Şek. 10.4 *c*). Böylece sonunda

$$\mathrm{A}(0,y_1,z_1) = \hat{\mathrm{x}}\,\frac{I\sin\theta}{cr_1{}^2} \times (\text{ilmeğin yüzölçümü}) \quad (7)$$

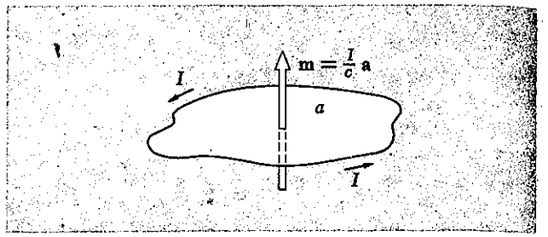
elde ederiz.

Burada yalın ama önemli bir nokta var: İlmeğin biçiminin önemli olmadığı anlaşıldığına göre, P_1 'in yz düzlemi içinde kalması yollu sınırlamanın hiç bir önemi yoktur. Bu nedenle bunu genel olarak söylersek Denk. 7'de aradığımız genel sonucu bulabiliriz: Herhangi biçimde bir akım ilmeğinin boyutlarına bakınca büyük bir r uzaklığında bir noktadaki yöngü gizilgücü, r ile ilmeğin yüzey dikitinin oluşturduğu düzleme dik bir yöngüdür ve bunun büyüklüğü,

$$A = \frac{Ia\sin\theta}{cr^2} \quad (8)$$

dır, burada a ilmeğin yüz ölçümünü gösterir.

Bu yöngü gizilgücü ilmeğin eksenine göre bakışımlıdır ve bu bakışım **B** alanının da bakışımlı olmasını ister. Bunu ilmekten çok uzak bölgeleri ele aldığımızı ve bu kadar uzaktan bakınca ilmeğin biçiminin etkisine göz yumabileceğimize bakarak yorumlayabiliriz. *Akım* X *yüzey* niceliği aynı olan bütün ilmekler uzakta aynı alanı uyarırlar. Buradaki Ia/c çarpımına akım ilmeğinin *mıknatısal ikiz kutup döngüsü* diyoruz ve bunu m ile gösteriyoruz. Açıkca görüldüğü gibi mıknatısal ikiz kutup döngüsü bir yöngüdür ve ilmeğin dikiti doğrultusuna yani çevirdiği



Şek. 10.5. Tanımca, mıknatısal döngü akıma, burada görüldüğü gibi sağ vida kuralı ile bağlı bir yöngüdür.

yüzeyin a yözölçümü yöngüsüne koşuttur:

$$\mathrm{m} = \frac{I}{c}\,\mathrm{a} \quad (9)$$

im bakımından m'nin yönü ile ilmekten geçen artı akımın yönünün Şek. 10.5'de görüldüğü gibi sağ vida kuralı ile bağlanması üzerinde anlaşalım. (Bu kurala göre Şek. 10.4 *a*'daki ilmeğin ikiz kutup döngüsü aşağı doğru yönelmiştir.) Bu mıknatısal m ikiz kutbunun uyardığı alanın gizilgücü yöngüsü artık yöngü dili ile

$$\mathbf{A} = \frac{\mathrm{m}\times\hat{\mathrm{r}}}{r^2} \quad (10)$$

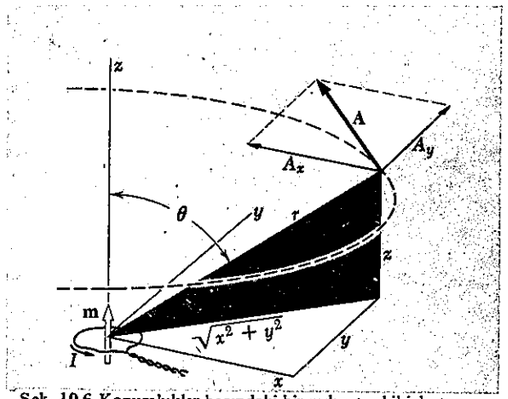
biçiminde yazılabilir; burada $\hat{\mathrm{r}}$ ilmekten A'yı hesapladığımız noktaya yönelmiş birim yöngüyü göstermektedir. Bunun imler üzerindeki anlaşmamız ile bağdaştığını sınayabilirsiniz. A'nın doğrultusunun her zaman ilmeğin en yakın kısmındaki akımın doğrultusu olduğunu gözden kaçırmayın.

Şekil 10.6, konumluklar başında m ikiz kutup yöngüsü artı z doğrultusuna dönük bir mıknatısal ikiz kutup göstermektedir. Herhangi bir (x,y,z) noktasındaki yöngü gizilgücünü yazabilmek için, $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ ve $\sin\theta = \sqrt{x^2+y^2}/r$, olduğunu gözden kaçırmayın. Yöngül gizilgücün bu noktadaki A büyüklüğü

$$A = \frac{m\sin\theta}{r^2} = \frac{m\sqrt{x^2+y^2}}{r^3} \quad (11)$$

olur. A yöngüsü z ekseni çevresindeki yatay daireye teğet olduğuna göre bileşenleri

* İkizkutup Döngüsü: dipolmoment.



Şek. 10.6. Konumluklar başındaki bir mıknatısal ikizkutup ilmekten uzak bulunan her noktada A yöngüsü xy düzlemine koşuttur ve bu yöngü z ekseni çevresindeki bir daireye teğettir.

$$A_x = A\left(\frac{-y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) = \frac{-my}{r^3}$$
$$A_y = A\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) = \frac{mx}{r^3} \quad (12)$$
$$A_z = 0$$

olur.

Şimdi xz düzlemi içinde bulunan bir noktadaki B alanını bulmak için önce dön A'nın bileşenlerini bulalım ve sonra $y = 0$ yapalım:

$$B_x = (\nabla\times\mathbf{A})_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} =$$
$$-\frac{\partial}{\partial z}\frac{mx}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} = \frac{3mxz}{r^5}$$

$$B_y = (\nabla\times\mathbf{A})_y = \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} =$$
$$\frac{\partial}{\partial z}\frac{-my}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} = \frac{3myz}{r^5}$$

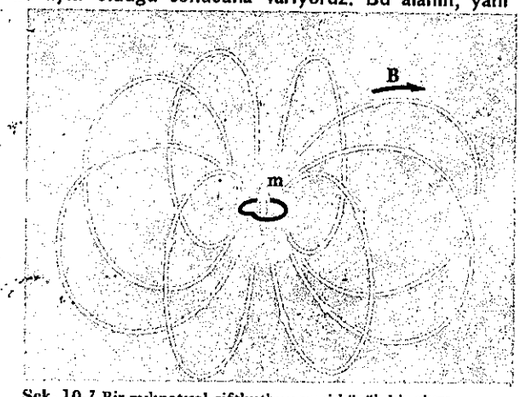
$$B_z = (\nabla\times\mathbf{A})_z = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}$$
$$= m\left[\frac{-2x^2+y^2+z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}} + \frac{x^2-2y^2+z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}\right]$$
$$= \frac{m(3z^2-r^2)}{r^5} \quad (13)$$

Bu xz düzlemi içinde $y = 0, \sin\theta = x/r, \text{ve } \cos\theta = z/r$ dir. O halde bu düzlemin içinde herhangi bir noktadaki alan bileşenleri

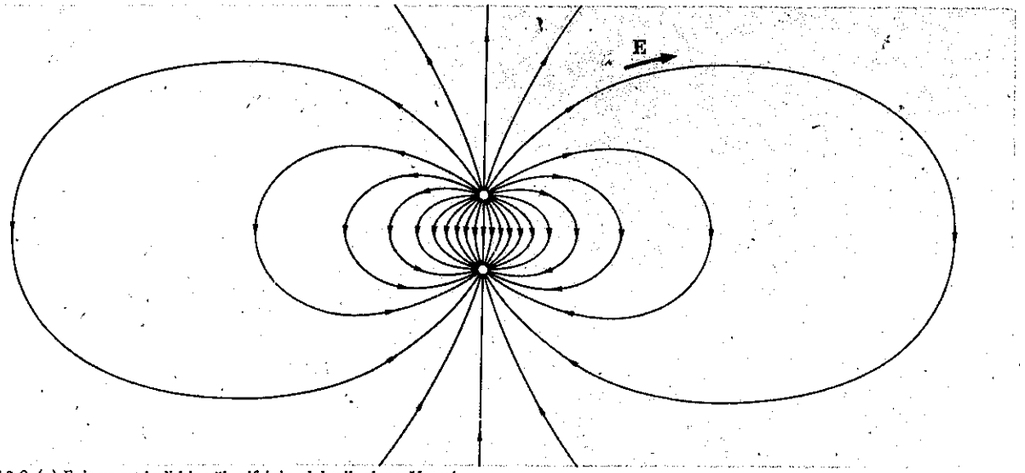
$$B_x = \frac{3m\sin\theta\cos\theta}{r^3}$$
$$B_y = 0 \quad (14)$$
$$B_z = \frac{m(3\cos^2\theta-1)}{r^3}$$

ile verilir.

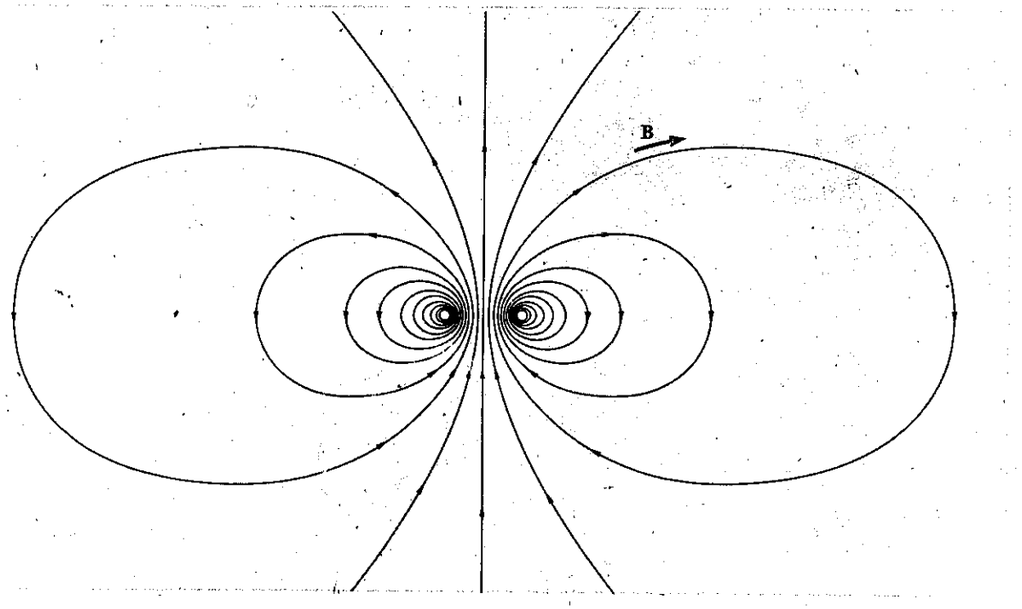
Şimdi geriye Kes. 9.3'e dönelim ve m mıknatısal ikiz kutbu yerine bir p elektriksel ikizkutup E alanının xz düzlemi içinde bileşenlerini yazdığımız Denk. 9.14'ü gözönüne alalım. Bulunan yazım buna tam özdeştir. Öyleyse küçük bir akım ilmeğinin uzak bir noktada uyardığı mıknatısal alanın, ayrı iki elektrik yükünün uyardığı elektrik alanı ile aynı olduğu sonucuna varıyoruz. Bu alanın, yani



Şek. 10.7 Bir mıknatısal çiftkutbun yani küçük bir akım ilmeğinin alanı içindeki bazı mıknatısal alan çizgileri.



Şek. 10.8 (a) Eşit ve zıt imli bir yük çiftinin elektrik alanı. Yeterince uzağa gidince bu bir elektriksel çiftkutup alanı haline girer.



(b) Bir akım halkasının mıknatısal alanı. Yeterince uzağa gidince bu bir mıknatısal ikizkutup alanı haline girer.

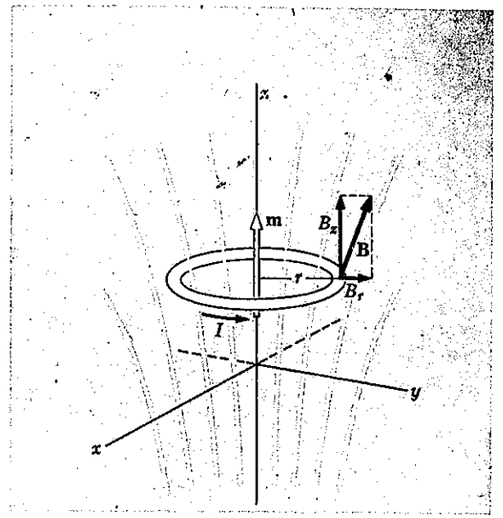
elektrik ikiz kutup alanının biçimini biliyoruz. Şekil 10.7'de **m** ikizkutup döngülü akım ilmeğimizin **B** mıknatısal alanının üç boyutlusunun ne olabileceğini görülüyor.

Şek. 10.8'deki karşılaştırmanın gösterdiği gibi akım ilmeğine *yakın* noktalardaki mıknatısal alan, biri artı, öteki eksi bir yük çiftinin yakın noktalardaki alanından temelli farklıdır. Uzak alanlar aynı olduğu halde yükler arasındaki elektrik alanının aşağı yönelmiş, oysa akım halkası içindeki mıknatısal alanın yukarıya yönelmiş olduğunu gözden kaçırmayın. Bu mıknatısal alanımızın her yerde *hatta kaynağın içinde* bile $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ olgusunu doğruladığını yansıtır. Mıknatısal alan çizgileri kesiksizdir. Burada uzak ya da yakın derken, akım ilmeğinin bağıl boyutuna ya da yüklerin aralığına göre uzaklık anladığımızı hatırlatalım. Akım şiddetini arttırırken akım halkasının boyutunu küçülttüğümüzü, şöyle ki, $m = Ia/c$ ikizkutup döngüsünün aynı kaldığını düşünürsek, Böl. 9'da betimlediğimiz sonsuz küçük elektriksel ikiz kutbun karşılığı olan sonsuz küçük mıknatısal ikizkutup kavramına yaklaşırız.

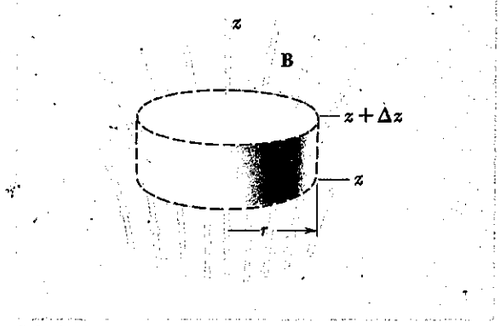
10.4 Bir Dış Alan İçindeki İkizkutba Etkiyen Kuvvet

Akım sarmalı gibi başka bir akım yapısının mıknatısal alanı içine yerleştirilmiş r yarıçaplı dairesel küçük bir akım ilmeği alalım. Şek. 10.9'da genel doğrultusu z olan bir **B** alanı çizilmiştir. Bu biteviye bir alan değildir, z doğrultusunda ilerledikce zayıflar; alan çizgilerinin birbirlerinden açılarak gidişi bunu gösterir. Basit olsun diye alanın z ekseni çevresinde bakışımlı olduğunu düşünelim. Böylece Şek. 10.1'deki sarmalın üst ucu yakınlarındaki alana benzer bir durumdayız. Şek. 10.9'un gösterimlediği alan, akım halkasının kendisinin uyardığı mıknatısal alanı içermiyor. Biz daha iyi bir ad bulamadığımız için dış alan dediğimiz başka bir alanın bir akım halkasına etkilediği kuvveti bulmak istiyoruz. Akım halkasına *kendi* alanının etkilediği net kuvvet her halde sıfırdır, ve bu nedenle tartışmamızda akımın kendi alanını bilmezlikten gelebiliriz.

Şek. 10'9'daki durumu incelerseniz akım halkasına etkiyen bir net kuvvet bulunduğu sonucuna



Şek. 10.9 Biteviye olmayan bir mıknatısal alan içinde bir akım halkası. (Halkanın kendi alanı gösterilmemiştir). Alanın B_r ışınsal bileşeni dolayısı ile halkanın bütününe bir kuvvet etkir.



Şek. 10.10 . . B_r'yi ve $\partial B_z/\partial z$'yi . bağlayan Denk. 16'yı elde etmek için Gauss teoreminden yararlanılabilir.

varırsınız. Bunun oluşması nedeni halkanın çevresinde her yerde, **B** dış alanının B_r gibi *dışa doğru* bir bileşeni oluşudur. Bu yüzden eğer akım gösterilen doğrultuda akmakta ise, ilmeğin her $d\mathbf{l}$ öğesine aşa-

ğı doğru yönelmiş $IB_r\,dl/c$ tutarında bir kuvvet etkisi olacaktır. Halkanın her yerinde B_r'nin büyüklüğü aynı ise (Şekildeki bakışımlı olarak açılan alan halinde bunun böyle olması gerekir) aşağı doğru yönelmiş toplam kuvvetin tutarı

$$F = \frac{2\pi r I B_r}{c} \tag{15}$$

olmalıdır.

Şimdi B_r, B_z'nin bayırgısına doğrudan bağlanabilir. Bütün noktalarda ırak $\mathbf{B} = 0$ olduğuna göre, mıknatısal alanın herhangi bir oylumdan geçen net akısı sıfır olacaktır. Şimdi yarıçapı r ve yüksekliği Δz olan küçük bir silindir alalım (Şek. 10.10). Bunun yanlarından geçen akı $2\pi r(\Delta z)B_r$, alt ve üst yüzeylerden geçen net akı da,

$$\pi r^2[-B_z(z) + B_z(z + \Delta z)]$$

olacaktır ki, bu da Δz'nin ilk basamağı cinsinden $\pi r^2(\partial B_z/\partial z)\,\Delta z$ olur. Toplam akının sıfıra eşit olduğunu yazarak: $0 = \pi r^2(\partial B_z/\partial z)\,\Delta z + 2\pi r B_r\,\Delta z$, şekline girer ki, bundan da

$$B_r = -\frac{r}{2}\frac{\partial B_z}{\partial z} \tag{16}$$

elde olunur. Eşitlikteki eksi imini sınamış olmak için Denk. 16'ya göre, yukarı yönelik B_z azaldığı zaman B_r'nin artı olduğuna dikkat ediniz; şekle bir göz atınca bunun doğru olduğu anlaşılır.

Şimdi ikizkutba etkiyen kuvvet dış alanın B_r bileşeninin bayırgısı cinsinden yazılabilir:

$$F = \frac{2\pi r I}{c}\cdot\frac{r}{2}\frac{\partial B_z}{\partial z} = \frac{\pi r^2 I}{c}\cdot\frac{\partial B_z}{\partial z} \tag{17}$$

buradaki $\pi r^2 I/c$ yazımı içinde akım halkasının m ikizkutup döngüsünü tanıyabiliriz. Böylece halkaya etkiyen kuvvet kolayca ikizkutup döngüsü cinsinden yazılabilir:

$$F = m\frac{\partial B_z}{\partial z} \tag{18}$$

tanıtlamış olmasak da herhangi biçimde küçük bir akım ilmeğine etkiyen kuvvetin yalnız akım-yüzey çarpımına, yani, ilmeğin ikizkutup-döngüsüne bağlı olduğunu duyunca şaşmamak gerekir. İlmeğin biçiminin önemi yok. Kuşkusuz tartıştığımız ilmekler öylesine küçük-tür ki ilmeğin kapladığı yerde dış alanın yalnız birinci basamaktan değişiminin bir önemi vardır.

Şek. 10.9'daki halkamızın $\mathbf{m}$ ikizkutup döngüsü yukarı doğru yönelmiştir ve ilmeğe etkiyen kuvvet aşağı doğrudur. Açıkca görüldüğü gibi akım ters gelir ve böylece $\mathbf{m}$ yön değiştirirse kuvvet de zıt yöne dönecektir. Bütün durum şu şekilde özetlenebilir: İkizkutup döngüsü dış alana *koşut:* Kuvvet *artan* mıknatısal alan yeğinliği doğrultusunda yönelmiştir.

İkizkutup döngüsü dış alanla *zıtkoşut:* Kuvvet *azalan* alan yeğinliği doğdultusunda yönelmiştir.

Biteviye bir dış alan: Kuvvet *sıfır.*

Açıkca görüldüğü gibi en genel hal bu değildir. İlmeğin $\mathbf{m}$ döngüsü $\mathbf{B}$ alanına göre herhangi bir doğrultuda yönelmiş olabilir ve $\mathbf{B}$'nin de farklı bileşenleri uzay içinde farklı şekilde değişebilir. Bu genel halde ilmeğin uğradığı $\mathbf{F}$ kuvvetinin yazımını geliştirmek güç değildir. Bu biteviye olmayan bir elektrik alanı içindeki elektrik ikizkutbuna etkiyen Denk. 9.22'de verdiğimiz genel kuvvet yazımının aynı olacaktır. Yani herhangi bir m mıknatısal ikizkutbuna etkiyen kuvvetin x bileşeni,

$$F_x = \mathrm{m}\cdot\text{bayır}\,B_x \tag{19}$$

ile verilir; F_y ve F_z için de benzer yazımlar verilir.

Denk. 18 ve 19'daki mıknatısal alan bayırgısı gauss/cm ve Denk. 9'un verdiği m mıknatısal ikizkutup döngüsü $m = Ia/c$ yazımı uyarınca I esb/s, a, cm² ve c, cm/s alınınca kuvvet din olarak çıkar. İkizkutup birimi için eşdeğer birçok seçenek var. Biz bunlardan "erg/gauss" birimini kullanacağız. Denk. 18'de görebileceğiniz gibi,

$$m = \frac{\text{din}}{(\text{gauss/cm})} = \frac{\text{din-cm}}{\text{gauss}} = \frac{\text{erg}}{\text{gauss}}$$

olur.

Şimdi bu bölümün başında anlatılan deneylerde olanları görmeye başlayabiliriz. Şek. 10.2'deki örnek konumunda bulunan bir madde içinde, kangalın $\mathbf{B}$ alanına koşut mıknatısal ikizkutuplar bulunmakta ise,

cisim sarmalın *içine* doğru çekilecektir. Madde içindeki ikizkutuplar alana zıt yönelik, yani zıtkoşut iseler, madde sarmaldan dışa itilecektir. Kuvvet, eksen boyunca yönelmiş olan alanın bayırgısına bağlı olacak ve sarmalın orta noktasında değeri sıfıra düşecektir. Bundan başka madde örneği içindeki ikizkutup döngüleri toplam $\mathbf{B}$ alan yeğinliği ile oranlı olursa, verilen bir konumdaki kuvvet B çarpı $\partial B/\partial z$ ile, yani sarmaldaki akımın karesi ile oranlı olacaktır. Bu diamıknatısal ve paramıknatısal maddeler halinde gözlenen davranışa uygundur. Ferromıknatısal madde örneklerinin, alan yeğinliğine pek bağlı olmayan mıknatısal döngülere olduğu görünmekte ise de, bunu özel olarak tartışmak üzere şimdilik bir yana bırakıyoruz.

Bir maddeye mıknatısal alan uygulanması ile bu maddede, yeğinliği uygulanan alanla oranlı bir mıknatısal ikizkutup döngü nasıl oluşuyor? Bundan başka bu ikizkutup döngüler kimi maddelerde alana koşut, ötekilerde ise alanla niçin zıtkoşut yönelmişlerdir? Bu soruları yanıtlayabilirsek diamıknatıslık ve paramıknatıslık fiziğini anlama yolu üzerindeyiz demektir.

10.5 Atomlardaki Elektrik Akımları ve Diyamıknatıslık

Bir atomun artı bir çekirdek ile onu saran eksi elektronlardan oluştuğunu biliyoruz. Bunu tam olarak betimleyebilmek için bu dersin ileri bölüngülerinde inceleyeceğiniz kuantum fiziği kavramlarını gerekseyeceksiniz. Bereket versin, yalın ve kolay canlandırılabilir bir atom modeli diyamıknatıslığı çok iyi açıklayabilir. Bu taslamı Bohr'un ilk hidrojen atomu taslamıdır ve kuantum kuramında olduğu gibi, bir çekirdek ile çevresindeki bir takım yörüngelerde dolanan elektronların oluşturduğu uydu taslamıdır.

Önce dairesel bir yörünge üzerinde sabit hızla devinen bir tek elektron ile işe başlayalım. Burada atomun yapısını açıklamaya çalışmadığımız için, elektronun böyle özel bir yörünge üzerindeki dolanma nedeni üzerinde durmayacağız. Ortaya attığımız soru sadece, elektron böyle bir yörünge üzerinde devinmiyor ise, bundan ne gibi bir mıknatısal etki beklemek gerektiğidir. Şek. 10.11'de toplu $-e$ elektrik yükü taşıyan bir parçacığın, yani elektronun, yarıçapı r olan dairesel bir yörünge üzerinde v hızı ile dolandığı görülmektedir. Yörüngenin merkezinde artı bir çekirdek yükü vardır ki, bu dizgeyi elektrikçe ılınlar; ama çekirdeğin kütlesi elektronunkine bakınca oldukça büyük olduğundan o denli yavaş devinirki bunun mıknatısal etkisi savsanabilir.

Herhangi bir anda, elektron ve artı yük bir elektrik ikizkutbu gibi görülecekler, ama zaman içindeki ortalama alınınca elektriksel ikizkutup döngüsü sıfıra düştüğü için, uzak bir yerde sürekli bir elektrik alanı uyaramayacaktır. Bu konuyu Kes. 9.5'de tartışmıştık. Dizgenin uzak bir noktadaki *mıknatısal alanının* zaman içindeki ortalaması sıfır *değildir.* Tam tersine bu bir akım halkasının alanıdır. Çünkü, zaman ortalaması bakımından bütün eksi yükün bir yörüngenin bir yerinde toplanmış olmasının ya da ufak parçalar halinde, düzgün uçsuz dizi oluşturacak biçimde dağılmasının hiç bir önemi yoktur. Akım, verilen halkanın üzerinde, verilen bir noktadan saniyede geçen yük tutarıdır. Elektron 1 s'de $v/2\pi r$ kez dolandığına göre e yükü esb olarak verilecek olursa akımın esb/s olarak tutarı,

$$I = \frac{ev}{2\pi r} \tag{20}$$

olur. Çekirdek çevresinde dolanan elektron Şek. 10.11*c*'de görüldüğü, gibi artı akım doğrultusu v ile zıt yönlü olan bu tutarda dairesel bir akıma eşdeğerdir. O halde uzaktaki alan, yeğinliği

$$m = \frac{\pi r^2 I}{c} = \frac{evr}{2c} \tag{21}$$

olan bir mıknatısal çiftkutup döngüsününkinin aynıdır.

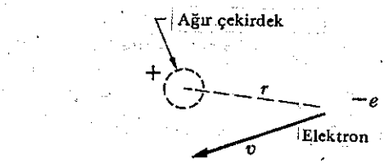
Bu arada elektron yörüngesine bağlı $\mathbf{m}$ mıknatısal döngüsü ile, $\mathbf{L}$ yörünge açısal momentumu arasındaki yalın bağıntıya iyi bakalım. Açısal momentum, elektronun kütlesi m_e * olduğuna göre $L = m_e vr$, büyüklüğünde bir yöngüdür ve elektron Şek. 10.11*a*'da gösterilen yönde dolanmakta ise bu yöngü aşağı doğru yönelmiştir. Bu iki m ve L nicelikleri içinde vr çarpımının işe karıştığını iyi görelim. Doğrultuları önemle gözönüne alırsak,

$$\mathrm{m} = \frac{-e}{2m_e c}\mathrm{L} \tag{22}$$

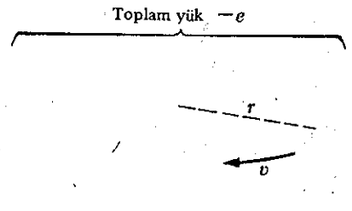
yazabiliriz. Bu bağıntı içinde temel sabitlerden başka bir şey yok; bu da bağıntının genel olarak geçerli olacağı umudunu uyandırır. Gerçekten burada tanıtlamasak ta bu böyledir. Bağıntı elips biçimli yörüngeler için de doğrudur, üstelik uzaklığın karesi ile ters oranlı olmayan merkezcil alanların etkisi altında oluşan rozet biçimli yörüngeler için de doğrudur. Merkezcil bir alan içindeki herhangi bir yörüngenin önemli özelliğini anımsayın. Açısal momentum devinimin bir sabitidir. O halde bizim sade özel bir hal için türettiğimiz Denk. 22 genel bağıntısından açısal momentumun korunumlu olduğu her hal için mıknatısal döngünün büyüklük ve doğrultuca sabit kaldığı sonucu çıkarılır. Buradaki, $\frac{-e}{2m_e c}$ çarpanına elektronun *yörüngesel magneto-mekanik oranı** denir. Atom mıknatıslığı ile ilgili her işlemde, mıknatısal döngü ile açısal momentum arasındaki bu sıkı ilişki kilit rol oynar.

Her maddenin bütün atomları içinde dolanan bütün elektronların mıknatısal alanlarını neden farketmiyoruz? Bunun yanıtı bunlar arasında karşılıklı bir söndürme etkisi bulunması gerekliğidir. Bayağı bir madde birikimi içinde bir yönde dolanan elektron sayısınca zıt yönde dolanan elektronlar bulunmak zorundadır. Bunu beklememiz gerekir; zira bir dönme yönünün başka birinden daha kolay olduğunu kabul etmek için, yani seçkin bir eksen doğrultusu bulunduğunu benimsemek için hiç bir neden yok. Maddenin yapısında yalnız bir ekseni değil, *bu eksen etrafındaki dönme yönünü* ayıracak bir şey bulunması gerekir!

* Biz c'den çok daha küçük v hızları ile uğraşmaktayız bu nedenle m_e durgun kütledir, yani değeri $9{,}0 \times 10^{-28}$ g'dır. Burada mıknatısal döngü için m harfini seçmiş olmamız elektron kütlesi için farklı bir simge kullanmamızı gerektirmektedir. Açısal momentum için Cilt I Böl. 6'da kullandığımız J harfinden ayrı olarak L'yi aldık. Çünkü bu kitapta J'yi akım yoğunluğu için kullandık ve zaten atom fiziğinde yörünge açısal momentumu için L harfini kullanmak bir gelenekleşmiştir.



(a)



(b)

$$m = \frac{evr}{2c}$$

m

$$I = \frac{ev}{2\pi r}$$

(c)

Şek. 10.11 (a) Bir elektronun dairesel bir yörünge üzerinde v hızı ile dolandığı bir atom taslamı: (b) Yükün eşdeğer sıralanışı. Ortalama akım yeğinliği, $-e$ yükü, küçük taneler halinde ayrılıp dönen bir yük halkası halinde dizildiği zamankinin aynıdır. (c) Mıknatısal döngü akımla yüzölçümü çarpımının $1/c$ katıdır.

Hiç bir diş alan etkisinde bulunmayan bir madde parçasını, uzayda her doğrultuda eşit şekilde dağılmış yörüngesel açısal momentum yöngüleri ile dolanan elektronları ve bunlara bağlı yörüngesel mıknatısal döngüleri bulunan bir topluluk halinde görebiliriz. Bu elektron yörüngelerinden, düzlemleri xy'ye aşağı yukarı koşut olanları ele alalım; bunlardan m yukarı yönelmişlerle m aşağı yönelmişlerin sayıları yaklaşıkça eşit olacaktır. Şimdi z doğrultusunda bir dış mıknatısal alan uyarırsak bu yörüngelerden birinin ne olacağını görelim.

Önce bir atoma pek benzemeyen bir elektromekanik dizgeyi çözümlemek istiyoruz. Şek. 10.12'de kütlesi M ve elektrik yükü q olan bir cisim sabit r uzunluğunda bir iple bir noktaya bağlanmış olarak döner görülmektedir. Cismi dairesel yörünge üzerinde tutan merkezcil kuvveti bu ip sağlamaktadır. Bu merkezcil F_0 kuvveti bildiğiniz gibi

$$F_0 = \frac{Mv_0^2}{r} \tag{23}$$

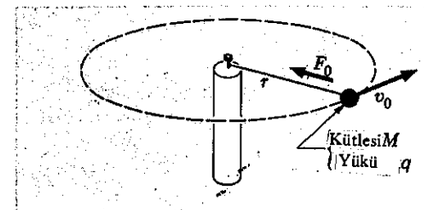
ile verilmiştir. Şek. 10.12a'nın gösterdiği ilk halde bir dış mıknatısal alanı yoktur. Şimdi uygun, büyük bir sarmal gibi bir araç yardımı ile eksi z doğrultusunda ve herhangi bir anda bütün bölge içinde biteviye bir $\mathbf{B}$ alanı uyarmaya başlıyoruz. Bu alan dB/dt hızı ile büyümeye başladıkça yörünge çevresi boyunca irgitimle Şek. 10.12b'de görüldüğü gibi bir $\mathbf{E}$ elektrik alanı uyaracaktır. Bu $\mathbf{E}$ alanının büyüklüğünü bulabilmek için, dairesel yörüngeden geçen akının değişim hızının $\frac{d\Phi}{dt} = \pi r^2 \frac{dB}{dt}$ (24) olduğunu gözden kaçırmayalım. Bu bağıntı burada önemli olan elektrik alanının çizgi tümlevini belirler (bakışım ve yalınlık için alanın bütün yörünge boyunca aynı kaldığını düşünüyoruz):

$$\int \mathbf{E} \cdot dl = \frac{\pi r^2}{c} \frac{dB}{dt} = 2\pi r E \tag{25}$$

Böylece

$$E = \frac{r}{2c} \frac{dB}{dt} \tag{26}$$

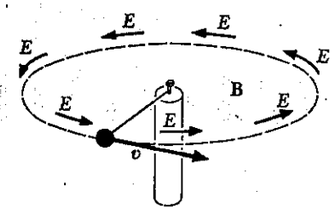
* Bir çokları bu niceliğe için jiromıknatısal oran terimini kullanırlar. Biz bunun yerine Cilt. I Böl. 8 deki magneto-mekanik oran sözünü aldık.



(a) İLK HAL

$\mathbf{B} = 0$

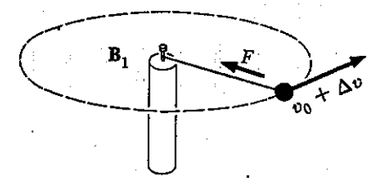
$F_0 = \frac{Mv_0^2}{r}$



(b) ARA HAL

$\mathbf{B}$ Aşağı doğrultuda artıyor

$E = \frac{r}{2c} \frac{dB}{dt}$



(c) SON HAL

Δt Süresi sonunda

$\mathbf{B} = \mathbf{B}_1$

$\Delta v = \frac{qE\,\Delta t}{M} = \frac{qrB_1}{2Mc}$

Şek. 10.12 $\mathbf{B}$ mıknatısal alanının büyümesi irgitimle bir $\mathbf{E}$ elektrik alanı meydana getirir ve bu alan dönen yüklü cismi hızlandırır.

bulunur. Buraya dek imlemeyi düşünmedik, ama eğer irgitimle oluşan elektromotor kuvvetin doğrultusunu bulmakta kullandığımız ünlü kuralı Şek. 10.12-ye uygularsanız, uyarılan $\mathbf{E}$ alanının, eğer q artı ise, cismi hızlandıracak yönde olması gerektiğini görürsünüz. Yörünge boyunca dv/dt ivmesi qE kuvveti ile belirlenir:

$$M\frac{dv}{dt} = qE = \frac{qr}{2c}\frac{dB}{dt} \tag{27}$$

olur ki, böylece v'nin değişimi ile B'nin değişimi arasında bir bağıntı elde etmiş oluruz:

$$dv = \frac{qr}{2Mc}dB \tag{28}$$

Buradaki r yarıçapı ipin uzunluğu ile sabit tutulduğundan $(qr/2Mc)$ çarpanı bir sabittir. Alanı son B_1 değerine getirinceye değin süren tüm olay boyunca v'nin net değişimini Δv ile gösterelim. Buna göre

$$\Delta v = \int_{v_0}^{v_0+\Delta v} dv = \frac{qr}{2Mc}\int_0^{B_1} dB = \frac{qrB_1}{2Mc} \tag{29}$$

bulunur. Bu yazımdan zamanın düştüğüne, yani alan değişiminin yavaş ya da hızlı olsun son hızın hep aynı olduğunu gözden kaçırmayalım.

Yükün son halde hızının artmış bulunması, yukarı doğru yönelmiş bulunan m mıknatısal döngüsünün büyüdüğünü anlatır. Aynı koşullar altında eksi yüklü bir cisim yavaşlayacaktır ki, bu aşağı doğru *yönelmiş* döngüyü *küçültmek zorundadır*. Buna göre her iki halde de, $\mathbf{B}_1$ alanının uygulanması mıknatısal döngünün alanla zıt yönlü bir değişimine yol açar. Mıknatısal döngü değişiminin Δm değeri,

$$\Delta m = \frac{qr}{2c}\Delta v = \frac{q^2r^2}{4Mc^2}B_1 \tag{30}$$

olur.

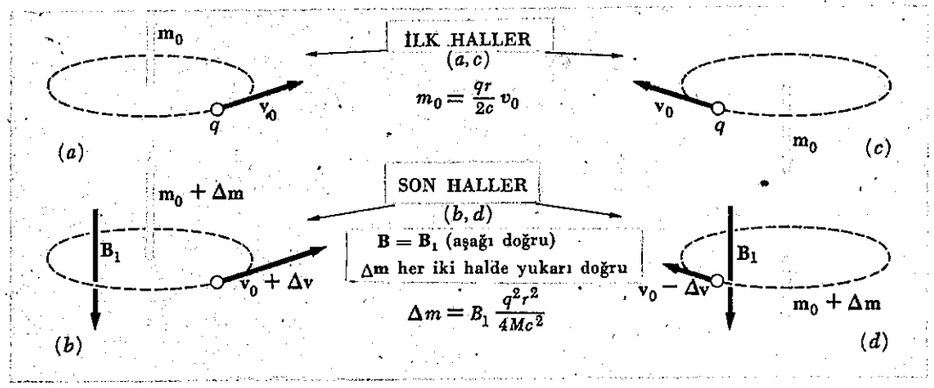
Benzerince, başka doğrultularda dolanan artı ya da eksi yükler için, irgitimle oluşan mıknatısal döngü değişimi, uygulanan mıknatısal alanın değişimi ile zıt yönlüdür. Şek. 10.13 bunu bir artı yük için göstermektedir. Buna göre, aşağıda verilen bağıntı her iki imli yükler ve her iki yöndeki dolanma için geçerli görünmektedir:

$$\Delta \mathrm{m} = -\frac{q^2r^2}{4Mc^2}\mathbf{B}_1 \tag{31}$$

Öyleyse $F = \Delta m\dfrac{\partial B_z}{\partial z}$'ye göre ikizkutba etkiyen kuvvet bir diyamıknatıslık etkisi verir.

Bu örnekte sabit uzunluklu bir ip kullanmakla r'yi sabit kalmaya zorladık. Öyleyse ipteki gerginliğin nasıl değiştiğini görelim. Bunun için B_1'i yeterince küçük sayıyoruz ki, $\Delta v \ll v_0$. olsun. Önce bu devinimin son halinde, $(\Delta v)^2$ ile oranlı terimleri bir yana bırakarak,

$$F_1 = \frac{M(v_0+\Delta v)^2}{r} \approx \frac{Mv_0^2}{r} + \frac{2Mv_0\,\Delta v}{r} \tag{32}$$



Şek. 10.13 Mıknatısal moment yöngüsünün değişimi her iki devinim doğrultusu için de, B'nin zıt yönlüsüdür.

büyüklüğünde bir merkezcil kuvvet bulunması gerekir. Bu kuvvet vardır, zira mıknatısal alan devinimdeki yüke $q(v_0+\Delta v)B_1/c$ gibi içe dönük bir kuvvet etkiler. Denk. 29'u kullanarak, B_1'i, Δv cinsinden yazarsak içe yönelmiş bu ek kuvvetin büyüklüğünün $\dfrac{q(v_0+\Delta v)}{c}\cdot\dfrac{2Mc\,\Delta v}{r}$ olduğunu görürüz ki bu, $\Delta v/v_0$ cinsinden ilk basamakla yetinilince $2Mv_0\,\Delta v/r$ verir. O halde ipde bir ek zorlama bulunması zorunluğu kalmadı. Yani ipin gerginliği *değişmez* F_0 *değerinde kalır*.

Bu bizi şaşırtıcı bir sonuca götürür: Denk. 31'de elde ettiğimiz sonuç, yarıçapa bağlı *herhangi bir* merkezcil kuvvet için geçerli olmalıdır. İp yerine esnek bir yay alabilirdik ve bu halde sonuç değişmezdi, yani son halde yarıçap aynı kalırdı. Şimdi hemen ilgilendiğiniz dizgeye geçerek bu merkezcil kuvvet için çekirdek ile elektron arasındaki Coulomb çekimini alabiliriz. Ya da, çok elektronlu bir atom halinde bir elektrona etkiyen ama yarıçapa değişik biçimde bağlı bir kuvvet halini de alabiliriz. Denk. 31 gibi *çok genel* olduğu anlaşılan bir bağıntıdan, elimizde atom yapısı üzerinde iyi bir kuram bulunmasa da anlamlı bir takım sonuçlar çıkarmayı umabiliriz. Formül içinde atomla ilgili tek nicelik r^2'dir. Kuşkusuz bu genel uygulamayı olduran $\Delta v/v_0 \ll 1$ sınırlamasına saygılı olmak zorundayız, zira bu B_1 üzerindeki sınırlamayı sağlar.

$\mathbf{B}$ mıknatısal alanının işe karışmasının elektron yörüngelerine etkisi gözde şöyle canlandırılabilir: Her elektron aynı yarıçaplı daire üzerinde döner; ama dönme yönüne göre $\pm v_0/r$ olan açısal hız küçük bir $\Delta\omega = \Delta v/r$ değişikliğine uğrar. Denk. 29'a göre bu değişikliğin tutarı

$$\Delta\omega = \frac{\Delta v}{r} = \frac{eB}{2m_eC} \tag{33}$$

olur; bu değişiklik yalnızca uygulanan alanın yeğinliğine ve elektronun yük-kütle oranı tutarına bağlıdır. Bir yöndeki dönmeler rad/s olarak belirli bir tutarda hızlanırken, zıt yöndekiler aynı tutarda yavaşlar. Yeni dizge *dönen bir gözlem çatkısından görülen* eskisinin tam aynıdır. Denk. 33'deki $eB/2m_eC$'nin adına "Larmor açısal hızı" ya da "Larmor frekansı" denir. İngiliz matematiksel fizikçisi Sir Joseph Larmor bu teoremi 1895'de bir atomun yapısının ne olduğunu kimsenin gerçekten bilmediği bir zamanda ortaya koymuştu.

Biz yalnızca $\mathbf{B}$'ye dik olan yörüngeleri ele aldık. Vardığımız sonuçlar, kabaca söylemek gerekirse, madde içindeki tüm elektron yörüngelerinin üçte birine uygulanabilmelidir; zira birbirine dik üç konumluk doğrultusu bulunabilir. Öteki xz ve yz düzlemlerine koşut yörüngelerin ne olacağı sorusu ilginçtir ve Prob. 10.22'yi işleyerek bunun yanıtını bulabilirsiniz. Bunlar da alanla zıt yönlü ve yörünge yarıçapının karesi ile oranlı bir irgitim döngüsü ile katkıda bulunurlar. Bütün yörüngelerin etkisi Denk. 31'e benzer bir denklem içinde r^2 yerine, yörünge yarıçaplarının karelerinin $\langle r^2\rangle$ ortalamasını almak ve yörünge yönelmesi boyunca alınacak bir ortalamayı hesaba katmak için bir katsayı eklemekle Denk. 31'e benzer bir eşitlik içinde özetlenebilir.

Bunun inceliklerine girmeksizin bütün elektron yörüngeleri yarıçapları için akla yakın bir değer alarak Denk. 31'i olduğu gibi kullanalım ve baştaki çizelgede verilen sayılardan i kimini hiç değilse yaklaşıkça bulup bulamayacağımıza bakalım. Çoğu madde için gram başına düşen elektron sayısı aşağı yukarı aynıdır, çünkü, atom içindeki her elektron için çekirdekte bir proton vardır ve proton başına kabaca bir nötron düşer. Böylece gram başına n elektron sayısı bütün maddelerde aşağı yukarı aynıdır; örneğin atom ağırlığı 2 ve atom numarası 1 olan madde için

$$n \approx \frac{6\times10^{23}}{2} = 3\times10^{23} \tag{34}$$

dir, yazımdaki r için $0{,}5\times10^{-8}$cm sayısını kullanacağız; bu daha sonra atomsal "yarıçap" olarak çok geçecek bir sayıdır. Çok elektronlu dizgelerde kimi elektronların yörüngelerinin büyük kimilerinin ise küçük olması doğal. M için elektronun m_e kütlesini kullanacağız. Madde örneğinin bulunduğu yerdeki mıknatısal alan yeğinliği 18000 gauss idi. Buna göre hemen bütün maddelerin 1 gramındaki toplam irgitim mıknatısal döngüsü, kabaca:

$$n\,\Delta m = \frac{ne^2r^2B}{4m_ec^2}$$

$$= \frac{(3\times10^{23})(4{,}8\times10^{-10})^2(0{,}5\times10^{-8})^2(1{,}8\times10^{4})}{4(9\times10^{-28})(3\times10^{10})^2}$$

$$= 0{,}95\times10^{-2} \qquad (35)$$

olur. Alanın $\partial B_z/\partial z$ bayırgısı 1700 gauss/cm idi. Kuvveti hesaplamak için Denk. 18'i kullanarak 1700 X 0,95 X 10^{-2} ya da yaklaşık olarak 16 din gibi bir kuvvet bulunması gerektiğini görüyoruz. Bu çizelgede birçok madde için verilen sayıya çok yakındır, hatta bekleyebileceğimizden de yakındır; o denli ki bu ölçüde bir uyuşma bulunması bir raslantı sayılmalıdır*.

Bu durumda $\Delta v \ll v_0$ varsayımımız yerine getirildiğine güvenebilmemiz gerekir. Aynı sayıları Denk. 29'daki yerlerine koyarak Δv için

$$\Delta v = \frac{erB}{2m_ec} = \frac{(4{,}8\times10^{-10})(0{,}5\times10^{-8})(18\,000)}{2(9\times10^{-28})(3\times10^{10})}$$

$$\approx 10^3 \text{ cm/s} \qquad (36)$$

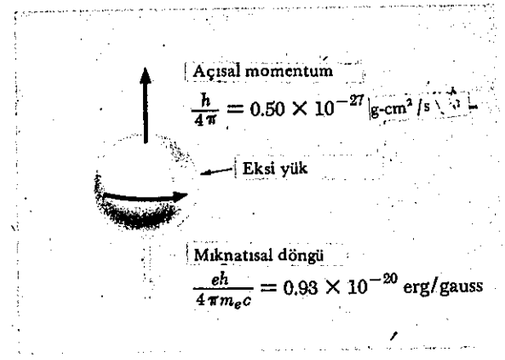
yaklaşık değerini buluruz. Çıkan 10^3 cm/s hızının bir atomdaki elektronların hızlarına bakınca çok küçük kaldığını görmek için fazla atom fiziği gerekmez. Bir insan bile bu hızla devinebilir! Bir atom elektronu için tipik bir hız 10^8 cm/s basamağındadır ya da daha da yüksektir. Bu bize kullandığımız güçlü mıknatısın bile, bir atom elektronu için çok zayıf sayılacak bir alan verdiğini ve bu alanla elektronun dolanma hızında çok hafif bir değişim sağlandığını gösterir.

Artık diyamıknatıslığın niçin evrensel bir olay olduğunu ve niçin kolay gözlenemeyecek ölçüde zayıf kaldığını görüyoruz. Bu moleküllerde olduğu kadar atomlarda da aşağı yukarı aynı büyüklüktedir. Moleküllerin atomlardan çok daha iri bir yapıda oluşu yörünge yarıçapının kare ortalamasını genel olarak etkince büyütmez. Bunun nedeni bir molekül içindeki bir elektronun, oldukça belirli biçimde atomlardan biri çevresinde yerleşmiş bulunmasıdır. Bunun ilginç bazı ayrıcaları vardır ve bunlardan birini çizelgemize aldık: Grafit. Bu maddenin alışılmış dışı diyamıknatıslığı onun çok raslanmayan yapısına bağlıdır ki, bu yapı kristal örgüsü içinde aynı düzlemde bulunan atomlar grubunun bazı elektronlarına daha özgürce dolanma olanağı sağlar.

* Eşyönlü yönelmiş yörüngeler üzerinden bir ortalama alarak bulunan kesin eşitlikte Denk. 31'deki 1/4'ün yerini 1/6 ve r^2 'nin yerini de $\langle r^2\rangle$ alır. Tam bir kuantum mekaniksel kuram tümcek aynı sonuca götürür, ve deneylerle tam bir uyuşma bulunur. Gerçekten birçok dıamıknatısal atom için mıknatısal ölçüler $\langle r^2\rangle$ 'yi bulmakta en sağlıklı değeri verirler.

10.6 Elektron Spini, Mıknatısal Döngü ve Paramıknatıslık

Elektronun yörüngesel devinimi ile hiç ilgisi olmayan bir açısal momentumu daha vardır. Bu parçacık birçok bakımlardan kendine özgü bir eksen çevresinde durmadan dönermiş gibi davranır. Bu özelliğe *spin* denir. Elektronun spin açısal momentumunun büyüklüğü ölçülünce hep aynı değer bulunur: $h/4\pi$; burada h Planck sabitidir. Elektron spini bir kuantum olayıdır. Bunun ortaya çıkarılması ve doğurduğu sonuçlar üzerine bu dersin Cilt IV'ünde daha fazla bilgi edineceksiniz. Bunun bizim için şu andaki anlamı, bu tanenin "kendi yapısı" içindeki açısal momentumu ile birlikte, değişmeyen büyüklükte bir *mıknatısal döngüsü* oluşudur. Bu mıknatısal döngü elektronu ekseni çevresinde dönen eksi yüklü bir küçük topaç gibi düşünmekle beklememiz gereken doğrultuda yönelmiştir. Başka bir deyimle, mıknatısal döngü yöngüsü Şek. 10.14'de gösterildiği gibi



Şek. 10.14 Elektronun kendi açısal momentumu ya da spini ve bununla ilgili döngüsü.

spin açısal momentum yöngüsü ile zıtkoşuttur. Bununla birlikte mıknatısal döngünün, açısal momentuma oranı yörüngesel devinimin oranından iki kez daha büyüktür.

Bu nesnenin klasik bir taslamını kurmaya çalışmanın bir yararı yok; bunun özellikleri temelde kuantum mekanikseldir. Hatta bunun bir akım ilmeği olduğunu bile söyleyemeyiz. Önemli olan bunun şöyle davrandığıdır: (i) bu parçacık bir mıknatısal alan uyarır ve bu alan bir mıknatısal ikizkutbun belli bir uzaklıktaki alanının aynıdır; (ii) bir dış **B** alanı içinde, eşdeğer ikizkutup döngüsü etkisinde kalır; (iii) kaynağın içinde her yerde, bildiğimiz bayağı mıknatısal alan kaynaklarında olduğu gibi $\text{ırak}\mathbf{B} = 0$'dır.

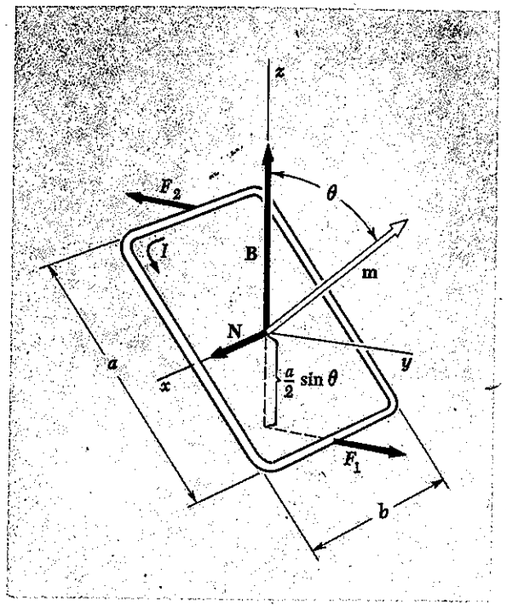
Spin mıknatısal döngüsünün büyüklüğü hep aynı kaldığına göre, bir dış alan bunu sadece doğrultuca etkiler. Bir dış alan içinde bulunan bir mıknatısal ikizkutuba bir kuvvet döngüsü etkir. Eğer Prob. 6.22'yi baştan sona çözmüş iseniz, ikizkutup döngüsü **m** olan herhangi bir akım ilmeğine bir **B** alanı içinde etkiyen kuvvet döngüsünün değerinin

$$\mathbf{N} = \mathbf{m} \times \mathbf{B} \qquad (37)$$

ile verildiğini görmüşsünüzdür. Bu problemi çözmemiş olanlar için, biraz zaman ayırarak yalın bir özel hal için kuvvet döngüsünü hesaplayalım. Şek. 10.15'de I akımı geçiren dörtgen biçimli bir tel ilmeği görülüyor. İlmeğin $m = Iab/c$ değerinde bir **m** mıknatısal döngüsü var. İlmeğin etkilendiği kuvvet döngüsü, yatay tellere etkiyen $\mathbf{F}_1$ ve $\mathbf{F}_2$ kuvvetlerinden ileri gelmektedir. Bu kuvvetlerden her birinin büyüklüğü $F = IbB/c$'dir ve döngü kolları (a/2) sin θ uzunluğundadır. O halde ilmeğe etkiyen **N** kuvvet döngüsünün büyüklüğünün

$$N = 2\,\frac{IbB}{c}\cdot\frac{a}{2}\sin\theta = \left(\frac{Iab}{c}\right)B\sin\theta = mB\sin\theta \qquad (38)$$

olduğunu görüyoruz. Kuvvet döngüsü, **m**'yi **B**'ye koşut getirecek doğrultudadır; şekilde görülen durumda bu döngüsü artı x doğrultusunda yönelmiş bir **N** yöngüsü ile gösterilmiştir. Bunların hepsi Denk. 37



Şek. 10.15 Bir **B** mıknatısal alanı içinde bulunan bir akım ilmeğine etkiyen kuvvet döngüsünün hesaplanması. Akım ilmeğinin mıknatısal döngüsü **m**'dir.

genel yazımı ile bağdaşmaktadır. Denk. 37'nin Böl. 9'da bir **E** dış alanı içinde bulunan bir **p** elektriksel ikizkutup döngüsüne etkiyen kuvvet döngüsünün yani $\mathbf{N} = \mathbf{p} \times \mathbf{E}$'nin tam benzeri olduğunu gözden kaçırmayın. Demek ki **m**'nin **B** doğrultusunda yönelmesi, elektriksel ikizkutup döngüsünün **E**'ye koşut yönelmesinde olduğu gibi en alçak enerji konumunu verir. Yine benzerince, **m** ikizkutbunu alana koşut konumdan zıtkoşut konuma çevirmek için gerekli iş $2mB$'dir. (Bak Denk. 9.18; mıknatısal alan için bu sonucu çıkarmadan alabiliriz.)

Bir madde içindeki elektron spin döngüleri herhangi bir şekilde yönelmekte özgür iseler, bunların, uygulanan bir **B** alanı etkisinde bu alan doğrultusunda yani en alçak enerji doğrultusunda yönelmelerini beklemeliyiz. 1 gramlık madde içinde

bulunan bütün elektronların bu yönelmeyi almış olduklarını düşünelim. Herhangi bir maddenin gramında kabaca 3×10^{23} tane elektron bulunduğunu hesaplamıştık. Her elektronun spin mıknatısal döngüsü, Şek. 1014'de verildiği gibi $0{,}93 \times 10^{-20}$erg/gauss'dır. O halde dizilmiş spinlerimizin toplam mıknatısal döngüsü $(3 \times 10^{23}) \times (0{,}9 \times 10^{-20})$ ya da 2700 erg/gauss olacaktır. Böyle bir madde alan bayırgısının 1700 gauss/cm olduğu bir sarmal içine konulursa $4{,}6 \times 10^{6}$ dinlik ya da yaklaşık olarak 4,6 kilogramı biraz aşkın bir kuvvetin oluşmasına yol açması gerekir.

Bu kuvvetin herhangi bir paramıknatısal örnek için bilinen kuvvetlerden çok daha büyük olduğu açıktır. Bunun nedeni elektron spinleri dizilişinin kusursuz olmaktan çok uzak olduğu noktasında toplanır. Isısal kaynaşmalar spin ekseni doğrultularının gelişigüzel yönelmelerini, yani yönelmede bir kargaşalık hali yaratmayı sağlamaya çalışır. Şağlanabilen dizilim kertesi, en alçak enerji doğrultusundaki yeğleme ile ısıl devinimlerin yönelmeyi bozma etkisi arasında, oluruna bağlanmış bir durum gösterir. Bunun değerlendirilmesi toplam mıknatısal döngüsünün, genel olarak, uygulanan $\mathbf{B}$ alanı ile oranlı ve T mutlak sıcaklığı ile ters oranlı olduğunu göstermiştir. Bunun temel düşüncesinin, enerji ile düzensizlik arasında bir yarışma olarak betimlenebileceğini bu dersin Cilt V'inde göreceğiz. Elektron spinlerinden ileri gelen paramıknatıslık orada öğretici bir örnek olacaktır. O zamana dek öğreneceğiniz kuantum fiziği şu andaki görüş açımızdan güç görünen bu problemi çok daha yalın hale getirecektir.

Her şey niçin paramıknatısal değildir? Bunun nedeni hemen bütün atomlarda ve moleküllerde elektronların çiftler halinde eşlenmesi, ve uygulanan alan ne olursa olsun, bir çift içindeki spinlerin zıt yönelik olmasıdır. Bunun sonucu, bir elektron çiftinin mıknatısal döngüleri birbirini tam tamına karşılar. Böylece geriye daha önce incelediğimiz diyamıknatıslık kalır. Az sayıda bir kısım molekülün tek sayıda elektronu olduğu için çiftlerin birbirini tam karşılayamaz. Molekülünde 15 elektronu bulunan azot oksit, NO buna bir örnektir; bu paramıknasaldır. Oksijen molekülü O_2 çift elektronlu olsa da, yapısının iki elektronu, spinlerinin birbirini karşılamasını önleyecek biçimde kurulmuştur. Bazı element kümelerinde, özellikle periyodlar çizelgesinin gadolinyum çevresindeki element atomları ile demir çevresindeki element atomlarının, bir mıknatısal alan içinde oldukça kolay yönelme özgürlüğü olan çiftlenmemiş elektronları vardır. (Böyle bir atomun mıknatısal döngüleri çoğu zaman yörünge devinimlerinden de bir katkı alır.) Metal halindeki iletkenlerin "özgür" elektronları bu metalin içinde kaynaşma halinde olduklarından kendilerine özgü çok zayıf bir paramıknatıslık davranışı gösterirler. Bunların tümünün temelinde kuantum fiziği yatar.

Diamıknatıslık da temelde kuantum mekaniği ile ilgilidir. Bir atom içinde zıt yönlerde dolanan iki elektron ele alalım. Diyamıknatıslığın uygulanan $\mathbf{B}$ alanı dolayısı ile bir elektronun azıcık hızlanması ya da başka birinin azıcık yavaşlaması yüzünden oluştuğunu anlattık. Ama bu yörüngelerin ikisi de, yörüngesel mıknatıslık döngülerini aynı doğrultuya yani alan doğrultusuna koşut getirecek şekilde niçin dönmezler? Bunun yanıtı, elektron spinlerinin ikişer ikişer çiftleniminde olduğu gibi, iki elektronun çoğu hallerde, kuantum mekaniği yasaları uyarınca yörüngeleri üzerinde zıt yönlerde dolanmak zorunda oluşlarıdır.

10.7 Mıknatısal Alınganlık

Diyamıknatısal ve paramıknatısal maddelerin her ikisinin de uygulanan alanla oranlı bir mıknatısal döngü edindiklerini gördük. Bu hiç değilse çoğu koşullar altında doğrudur. Çok alçak sıcaklık derecelerinde ve oldukça kuvvetli alanlarla sağlanan irgitim paramıknatısal döngüsünün, alan yeğinliği arttıkça bir sınır değere doğru yaklaştığı gözlenebilir. Bu "doyma" etkisi bir yana, döngü ile uygulanan alan arasındaki bağıntı çizgiseldir ve bir maddenin mıknatısal özelliklerini belirtmek için, irgitimle doğan döngünün uygulanan alana oranını alabiliriz. Bu oranın adına mıknatısal alınganlık denir. Aldığımız örnek 1 gram madde 1 cm^3 madde ya da 1 mol madde olduğuna göre buna *özgül* alınganlık, oylumsal alınganlık, ya da *molekülsel* alınganlık denir. Kes. 10.5'de tartışmamız, diamıknatısal maddelerin gram başına irgitim döngüsü olarak tanımlanan özgül alınganlığının bir maddeden ötekine çok yaklaşıklıkla aynı olması gerektiği anlamını taşır. Ama cm^3 'e düşen irgitim mıknatısal döngüsüne dayanan oylumsal alınganlık, şu andaki ilgimiz bakımından daha anlamlıdır.

Oylum birimi başına düşen mıknatısal döngüye, mıknatısal kutuplanım ya da *mıknatıslanım* diyeceğiz ve bunu $\mathbf{M}$ ile göstereceğiz. $\mathbf{M}$ mıknatıslanımı ve $\mathbf{B}$ mıknatısal alanı aynı boyutludurlar*. Bunu doğrulamak için bir mıknatısal ikizkutbun $\mathbf{B}$ alamının $\left(\frac{\text{Mıknatısal ikizkutup döngüsü}}{\text{(uzaklık)}}\right)$ ile verildiğini anımsayalım; öte yandan az önce tanımladığımız gibi $\mathbf{M}$ 'nin boyutu da $\left(\frac{\text{Mıknatısal ikizkutup döngüsü}}{\text{oylum}}\right)$ dur. Eğer şimdi χ_m ile gösterdiğimiz oylumsal mıknatısal alınganlığı

$$\mathbf{M} = \chi_m \mathbf{B} \quad \text{(Dikkat: aşağıki uyarıya bak)}$$

ile tanımlayacak olursak, alınganlık diamıknatısal maddeler için eksi, paramıknatısallar için artı boyutsuz bir sayı olacaktır. Bu, Denk. 9.38'de, P elektriksel kutuplanımın E elektrik alanına oranı olarak tanımladığımız χ_e elektriksel alınganlığının tanımına tam uyar ve, bu uyarlık daha da derinlere gider; nasıl ki $\mathbf{E}$ genil (makroskopik) alanı $\mathbf{E}$ minil (mikroskopik) alanının ortalaması idiyse maddenin içindeki $\mathbf{B}$ genil alanı da $\mathbf{B}$ minil alanının bir ortalamasıdır.

Ne yazık ki, Denk. 39 oylumsal mıknatısal alınganlığın kullanılan tanımı *değildir*. Alışılmış tanımda başka bir $\mathbf{H}$ alanı işe karışır ki bu az ileride $\mathbf{B}$ yerine karşımıza çıkacaktır (Bak. Denk. 55). Pek mantıksız olmasa da $\mathbf{H}$ cinsinden tanımlamanın bazı kılgın yararları vardır, ve gelenek öylesine iyi yerleşmiştir ki, bunun önünde eğilmek zorundayız. Ama bu bölüm boyunca, madde içinde elektrik alanının anlatımına koşut yoldan ve o yolla bağdaşır halde gidebildiğimizce gitmek istiyoruz.

Tanımlar arasındaki bu ayrım, χ_m 1'e bakınca küçük kaldıkça kılgın bir önem taşımaz. Arı diamıknatısal maddeler için, katı ya da sıvı halde olsun χ_m 'nin değeri genellikle $-0{,}5 \times 10^{-6}$ ile $-1{,}0 \times 10^{-6}$ arasında kalır. Oksijen için bile, çizelgede verilen koşullar içinde, paramıknatısal alınganlık 10^{-3} 'den daha küçüktür. Bunun anlamı, maddede bulunan ikizkutup döngülerinin uyardıkları mıknatısal alanın, hiç değilse geniş ölçekte bir ortalama bakımından, uygulanan $\mathbf{B}$ alanı yanında pek çok küçük kaldığıdır. Bu bize bu gibi dizgelerde atom ikizkutuplarını etkileyerek onları yöneltecek alanın, madde bulunmadığı zaman var olan alan olduğu konusunda bir rahatlık verir. Ama yine de, mıknatısal döngü alanlarının küçük olmadığı dizgelerle de ilgilenmek zorunda bulunacağız. Bu nedenle, elektriksel kutuplanımda olduğu gibi, mıknatıslanmış maddenin kendisinin, o maddenin içinde ve dışında uyardığı mıknatısal alanı incelemek zorundayız.

10.8 Mıknatıslanmış Maddenin Uyardığı Mıknatısal Alan

Oylumu içinde biteviye dağılmış ve hepsi aynı doğrultuda yönelmiş büyük sayıda atomsal mıknatısal ikizkutupları bulunan bir madde kesmesine *biteviye mıknatıslanmış* bir madde denir. Maddenin $\mathbf{M}$ mıknatıslanım yöngüsü yalınca her ikizkutbun $\mathbf{m}$ mıknatısal döngüsü ile birim oylumdaki yönelmiş ikizkutuplarının çarpımına eşittir. Bu ikizkutuplar yöneliminin nasıl sürdürüldüğü üzerinde durmuyoruz. Bunun için başka bir kaynağın uyardığı bir mıknatısal alan uygulanmış olabilir; şimdi bununla ilgili değiliz. Biz yalnız ikizkutupların uyardıkları alanı incelemek istiyoruz.

Önce kalınlığı dz olan ve Şek. 10.16a'da görüldüğü gibi mıknatıslanım doğrultusuna dik olarak kesilmiş bir madde dilimi ele alalım. Bu dilim küçük parçalara ayrılabilir. Oylum birimi başına ikizkutup döngüsü M, dilim parçasının yözölçümü da olduğuna göre böyle küçük bir parçanın toplam ikizkutup

---

* M ve B'nin boyutları aynı olduğu halde bunları aynı birimlerle ölçmemek karışıklığa yol açar; çünkü 4π katsayısı var. M için bir birim bulununcaya kadar biz buna erg/gauss-cm^3 diyeceğiz.

döngüsü $M\ da\ dz$ olur. (Şek. 10.16b). Bu parçanın bütün *uzak noktalardaki* mıknatısal alanları, bu uzaklık parçanın boyutları yanında çok büyük oldukça, aynı mıknatısal döngüsü olan bir tek ikizkutbun uyardığı alanın aynıdır. dz genişliğinde iletken bir şeridi bu parça biciminde bükmek ve bunun oluşturduğu ilmekten $I = Mc\,dz$ yeğinlikli bir akım geçirmekle bu yeğinlikte bir ikizkutup yapabiliriz (Şek. 10.16c). Bu koşullar bu ilmeğe

$$m = \frac{I}{c} \times \text{yüzölçümü} = \frac{Mc\,dz}{c}\,da = M\,da\,dz \qquad (40)$$

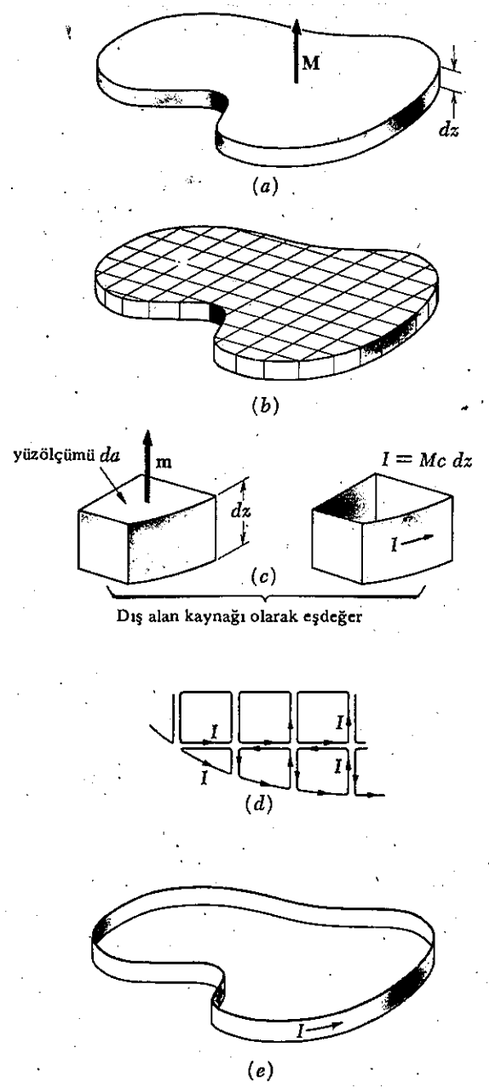
değerinde bir ikizkutup döngüsü verir ki, bu da parçanınkinin aynıdır.

Şimdi madde diliminin her parçası yerine Şek. 10.16d'de görüldüğü gibi bir akım ilmeği alalım. Bunların tümündeki akım aynıdır ve dolayısı ile, her iç sınır boyunca eşit ve zıt yönlü akımlar bulunacaktır ki, bu sıfır akıma eşdeğerdir. Böylece "göz-göz" ilmeklerden oluşmuş bir yapı, dış çeper çevresinde dolanan $Mc\,dz$ yeğinlikli akım geçiren bir tek şeride eşdeğer olacaktır (Şek. 10.16e). Şimdi bu parçalar daha da küçültülebilir yeter ki, bir tek molekül boyutuna kadar inecek şekilde parçalamayalım. Parçalardan her biri yeterince büyük olmalıdır ki, birinden ötekine mıknatıslanım göze görünür bir değişim göstermesin. Bu sınırlama içinde, herhangi bir *dış* noktadaki alan, bu nokta dilime yakın bile olsa, bir şerit akımının alanın tıpkısıdır denebilir.

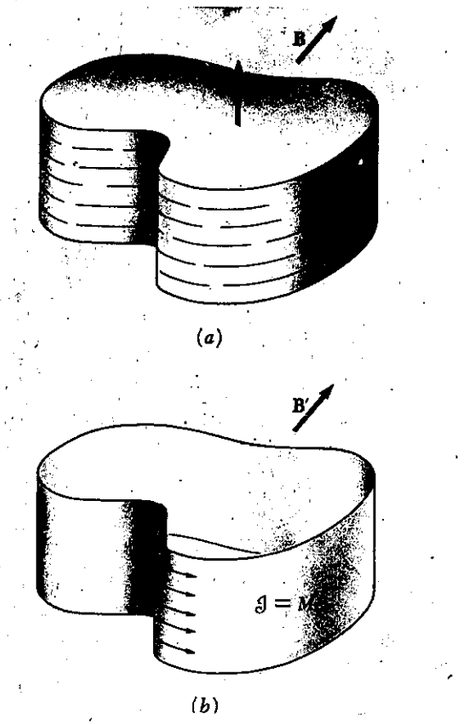
Şimdi Şek. 10.17a'daki gibi dilimlerden yola çıkarak, bütün bir kesmeyi yeniden kurmak kalıyor. Artık bütün kesme Şek. 10.17b'deki geniş şeride eşdeğer olacaktır, bu şerit boyunca, şeridin her dz parçasından esb/s olarak $Mc\ dz$ tutarında bir akım akacak ya da daha basitce söylersek, bu şerit boyunca (esb/s)/cm olarak yüzeyce akım yoğunluğu

$$\mathcal{J} = Mc \qquad (41)$$

ile verilen bir akım akacaktır. Şek. 10.17a'daki mıknatıslanmış kesmenin dışında, herhangi bir noktadaki **B** mıknatısal alanı, nokta kesmeye yakın bile olsa, moleküller boyutuna sokulmadıkça Şek. 10.17b'deki geniş akım şeridinin yakınlarındaki **B'** alanı ile aynı olacaktır.



Şek. 10.16. Geniş, yüzeyine dik olarak mıknatıslanmış ince bir dilim, dış alanla ilgisi bakımından bir akım şeridine eşdeğerdir.



Şek. 10.17 Biteviye mıknatıslanmış bir kesme yüzey akımı şeridine eşdeğerdir.

Ama, acaba mıknatıslı kesmenin içindeki alan üzerine ne diyebiliriz? Burada da Böl. 9'da rasladığımıza benzer bir soru ile karşılaşacağız. Maddenin içindeki mıknatısal alan, bu alanı "minil" dediğimiz düzeyden, yani atomlar ölçeğinde gözlersek, hiçte biteviye bir alan değildir. Birkaç angström aralıklı iki nokta arasında bile alan hem değer hem doğrultuca çok keskin değişiklikler gösterir. Bu **B** *minil* alanı boşlukta bir alandır; çünkü Böl. 9'da belirttiğimiz gibi minil görüş, temelde boşlukta yeralmış parçacıklar ile elektrik yükleri topluluğundan başka bir şey değildir. Maddenin içinde tanımlayabileceğimiz bir tek büyük ölçek alanı minil alanın uzay içindeki ortalamasıdır.

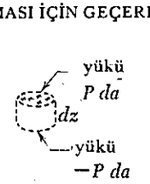
Mıknatıs yüklerine yorulabilecek etkiler bulunmadığı için, minil alanın ırak $\mathbf{B} = 0$ koşulunu yerine getirdiğine inanıyoruz. Eğer bu doğru ise, bundan kesme içindeki minil iç alanın uzay ortalamasının, eşdeğer akım şeridinin içindeki **B'** alanının özdeşi olması gerektiği sonucu çıkar.

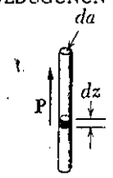
Bunu göstermek için Şek. 10.18a'daki gibi boyuna koşut olarak biteviye mıknatıslanmış uzun bir çubuk alın. Bunun dış alanının, uzun bir akım silindirinki ile aynı olduğunu az önce gösterdik (Şek. 10.18.b). Şek. 10.18a'daki S yüzeyi, çubuğun içinden geçen S_1 parçasını da içeren kapalı bir yüzeydir. İçerdeki minil alan için olduğu gibi dış alan içinde, ırak $\mathbf{B} = 0$ olduğundan, S'nin sardığı bütün oylum (hacım) boyunca ırak **B** sıfır olmalıdır. O halde Gauss teoremine dayanarak **B**'nin S yüzeyi üzerinde alınan yüzey tümlevinin sıfır olması gerekir. Bundan başka **B'** 'nün S' kapalı yüzeyi üzerindeki yüzey tümlevi de sıfırdır. S ve S''nün silindirin dışında bulunan kesimleri üzerinde B ile B' özdeştirler. Bu nedenle **B**'nin içteki S_1 pulu üzerindeki yüzey tümlevi, **B'** 'nün içteki S_1' pulu üzerindeki yüzey tümlevine eşit olmalıdır. Bu dediğimiz Şek. 10.18c'deki S_2, S_3, v b gibi birbirine yakın konumda pullar için de doğru olmalıdır; zira bu komşuluk içinde silindirin dışındaki alan savsanabilecek ölçüde küçük olduğu için dış kesimler genel durumda hiç bir şey değiştirmez. Şimdi bu gibi eşit aralıklı bir dizi düzlem üzerinde yüzey tümlevini almak, **B** alanının bu komşuluk içindeki ortalamasını hesaplama bakımından iyi bir yoldur; zira bu yol bütün oylum öğelerini yan tutmadan örneklemektedir. Buna göre mıknatıslanmış çubuk içinde **B** minil alanının uzay ortalaması Şek. 10. 18b'deki akım kılıfı içindeki **B'** alanına eşittir.

Geliştirdiğimiz çözümleme biçimini, Böl. 9'daki benzer sorununki ile karşılaştırmak öğretici olacaktır. Şek. 10.19 bu iki gelişimi yanyana gösteriyor. Bunların mantıkça koşut gittikleri görülüyor, ama her basamakta bu iki olay arasında temel bakışımsızlığı belirten bir ayrım var; bu temel bakışımsızlık *elektrik alanlarının* kaynağının *elektrik yükleri* olduğu halde *mıknatısal alanlarınkinin devinimli elektrik yükleri* olmasından ileri gelir. Örneğin izlediğimiz düşüncede

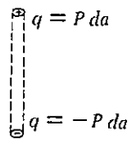
EŞDEĞERLİĞİN İÇ ALANIN UZAY ORTALAMASI İÇİN GEÇERLİ OLDUĞUNUN TANITLAMASI.

a) Bir **E** dış elektrik alanı kaynağı olarak çubuk

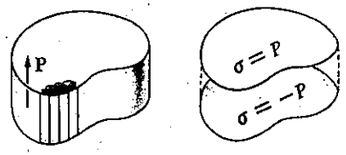




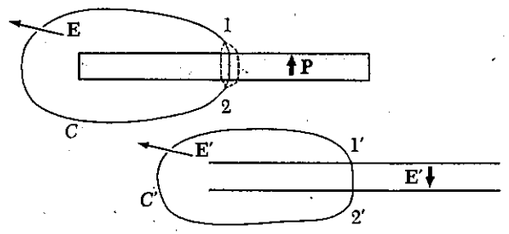
şuna eşdeğerdir :



Çünkü $da \cdot dz$ oylumlu bir tutam kutuplu maddenin küçük bir parçasının ikizkutup döngüsü



Biteviye kutuplu kesme çubuklara ayrılabilir. Dolayısiyle kesmenin dış alanı yüzey yük yoğunluğu $\sigma = P_n$ olan iki katmanınkine eşittir. (Daha genel olarak biteviye olmayan kutuplanımda kutuplu madde $\rho = -\text{ırak}\mathbf{P}$ yük dağılımına eşdeğerdir)



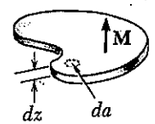
Şek. 10.19 Elektriksel (a) ve mıknatısal (b) hallerin karşılaştırılması.

Geniş, ince biteviye kutuplanmış yaprak ve bunun eşdeğeri yüzey yükü katmanı ele alınız. Ortalarda dış alan zayıftır ve $\mathbf{E}'$ biteviyedir. Eğer $\nabla \times \mathbf{E}$ iç alan için $= 0$ ise,

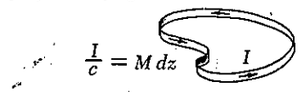
$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\boldsymbol{l} = 0$'dır. Ama dış yol boyunca $\mathbf{E} = \mathbf{E}'$ dır. Öyleyse bütün yollar boyunca $\int_1^2 \mathbf{E} \cdot d\boldsymbol{l} = \int_{1'}^{2'} \mathbf{E}' \cdot d\boldsymbol{l}'$.

SONUÇ: $\langle \mathbf{E} \rangle = \mathbf{E}'$ 'dir; yani iç elektrik alanının uzay ortalaması, bu noktada boş uzayda eşdeğer yük bölüşümünün uyardığı $\mathbf{E}'$ alanına eşittir.

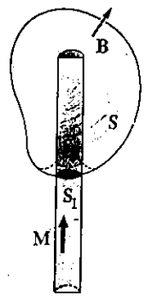
b) Bir **B** dış mıknatısal alan kaynağı olarak dilim.

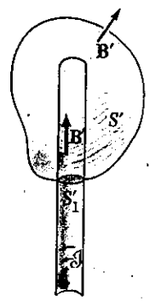


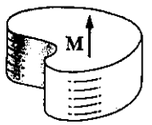
şu şeride eşdeğerdir :

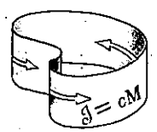


Çünkü oylumu $da \cdot dz$ olan bir tutam mıknatıslı maddenin ikizkutup döngüsü da $cMdz$ akımınınkine eşittir.









Biteviye mıknatıslı bir kesme böyle dilinebilir. Bunedenle kesmenin dış alanı $\mathcal{J} = cM$ gibi geniş bir akım şeridinin alanına eşittir. Daha genelde, biteviye olmayan mıknatıslanma halinde mıknatıslanmış madde $\mathbf{J} = c$ dönül $\mathbf{M}$ akım dağılımına eşdeğerdir.

Biteviye mıknatıslanmış uzun bir çubuk ile, eşdeğeri alan yüzey akımını ele alın. Ortalara doğru dış alan zıyıftır ve $\mathbf{B}'$ biteviyedir. İç alan için $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ ise $\int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} = 0$'dır. Ama yüzeyin çubuğun dışında kalan kısmı için $\mathbf{B} = \mathbf{B}'$ dür. O halde S_1, S_2' gibi herhangi bir yüzey parçası için $\int_{S_1} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} = \int_{S_1'} \mathbf{B}' \cdot d\mathbf{a}'$ dır.

SONUÇ: $\langle \mathbf{B} \rangle = \mathbf{B}'$ dir; yani iç mıknatısal alanın uzay ortalaması bu noktada, boş uzayda yukarıda tanımlanan akım dağılımının uyardığı $\mathbf{B}'$ alanına eşittir.

minil alanın ortalaması konusunda problemin kilit noktası, minil elektrik alanı için dönül $\mathbf{E} = 0$ olduğunu varsaymamızdır. Mıknatısal alan halinde ise, minil mıknatısal alan için ırak $\mathbf{B} = 0$ saymak problemin kilit noktasıdır.

Madde oylumu (hacmı) içindeki $\mathbf{M}$ mıknatıslanım yöngüsü biteviye değil ama konuma bağlı olarak $\mathbf{M}(x,y,z)$ gibi değişirse, eşdeğer akım dağılımı yalınca

$$\mathbf{J} = c\,\text{dönül}\mathbf{M} \tag{42}$$

ile verilir. Bir hal için bunun nasıl olduğunu görelim. Bunun için z yönünde bir mıknatıslanım olduğunu ve bunun y doğrultusu boyunca yeğinleştiğini varsayalım. Bu dediğimiz Şek. 10.20a'da madde içinde küçük bir bölgeyi küçük kesmeler halinde bölünmüş göstererek gösterimlenmiştir. Kesmelerin küçük olduğu, ve dolayısıyla bunlardan biri içindeki mıknatıslanımın biteviye varsayılır. O zaman her kesme yerine, yüzeyce akım yogunluğu $\mathcal{J} = cM_z$ olan bir akım şeridi alabiliriz. Böyle bir şeridin geçirdiği I akımı, kesmenin yüksekliği Δz ise $\mathcal{J}\,\Delta z$ ya da $cM_z\,\Delta z$ olur. Şimdi her şeridin akım yoğunluğu ve dolayısiyle akımı, sol bitişik komşununkinden biraz daha büyüktür. Aradaki değişim

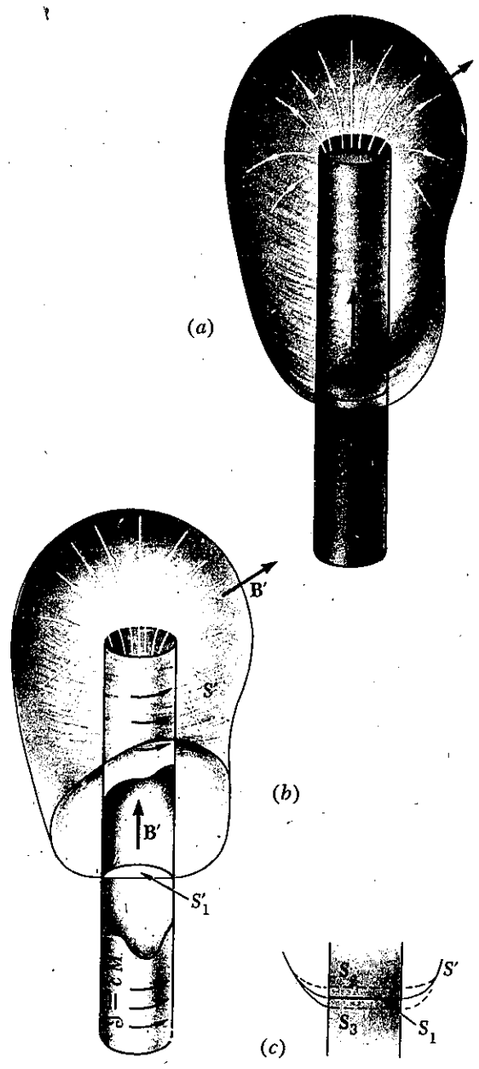
$$\Delta I = c\,\Delta z\,\Delta M_z = c\,\Delta z\,\frac{\partial M_z}{\partial y}\,\Delta y \tag{43}$$

tutarındadır. Bu kesme dizisinin her ara yüzeyinde x doğrultusunda ΔI değerinde (Şek. 10.20c) net bir akım var; x doğrultusunda birim yüzeyden akan akımı bulabilmek için, bunu sadece birim yüzeyde bulunan kesme sayısı ile yani $1/(\Delta y\,\Delta z)$ ile çarpmak gerekir. Böylece

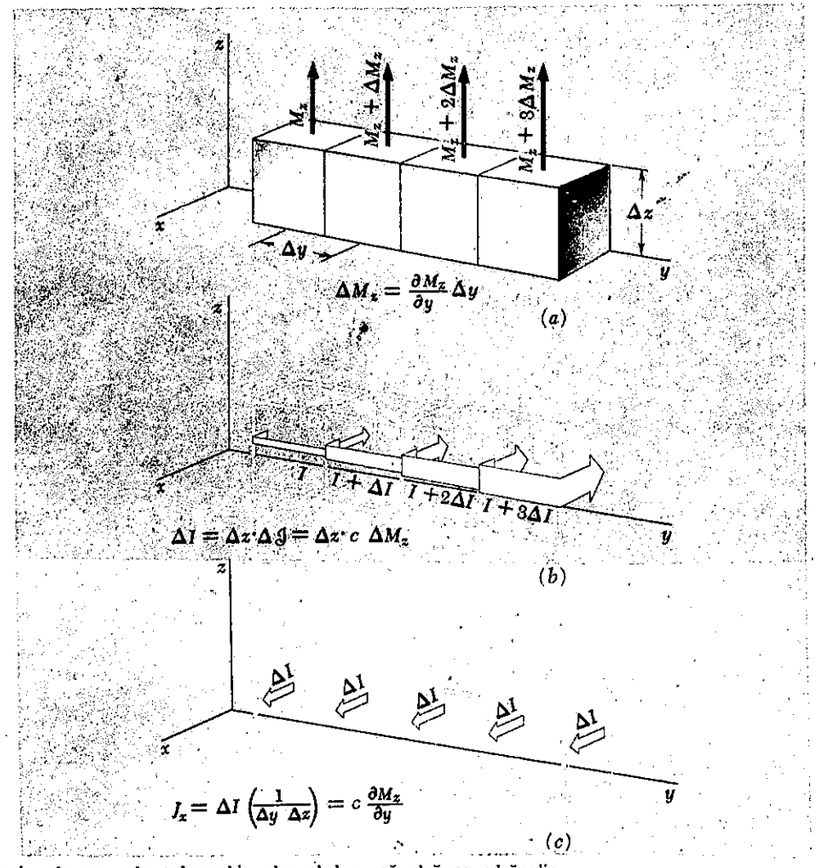
$$J_x = \Delta I\left(\frac{1}{\Delta y\,\Delta z}\right) = c\,\frac{\partial M_z}{\partial y} \tag{44}$$

bulunur.

Aynı x doğrultusunda yönelmiş bir akım elde etmenin ikinci bir yolu y boyunca yönelmiş ve z doğrultusunda değişen bir mıknatıslanım sağlamaktır. Bu hali de düşey bir kesme çubuğu kullanmakla işleyecek olursanız, x doğrultusunda net akım yoğunluğunun



Şek. 10.18 (a) Biteviye mıknatıslanmış silindir biçimli çubuk. (b) Eşdeğer içi boş silindir ya da bir akım kılıfı. (c) Çubuğun içini örneklemek ve böylece minil alanın birbirine yakın koşut S_1, S_2 ,...yüzeylerini gözönüne alarak uzayca ortalaması bulunabilir.



Şek. 10.20 Biteviye olmayan mıknatıslanım bir oylumsal akım yoğunluğuna eşdeğerdir.

$$J_x = -c\,\frac{\partial M_y}{\partial z} \tag{45}$$

ile verildiğini görürsünüz. Demek ki genelde bu iki halin üst üste gelmesi ile

$$J_x = c\left(\frac{\partial M_z}{\partial y} - \frac{\partial M_y}{\partial z}\right) = c(\text{dönül}\mathbf{M})_x \tag{46}$$

bulunur ki, bu da Denk. 42'yi kurmak için yeterlidir.

10.9 Sürekli Mıknatısın Alanı

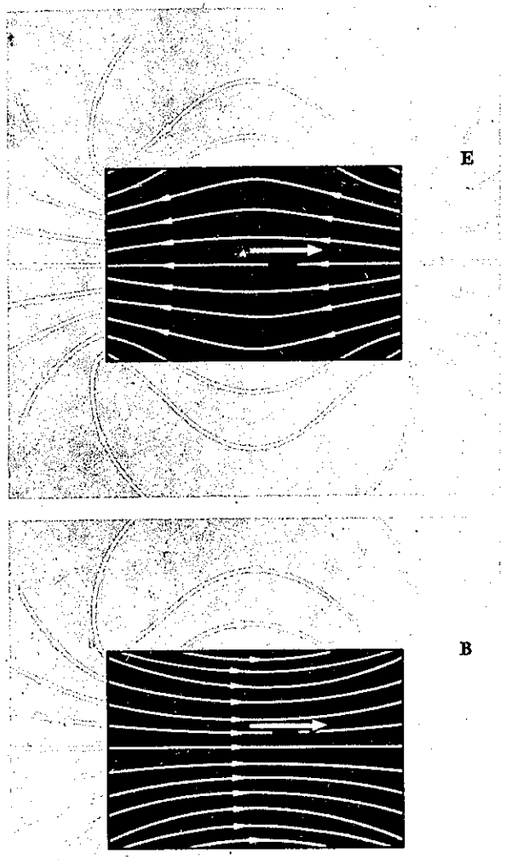
Böl. 9'da değindiğimiz biteviye kutuplanmış küreler ya da çubuklar laboratuvarlarda bile seyrek görünen örneklerdir. Donup kalmış bir elektriksel kutuplanım, bazı maddeler halinde bir takım özgür yüklerin birikmesi ile perdelenmiş bile olsa kendini

gösterebilir. Kutuplu bir çubuğun alanının nasıl olduğunu gösteren Şek. 10.3a'yı çıkarabilmek için yüklü iki pul kullanmak gerekmişti. Öte yandan, sürekli mıknatısal kutuplanım gösteren maddeler, yani, mıknatıs çubuklarına ya da halkalara çok raslanır. Sürekli mıknatıslar ferromıknatıs maddelerin birçok alaşımlarından ve bileşiklerinden yapılırlar. Bunun nasıl olduğuna Kes. 10-11'de ferromıknatıslık fiziğinde kısaca değineceğiz. Şimdi bu kesimde, sürekli mıknatısların varlığını kabul ederek, biteviye mıknatıslanmış silindir biçimli bir çubuğun **B** mıknatısal alanını incelemek ve bunu aynı biçimli biteviye kutuplu bir çubuğun **E** elektrik alanı ile karşılaştırmak istiyoruz.

Şekil 10.21 bu katı silindirleri kesitte gösteriyor. Her ikisinde de kutuplanma eksene koşuttur ve biteviyedir. Yani **P** kutuplanımı ve **M** mıknatıslanımı kendi silindirleri içinde her yerde doğrultu ve değerce aynıdır. Mıknatıslanım halinde bu, sürekli mıknatısın her milimetre kübünde, özdeş sayıda dizilmiş elektron spinleri bulunduğunu ve bunların bir doğrultuya yöneldiğini anlatır. (Buna çok iyi bir yaklaşım sürekli mıknatıs yapmaya yarayan maddelerle sağlanabilir.)

Silindirin içindeki alan deyince, kuşkusuz minil alanın uzay ortalaması diye tanımlanan genil alanı anlıyoruz. Bu anlayışla Şek. 10.21'de çubuğun içindeki ve dışındaki alan çizgilerini gösterdik. Bu arada, bu çubukların birbirinin yakınında olmadığını düşündüğümüzü açıklayalım; biz yalnızca uygun bir karşılaştırma yapabilmek için çizimleri yanyana getirdik. Her çubuk yalıtılmıştır ve alansız bir uzay içinde bulunmaktadır. (Çubuklar birbirine yakın olsa idi bunlardan hangisi ötekini daha çok rahatsız ederdi?)

Çubukların dışında **E** ve **B** alanları *benzer görünüşlüdürler*. Eğer elektriksel ikizkutup ile mıknatısal ikizkutbun "uzak alanlarının" benzerliğini anımsarsanız bu sizi şaşırtmaz. Her küçük mıknatıs kırıntısı bir mıknatısal ikizkutuptur ve elektrik kutuplu her küçük kırıntı (buna bazen "elektret" denir) bir elektriksel ikizkutuptur, ve dıştaki alan, parçacıkların bütün dış alanlarının üstüste gelmesi ile oluşur.



Şek. 10.21 (a) Biteviye kutuplanmış bir silindirin içindeki ve dışındaki **E** elektrik alanı. (b) Biteviye mıknatıslanmış bir silindirin içindeki ve dışındaki **B** mıknatısal alanı. Her iki halde de şekilde gösterilen iç alan *genil alandır*, yani *minil* ya da atomsal alanın *ortalamasıdır*.

İçteki ve dıştaki **B** alanı, silindir biçimli bir akım katmanının alanı ile aynıdır. Gerçekten bir karton silindirin üzerine ince telden yalın kat bir sarmal dolayıp bunu bir batarya ile besleyerek içte ve dışta sürekli mıknatısın **B** alanını benzetleyebilirdik. (Kangal ısınabilir ve bataryanın gerilimi düşerdi; elektron spinleri akımı karşılıksız ve sütünmesiz olarak sağlar!) Kutuplanmış bir çubuğun içindeki ve dışındaki **E** elektrik alanı ise, her biri silindirin bir ucunda bulunan iki yük pulu alanının aynıdır.

İçteki **E** ve **B** alanlarının biçimce şu temel ayrımı gösterdiklerini gözden kaçırmayın; **B** sağa yönelmiştir, silindirin uçlarında süreklidir ve yan yüzeyi boyunca keskin bir değişime uğrar. **E** alanı ise sola yönelmiştir silindirin yan yüzeyinden sanki bu yüzey yokmuş gibi geçer, ama uç yüzeylerde sürekli değil, kesiklidir. Bu değişiklikler fiziksel (doğal) elektrik ikizkutbun"içi" ile fiziksel mıknatısal ikizkutbun "içi" arasındaki Şek. 10.8'de görülen temel ayrımdan ileri gelir. *Fiziksel* sözü ile doğanın bize verdiği gibi olanları anlıyoruz.

Eğer yalnız dış alanlarla uğraşmakta isek mıknatısımızı anlatmak için iki biçimden herhangi birini kullanabilirdik. Örneğin sürekli bir mıknatısın mıknatısal alanının, mıknatısın sağ ucuna yerleşmiş artı mıknatıs yük katmanı, yani "kuzey" mıknatıs kutupları yüzey yoğunluğu ile, sol ucunda yerleşmiş eksi mıknatıs yükleri katmanının, yani "güney kutuplarının" uyardığı bir alan olarak anlatabilirdik. O zaman **B** = bayır$\varphi_{mık.}$ eşitliğini sağlayan bir $\varphi_{mık.}$ sayıl gerilim işlevi seçebilirdik. Bu $\varphi_{mık.}$ gerilim işlevi, elektrik geriliminin elektrik yükleri ile ilgili olması gibi "uydurma" kutup yoğunluğu ile ilgili olurdu. Sayıl gerilimin, yöngül gerilime bakınca daha basit oluşu bu düşünceyi çekici kılar. Bundan başka, mıknatısal sayıl gerilim, **B**'nin gerçek kaynağı olan akımlara çok zarif şekilde bağlanabilir, ve böylece, uydurma kutuplar kavramı kullanma gereği kalmaksızın sayıl gerilim kavramından yararlanılabilir. Eğer bir gün bir mıknatıs planlamak ya da mıknatısal alanları hesaplamak durumu ile karşılaşırsanız bu düzeni kullanmak isteyebilirsiniz.

Ama mıknatıslı maddenin içindeki alanı anlamak istersek, mıknatıs "kutbu" uydurmasını bırakmak zorundayız. Sürekli bir mıknatısın içindeki genil mıknatısal alanın, çok gerçek anlamda, Şek. 10.21a'daki alan gibi değil, ama, Şek. 10.21b'deki alan gibi olduğu, büyük enerjili yüklü parçacıkları mıknatıslanmış demirden geçirerek saptırmakla, ya da maddenin içinden daha da kolay geçen yavaş nötronlarla mıknatısal alanın etkileşmesi ile denel olarak gösterilebilmiştir.

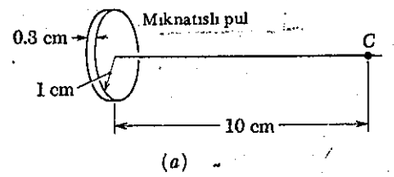
Şekil 10.22a, mıknatıslanması bakışım eksenine koşut olan pul biçimli küçük bir mıknatısı göstermektedir. Siz uzun çubuk şeklindeki sürekli mıknatıslara belki daha alışıksınızdır. Ama kimi yeni maddelerle oldukça yeğin yassı pul mıknatıslar yapılabilir. Bu örnekteki boyutlar Şek. 9.21'deki elektrik kutuplu pulun boyutlarının tıpkısı seçilmiştir. M mıknatıslanım CGS birimleri cinsinden 150 olarak verilmiştir. Elektronun mıknatısal döngüsü $0{,}93 \times 10^{-20}$ erg/gauss'dır ve verilen M değeri her cm^3'de $1{,}6 \times 10^{22}$ tane sıralanmış elektron spini bulunmasını gerektirir. Bu pul çevre çeperi boyunca dolanan ve yüzey yoğunluğu $\mathcal{J} = cM$ olan bir akım şeridine eşdeğerdir. Çeper genişliği 0,3 cm olduğuna göre I akımı

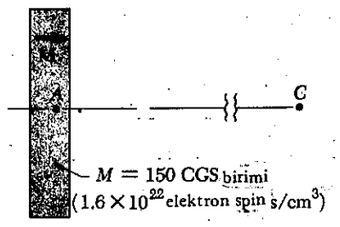
$$0{,}3cM = (0{,}3)(3 \times 10^{10})(150)$$

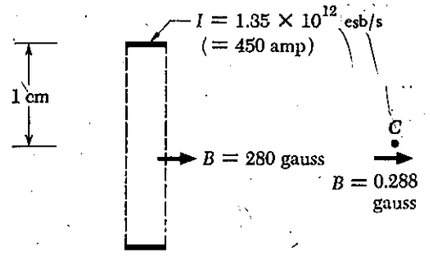
ya da 1,35 X 10^{12} esb/s değerini bulur. Kılgın birimlerle bu 450 ampere eder ki, bu otomobil bataryasını kısa devre halinde bağladığınız zaman alabileceğiniz akımdan daha da büyüktür! Uzayın bir noktasında, bu nokta pulun içinde bile olsa, uyarılan **B** alanı, yalnızca bu akım şeridinin alanıdır. Örneğin **B**'nin pulun merkezine yakın yerlerdeki değeri yaklaşıkça:

$$B = \frac{2\pi I}{rc} = \frac{2\pi(0{,}3cM)}{rc} = \frac{2\pi(0{,}3)(150)}{(1{,}0)} = 280 \text{ gauss} \quad (47)$$

dır. Buradaki yaklaşıklık 0,3 cm genişliğindeki akım şeridini yalın bir halka halinde toplanmış gibi işleme sokmaktan ibarettir. (Elektrik örneğinde bununla rastlaşan yaklaşım, eşdeğer yük katmanları boyutunu, aralarındaki aralığa bakınca büyük kabul etmektir.) Uzak bir noktadaki alanı halka akımı için hesaplamak kolaydır, ama yaklaşık bir hesap için elektrik örneğinde olduğu gibi davranabiliriz. Yani cismin toplam mıknatısal döngüsünü bulur, ve buna eşdeğer bir tek ikizkutup döngüsü uzak bir yerdeki alanını hesaplayabiliriz.







Şek. 10.22. (a) Eksenine koşut olarak biteviye mıknatıslanmış bir pul. (b) Pulun kesitinin görünüşü. (c) Eşdeğer akım 1,35 X 1012 esb/s veya 450 ampere değerinde, diskin çeperi boyunca akan bir şerit akımıdır. B mıknatısal alanı çok kısa bir sarmalınkinin tıpkısıdır, ya da yaklaşık olarak 1 cm yarıçaplı bir basit akım halkasının tıpkısıdır.

10.10 Özgür Akımlar ve H Alanı

Çoğu kez *bağlı* akımlar ve *özgür* akımlar diye bir ayırım yapmak yararlıdır. Bağlı akımlar, moleküllerin ya da atomların mıknatısal **döngüleri** ve bu arada spinli parçacıkların mıknatısal **döngüleri** ile ilgili akımlardır. Bunlar ampere'in düşlediği molekülsel akım ilmekleridir ki, inceleyegeldiğimiz mıknatıslanmanın kaynakları bunlardır. *Özgür* akımlar genil yollar boyunca akan bayağı iletim akımlarıdır, yani bir düğme çevirerek başlatılabilen ve kesilebilen ve bir **akımölçer** ile ölçülen akımlardır.

Denk. 42'deki **J** akım yoğunluğu bağlı akımların genil ortalaması olduğu için bundan böyle $\mathbf{J}_{\text{bağlı}}$ ile gösterelim:

$$\mathbf{J}_{\text{bağlı}} = c\,\text{dönül}\mathbf{M} \quad (48)$$

Şek. 10.17'deki mıknatıslanmış kesmenin yan yüzeyi gibi **M**'nin süreksiz olduğu yüzeylerde de bağlı akımı gösteren bir yüzey akım yoğunluğu vardır.

Az önce **B**'nin madde dışındaki ve bir uzay ortalaması olarak madde içindeki değerlerinin $\mathbf{J}_{\text{bağlı}}$'ya herhangi bir akım yoğunluğu gibi bağlı olduğunu gördük. Bu demektir ki $\text{dönül}\mathbf{B} = (4\pi/c)\mathbf{J}_{\text{bağlı}}$'dir. Ama bu özgür akım yokken böyle idi. Anlatımı tamamlamak için özgür akımları da hesaba sokarak bunların alanı mıknatıslanmış maddenin uyardığı alana eklenir ve

$$\text{dönül}\mathbf{B} = \frac{4\pi}{c}(\mathbf{J}_{\text{bağlı}} + \mathbf{J}_{\text{özgür}}) = \frac{4\pi}{c}\mathbf{J}_{\text{toplam}} \quad (49)$$

bulunur.

Şimdi buradaki $\mathbf{J}_{\text{bağlı}}$ **M** cinsinden Denk. 48'e göre yazalım. O zaman Denk. 49

$$\text{dönül}\mathbf{B} = \frac{4\pi}{c}(c\,\text{dönül}\mathbf{M}) + \frac{4\pi}{c}\mathbf{J}_{\text{özgür}} \quad (50)$$

haline girer ki, bu da

$$\text{dönül}(\mathbf{B} - 4\pi\mathbf{M}) = \frac{4\pi}{c}\mathbf{J}_{\text{özgür}} \quad (51)$$

olur. Şimdi uzayın her noktasında

$$\mathbf{H} = \mathbf{B} - 4\pi\mathbf{M} \quad (52)$$

ile verilen bir $\mathbf{H}(x,y,z)$ gibi bir yöngü işlevi tanımlarsak Denk. 51

$$\text{dönül}\,\mathbf{H} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{J}_{\text{özgür}} \quad (53)$$

şeklinde yazılabilir.

Başka bir söyleyişle, **B** toplam akıma, yani *bağlı* + *özgür* akıma ne biçimde bağlı ise Denk. 52 ile tanımlanan **H** yöngüsü de özgür akımlara öyle bağlıdır. Bununla birlikte koşutluk tam değildir, zira her zaman ırak $\mathbf{B} = 0$ olduğu halde **H** yöngüsünün ırak-samasının sıfır olması gerekmez.

Bu size, geçen bölümde birazda istemeyerek ortaya attığımız **D** yöngüsünü anımsatmış olmalıdır. Ama unutmayın ki, **E** toplam yüklerle ilgili olduğu halde, **D** özgür yüklere bağlı idi. Gerçi biz **D**'yi epey küçümsedik; ama **H** yöngüsü anlamaya değer kılgın bir nedenle gerçekten kullanışlıdır. Elektriksel dizgelerde bizim kolayca denetleyebildiğimiz ve ölçebildiğimiz nicelik gerilim farkıdır, cisimlerin taşıdıkları özgür yüklerin tutarları değil. Yani biz **E** elektrik alanını denetim altında tutuyoruz. Başka bir deyimle **D**, doğrudan denetim dışında kaldığından ve de hiç bir anlamda bir temel nicelik olmadığından, başına gelebilecek herhangi bir hal bizi fazla tedirgin etmez. Oysa mıknatısal yapılarda denetim altında tutabildiğimiz özgür akımlardır. Biz bunları tellerden geçirir, akım ölçerlerle ölçer, ve gerektiğinde yalıtkanlarla ayrılmış belirli yollara sokabiliriz. Bu durumda nıknatıslanma üzerinde ve dolayısı ile **B** üzerine daha az

bir denetimimiz olduğunu ileri sürebiliriz. Böylece **D** pek kullanışlı olmasa da **H** yardımcı yöngüsü kullanışlıdır.

Denk. 53'e eşdeğer olan tümlevsel bağıntı

$$\int_C \mathbf{H}\cdot d\boldsymbol{l} = \frac{4\pi}{c}\int_S \mathbf{J}_{\text{özgür}}\, da = \frac{4\pi}{c} I_{\text{özgür}} \qquad (54)$$

dır, burada $I_{\text{özgür}}$ akımı C yolunun sardığı toplam akımdır. Şimdi bir demir parçası üzerine bir kangal sardığımızı ve bu kangaldan geçirdiğimiz I akımını bir akımölçer ile ölçebildiğimizi düşünelim. Bu özgür akımdır, ve dizgedeki biricik özgür akımdır. Bu nedenle kesenkes bildiğimiz, **H**'nin kapalı bir yol boyunca bu kapalı yol demir içinden geçsin ya da geçmesin hesaplanan çizgi tümlevidir. Tümlev yalnızca yolun sınırladığı yüzeydengeçen sarım sayısına bağlıdır, ve demirin mıknatıslanmasına bağlı değildir. Mıknatıslanma konusunda **M** ile **B**'nin belirlenmesi biraz karışıkca iken doğrudan belirleyebileceğimiz bir **H** niceliği ayırıp ortaya koymak birçok işleri yalınlaştırır.

Şekil 10.23 H'nin bu özelliğini bir örnekle gösteriyor; bu kılgın hallerde kullanabileceğimiz birimleri anımsamamıza da yardım eder. H'nin boyutu B'ninkinin özdeşidir; bu nicelikler CGS Gauss dizgesinde esb/s olarak alınan akıma tam özdeş biçimde bağlanmışlardır. Bildiğimiz gibi, bu dizgede B mıknatısal alan yeğinliği biriminin adı gauss'dır. H için farklı bir birim almakta büyük bir zorunluk yoktu. Ama her şeye bir ad takmaktan hoşlananlar H birimine ayrı bir ad vermeyi uygun bulmuşlar ve buna oersted demişlerdir*. Bununla, başka yerlerde karşılaşacağınızı bildiğimiz için Şek. 10.23'de ortaya attık.

B niceliğini temel mıknatısal alan yöngüsü olarak dikkate almamızın nedeni, Kes. 10.2'de tartıştığımız gibi, mıknatısal yük diye bir şey bulunmadığına göre, atomların ve moleküllerin içinde bile ırak $\mathbf{B} = 0$ olmasıdır. Kes. 10.8'de gösterdiğimiz gibi ırak $\mathbf{B} = 0$ dan madde içindeki ortalama minil alanın **B** olduğu ve **H** olmadığı sonucu çıkar. Bunun anlamı geçmişte her zaman anlaşılabilmiş değildir. Öte yandan **H**'nın az önce açıkladığımız kılgın üstünlükleri var. Bazı eski kitaplarda, **H**'nin birincil mıknatısal alan olarak ileri sürüldüğünü görebilirsiniz. O zaman **B** niceliği $\mathbf{H} + 4\pi\mathbf{M}$ biçiminde tanımlanır ve bunun adına *mıknatısal irgitim* denir. Bu gün **B**'yi baş alan gibi işleyen bazı çağdaş yazarlar bile, *mıknatısal alan* adının geçmişte **H**'ye mal edilmiş olduğunu gördükleri için, **B**'ye mıknatısal irgitim demek zorunluğunu duyuyorlar. Ama bu boşuna bir bilgiçlik gibi görünüyor. Eğer bir laboratuvara gider ve bir fizikçiye kullandığı kabarcık odasındaki pion yörüngelerini eğriltenin ne olduğunu sorarsanız, herhalde size, "mıknatısal alan" diyecektir ve "mıknatısal irgitim" demeyecektir. Bir jeofizikçinin yerin mıknatısal irgitiminden söz ettiğini ya da bir astronumun falan galaksideki mıknatısal irgitimden söz ettiğini pek seyrek duyarsınız. Bu bakımdan **B**'ye mıknatısal alan deyip gitmeyi öneriyoruz. **H** için ise, daha başka adları bulunmuş olsa da biz "**H**" alanı ve hatta **H** mıknatısal alanı" deyip geçeceğiz.

Burada güçlük çıkaran yalnızca adlardır, simgeler değil. Herkes CGS Gauss takımında **B**, **M**, ve **H** yi bağlayan bağıntının Denk. 52 olduğunda anlaşıyor. Boşlukta **B** ile **H** arasında temelde hiç bir ayrım yoktur, çünkü orada, madde bulunmadığı için **M** sıfırdır. Çoğu kez Maxwell denklemlerinin boşluktaki alanlar için **E** ve **B** yerine **E** ve **H** için yazıldığını görürsünüz.

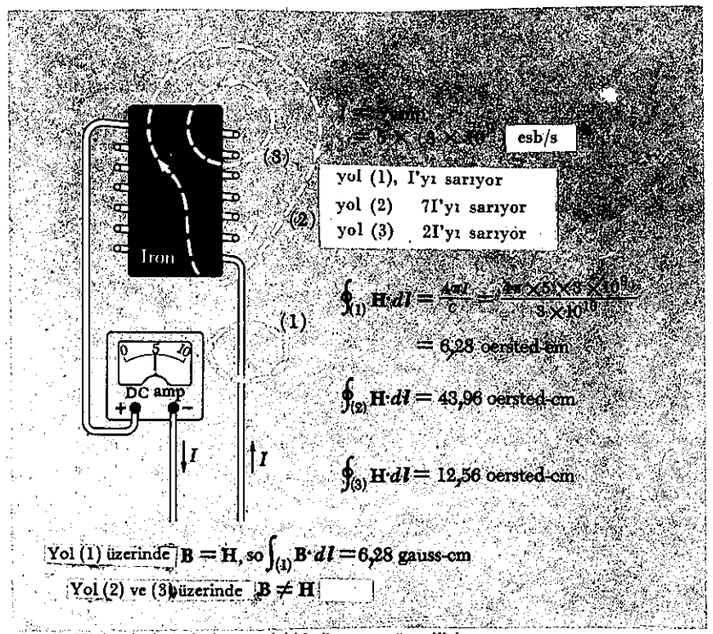
Adlar ve birimler üzerine bu uyarılar MKS elektrik birim takımı ile ilgili değil. Bu birim dizgesinde **B** ve **H**'ye bağlı nicelikler aynı simgelerle gösterilirler, ama *boyutca* ayrı işleme sokulmuşlardır ve sayıca değerleri boşlukta bile değişiktir (Bak. ek).

Burada şu noktayı vurgulamak gerek: χ_m oylumca mıknatısal alınganlık için alınan tanım, Denk. 39'da verilen ve mantık önceliği olan tanım değil ama daha çok,

$$\mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H} \qquad (55)$$

dır.

* B'yi gauss ve H'yi oersted ile ölçmek bir dairenin yarıçapını cm ile verirken çevre üzerindeki uzunlukları ölçmek için "yay-cm" gibi bir adlamayı alakoymaya benzer.



Şek. 10.23 Özgür akımla H'nin çizgi tümlevi arasındaki bağıntının gösterilişi.

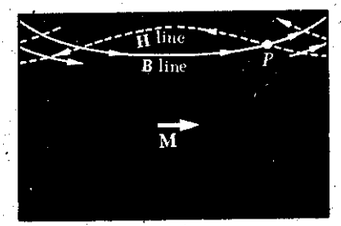
Şek. 10.21b'deki sürekli mıknatıs, **H**'yi **B** ve **M**'ye bağlayan bağıntının öğretici bir örneğidir. Mıknatıslanmış maddenin içindeki bir noktadaki **H**'yi elde etmek için bu noktadaki **B** mıknatıslık alanına $-4\pi\mathbf{M}$'yi yöngül olarak eklemek zorundayız. Şekil 10.24 bunu özel bir P noktası için nasıl yapıldığını gösteriyor. İşin sonunda mıknatıs içindeki **H** çizgileri Şek. 10.21a'daki kutuplu silindirin içindeki **E** alan çizgilerinin tam benzeridir. Başka bir deyimle bu sonuç beklediğimiz gibi olmuştur, zira kutuplanımın kaynağı elektrik akımları değil de, gerçekten mıknatısal kutuplar olsa idi, madde içindeki minil mıknatısal alan **H** olurdu ve **B** olmazdı ve böylece mıknatısal kutuplanım ile elektriksel kutuplanım arasındaki benzerlik tam olurdu.

Sürekli mıknatıslarda hiç bir özgür akım yoktur, ve Denk. 54'e göre **H**'nin kapalı bir yol boyunca çizgi tümlevi sıfır olmak zorundadır. Eğer **H** alan çizgileri Şek. 10.21a'daki **E** çizgilerine gerçekten benzerlerse bu tümlevin sıfır olacağı açıktır, çünkü durgun yük alanının, kapalı bir yol boyunca çizgi tümlevinin sıfır olduğunu biliyoruz. Bu sürekli mıknatıs örneğimizde Denk. 55 uygulanamaz. Öyleyse **M** mıknatıslanım yöngüsü **H** ile oranlı değil, ama bunun yerine, maddenin daha önce uğradığı işlemlere bağlıdır. Bunun nasıl böyle olduğunu gelecek kesimde açıklayacağız.

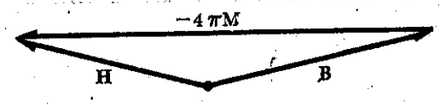
M'nin **H** ile oranlı olduğu bir madde içinde Denk. 55 uygulanabildiği gibi Denk. 52 temel eşitliği de geçerlidir ve böylece

$$\mathbf{B} = \mathbf{H} + 4\pi\mathbf{M} = (1 + 4\pi\chi_m)\mathbf{H} \qquad (56)$$

yazılabilir. O zaman **B** alanı **H**'ye oranlıdır. Buradaki oranlılık katsayısı $(1 + 4\pi\chi_m)$'nın adına *mıknatısal geçirgenlik* denir ve genel olarak μ ile gösterilir:



Şek. 10.24 (a) Şek. 10.21b'deki mıknatıslı silindirin içinde herhangi bir noktada **B**, **H** ile **M** arasındaki bağıntı.



$$\mathbf{H} = \mathbf{B} - 4\pi\mathbf{M}$$

(b) P noktasında yöngüler arasındaki bağıntı.

$$\mathbf{B} = \mu\mathbf{H} \tag{57}$$

ferromıknatıslığı anlatımda genel olarak χ_m alınganlığı yerine μ geçirgenliği kullanılır.

10.11 Ferromıknatıslık

Ferromıknatıslık insanoğlunun çağlar boyunca işine yaradığınca onun için epey düşündürücü olmuştur. *Mıknatıs taşı* (magnetit) eski çağlarda da bilinmekte idi ve demirin insan tarihine pusula iğnesi halinde etkisi, kılıç biçimi ile etkisinden daha anlamlıdır. Elektrik teknolojimiz, bol bulunan bu metalin bu garip özelliğine aşağı yukarı yüzyıl kadar geniş ölçüde bağlı olmuştur. Bununla birlikte, ferromıknatıslığın temelden anlaşılması ancak son yıllarda sağlanabilmiştir.

Ferromıknatısların bazı özelliklerini anlattık. Çok kuvvetli bir mıknatısal alan içinde, ferromıknatısal bir maddeye etkiyen kuvvet, paramıknatısal maddeler halinde olduğu gibi, alanın yeğin olduğu yerlere doğru yönelmiştir; ama bu kuvvet **B** alanı ile alanın bayırgısının çarpımına oranlı olacak yerde, bayırgının kendisi ile oranlıdır. Kes. 10.4'ün sonunda uyardığımız gibi, bu olay, alan yeterince yeğin olursa, ferromıknatıs tarafından edinilen mıknatısal döngünün bir doygunluk (sınır) değerine eriştiğini anlatır. Mıknatısal döngü yöngüsünün yönelişi yine alanca yöneltilecektir; çünkü böyle olmasa, kuvvet her zaman artan alan yeğinliği yönünde etki göstermezdi.

"Sürekli" mıknatıslarda dıştan uygulanmış bir alan bulunmadığı zaman bile bir mıknatısal döngü gözlüyoruz ve bu döngü uygulanan bir dış alan içinde bile yönünü ve büyüklüğünü koruyabiliyor, yeterki, bu dış alan aşırı yeğin olmasın. Hiç kuşkusuz sürekli mıknatısın her zaman kendi alanı vardır, ve bu alanın kendi kaynağını hizada tutup tutmadığı sorusu hatıra gelir. Ama Şek. 10.21b'ye ya da Şek. 10.24'e yeniden göz atarsanız, bu gerçek bir mıknatıs olmasa da, M'nin **B**'ye ya da **H**'ye genelde koşut olmadığını görürsünüz. Bu da bize mıknatısal ikizkutupların, mıknatısal kuvvetlerden başka bir şeylerle bir yönde kilitlenmiş olduklarını anlatır.

Ferromıknatısal maddelerde gözlenen mıknatıslanma paramıknatısal maddelerde alışık olduğumuz değerlerden çok daha büyüktür. Sürekli mıknatısların bir kaç bin gauss basamağında alanlar uyardıkları çok gözlenir. Daha belirtgin bir nicelik, mıknatıslanmanın sınır değeri, yani oylum birimi başına düşen mıknatısal döngüdür ki, madde bunu çok kuvvetli bir alan içinde kazanır. Bunun adına *doyma* mıknatıslanması denir. Demirin doyma mıknatıslanmasını çizelgedeki değerlerden (Kes. 10.1) çıkarabiliriz. Bayırgısı 1700 gauss/cm olan bir alan içinde, 1 gram demire etkiyen kuvvetin değeri 4×10^5 din idi. Bir ikizkutba etkiyen kuvveti alanın bayırgısına bağlayan Denk. 18'den 1 g için,

$$m = \frac{F}{(dB/dz)} = \frac{4 \times 10^5 \text{ din}}{1700 \text{ gauss/cm}}$$

$$= 235 \text{ ergs/gauss} \quad (1\text{g için}) \tag{58}$$

buluruz. cm^3'e düşen döngüyü bulmak için, m'yi demirin yoğunlüğü (7,8 g/cm^3) ile çarparız. Böylece M mıknatıslanımı

$$M = 235 \times 7{,}8 = 1830 \text{ erg /gauss-cm}^3 \tag{59}$$

eder. Gauss olarak alınan alan yeğinlikleri ile karşılaştırmamız gereken M değil $4\pi M$'dir. Örneğin uzun bir demir çubuğun sürekli mıknatıs olarak mıknatıslanımı az önce elde ettiğimiz sayı kadar bulunsa, çubuğun içindeki H alanı küçük olurdu (Şek. 10.21b'deki durumun eksen boyunca uzatılmış halini düşünün) ve böylece demirdeki B alanı yaklaşıkça $4\pi M$'yi ya da 23000 gauss'u bulurdu.

Bu mıknatıslanımın kaç elektron spin döngüsü kapsayacağını görmek daha ilginçtir. Öyleyse M değerini, elektron döngüsünün Şek. 10.14'de verilen 0,93 X 10^{-20} erg/gauss değerine bölerek santimetre kübde yaklaşıkça 2 X 10^{23} spin döngüsü buluruz. Şimdi 1 cm demirde aşağı yukarı 10^{23} atom vardır. Demekki doyma mıknatıslanımı durumunda atom başına aşağı yukarı 2 spin yönelmesi düştüğü anlaşılmaktadır. Atom elektronlarının çoğu çiftlenimli olduğuna ve hiç bir mıknatıslık etkileri kalmadığına göre, bu sonuç, atom yapısı içinde, aynı doğrultuya yönelme özgürlüğü olan bir kaç elektronun birden dizilmesi durumu ile karşılaştığımızı anlatır.

Ferromıknatıslarla ilgili çok ilginç bir olgu bu maddelerin belli bir sıcaklığın üzerinde ısıtılınca, ferromıknatıslık özelliğini birden yitirmeleridir. Örneğin saf demir 770°C'nin üstünde bir paramıknatısal madde gibi davranır. Eğer bu madde 770°C'nin altına kadar soğutulursa ferromıknatısal özelliklerini hemen kazanır. Bu sıcaklığa, konuyu ilk inceleyen araştırıcı Pierre Curie'nin adını anmak için Curie noktası denir; bu geçiş sıcaklığı değişik maddeler için değişiktir. Arı nikel için Curie noktası358°C'dir.

Şimdi, 770°C'nin altındaki demiri 770°C'nin üstündeki demirden ve herhangi bir sıcaklıktaki bakırdan bu kadar keskin biçimde ayıran "ferromıknatısal davranış" nedir? Bu, atomsal mıknatısal döngülerin bir doğrultuda *kendiğilinden* hizaya gelmesidir ki, her demir atomunda bazı elektronların spin eksenlerinin yönelmesini gerektirir. *Kendiliğinden* deyimi ile hiç bir dış mıknatısal alanın işe karışmadığını ve böyle bir alan gerekmediğini anlıyoruz. Demirde, milyonlarca atomu içerecek ölçüde geniş bir bölge boyunca, hemen bütün atomların spinleri ve mıknatısal döngüleri aynı doğrultuda yönelmişlerdir. Curie noktasının çok aşağılarında, örneğin oda sıcaklığında, demir halinde bu dizilme hemen hemen kusursuzdur. Eğer sihirli bir araç ile demir metalinin kristal yapısının içine bakabilseydik ve ögesel mıknatısal döngüleri, üzerlerinde okları ile görebilseydik Şek. 10.25'dekine benzer bir şey görürdü.

Yüksek sıcaklığın, bu güzel düzenlenişi yıkması gerektiğine şaşmamak gerek. Bir bakıma ısıl enerji düzen düşmanıdır. Bir kristal yapısı, yani düzenli biçimde yerleşmiş atomsal yapı erime noktası gibi kesenkes tanımlanmış bir sıcaklıkta, daha az düzenli bir yerleşime, sıvı haline dönüşür. Erime noktası, Curie noktasında olduğu gibi değişik cisimler için değişiktir. Buradaki benzerlik daha derinlere gider, ama bu bir takım yeni düşünceler gerektirir ki, bunu bu programın son cildindeki ısı ve istatistiksel fizik incelemesine bırakmak daha uygun olur. Şimdi burada düzenli durumun kendisine dönelim. Akla ilk gelen açık iki, üç soru var:

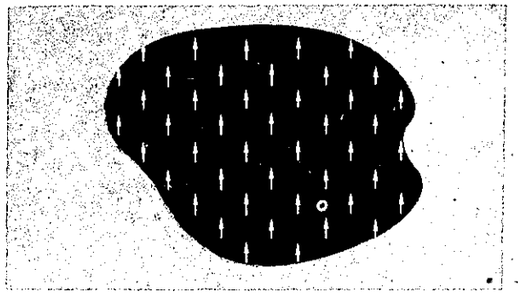
Soru 1: Spinleri hizaya getiren ve onları hizada tutan nedir?

Soru 2: Eğer bir dış alan yoksa, spinler belli bir doğrultuya nasıl yönelirler? Şek. 10.25'deki bütün döngüler yukarı yönelecek yerde niçin aşağı sağa ya da sola yönelmemişlerdir?

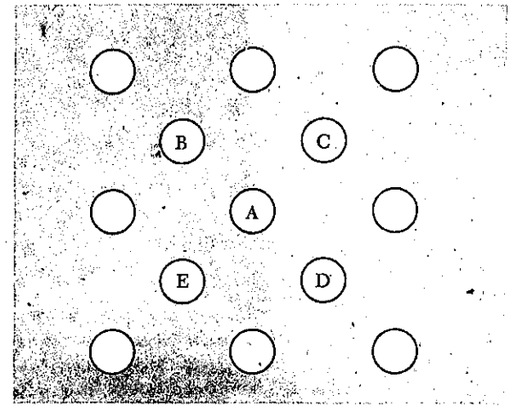
Soru 3: Eğer atom döngülerinin hepsi hizaya girmişler ise, oda sıcaklığında her demir parçası niçin kuvvetli bir mıknatıs değildir?

Bu üç sorunun yanıtları ne çok kuvvetli ne de çok zayıf olan bir dış alan uygulandığı zaman, ferromıknatıslık maddelerin davranışını hiç değilse genel biçimde anlamamıza yardım edecektir. Bu arada şimdiye dek anlatmaya kalkışmadığımız pek çeşitli olaylar karşınıza çıkacaktır.

Yanıt 1: Demirin atomsal yapısının kuantum mekaniği ile ilgili kimi nedenler yüzünden, yan yana



Şek. 10.25 Demirin küçük bir kristal bölgesi içinde spin doğrultularının düzenli oluşu. Oklardan her biri bir demir atomunun mıknatısal döngüsünü göstermektedir.



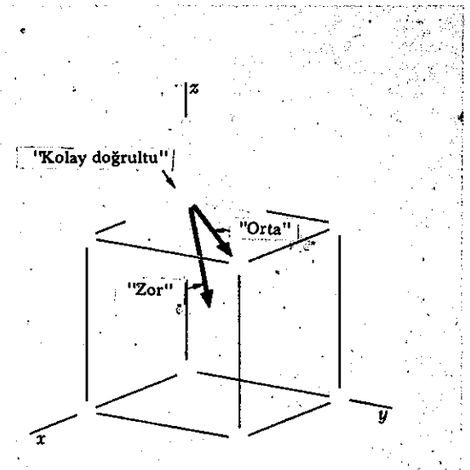
Şek. 10.26 Bir kristal örgüsü içinde bir A atomu ile bunun en yakın komşuları. (Gerçek örgü üç boyutludur.)

bulunan demir atomlarının spinlerinin koşut düşmesi, enerji bakımından da elverişli bir durum oluşturur. Bu, mıknatısal etkileşimden değil, ondan daha kuvvetlidir ve üstelik ↑↑ gibi ya da →→ gibi koşut spin yönelmelerini enerjice daha elverişli kılar. (İkizkutup etkileşimi bu yolda işlemez –Bak Prob. 9.26). Şimdi eğer A atomunun (Şek. 10.26), kendi spini, komşusu olanB, C, D ve E atomları ile özdeş yönelme eğiliminde ise, ve bu atomların her biri de spinlerini komşularınınkiler ile ve bu arada A atomununki ile özdeş yönlü kılma eğiliminde iseler, ve bu arada herhangi bir biçimde bölgesel bir çoğunluk gelişirse, bu çoğunluğun "oy birliği"ne doğru giden kuvvetli bir eğilim göstereceğini ve bu eğilimin ortam içinde yayılacağını düşünebilirsiniz.

Yanıt 2: Düzensiz bir durumdan başlayarak, örneğin hiç bir dış alan uygulu değilken, Curie noktasından geçerek soğuyan demir halinde olduğu gibi, düzenli duruma yani kristal haline doğru geçersek, kristal içinde çeşitli eşdeğer doğrultulardan herhangi birinin her nasılsa seçilişini raslantılar belirler.

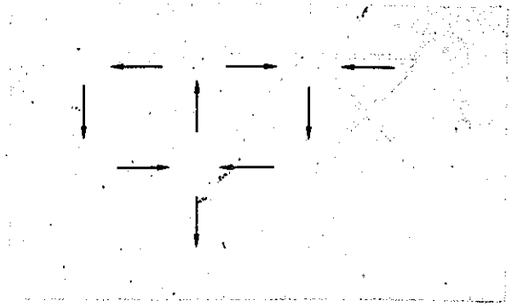
Arı demir gövde merkezli küb dizgesinde kristalleşir. Her atomun çok yakın sekiz komşusu vardır. Çevrenin bakışımı atomun bütün fiziksel davranışına ve bu arada spinler arasındaki bağlaşımda kendini benimsetir. Demir halinde küb eksenleri en kolay mıknatıslanım eksenleri olarak yüze çıkar. Yani spinler belli bir doğrultuya koşut yönelme eğiliminde-dirler; ama bu doğrultu $\pm\hat{x}, \pm\hat{y}, \pm\hat{z}$ gibi altı doğrultudan biri bu ise eğilim daha kuvvetlidir (Şek. 10.27). Bu önemlidir, çünkü spinlerin kolay yönelim doğrultularının birinden $90°$'lik açı yapan başka bir eşdeğer doğrultuya kolayca ve kütle halinde dönemeyeceklerini anlatır. Çünkü bunu yapabilmek için, yol boyunca daha az elverişli yönelimlerden geçmeleri gerekir. İşte bu engelleme ile sürekli mıknatıs olurlar.

Yanıt 3: Mıknatıslı olmadığı açıkca belli olan bir demir parçası aslında bir çok bölge (domain)'lerden oluşmuştur ki, bunların her birinde spinler bir yönde dizilmişlerdir, ama bu dizilme yönü komşu bölgenin spinlerinin dizilme yönünden farklıdır. "Mıknatıslanmamış" demir parçasının bütünü üzerindeki ortalamayı düşünürsek bütün doğrultular eşit şekilde yeğlenmiş ve böylece geniş ölçekte mıknatısal alan uyarılmıştır. Bir "tek" kristal içinde bile mıknatısal bölgeler bulunur. "Bölgeler" deyimi günlük anlamı ile minik boyuttadır. Yani bunları az büyütmeli mikroskop altında görmek olasıdır. Bu demektir ki, atomsal ölçekte alınacak olurlarsa, tipik bir mıknatısal bölge içinde, milyonlarca ögesel mıknatısal döngü bulunur. Şek 10.28 bölgelere dağılımı göstermektedir. Bu dağılımın nedeni, bu düzenlenimin bütün spinlerin aynı doğrultuda yönelimi durumuna bakınca enerjice daha ucuz oluşudur. Böyle bir yönelim uzay içinde ötelere doğru giden kuvvetli bir alan uyaran sürekli bir mıknatıs oluşturur. Bu dış alan içinde biriken enerji kristal içindeki spinlerin küçük bir kısmını, örneğin bölge sınırındakileri komşuları ile hizadan çıkarıp döndürmek için gerekli enerjiden çok daha büyüktür. Demek ki bölge yapısı enerjiyi en küçük değerine düşürme yarışmasının bir sonucudur.



Şek. 1027 Demirde enerjice elverişli mıknatıslanım doğrultuları kristalin küb eksenleri boyuncadır.

Bir demir çubuk üzerine bir tel sarar ve akım geçirirsek bu maddeye bir mıknatısal alan uygularız. Bu alan içinde, alana koşut yönelmiş döngülerin enerjisi alana zıtkoşut olanlardan ya da başka herhangi bir doğrultuya yönelmiş olanlardan daha küçük olacaktır. Bu durum bölgelerden kimilerini ötekilere bakınca daha elverişli hale sokar; raslantı sonucu daha elverişli doğrultuya yönelmiş döngüsü olanlar* bir yolunu bulursa, ötekilerin zararına büyüme eğilimi göstereceklerdir. Bir bölge, bir kulüp gibi büyür, yani, üyelerini artırarak genişler. Bu ise sınırlar boyunca olur. Elverişsiz bir bölge içinde, ama elverişli bir bölgenin sınırına yakın bulunan spinler, elverişli yönelime ayartılarak kulüp değiştirirler. Bu yalınca iki spin topluluğu arasındaki ayırma yüzeyinden başka bir şey olmayan sınırlarının yer değiştirmesi demektir. Bir "tek" kristal halinde bu kolay olur. Yani uygulanmış çok zayıf bir alan, sınır kaymasına yol açarak çok büyük bir bölge büyümesi sağlayabilir, ve dolayısı ile mıknatıslanımda çok büyük bir değişim olur. Ama maddenin taneli yapısına bağlı olarak bölge sınırlarının devinimi güç olabilir.



Şek. 10.28 Bir "tek" demir kristali içinde mıknatısal bölgelerin olabilir düzenlenişi.

Eğer uygulanan alan kübik kristal halinde olduğu gibi "kolay" doğrultulardan birine koşut düşmezse elverişli olmayan bölgelerin boşalması tam olmaz ve geride alana tam koşut olmayan bir takım döngüler kalır. O zaman bunları da alan doğrultusu ile bir hizaya getirecek çok daha kuvvetli bir alan gerekir ki, sonunda doruk mıknatıslanım olabilsin.

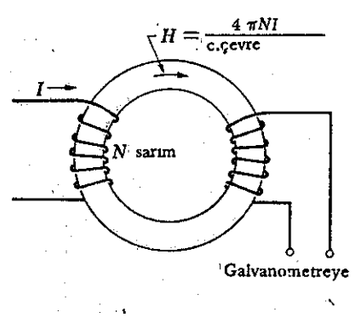
---

* Bu tartışma boyunca *spinler döngüler* sözlerini birbiri yerine kullanma eğilimi gösterdik. Dönü spinin bir özgül görünüşüdür ve biri bir doğrultuda dizilmişse öteki de öyledir. Dikkatli olmak için okuyucuya elektron halinde mıknatısal döngü yöngüsü ile açısal momentum yöngüsünün zıt yönelmiş olduklarını anımsatalım. (Şek. 10.14).

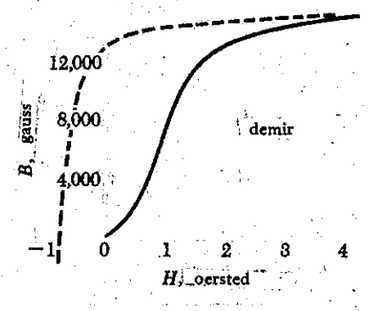
Şimdi bunun bir demir parçasının çeşitli yeğinlikte alanlar etkisinde kaldığı zamanki mıknatısal davranışı gibi geniş ölçekteki sonuçlarına bakalım. Bunun için uygun bir deneysel düzenleniş, üzerine iki kangal sarılan bir demir halkadır (Şek. 10.29). Bu demir içinde kılgınca biteviye bir alan uyarılır ve işi güçleştiren uç etkileri bulunmaz. Kangallardan birinin uçlarında irgitimle doğan gerilimin ölçülmesi ile Φakısının değişimi ve dolayısıyle, demirin içindeki **B** alanı değişimi bulunabilir. **B**'deki *değişimleri* $B = 0$'dan başlayarak izlersek **B**'yi hep biliyoruz demektir. Öteki kangaldan geçen bir akım **H**'yi belirler; biz bu alanı bağımsız değişken olarak alıyoruz. Eğer **B**'yi ve **H**'yi biliyorsak, **M** her an hesaplanabilir. Bu **H** değişkeninin işlevi olarak **M**'yi alıp çizimde gösterecek yerde **B**'yi göstermek daha kullanışlıdır. Demir için tipik bir B-H eğrisi Şek. 10.30'da gösterilmiştir. Burada konumluk ölçeklerinin çok değişik olduğunu gözden kaçırmayın. Kangalın içinde demir bulunmasa idi, 1 oersted'in değeri tam 1 gauss olurdu. Oysa H alanı birkaç oersted'i bulunca B binlerle gauss'a çıkmıştır. Kuşkusuz burada B ile H bütün demir halka boyunca ortalama değerleri gösterirler; madde içindeki ince bölge yapısı hiç bir zaman kendini belli edemez.

"Mıknatıslanmamış" demirden yola çıkarak, yani $B = 0$ ve $H = 0$'dan başlayarak H'nin artırılması B'nin açıkça çizgisel olmayan bir artışına neden olur; bu artış başlangıçta yavaştır sonra daha hızlanır, sonra çok yavaşlar ve en sonunda durur. Doyma durumunda sabit değer alan B değil ama M'dir. Bununla birlikte bu grafikte $M = (B - H)/4\pi$ ve $H \ll B$ olduğundan B ve $4\pi M$ arasındaki ayrım pek aşırı değildir.

B-H eğrisinin alt kısmı bölge sınırlarının kayması ile oluşur, yani uygun "yönelmiş" bölgelerin "çarpık yönelmiş" bölgeler zararına büyümesi ile yönetilir. Eğrinin yassılmış kesiminde atomsal döngüler "kaba kuvvetle" alana koşut getirilmişlerdir. Burada demir bayağı bir polikristal metaldir ve dolayısı ile mini kristallerin ancak çok küçük bir kesiminin "kolay" doğrultuları dış alan ile hizaya gelecek yazgıdadır.



Şek. 10.29 Bir ferromıknatısal madde içinde **B** ve **M** ile **B** ve **H** arasındaki bağıntıyı araştırmaya yarayan bir düzenek.



Şek. 10.30 Oldukça arı demirin mıknatıslanım eğrisi. Kesikli eğri **H** yüksek bir artı değerden başlayarak azaltılınca oluşur.

Kangaldaki akım yeğinliğini yavaş yavaş azaltır ve böylece H'yi zayıflatırsak, eğri aynı çizgi üzerinden geri dönmez. Bunun yerine Şek. 10.31'de kesikli çizilen davranışı elde ederiz. Bu tersinmezliğin adına histeresiz denir. Bu daha çok bölge sınırları saymasının tersinir olmayışından ileri gelmektedir. Bunun nedeni şimdiye dek söylediklerimizin içinde hiç görülmez ama bu ferromıknatıslıkta çalışan fizikçilerin iyi bildikleri bir konudur. Bu tersinmezlik bize zarar verir ve ferromıknatısal maddelerin teknik uygulamalarında, örneğin dalgalı akım dönüştürgenlerinde enerji yitiğine yol açar. Ama bir yandan da sürekli mıknatıslanım için olayın tersinir olmaması gerekir ve bu gibi uygulamalarda olayın tersinmezliğini daha da artırmak isteriz. Şekil 10.31 iyi bir sürekli mıknatıs alaşımı için B-H eğrisinin elverişli bölgesini göstermektedir. Burada B'nin sıfıra düşebilmesi için H'nin zıt yönde 600 oerstete çıkması gerektiğini kaçırmayın. Eğer kangal devreden kesilir ve demirden ayrılırsa B artık mıknatıslık *(remenans)* denilen 13000 gauss'luk bir değerde kalır. Şimdi artık **H** sıfır olduğuna göre bu alan Mıknatıslığı ile 4π katsayısı dışında aynıdır. Alaşım sürekli bir mıknatıslanım kazanmıştır. Mıknatısal ses şeritlerinde, müzikten elektronik hesap makinaları programlarına kadar biriktirilen bütün bilgiler, sürekliliklerini bu fiziksel olaya borçludurlar. Elektronik hesap makinalarının mıknatısal ögelerine, mıknatısal kor belleklerine ve benzer aletlere aynı fizik girer.

Problemler

10.1 Kes. 10.1'deki sarmalın mıknatısal alanı içinde biriken enerji tutarını iki üç çarpan yaklaşıklığı ile hesaplayın. Hesabınızı joule olarak verin. Üretecin sürekli olarak verdiği gücün 400 kilowatt olduğu bilindiğine ve tüm gerilimi birden uygulandığına göre alanın kurulması için geçen süre kabaca ne eder?

10.2 Verilen bir maddenin paramıknatısal oylumsal alınganlığının cm^3'deki molekül sayısı ile oranlı ve salt (mutlak) sıcaklıkla ters oranlı sayarak ve Kes. 10.1'deki verileri kullanarak, havanın ölçünlü (standart) basınç ve sıcaklıktaki oylumsal alınganlığını hesaplayın. Havanın yaklaşık olarak beşte biri molekül ağırlığı 32 olan oksijendir ve gaz halindeki oksijenin mıknatısal bakımdan sıvı oksijen gibi davrandığını varsayabilirsiniz.

10.3 Bölüm 6'da yarıçapı r olan bir akım halkasının ekseni üzerinde bir noktadaki alanı hesapladık. (Bak Denk. 6.41). Buna göre $z \gg b$ için bu alan ifadesinin bir mıknatısal ikizkutbun alanı yazımına yaklaştığını, ve bir noktadaki alanın, ayni ikizkutup döngülü sonsuz küçük bir ikizkutbun alanına o/o 1 değişimle eşit olabilmesi için eksen üzerinde hangi uzaklığa kadar gitmek gerektiğini gösterin.

10.4. Kes. 10.1'de anlatılana benzer bir sarmal bir fizik laboratuvarının bodrum katına yerleştirilmiştir. Binanın üst katına bodrumdan 20 m yüksekte ve yatay olarak 25 m yanda bir odadaki bir fizikçi sarmalın alanının kendi ölçülerini tedirgediğinden yakınır. Sarmalın anlatılan koşullar içinde işlediği varsayıldığına ve yalın bir mıknatısal ikizkutup gibi ele alındığına göre, yakınan fizikçinin bulunduğu yerdeki alan yeğinliğini hesaplayın. Fizikçi haklı mıdır?

10.5 Yerin kuzey mıknatısal kutbunda mıknatısal alan düşeydir ve yeğinliği 0,62 gauss'tur. Yerin yüzeyi üzerinde iken ya da dışa doğru gidince mıknatısal alan bir ikizkutbun alanının aynıdır. Ekvator boyunca aktığı düşünülen bir akımın ampere tutarı ne olmalıdır ki, bu alanı uyaran bir ikizkutup döngü oluştursun. (Yerin alanının gerçek kaynağı, yüzeye yakın değil belki de derinde merkeze yakın bir akım dağılımıdır.)

10.6 Yarıçapı R olan bir küre Q yükü taşısın, yani bu yük, yüzey üzerine biteviye bölüşülerek $\sigma = Q/4\pi R^2$ yüzey yoğunluğu versin. Bu yük katmanı kürenin bir ekseni çevresinde rad/s olarak ω açısal hızı ile dönmekte ise kürenin mıknatısal döngüsünü bulun. (Küreyi dönen ince yük şeritlerine ayırın; her şeridin eşdeğer olduğu akımı bulun, ve bunun ikizkutup döngüsünü hesapladıktan sonra bütün şeritler üzerinde tümlevini alın.)

Yanıt : $QR^2\omega/3c$

10.7 Kes. 10.1'de verilen çizelgedeki sayıların tümü, orada anlatıldığı gibi sarmalda yapılan deneylerle bulunmuş değildir; ama bunun yerine, bu maddelerin denel olarak bulunan alınganlıklarını kullanarak anlatılan koşullar altında kuvvetin ne olacağı hesaplanmıştır. Şimdi alınganlığın nasıl tanımlandığını, ve kuvvetin hangi etkenlere bağlı olduğunu bildiğinize göre, bir kaç madde için ters yönde giderek alınganlıkları hesaplayın ve bulduğunuz sayıları Handbook of Chemistry

and Physics'deki gibi çizelgelerde verilen sayılarla karşılaştırın. Bu kitaptaki mıknatısal alanganlıklara bakarken organsal maddeleri veren uzun çizelgenin nasıl biteviye gittiğini gözden kaçırmayın ve organsal olmayan maddeler çizelgesini arıyarak, kuvvetli paramıknatısal maddeleri ya da alışılmamış diyamıknatısallık gösteren durumları gözden geçirin.

10.8 1 gramlık paramıknatısal bir maddeyi mıknatısal alan yeğinliğinin B olduğu bir yerden, alanının savsanabilecek ölçüde küçük olduğu bir yere dek çekmek için gerekli işin $\frac{1}{2}\chi B^2$, olduğunu gösterin, burada χ özgül alınganlıktır. Bundan sonra sıvı oksijeni Kes. 10.1'deki çizelgede verilen konumdan dışarıya kadar çıkarmak için gerekli işin gram başına değerinin ne olduğunu tam olarak hesaplayın. (Kuşkusuz bu, χ 'nin işe karışan alan yeğinlikleri boyunca sabit kaldığı zaman uygulanabilir.)

10.9 Kes. 10.1'de belirtilen koşullar içinde çizelgedeki verilerden 1 gram demirin mıknatısal döngüsü büyüklüğünü bulun. Atom başına kaç elektron spini dizilmesi bu değeri sağlar? (Demirin atom ağırlığı:56.)

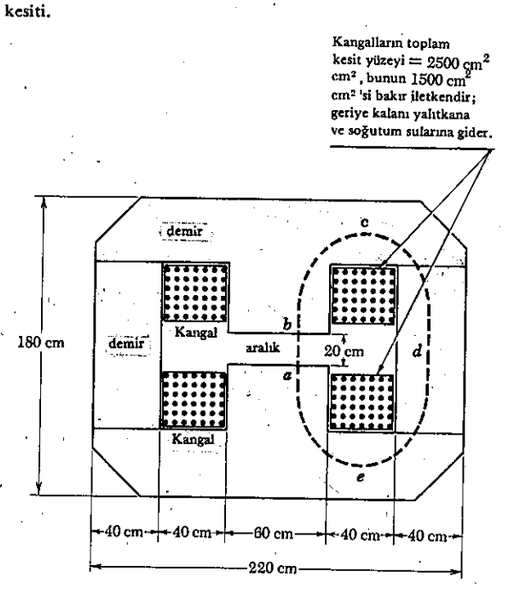
10.10 Şek. 10.22'deki mıknatıslı pulun m toplam mıknatısal döngüsünü hesaplayın. Pulun ekseni üzerinde r cm uzakta bir noktadaki alan, r yeterince büyük olur ve pul bir basit ikizkutup gibi işlenebilirse, yaklaşık olarak $2m/r^3$ 'e eşittir. Şimdi A ve B gibi iki pul ele alın. Bunlardan A tahta bir masanın üzerinde m döngüsü yukarıya yönelecek şekilde durmaktadır. B ise A'nın üst yanında ve döngüsü aşağı yönelecek şekilde ve yanlamasına devinimi önlenmiş halde tutulmaktadır. B'nin, A üzerinde, hiç bir yere dayanmadan "durabilmesi" için A'dan ne yukarda bulunması gerekir? Az önce anlatılan "tek ikizkutup yaklaşıklığı"nı kullanın. Hesapla bulunan durma yüksekliği eğer çok küçük değilse bunun nedeni açıklanacak.

10.11 Silindir biçimli uzun bir çubuğun yarıçapı a olsun ve ekseni boyunca biteviye M mıknatıslanımı edinmiş bulunsun. Çubuğun orta bölgesinden, geri kalan kısımlardaki mıknatıslanımda hiç bir değişiklik yapmaksızın $b \ll a$ kalınlığında enine bir dilim kesilmiştir. Bu aralığın merkezindeki B alan yeğinliğini ve aralıktan uzakta çubuğun içinde bulunan bir noktadaki alanı ele alın. Bu iki yerdeki alan yeğinlikleri arasındaki *farkı* hesaplamak için bir üstüste gelme tartışması yapın.

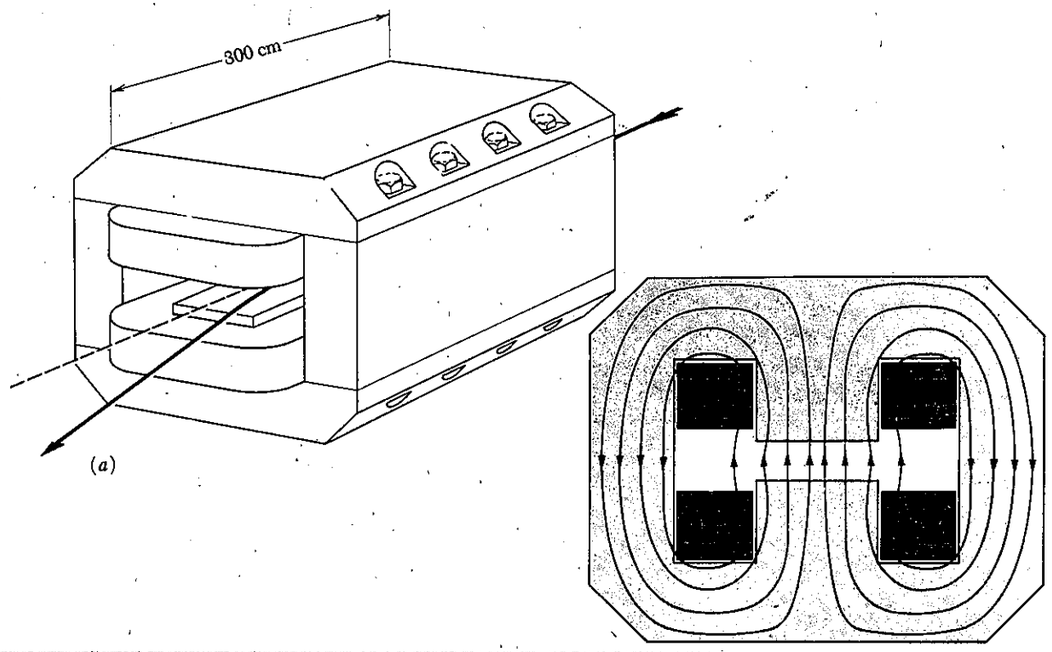
10.12 İç çapı 10 cm, dış çapı 12 cm olan bir demir simit üzerine 20 sarımlık bir iletken tel dolanmıştır. Demirin içinde 12000 gauss'luk bir alan uyaracak akımı bulmak için Şek. 10.30'daki B-H eğrisini kullanın.

10.13 Bir deneyde yüksek enerjili parçacıklardan oluşmuş bir demeti saptırabilmek için gerekli 16000 gauss'luk mıknatısal alanın ışın boyunca 3 m uzunluğunda 60 cm genişliğinde ve 20 cm yüksekliğinde bir bölgede ayakta tutulması gerekmiştir. Şeklin (a) ve (b) kesimlerinde gösterilen biçimde yapılmış bir mıknatıs buna uygun olabilir. Boyutları şekilde verildiği gibi alarak, (i) aralıkta 16 kilogauss yeğinlikte bir alan oluşturabilmek için iki kangaldan geçirilen akımın toplam ampere sarımını; (ii) burada harcanması gereken enerjinin kilowatt değerini; (iii) bu kangallar 400 volt'luk bir doğru akım güç kaynağına seri halinde bağlandıkları zaman istenilen alanı uyarabilmeleri için kangallardaki sarım sayısını ve telin kesitini hesaplayın. Şeklin (d) kesiminde sorunun (i) hali için kullanılabilsin diye bir Armco mıknatıs demirinin B-H eğrisinin doğruluğunu kabaca kestirebilirsiniz. Bu pek önemli değildir, çünkü *bcdea* ile gösterilen uzun yol boyunca alınan tümlevin hava içindeki ab yolu boyunca alınan tümleve bakınca katkısı oldukça küçüktür. (Aslında alçak alan yeğinlikleri halinde demir içindeki H'yi savsamak kötü bir yaklaşım önemli değildir.) (ii) Hali için bakırın özdirencinin $\rho = 2{,}0 \times 10^{-6}$ ohm-cm olduğunu ve kangallardan herbirinde N sarım bulunduğunu varsayın. Verilen bir ampere-sarım sayısı için gerekli gücün N'ye bağlı olmadığını göreceksiniz; yani, belirtildiği gibi bakırın toplam kesiti sağlandığı takdirde, ince telden yapılmış çok sarımlarla kalın telden yapılmış bir kaçı arasında bir fark yoktur. Bu nedenle böyle bir mıknatıs tasarlayan kişi N'yi ve iletken kesitini mıknatısın eldeki güç kaynağına uygun gelecek şekilde seçer.

Yanıt: (i) 270000 ampere-sarım; (ii) 82,5 kW; (iii) 2N 1310 arım (her kangal için 655), 1,15 cm iletkenin kesiti.

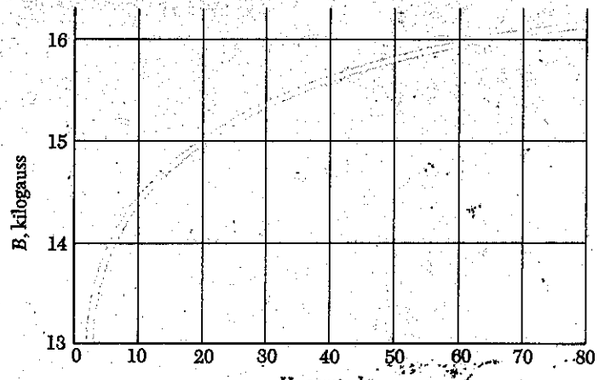


(b)



(a)

(c)



(d)

Daha Başka Problemler

Bölüm 1	338
Bölüm 2	340
Bölüm 3	342
Bölüm 4	348
Bölüm 5	351
Bölüm 6	352
Bölüm 7	356
Bölüm 8	359
Bölüm 9	360
Bölüm 10	363

DAHA BAŞKA PROBLEMLER

Bölüm 1

1.23 Aşağıdaki gibi kurulmuş bir yük düzenlenişi ele alın: Bir dairenin merkezine artı birimlik yük konulmuş N tane eksi yük de dairenin çevresi üzerine eşit aralıklarla yerleştirilmiştir. Yükler bir anda başıboş bırakılırlarsa hepsi bir yere doğru toplanırlar mı, yoksa ayrılarak uçup giderler mi? Soruyu $N = 3,4$, ve 5 için dizgenin enerjisini hesaplayarak yanıtlandırın,, ve hiç değilse bir hal için, eksi yüklerden birine etkiyen bileşke kuvveti, hesaplayarak bulduğunuz sonuçla aynı olduğunu gösterin.

1.24 Yarıçapı R olan bir su damlacığı üzerine dağıtılmış Q elektrik yükü taşımaktadır. Bu damlayı eşit büyüklükte iki damlaya ayırdığımızı ve biribirinden kurtardığımızı ve bu sırada yükün de iki damla arasında eşit olarak bölüşüldüğünü düşünelim. Bu ayrılma gizil güç enerjisini artırmış mı, yoksa azaltılmış mıdır? Değişim ne tutardadır? Şimdi damlaya bir küre biçimi veren "yüzey gerilim" ile ilişkin enerjiyi gözönüne alalım. Moleküller arası bağlanım dolayısı ile, yeni yüzey yaratmak enerji ister ve verilen bir sıcaklıkta yaratılan yüzeyin her birimi başına gerekli enerji tutarı bir sabit sayıdır. Su için bu yaklaşıkca 50 erg/cm^2'dir. Şimdi yarıçapı 10^{-2} cm olan bir damlayı iki damlaya böldüğümüzü düşünelim. Damlanın önceden taşıdığı yük ne olmalıdır ki, elektrik enerjisindeki değişim molekülsel bağlanma enerjisini tam karşılayabilsin? Bunun büyük bir yük olup olmadığını kestirebilmek için, damlanın yüzeyinde uyaracağı elektriksel alan yeğinliğini bulunuz. (100 statvolt/cm'lik bir alan havanın dayanabileceği ılımlı bir alandır.)

1.25 Aşağıdaki gibi ortaya konulabilecek bir "nokta-yük" çıkmazı üzerinde düşünün ve konuyu tartışın: Kusursuz bir nokta yük sonsuz bir potansiyel ya da "öz enerji"si vardır. Ama yine de nokta yüklerden bir dizgenin enerjisini toplarken bunu göz önüne almayız. Zamanla sabit kalan bir enerji, hiç bir zarar vermeden hesap dışı bırakılabilir; ama sonsuz bir niceliğin sabit olması sözünün anlamı ne olabilir? Bir nokta yüke doğada raslayabileceğimiz en yakın nesne olan temel parçacık, bize güçlük çıkaran bir sonsuzluk değildir. Ama bunun boyutu sonlu olduğuna göre, başka kaynakların elektrik alanının bunun yapısı üzerine bir etkisi olmasını bekleyebiliriz.

Bu o anlama gelecektir ki, yük birikiminin elektriksel öz enerjisi farklı çevreler içinde tümden aynı olmayacaktır. Hangi koşullar altında bunun hesaba katılması gerektiğini düşünürsünüz?

1.26 Şeklimiz yarıçapı a ve yüzeyce yoğunluğu σ olan küresel bir yük kabuğunu gösteriyor; bu kabuktan yarıçapı $b \ll a$ olan dairesel küçük bir parça kesilerek ayrılmıştır. Oluşan açıklığın ortasındaki elektrik alanının tutarı ve doğrultusu nedir? Yanıtı bulmak için iki yoldan gidilebilir. Birincisi, geriye kalan yük dağılımını, ayrı yük ögelerinin söz konusu noktadaki alana katkılarını hesaplayarak toplamı bulmak. Ya da üstüste gelme ilkesini anımsayarak kendisi küçük bir pul olan kesilmiş parçanın yerine konması ile oluşacak etkiyi düşünmek. Bu sonuçla, bir yüzey yüküne etkiyen kuvvet tartışmamız arasındaki bağlılığı kaçırmayın; bu sorunun yanıtını bulmak için kuşkusuz üçüncü bir yol olabilir.

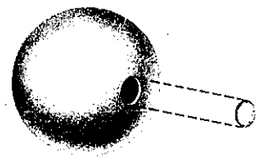
1.27 Bakışım ve üstüste gelmenin benzer biçimde kullanılması ile şu ilginç olguyu kurabilirsiniz. Yarım küre biçimli bir kap yüzeyi üzerinde biteviye bir yük yoğunluğu taşıyor. Kabın üzerine davul zarı gibi bir yüzey gerilmiş olsa bu sanal yüzeyin her noktasındaki alanın bu yüzeye dik olduğunu gösterin.

1.28 Bakışım ve üstüste gelme ilkelerini kullanarak çözülecek problemler geliştirmekle bu problemleri çözmekten daha çok şey öğrenilir. Böyle bir problem geliştirmeye çalışınız.

1.29 Yoğunlukları σ_A ve σ_B esb/cm^2 olan koşut yassı iki yük yaprağı A, B'nin solunda bulunacak şekilde s aralığı ile düşey durmakta olsunlar: Şimdi A yaprağının solundaki elektrik alanı $\mathbf{E}_1$, yapraklar arasındaki elektrik alanı $\mathbf{E}_2$ ve B'nin sağındaki elektrik alanı da $\mathbf{E}_3$ olsun. Bu alan yalnız yapraklar üzerinde bulunan yüklerden ileri gelmektedir, var olabilecek başka kaynakların yeterince uzakta olduğunu, ve dolayısı ile, incelediğimiz bölgenin bütünü içinde biteviye bir alan ile katkıda bulunduklarını düşünüyoruz. Şimdi bu iki yaprağın herhangi bir biçimde mekaniksel olarak bağlandığını oluşan dizgeye etkiyen toplam kuvvetin ölçülebildiğini düşünelim. Öyleyse dizgenin yüzey birimine yani her yaprağın 1cm^2'sine etkiyen bu kuvvetin

$$\mathbf{F} = (\sigma_A + \sigma_B)\left(\frac{\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_3}{2}\right)$$

olduğunu gösterin. Bu durum kalınca bir tabaka içinde biteviye olmayan bir yük dağılımının özel bir halidir.



Prob. 1.26

1.30 Prob. 1.29'da gösterilen ve Kes. 2.7'de deyimlenen sonuç çok genel olarak tanıtlanabilir. Yassı bir katmandaki yük dağılımının $x = 0$ ve $x = b$ arasında $\rho(x)$ oylumca yük yoğunluğu işlevi ile verildiğini düşünelim; burada b katman kalınlığıdır. O zaman buna bir yük yaprağı gözü ile bakarsak yüzeyce yük yoğunluğu

$$\sigma = \int^b \rho(x)\, dx$$

ile verilir. Eğer E_x yaprağa dik olan alan bileşenini gösterirse, yaprağı etkiyen toplam kuvvet (yani kuvvetin x bileşeni; öteki bileşenlerle ilgili değiliz),

$$F_x = \int_0^b \rho E_x\, dx$$

ile verilmiştir. Şimdi ρ ile E_x'i bağlamak ve dx kalınlığındaki katmana Gauss yasasını uygulamakla

$$F_x = \frac{1}{8\pi}(E_2^2 - E_1^2)$$

olduğunu gösterin, bundan yola çıkarak

$$F_x = \tfrac{1}{2}(E_{1x} + E_{2x})\sigma$$

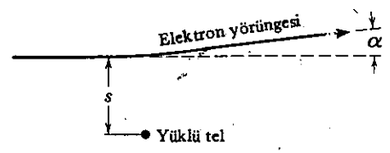
olduğunu gösterin. Burada $\mathbf{E}_1$ niceliği $x = 0$'daki, $\mathbf{E}_2$ ise $x = b$'deki alandır.

1.31 Yaprak sigara (püro) biçimli bir durgun yük dağılımı konumluk eksenlerinin başlangıcında bulunuyor. "sigara"nın uzun yarı z ekseni boyunca uzanmakta olsun. Toplam yük q"dür. Yük dağılımının dışında ve z ekseni üzerinde bir P noktasındaki alan E olsun. Eğer q yükünün tümü baş noktada birikmiş olsa idi, P'deki alan E' olurdu. Şimdi E''nün değeri E'den büyük müdür, ona eşit mi yoksa ondan daha küçük müdür?

1.32 Bildiğiniz gibi küresel bakışımlı bir yük dağılımının başlangıçtan r uzaklıkta bulunan bir noktadaki elektrik alanı, r yarıçaplı kürenin içinde bulunan bütün yük baş noktada birikmiş iken uyarılan alanının aynıdır.

(a) Bu olgu yalnız Coulomb yasasının kare ile ters oranlı oluşuna mı yoksa küresel bakışıma mı bağlıdır? Acaba bu özellik küble ters oranlı bir yasa halinde doğru olur mu idi?

(b) Toplam yükü Q olan ve küresel bakışım gösteren bir yük dağılımının bütün yükü başlangıç ile r_0 uzaklığı arasında birikmiştir. İki yük arasındaki kuvvetin kare ile ters oranlı yasaya değil, ***küble ters oranlı*** bir yasaya uyduğunu düşünelim. Bir r $(r > r_0)$ uzaklığındaki E alanını, aynı r uzaklığında bütün Q yükü başlangıçta birikmiş olduğu zaman uyarılan E' alanı ile karşılaştırın. Bu E alanı, E''den büyük müdür, ona eşit mi, yoksa ondan daha küçük müdür? Matematiksel bir kanıt aramaktansa nitel kaba bir tartışma deneyiniz.



Prob. 1.34

1.33 İçinde iki türlü olacak yerde üç türlü yük bulunan bir dünya düşünün ki, burada benzer yükler birbirlerini yine itsinler ve ayrı yükler de tam bakışımlı biçimde birbirlerini çeksinler. Yük çeşitlerine A, B, C deyin. Uzaklığın karesiyle ters oranlı yasasına uyulmaktadır ve üstüste gelme ilkesi bizim dünyamızda olduğu gibi geçerlidir. Benzer yüklerin, değişik yükleri çekişmesinden tam iki kez büyük bir kuvvetle itişdiklerini düşünelim. Bu demektir ki, 1 cm aralıkla duran A türden eşit iki birim yük 1 dinlik kuvvetle itişmekte iseler, A ve B türlerinden birer birimlik iki yük birbirini 1/2 dinlik bir kuvvetle çekeceklerdir. Bu dediğimizin çok genel olarak ılın cisimlerin varlığını, yani, içinde yüklü ögeler bulunsa da, bütünü bakımından herhangi türden bir yüke yaklaştığı zaman, ona bir kuvvet etkilemeyen ya da kendisi bir kuvvet altında kalmayan cisimlerin varlığını önlemeyeceğini gösterin. Adı geçen dünya ile kendi dünyamız arasındaki ayrımı nasıl ortaya çıkarabilirsiniz? Elektrik alan kavramı bu dünyada da kullanılacak şekilde genelleştirilebilir mi?

1.34 Bir elektron mikroskopunda V_0 statvolt gerilimi ile hızlandırılmış yüksek enerjili bir elektron demeti, elektron demetinin ilk doğrultusuna dik olarak gerilmiş yüklü ince bir telin üst yanından geçmektedir. Bu tel cm başına λ esb yoğunluğunda eksi yüklüdür. Telin alanı oldukça zayıftır, şöyleki elektron yörüngesi azıcık etkilenmiştir. Buna göre, verilen bir elektrona etkiyen kuvveti, devinimin ilk doğru yolunca sabit hızla devam ettiğini varsayarak, bir ilk yaklaşıklıkla zamanın bir işlevi olarak bulabilirsiniz. Sonra elde ettiğiniz sonucu, elektronun geçiş sırasında edindiği enine döngü bileşenini hesaplamak için kullanın ve bundan yararlanarak elektronun yörüngesinin uğradığı açısal sapmayı bulun. Bu açısal sapmanın elektron yörüngesinin telden uzaklığına bağlı olaması gibi göze çarpan bir sonuca varmanız gerekir. Başka bir deyimle, telin elektrik alanının elektron yörüngesine etkisi, zayıf bir prizmanın bir ışık ışınına etkisi gibidir. Ve gerçekten klasik optiğin bilinen bir girişim olayının yani Fresnel'-

in çift prizma girişim deneyinin elektron-optiği bakımından eşdeğerini göstermek için, tam böyle bir düzen kullanılmıştır Möllenstedt und Düker, Zeitschrift für Physik 145, 377 (1956)

Bölüm 2

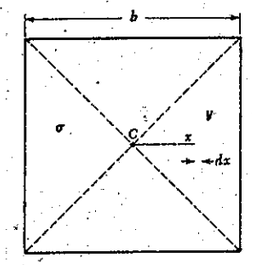
2.18 Yarıçapı a uzunluğu b olan iki ucu açık dairesel koğuk bir silindirin yüzeyi üzerinde biteviye dağılmış toplam Q yükü var. Silindirin ekseni üzerinde ve bir uçta bulunan bir nokta ile orta nokta arasındaki gerilim farkı ne tutar? Bu halkanın uyardığı alanın ne olacağını, alan çizgilerinden bazılarını çizerek gösterin.

2.19 Yarıçapları R_1 ve R_2 olan iki metal küre bu yarıçaplara bakınca büyük bir aralıkla durmakta olsunlar. Bu iki küre arasında bölüştürmemiz istenen Q tutarında bir yük verildiğine göre, elde olunan yük dağılımının gizilgüç enerjisinin olabildiğince küçük olması için bu küreler arasında nasıl bölüştürülmesi gerekir? Bu soruyu yanıtlayabilmek için verilen yükün cismin biri üzerinde q ötekinde $Q - q$ olacak biçimde bölüştürüldüğünü düşünelim ve dizgenin gizilgüç enerjisini hesaplayalım. Sonra q'nün işlevi olan enerjinin enküçük değerini alması için gerekli koşulu arayalım. Bu kürelerden biri üzerindeki yükün, küre yüzeyince biteviye dağıldığını varsayabilirsiniz; zira küreler yeterince uzak olduklarına göre karşılıklı etkileri önemsenmeyebilir. Böylece yükler için en elverişli bölüşüm elde ettiğiniz zaman iki küre arasındaki gerilim farkının sıfır olduğunu gösterin. (O zaman bunlar bir telle bağlanabilirler ve bu dağılımda hiç bir değişiklik yapmaz. Bu Böl. 3'de rastlayacağımız çok daha genel bir ilkenin özel örneğidir: Bir iletken üzerinde yükler, dizgenin toplam gizilgüç enerjisine en küçük değeri verecek şekilde dağılırlar.)

2.20. Prob. 2.1'de belirlenen alan, yani $E_x = 6xy$; $E_y = 3x^2 - 3y^2$; $E_z = 0$ alanı Şek. 2.2'deki alanın hısımıdır. Bunun şeklini açıklığa kavuşturmak için Prob. 2.1'de geliştirilmiş olan φ gerilimini silindirsel kutuplar konumluklarda yani r, θ cinsinden yazalım, burada $r^2 = x^2 + y^2$ and $\theta = \tan^{-1}(y/x)$ Eş gerilimlerin ve alan çizgilerinin bir kesimini çizin.

2.21 İçinde, merkezinde değil, herhangi bir noktada q gibi bir nokta yük bulunan küresel bir bölge ele alalım. Bunun merkezindeki gerilimin kürenin yüzeyi üzerindeki gerilimin ortalamasına eşit olduğu doğru mudur? Bu dediğimiz Kes. 2.13'de sinüsel fonksiyonlar üzerine ileri sürdüğümüz düşünce ile çelişmekte midir?

2.22 Yarıçapı a olan ve σ gibi biteviye bir yüzey yükü taşıyan bir pulun merkezindeki gerilimin $2\pi\sigma a$ olduğunu gördük. Bunu bildiğimize göre, b kenarlı biteviye yüklü



Prob. 2.23

bir karenin merkezindeki gerilimi yüzde bir kaçlık yanılgı ile bulmak istediğimizi düşünelim. Gerilim problemini kare için çözmeye çalışmaksızın bunun değerini nasıl kestirebiliriz? Yaptığınız değerlendirme üzerinde olabilecek yanılgıları nasıl sınırlayabilirsiniz?

2.23 Prob. 2.22'de tartışılan biteviye yüklü karenin merkezindeki gerilimin tutarını tam olarak hesaplamak güç değildir. Tümlevlemenin nasıl yola konulacağı şekilde anlatılıyor. Bunun için C'deki gerilim önce $y = -x$ ile $y = x$ arasında bulunan dx kalınlığında ince bir şeridin katkısını bulun. Sonra sıfırdan b/2'ye değin giderek x'e göre tümlevlemek ve karenin bir çeyreğinin katkısını bulmak kolaydır. Sıfır gerilimin sonsuzda olduğunda hiç kuşku yoktur.

Yanıt: $\varphi_C = 4\sigma b \ln(1 + \sqrt{2})$

2.24 Denk. 2.76'daki erey $\frac{\Gamma_i}{a_i}$ $\underset{a_i \to 0}{}$ 'nin tanımladığı sayının gerçekten bir yöngü bileşeni gösterimlediğine nasıl güvenebilirsiniz? Bu soru açıkça şöyle ortaya konulabilir. $\hat{x}$, $\hat{y}$, ve $\hat{z}$'yi sıra ile $\hat{n}$'nin konumluk doğrultuları alarak verilen bir $\mathbf{F}$ için uzayda belli bir noktada üç sayı belirleyebiliriz. Bunlar bir yöngünün bileşenleri olacaklardır. Kuşkucu olduğumuzdan bunları şimdilik "A_x" "A_y" ve "A_z" biçiminde diş içine alıyoruz. Şimdi başka bir $\hat{n}$ doğrultusu seçecek ve böyle yönelmiş bir yüzey parçası boyunca dolanımın yüzeye oranının ereyini belirleyecek olursak, acaba her zaman $\hat{n} \cdot (\hat{x}"A_x" + \hat{y}"A_y" + \hat{z}"A_z")$ ***niceliğine eşit bir sayı elde eder miyiz?*** Eğer bu böyle ise dişleri atar ve tuttuğumuz yolun bir yöngü oluşturduğunu söyleyebiliriz. Bu dediğimize Şek. 2.18'deki gibi küçük bir eşkenar dört yüzlünün dört yüzeyi çevresince alanın dolanımlarını ele alarak tanıtlayıp istanıtlayamayacağımızı görün. Dört dolanımın toplamı üzerine ne söylenebilir? Yüzey ölçümü yöngülerinin toplamı üzerinde ne söylenebilir?

2.25 Bildiğiniz gibi bir $\mathbf{F}$ yöngü işlevinin uraksaması bir sayıldır. Bir dönülden ayrı olan şöyle bir yöngü tanımlamak istediğimizi düşünün:

$$G = \hat{x}\frac{\partial F_x}{\partial x} + \hat{y}\frac{\partial F_y}{\partial y} + \hat{z}\frac{\partial F_z}{\partial z}$$

bu yaratığın bir yöngü olduğu üzerinde güvence verebilirmiyiz, yoksa bu bir ***düzmece midir?*** (Bileşenlerin alındığı konumluk eksenlerini döndürerek bu niceliğin nasıl davrandığına bakın. Anlamak istediğimizi bulmak için x ekseni çevresinde 90 der'lik bir dönme yeter. Yeni konumluklar eskilerine, $\hat{x}' = \hat{y}$, $\hat{y}' = -\hat{x}$, $F_x' = F_y$ vb şeklinde bağlıdır.

2.26 Bir sulama kanalının düz koşut çeperlerinin aralığı $2b$ metredir. Kanalın içindeki suyun yüzeyinde akış hızı orta akım çizgisinde en büyüktür ve kıyılara doğru gittikçe sıfıra kadar düşer. Akıntı öyle olsun ki, yüzeydeki hız yaklaşıkça

$$v = v_0\left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right)$$

yazımı ile verilsin; burada y merkezden uzaklıktır ve v her yerde akıntı aşağı yönelmiştir. (Gerçek bir kanalda akıntı bundan temelde farklı olabilir.) Suyun yüzünde merkezle kıyı arasında tam ortada yüzen bir tahta parçasının, akıntı ile sürülenirken aynı zamanda döndüğü gözlenir. Bunu açıklayın. Bu Prob. 2.16 (*a*)'ya nasıl bağlıdır? Tahta parçası 360 der. dönünceye dek akıntı aşağı ne yol alır?

2.27 Bu problem sizi küresel bakışımlı işlevlerin, ların özel bir hali için Laplace işlemcesinin küresel konumluklarda nasıl ortaya çıktığını gösterecektir. V yalnızca r'nin işlevi olsun: $V = V(r)$. O halde ıra (bay V) ya da $\nabla^2 V$ dediğimiz $\nabla \cdot (\nabla V)$ nedir? Kes. 2.3'de açıkladığımız gibi bu halde ∇V yalnız $\hat{r}\, dV/dr$'dir, şöyle ki uraksamasını gözönüne alacağımız yöngü işlevi budur. $\nabla \cdot (\nabla V)$ türetilişi şekilde ana çizgileri ile verilmiştir.

(a) Bu türetilişi anlayıncaya değin hesap adımlarını izleyin ve arada yapılacak tartışmaları bunu başkasına anlatıyormuş gibi belirtin. ∇r'ce ikinci basamaktan terimlerin nerelerde bırakıldığını net edin.

(b) Elde olunan sonucun

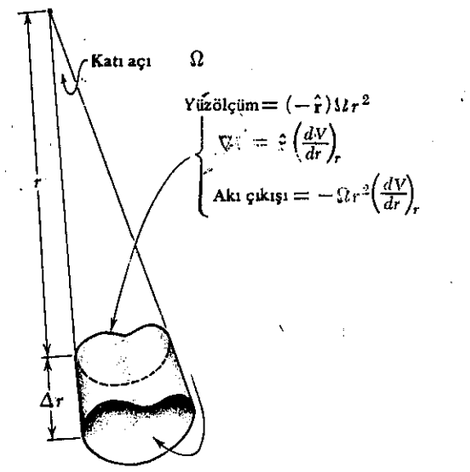
$$\nabla^2 V = \frac{1}{r}\frac{d^2}{dr^2}\left(rV(r)\right)$$

şeklinde yazılabileceğini gösterin.

(c) Eğer $V(r)$ üzerine bütün bildiğimiz $\nabla^2 V(r) = 0$ ise bundan V üzerine ne sonuç çıkarabiliriz?

(d) $V(r) = (1/r)e^{-\lambda r}$ şeklindeki "Yukawa" geriliminin $\nabla^2 V - \lambda^2 V = 0$ denklemini doğruladığını gösterin; λ bir sabittir.

2.28 Bir parçacık sabit bir noktaya doğru hep ışınsal kalan bir kuvvetle çekilmektedir ve bu kuvvetin değeri



$$\text{Yüzölçüm} = \hat{r}\Omega(r+\Delta r)^2 \approx \hat{r}\Omega(r^2 + 2r\Delta r)$$

$$\nabla V = \hat{r}\left(\frac{dV}{dr}\right)_{r+\Delta r} \approx \hat{r}\left[\left(\frac{dV}{dr}\right)_r + \left(\frac{d^2V}{dr^2}\right)\Delta r\right]$$

$$\text{Akı çıkışı} = \Omega(r^2 + 2r\Delta r)\left[\left(\frac{dV}{dr}\right)_r + \left(\frac{d^2V}{dr^2}\right)\Delta r\right]$$

$$\text{Net Akı çıkışı} = \Omega\left(2r\Delta r\frac{dV}{dr} + r^2\Delta r\frac{d^2V}{dr^2}\right)$$

$$\text{Oylum} = \Omega r^2 \Delta r$$

$$\underset{\Delta r \to 0}{\text{Erey}}\ \frac{\text{Akı}}{\text{Oylum}} = \frac{2}{r}\frac{dV}{dr} + \frac{d^2V}{dr^2} = \nabla\cdot(\nabla V(r)) = \nabla^2 V(r)$$

Prob. 2.27

yalnız r'nin, yani ışınsal uzaklığın bir işlevidir: $\mathbf{F} = \hat{r}f(r)$ Böyle bir alan içinde herhangi bir kapalı yol boyunca alınan çizgi tümlevinin sıfır oldüğuna ve dolayısıyle $\nabla \times \mathbf{F} = 0$ olduğuna kendinizi inandırın. Buna göre $\mathbf{F}$'yi bir $V(r)$ gerilim işlevinin bayırgısı olarak gösterimleyebilmelidir (Bu bize bir yük ögesinin düruk alanının bir gerilimden türemiş olması olgusunun kare ile ters oranlılık özelliğinden değil, ama yalnız alanın bir merkeze yönelmiş olmasından ve üstüste gelme ilkesinin ayakta durmasından ileri geldiğini gösterir.) Problem 2.27'de değinilen Yukawa gerilimi kare ile ters oranlı olmayan özel bir çeşit alanla ilgilidir, ve bu çekirdek fiziğinde ve temel parçacıklar fiziğinde önemlidir. $V = Ce^{-\lambda r}/r$ biçiminde yazılan bir Yukawa gerilimi ile

giden bir kuvvet alanı nedir (C ve λ sabit sayılar)? Bu yazımda $\lambda \to 0$ alacak olursak durgun alanın bildiğimiz $1/r$'li gerilimine döneriz. Buna göre $\lambda > 0$ olmak koşulunda, verilen bir C için, herhangi bir noktadaki kuvvetin değeri $\lambda = 0$'halinden daha küçük olduğunu gösterin. $1/\lambda$ niceliğinin boyutu uzunluktur ve buna çoğu zaman bir kuvvetin "erişimi" denir. Böyle alanları uyaran kaynaklar için Poisson denkleminin yerini alacak yazım nedir?

2.29 Bir durgun alanın yüklü bir parçacığı kararlı dengede tutamayacağını gösterdiğimiz tartışma sırasında bu özelliğin Coulomb kuvvetinin uzaklığın karesiyle ters oranlı oluşundan ileri geldiğini görmüştük. Yükler arasındaki kuvvetlerin $r^{-1,5}$ gibi değiştiğini düşünün ve artı bir yükü, kararlı denge halinde tutacak bir yük düzenlenişi tasarlamaya çalışın. Aynı soruyu kuvvet $\sim r^{-2,5}$ için yanıtlayın.

2.30 Aralıkları b cm olan iki protonun elektrik alanını ele alalım. Tanıtlamadan verdiğimiz Denk. 2.36 uyarınca bu dizgenin gizilgüc enerjisinin

$$U = \frac{1}{8\pi}\int \mathbf{E}^2\, dv = \frac{1}{8\pi}\int (\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2)^2\, dv$$

$$= \frac{1}{8\pi}\int \mathbf{E}_1{}^2\, dv + \frac{1}{8\pi}\int \mathbf{E}_2{}^2\, dv + \frac{1}{4\pi}\int \mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_2\, dv$$

olması gerekir; burada $\mathbf{E}_1$ parçacıklardan birinin, $\mathbf{E}_2$ ise ötekinin alanıdır. Alttaki üç tümlevden birincisine bir protonun "elektriksel öz enerji"si denilebilir: bu parçacığın öznel özelliğidir, ve protonun büyüklüğüne ve yapısına bağlıdır. Bu enerjinin sabit kaldığını varsayarak bir yük dizgesinin gerilim gizilgüc enerjisinin hesabını tuttuğumuzda bunu hep hesap dışı bıraktık; bu dediklerimiz ikinci tümlev için de doğrudur. Üçüncü tümlev yükler arasındaki uzaklığı işe karıştırır. Bunu görmek için tümlevi uygun bir konumluk içine yerleştiriniz ve bunu hesaplamaya girişmeksizin diğerinin Ce^2/b biçiminde deyimlenebileceğini gösterin, burada C yalnız boyutsuz niceliklerin işe karıştığı bir sınırlı tümlevin değeridir, yani sayısal bir sabittir. Eğer Denk. 2.36 doğru ise C'nin değeri ne olmalıdır? Denk. 2.36'nın özel bir halde, yani ayrıntıları ile işlediğimiz küresel bir yüzey yükü için doğru olduğunu biliyoruz. Üstüstegelme ilkesini kullanan bir tartışma ile bunu Denk. 2.36'nın doğruluğu hakkında bir tanıt haline çevirmenin mümkün olup olmadığını görünüz. Eğer bu yürürse, sınırlı tümlevimizin değerini bulmuş olacaksınız. (Bir belirli tümlev hesaplama yarışmasına girmek isterseniz, bunu hesaplamaya ya da belirli tümlevler çizelgesinde bulacağınız bir yazım biçimine indirgemeye çalışabilirsiniz. Bu da pek kolay bir iş değildir.)

Bölüm 3

3.18 Bir gerilim farkı karesinin $(\varphi_2 - \varphi_1)^2$ *kuvvet* ile aynı boyutta olduğunu gösterin. Bu bize cisimler arasındaki durgun yük kuvvetinin büyüklük basamağı bakımından, işe karışan gerilim değişimleri ile geniş ölçüde belirleneceğini söyler. Boyutlar yalnız oranlara girer ve 4π gibi bazı sabitler de işe karışabilir. Buna göre bir şeyle başka bir şey arasındaki bir statvoltluk gerilim değişimi var ise, beklediğiniz kuvvetin büyüklük basamağı ne olabilir? (b) Uygulamada elde edilebilecek gerilim farkları, maddenin yapısı ile ilgili bir takım nedenler yüzünden önemli şekilde sınırlanmıştır. İnsanoğlunun kurabildiği en yüksek elektriksel gerilim 10^7 volt yakınlarındadır ki bu da yüksek basınç altında işleyen bir Van de Graaff durgun yük üreteci ile sağlanır. (Milyar voltluk hızlandırıcılar bu büyüklükte gerilimler kullanmazlar.) Milyon volt kare ile ilgili kuvvetin kaç newtonu bulmasını beklersiniz? Bu düşünceler durgun yük motorların neden çok büyük bir uygulama alanı bulamadığını anlatabilir.

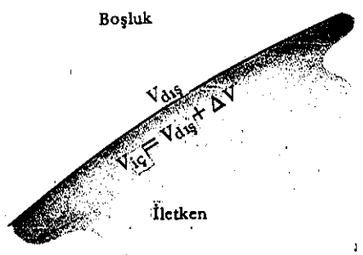
3.19 Her üçü de metalden üç xy, xz ve bir yz düzlemi düşünün ve bunlar kesişme noktalarında birbirlerine kaynatılmış olsunlar. Düzlemlerin her birinden d uzaklığında bir Q nokta yükü bulunsun. Sınır koşullarına uyabilmek için "görüntü yükler" kuruluşunu çizimle anlatın. Q yüküne etkiyen kuvvetin büyüklüğü ve doğrultusu nedir?

3.20 (a) Uzunluğu L ve yarıçapları a ve b olan aynı eksenli iki silindirden oluşmuş bir sığacın sığasını bulun. Uçlarla ilgili düzeltmeyi bir yana bırakabilmek için $L \gg b - a$ olduğunu varsayın. Silindirler arasındaki $b - a$ aralığı yarıçapa bakınca çok küçük olursa, elde ettiğiniz yazımın koşut yapraklı sığaç yazımına indirgenebileceğini göstererek sonucunuzu yoklayın.

(b) Dış çapı 5,00 cm olan bir silindir ekseni düşey duracak biçimde bir terazi koluna asılmıştır. Asılı silindirin alt kısmı iç yarıçapı 6,00 cm olan aynı eksenli sabit bir silindirin içine geçmektedir. Silindirler arasındaki gerilim değişimi 5 kV olursa, asılı silindiri aşağı doğru çeken kuvvetin değerinin ne olduğunu hesaplayın.

3.21 Kes. 3.3'de iletken maddenin *içindeki* gerilimin salt değerinin ne olduğu sorusuna hafifçe dokunarak geçtik. Oradaki tartışmamız için, madde içinde alan bulunamayacağı, yani, gerilimin o madde boyunca sabit olması gerektiği düşüncesi yeterliydi. Aslında, şekilde görüldüğü gibi, iletkenle boşluk arasındaki yüzey üzerinde bir gerilim atlaması olabilir. Böyle bir $\Delta\varphi$ gerilim atlaması, eğer sınırın her yerinde aynı iletken ortamın içinde bir elektrik alanı bulunmadığı gerçeğine zarar vermiyorsa bunun, hemen dıştaki boşluk içinde E'nin teğet bileşeni bulunmadığı sonucumuzu bozmayacağını gösterin. Bunun için E'nin herhangi bir kapalı yol boyunca alınan çizgi tümlevinin sıfır olduğu olgusunu kullanabilirsiniz.

3.22 Bu problem bir düzlemin üst yanında bulunan bir nokta yükü tartıştığımız zaman açıkladığımız "sınırları çözüme uydurma" yöntemine bir örnektir. Gerçekten işlemeğe koyulduğumuz sonuç, bir bakıma sınırlı olan bu yöntemin en tanınmış başarısıdır.



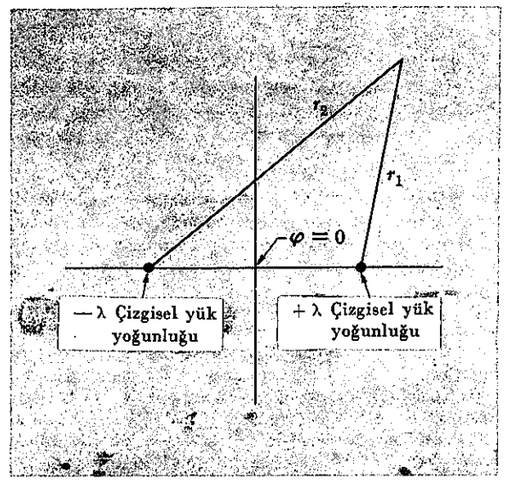
Prob. 3.21

(a) Değişik büyüklükte ve zıt işaretli iki nokta yük alın. Bunlardan büyük olanı artı olsun ve konumluk eksenlerinin başlangıç noktasında bulunsun. Öteki yükü x ekseni üzerinde $x = b$'ye yerleştirin. Önce x ekseni üzerinde φ geriliminin sıfır olduğu iki nokta bulun; bunun için $x = +\infty, x = -\infty$ değerlerini gözönüne almayın. Şimdi merkezi x üzerinde bulunan ve bu iki noktadan geçen bir küre alın. Bu küre yüzeyinin üzerinde bulunan bütün noktalarda gerilimin sıfır olduğunu gösteriniz. Öteki eşgerilim yüzeyler de küre midir? Bir nokta yükün ve bir iletken kürenin işe karıştığı hangi problemin çözümünü bulmuş oluyoruz?

(b) Ama henüz, herhangi bir nokta-yük-ve-iletken-küre problemini karşılamaya hazır değiliz, zira nokta yükün büyüklüğü, küre üzerinde bulunan yük miktarı ve küre yarıçapının nokta yüke uzaklığına oranı şu ana dek elde ettiğimiz alanla bağdaşmayabilir. Örneğin, tüm yükü *sıfır* olan bir küreden belirli uzaklıkta bulunan q nokta yükünün alanını nasıl elde edebilirsiniz? Bu yaptığınızdan bir adım daha ileriye giderek elde edilebilir,, yeter ki üstüste gelme ilkesini düşünesiniz. Bunun özel bir örnek üzerinde deneyiniz: 10 esb'lik bir nokta yük 10 cm yarıçaplı bir metal kürenin merkezinden 20 cm uzakta bulunmaktadır, küre yüklü değildir, yani, toplam yükü sıfırdır. Kürenin yüzeyi üzerinde nokta yüke en yakın bulunan noktanın ve bunun çapça tam karşı ucunda bulunan noktanın alan yeğinliği ne tutar? Bu sorunun doğrü yanıtını bulabilirseniz ve bunu nasıl elde ettiğinizi anlarsanız "küre içinde ters gelme" denilen yönteme gerektiği gibi eğemen olduğunuzu düşünebilirsiniz.

Yanıt: (1/4) statvolt/cm; (7/180) statvolt/cm.

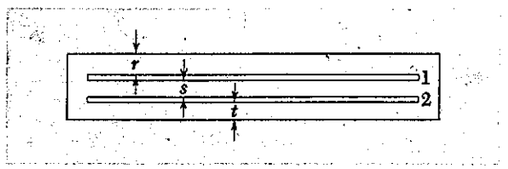
3.23 Tipik bir *iki boyutlu* sınır değer problemi sonsuz uzunlukta ve değişik gerilimlerde iki metal boru yani koşut dairesel iletken silindirlerdir. Bu iki boyutlu problem üç boyutlu problemlerden matematikçe daha kolay işlenir görünmektedir. Gerçekten, "İki-boru" sınıfında bulunan bütün problemlerin kilit noktası, eşit ve zıt işaretli çizgisel yoğunluklu koşut yük çizgisinin yöresindeki alan ile verilir. Bu alan içindeki *bütün* eşgerilim yüzeyler dairesel silindirlerdir ve bütün alan çizgileri de daireseldir. Bakın bunu tanıtlayabilecek misiniz. Gerilimler ile çalışmak daha kolaydır, ama iki boyutlu bir dizge içinde sonsuzdakî gerilimin sıfır olmayacağını anımsamak gerekir. Sıfır gerilimin iki çizgi yük arasındaki doğrunun tam ortasında olduğunu, yani kesit çizimindeki başlangıç noktasında olduğunu kabul ediniz. Herhangi bir noktadaki gerilim, her çizgisel yük için ayrı ayrı hesaplanan gerilimler toplamına eşittir. Bu sizi gerilimin yalınca $\ln(r_2/r_1)$ ile oranlı olduğu, yani iki noktaya olan uzaklıkları oranı sabit olan bir noktanın çizdiği eğri üzerinde sabit kaldığı sonucuna götürür. Eşgerilimlerin kimilerini çizitleyin.



Prob. 3.23

3.24 Şek. 2.2'deki elektrik alanı, yüklü parçacık ışınlarını odaklamakta kılgın önemli bir uygulama yeri bulur. Bunun adına dördüzkutup (kuadrupol) alanı denir. Bir eşgerilim yüzeyin denklemi nedir, ve bu yüzeyler neye benzerler? Ayrı gerilimlerde iletkenler kullanarak bu alanı yakın bir yaklaşıklıkla sınırlı bir bölge içinde nasıl oluşturabileceğinizi anlatın.

3.25. Yandaki şekil, içinde herbiri A yüzölçümlü 1 ve 2 gibi iki yaprak bulunan yassı bir kutunun kesitini gösteriyor. Yapraklar aralığı ve yapraklarla kutunun üst ve alt yüzü arasındaki aralıklar, r, s, ve t ile gösterilmiştir; bunlar yaprakların boyu ve eni yanında çok küçük sayılmışlardır ki yaprakların taşıdıkları yüklerin hesaplanmasında kıyı etkileri savsanabilsin. Bu yaklaşıklık içinde, C_{11}, C_{22}, ve C_{12} sığa katsayılarını bulun. Aynı şekilde C_{21} katsayısını doğrudan doğruya bulabilirsiniz ve Prob. 3.27'de tartışılan genel teoremde olduğu gibi bunun C_{12} ye eşit olduğunu görebilirsiniz.



Prob. 3.25

3.26 İletkenlere öyle biçimlemek ya da öyle düzenleyebilirmisiniz ki C_{jk} "karşılıklı sığa katsayılarından biri ya da birçoğu artı olsun? Bunun demek istediği, j. iletkeninin artı gerilimde , bütün öteki iletkenlerin ve bu arada k iletkeni topraklanmış iken, k iletkeni üzerinde net artı yük meydana gelmiş olsun. Şimdi; (a) bu durumu oluşturan bir düzenleniş sağlayıp sağlayamayacağınızı belirtin, yoksa, (b) bunun olmayacağı üzerinde inandırıcı bir tartışma veriniz. C_{jj} gibi "özsığa" katsayılarından biri eksi olabilir mi?

3.27 C_{12} 'nin C_{21} 'e herzaman eşit olması gerektiğini tanıtlamaya yardım edecek kimi öneriler şunlardır: Bildiğimiz gibi bir dQ yük öğesi sıfır gerilimden φ gerilimde bulunan bir iletkene aktarılsa kimi, dış dizgelerin $\varphi\, dQ$ tutarında enerji harcamaları gerekir. Şimdi gerilimleri φ_{1f} ve φ_{2f} (f son anlamına) olacak şekilde yüklenmiş iki iletken dizgesi ele alalım. Bu durum bütün gerilimlerin ve bütün yüklerin sıfır olduğu halden başlayarak değişik birçok yollardan sağlanmış olabilir. Bunlardan iki tanesi özellikle ilginçtir:

(a) φ_2 'yi sıfırda tutarken φ_1 'i sıfırdan φ_{1f} değerine dek yükseltelim; sonra φ_1 'i, φ_{1f} değerinde sabit tutarken φ_2 'yi sıfırdan φ_{2f} değerine dek yükseltelim.

(b) Bu kez 1 ve 2'nin işlevlerini değiştirerek benzer bir program uygulayalım, yani önce φ_2 'yi sıfırdan φ_{2f} 'ye dek yükseltelim ve böylece sürdürelim.

Bu iki yükleme izlencesinin her ikisi için de dış dizgelerin gördüğü işi hesaplayın. Ve sonra tartışmayı tamamlayın.

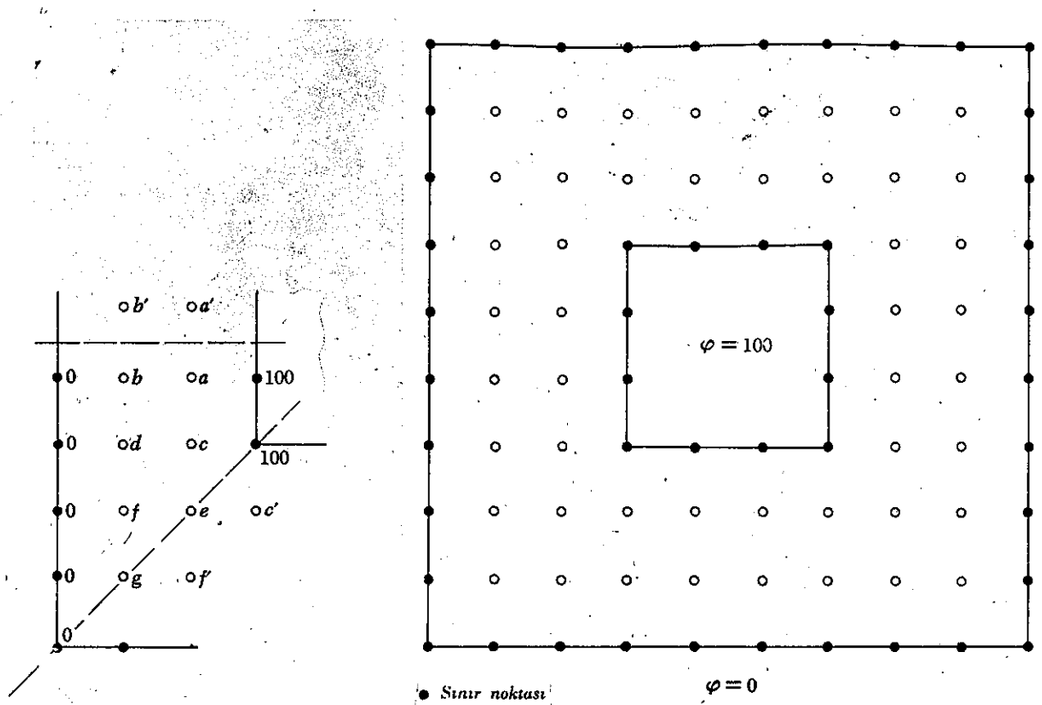
3.28 $\varphi(x,y,z)$ yazımı (x_0,y_0,z_0) noktası yöresinde bir dizi halinde açılabilen herhangi bir işlev olsun; φ 'nin (x_0,y_0,z_0) noktasını δ uzaklığında bakışımlı olarak saran $(x_0+\delta, y_0, z_0)$,$(x_0-\delta, y_0, z_0)$,$(x_0, y_0+\delta, z_0)$,$(x_0, y_0-\delta, z_0)$, $(x_0, y_0, z_0+\delta)$, $(x_0, y_0, z_0-\delta)$, gibi altı noktanın çevresinde Taylor dizilerine açılımını yazın. Eğer φ Laplace denklemine uyarsa, bu altı değerin ortalamasının δ cinsinden üçüncü basamağa kadar değerlerinin ortalamasının $\varphi(x_0,y_0,z_0)$ 'a eşit olduğunu gösterin.

3.29 Aritmetikten başka bir şey kullanmadan, verilen bir sınır değeri için Laplace denkleminin nasıl çözülebileceği üzerine işte bir örnek. Bu Kes. 3.8'de işaret edilmiş olan gevşeme yöntemidir ve Prob. 3.28'de elde edilen sonuçlara dayanır. Yalın olsun diye iki boyutlu bir örnek alıyoruz. Şekilde kare şeklinde ve biri ötekini saran iki eşgerilim sınır çizilmiştir. Bu kare kesitli farklı boyutta iki metal borudan yapılmış bir sıgacın kesiti olabilir. Problemimiz $\varphi(x,y)$ işlevinin bir noktalar ağındaki değerlerini bulmakdır ki bu da işlevin bu noktalardaki gerçek değeri için iyi bir yaklaşıklık olacaktır. Çalışmayı işlenebilme olanakları içinde tutabilmek için oldukça seyrek bir ağ seçtik. İç sınıra dilediğimizce 100 dış sınıra ise 0 gerilimi tanıyalım. Bu sınırlar üzerindeki bütün noktaların gerilimleri bu değerde kalır. Bir ilke olarak içerdeki noktalara herhangi bir takım değerler vererek işe koyuluruz; bununla birlikte akıllıca yapılmış bazı kestirimlerle zaman kazanabiliriz. Şekilde bazı başlama değerleri önerilmiştir. Sizin bundan daha iyilerini bulabilirsiniz. Açıkca görüldüğü gibi dizgenin bakışımlı oluşundan yararlanmak gerekir; böylece hesaplanacak yalnız yedi iç değer vardır. Şimdi dizgeli yerlerde ağdaki noktaları ele alacak ve her noktaya tanıdığınız değer yerine onun dört komşusunun ortalamasını koyacaksınız. Yorulduğunuz zaman ya da, bu taramadan çıkan farklar yeterince küçüldüğü zaman durun. Durmak için uygun bir yer, bir geçiş yüzde bir'den daha büyük farkların ortaya çıkmadığı adımdır. Bu arada "gevşeme" dediğimiz yani, bir adımdan ötekine geçişteki değer dağılımı değişmesi, *yayınım* dediğimiz fiziksel olaya sıkıca bağlıdır. Eğer siz bir noktadan çok büyük değerlerle başlamış iseniz, bu hal o noktanın yakınlarına da "bulaşacak", oradan daha uzaktaki yakınlara geçecek, ve sonunda sınırların izin verdiği kadar açılıp gidecektir.

3.30 Kendiniz bir çözüm elde ettikten sonra, bulduğunuz çözümü bir bilgisayarın yarı aralıklı bir ağ için verdiği çözümle karşılaştırmak ilginçtir (Şekle bakın). Bilgisayara bir yeni adımda 0,1'den daha büyük bir fark olmadığı takdirde durması söylenmiştir.Bilgisayarbütün ağ üzerinden 41 geçiş yapmıştır ve hesaplamanın hepsi üç saniye sürmüştür.

Şeklin üzerine ince bir kâğıt koyun ve noktalar arasında basit çizgisel bir içdeğerbiçim kullanarak bir ya da iki eşgerilim eğri çizin. Şekildeki verilerden yararlanarak kesiti bu olan bir sığacın birim boyu başına sığasının ne olduğunu nasıl bulabilirsiniz?

3.31 Yüklü iki silindir arasındaki uzayda gerilimin nasıl değiştiğini, esnek bir zarın aldığı şekil gibi farklı fiziksel olaylar ile de benzer biçimde gösteriniz. Prob. 3.29'da verilen nokta ağının, sınır üzerinde bulunan noktalarla birlikte, aynı gerginlikte lastik şeritlerle bağlanmış olduğunu düşünelim. Şimdi iç sınırın bu problem için çizdiğimiz şekildeki gibi φ_0 gerilim farkını gösterimleyen bir yüksekliğe çıkarıldığını düşünelim. Bütün eğimler yeterince küçük olduğuna ve açı $\approx$ tanjant bulunduğuna göre, her düğüm yerinin denge yüksekliği bunun dört komşusunun yüksekliklerinin ortalamı olacaktır. Niçin?

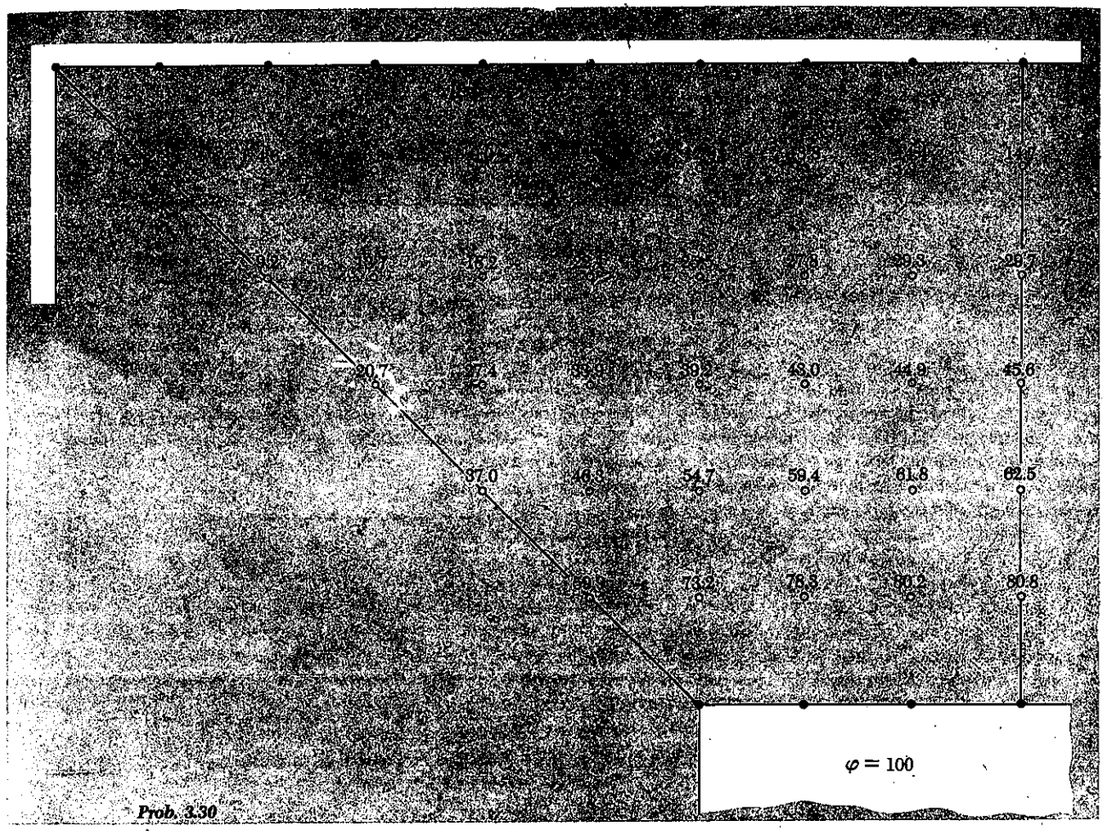


Prob. 3.29

İçte bir noktadaki değer yerine $\frac{1}{4}\times$ dört komşu noktanın değerleri toplamını: $c \to \frac{1}{4}\ (100 + a + d + e)$; sonra $a' = a$, $b' = b$, $c' = c$ ve $f' = f$

Önerilen çıkış değerleri

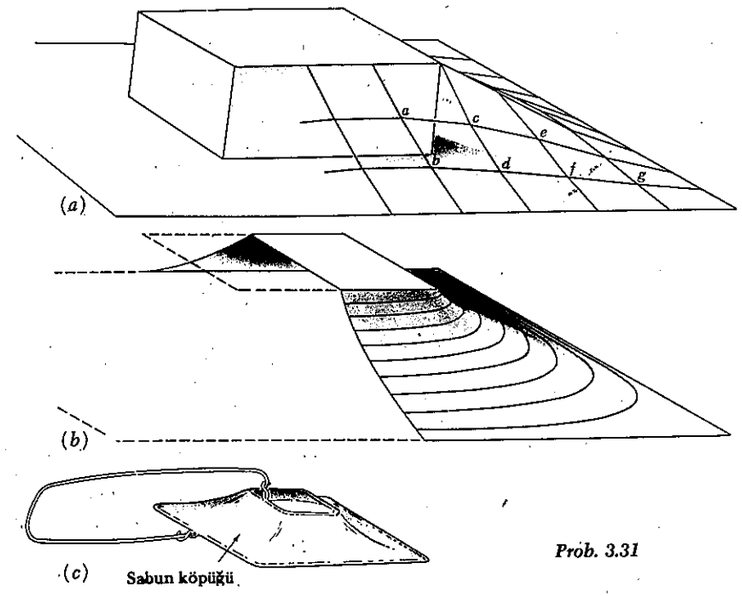
$a = 60$
$b = 30$
$c = 50$
$d = 25$
$e = 40$
$f = 20$
$g = 10$



Prob. 3.30

Böyle bir ağ yerine bir esnek zar alınacak olursa, yüzeyin yüksekliği Laplace denklemine uyar ve iç çerçeveyi yükseltmek, yüzeyin (b)'de gösterilen biçimi almasına yol açar. Bu kare kesitli iki silindir arasındaki $\varphi(x,y)$ durgun yük geriliminin tam çözümüdür ve aynı zamanda kare biçimli iki çerçeve arasına gerilmiş sabun köpüğü zarının (c)'de çizilen şeklidir. Sabun köpüğü zarın ya da lastik şeritlerin oluşturduğu ağın canlandırdığı taslamlar, bir sınır değer probleminin fiziğin başka bölgelerindeki çözümünün ne olacağı üzerinde bir düşünce edinmemize yardım eder. Gevşeme hesaplamasında öne sürdüğümüz başlama değerleri böyle kestirilmiştir. Şeklin (b) ve (a) kesimlerinin karşılaştırılması, bütün ayrıntıları veren bir ağ çözümü neden beklemek gerektiğini gösterir. Gerilimin bir iç köşenin hemen yakınlarındaki sert düşüşü burada, elektrik alanının kılgınca sonsuz değer aldığını anlatır ki, bu da bu benzer taslamda kestirelemez.

Uydurumlu çizitlem yöntem ilkesini aklınızda tutarak, zarlar ya da şeritler halindeki esnek dizgelerin, kendilerini, esneklik enerjisine en küçük değer verecek biçimde ayarladıklarını anlıyoruz. Bir katman ya da bir sabun köpüğü zarı halinde bunun taşıdığı anlam, katmanın yüzölçümünün en küçük değeri aldığıdır. Yüzeyin aldığı biçim yalnızca verilen sınırları bağlayan en küçük yüzey biçimidir.



Prob. 3.31

Esnek dizgenin iç çerçevesine aşağıya doğru etkiyen toplam kuvveti, durgun yük dizgesinde karşılayan nicelik nedir?

Gevşeme hesabının mekaniksel terimlerle ne anlama geldiğini düşünün. Ağ noktalarından her birine birer direk dikildiğini ve başta ağın her düğümünün bu direklere gelişigüzel yüksekliklerde bağlandığını düşünelim. Gevşeme hesabında yaptığımız işlemin içyüzü nedir?

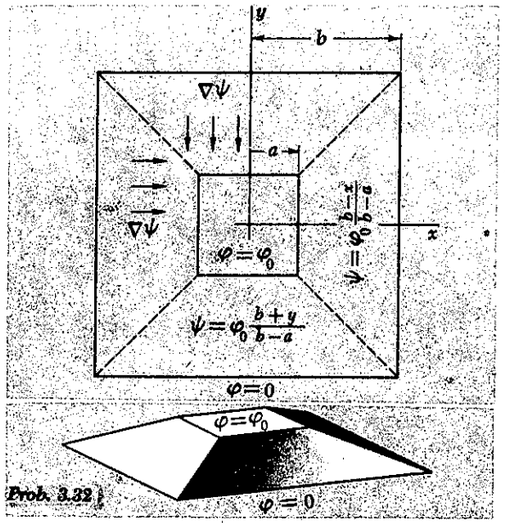
3.32 Prob. 3.29'daki kare kesitli silindirler uydurumlu yöntem için iyi bir konudur. Böyle bir sığacın birim boyuna düşen sığalığın değerini bulmak isteyelim. Bu, verilen bir gerilim değişimi için birim boya düşen birikmiş enerji tutarını hesaplamaya eşdeğerdir. Çünkü,

$$U = \tfrac{1}{2}C\varphi_{12}^2 = \frac{1}{8\pi}\int |\nabla\varphi|^2\, dv$$

dır. Şimdi problemimiz, ne olduğunu bilmediğimiz gerçek φ işlevi yerine, hesaplanması gerekli tümlev içinde $\psi(x,y)$ yoklama işlevi koyarak tümlevin değerini hesaplamaktır. Bu ψ sınır koşullarını yerine getirmelidir; yani bu işlev küçük karenin üzerinde φ_0 değerini ve büyüğünün üzerinde ise 0 değerini almak zorundadır. Gönlümüzce başka bir işlevi seçebiliriz. Burada izlenecek gengüdüm, seçilen fonksiyonun tümlevi alınabilir bir işlev olmasına ve bunun nitel olarak gerçek çözüm gibi davranmasına bakmaktır. İlk adımda köşegenlerin iç yöreyi böldüğü dört kısmın her biri için basit bir çizgisel işlev almayı deneriz. Şekle bakarak iç karenin $2a$ kıyısı ile dış karenin $2b$ kıyısı ele alınarak sağ yöre için

$$\psi = \varphi_0 \frac{b-x}{b-a}$$

alalım ve böyle sürdürelim. ψ 'nin çizgesi üstü kesik bir pramittir. Şimdi hemen her yerde $\nabla^2\psi = 0$ olduğuna göre ψ Laplace denklemini doğrulamaz. Niçin? U'nun tümlevini hesaplayın ve böylece sığalığın değerini kestirin. Gerçek sığalık sizin kestirdiğiniz değerden daha mı büyük, yoksa daha mı küçüktür? Kestirdiğiniz değerin $a \ll b$ gerçek değere daha yakın olmasını bekler misiniz? Ya da $(b-a) \ll b$ için bunu bekler misiniz? Eğer daha iyi bir yaklaşıklık gerekirse, daha düzeltilmiş bir yoklama işlevi önerebilir misiniz?



Prob. 3.22

Bölüm 4

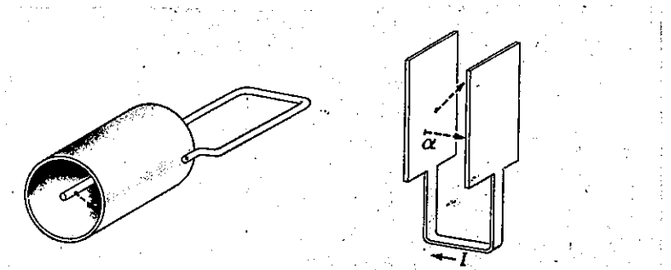
4.20 Koşullar öyle olsun ki, Kes. 4.5'te tartışılan nedenler yüzünden Ohm yasası işlemesin; elektrik alanında yüzde 10'luk bir artışın akım yoğunluğunda yüzde 10 bir artışa ya da bundan daha büyük ya da daha küçük bir artışa yol açmasını bekler misiniz?

4.21 Bir tek iyonun elektriksel iletkenliğe katkısı, iyonun devingenliği denilen bir nicelikle anlatılabilir. Tanımınca bu nicelik, hız bölü elektriksel alan yeğinliği boyutundadır. Bu nicelik birim yeğinlikte bir alan etkisi altında kalan bu gibi bir iyonun kazandığı ortalama hıza eşittir. Kes. 4.4'de kullandığımız yazılış biçimi uyarınca μ ile göstereceğimiz devingenlik $\mu = \bar{u}/E$ ile verilir. Bir gaz içinde bulunan bir artı iyonun devingenliğinin gazın sabit sıcaklıktaki yoğunluğuna nasıl bağlı olmasını bekleriz? İyon devingenlikleri üzerine geniş deneysel veriler var. Devingenlikler genel olarak volt/cm başına cm/saniye ya da cm^2/volt-s olarak verilirler. Bir atmosfer basınç altında çok arı helyum içindeki He^+ iyonlarının devingenliği 5,1 cm^2/volt-s'dir ve aynı gaz içinde elektronlar olarak alınabilen eksi iyonların devingenlikleri 500 cm^2/volt-saniye olarak gözlenmiştir. Bu sayıların gerektirdiği τ_+ ve τ_- değerlerini hesaplayın, eğer biz, τ 'yu "özgür yol"u aşmak için geçen zamanla ilgili tutarsak, bu yol elektronlar için mi yoksa artı iyonlar için mi daha uzundur? İyonlanmış helyumun iletkenliğinin yüzde kaçı artı iyonların katkısı ile oluşmuştur? (Çoğu gazlarda özgür elektronlar çabucak atomlara bağlanırlar. Bu nedenle katıldıkları kütle ile irileştikleri için artık kolay devinen tanecikler halinden çıkarlar ve eksi iyonların devingenliği kabaca artı iyonlarınkinin aynı olur. Aralarında helyumun da bulunduğu pek az gaz atomu elektron bağlanmasiyle eksi iyon oluşturmaz ve bu bakımdan elektronların gerçek devingenliği üzerine yapılacak deneylerde bu gazlar elverişli bir ortam oluştururlar.)

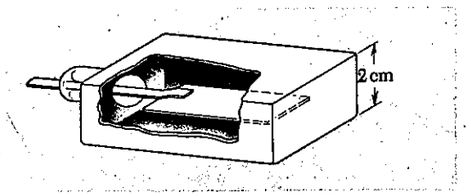
4.22 Ilın atomlardan oluşmuş bir gaz içinde bir elektrik alanının etkisi altında devinen bir iyon, bir pinball makinası içindeki bir top gibi davranır. Buradaki benzerliliği geliştirin. Aradaki ayrımlar ve benzerlikler nelerdir? Pinball taslamı için Ohm yasasının eşdeğerinin ne olduğunu söyleyin. Bir fen müzesi için bir gösteri taslamı tasarlama görevini yüklenmiş olduğunuzu düşünün. İyon iletkenliğinin gerçeğe uygun iki boyutlu bir görünümünü sağlayabilmek için pinball tahtası nasıl tasarlanmalıdır? İğnelerin yerleri, esneklikleri, ısıl enerjiyi benzetme olanağı, aynı çevre içinde artı ve eksi iyonların temsil edilmesi olanağı gibi soruları ele alın.

4.23 Prob. 3.17'nin sonucunun bir kısmı iki elektrot arasındaki yüklü parçacıkların devinimi ile oluşmuş bir akım devresinden geçen akımı anlamamıza yardım edebilir. Şimdi sorumuz, elektrotlar arasındaki uzaydan yalnız ***bir tek*** parçacık geçecek akımın yapısının ne olacağıdır? (Eğer bunu işleyebilirsek, herhangi bir programa göre ulaşan büyük sayıdaki parçacığın işe karıştığı herhangi bir akımı kolayca anlatabiliriz.) Şimdi şekilde görülen boşlukta bir telle bağlanmış iki elektrottan oluşan basit devçevrimi elete alın. Elektrotların 2 mm aralıkla durduklarını düşünün. Yükü $+2e$ olan yavaş bir alfa parçacığı sol yaprakta bulunan etkin bir çekirdekten salınmıştır. Bu 10^8 cm/s gibi sabit bir hızla doğruca sağ yaprağa doğru devinmekte ve bu yaprakta kalmaktadır. Bağlama telindeki akımın zamanla değişimini gösteren nicel bir çizit çiziniz. Elektrotlar arasındaki aralığı aynı hızla geçen ama dikme ile 45'der'lik açı yapan bir alfa parçacığı için aynı incelemeyi yapın (Gerçekte bu denli kısa olan atmalar için bağlama telinin burada savsadığınız irgitimi atmanın biçimini değiştirecektir.) Şimdi elektrotların silindir biçiminde alındığını ve ince elektrodun ekseni boyunca duran ince bir telin alfa parçacıkları yaydığını düşünelim. Akım atması aynı biçimi koruyacak mıdır?

4.24 Bir iyonlanma odası şekilde görüldüğü gibi bir metal kutudan başka bir şey değildir ve kutunun içinde atmosfer basıncında argon gazı bulunmaktadır ki bu koşullar altında artı argon iyonlarının ve elektronların devingenlikleri 1,6 ve 800 cm^2 /volt-s'dir. Merkez elektrodunu oluşturan metal yaprak bir yalıtkan taşır ve büyük bir dirençle 500 voltluk bir gerilime bağlanmıştır. Bu elektrot aynı zamanda bir yükseltece bağlanmıştır ki bunun çıkışının telden geçen akımla oranlı olduğu ve çıkışın bir ossiloskopla gösterilebileceği düşünülmektedir. Bu odadan yüksek enerjili bir parçacık geçerek yolu üzerinde bir iyon izi bırakırsa ossiloskopta görmeği beklediğiniz atmayı anlatın. (Osilloskop demetininin süpürmesinin parçacığın geçişinden hemen önce olmasının sağlandığını varsayın.) Atmayı inceleyebilmek için aranılacak süpürüm hızı ne olmalıdır?



Prob. 4.23



Prob. 4.24

4.25 Şek. 4.2'ye bir göz atın, ama biraz canlanmak için eğer henüz yapmamışsanız Prob. 4.4'ü çözerek ısının. Bir boşluk diyodunda elektronların akışını incelemek istiyoruz. Prob. 4.4'de olduğu gibi elektronların katotdan sıfır ilk hızı ile ayrıldıklarını, katot geriliminin sıfır olduğunu anot geriliminin ise V_0 'a eşit olduğunu dünüyoruz. Ama şimdi anotla katot arasındaki elektrik alanı, elektronların, yani, eksi uzay yükünün varlığı ile belli şekilde etkilenir. Bu demektir ki $V(x)$'in yani anotla katot arasındaki gerilim değişimi bütün öteki koşullarla bağdaşmak zorundadır, ve bu durum uzay-yük-yoğunluğunu gösteren $\rho(x)$ ile katoda olan x uzaklığına bağlı olarak hızın $v(x)$ değerlerini işe karıştırır ki bunların ikisi de V'ye bağlıdır. Yerine getirilmesi gerekli koşullar şunlardır:

(i) Sabit gerilimin düşüşü: $x = 0$'da, $V(x) = 0$ $x = s$ 'de

$V(x) = V_0$

(ii) Poisson Denklemi: $d^2V/dx^2 = -4\pi\rho$

(iii) Akımın sürekliliği: $\rho v = J = -I/A$

(iv) Elektron dinamiği: $\frac{1}{2}mv^2 = eV(x)$

son üç ifadenin V ile x'i birbirine bağlayan,

$$d^2V/dx^2 = K/V^{1/2}$$

şeklinde bir diferansiyel denklemi gerektirdiğini gösterin. Burada K problemin içindeki çeşitli sabitlere bağlı bir sabittir. Bu denklemin (i) koşuluna yani $V(x)$ sınır koşullarına uyan bir çözümünü arıyoruz. Aslında bu koşula bir çözümler kümesi uyacaktır. Bir kısıtlama daha zorlayan fiziksel bir düşünüş kullanmalıyız. Verilen bir V_0 için, uzay yükünün itme etkisinin ***katotdan daha*** çok ***elektron çıksa bile***, hiç birinin aradaki bölgeyi aşamayacağı sınır değeri ile ilgiliyiz. Bu koşulun belirtgin çizgisi katotda elektrik alanının sıfır olmasıdır. Niçin böyle olduğunu düşünün. Alan sıfır olmaz da artı olursa ne olacaktır? Alan eksi olursa ne olacaktır? Böylece $x = 0$ değerinde $dV/dx = 0$ olmasını istiyoruz demektir. Diferansiyel denkleme bir çözüm bulmak için, denklemin her iki yanını $2(dV/dx)$ ile çarpın. O zaman denklemin sol yanı $(d/dx)(dV/dx)^2$ olur. Buradan yola çıkarak yürüyün. Hesabınızın sonunda "uzay-yükü-sınırlaması" koşulları altındaki I akımının $V_0^{3/2}$ ile oranlı olduğunu bulmanız gerekir. Bu Ohm yasasına uymayan çok gözalıcı ve önemli bir dizge örneğidir. Bu arada gerçek bir çiftkutup halinde katotun saldığı elektronların katottan tam sıfır hızıyla değil, katot sıcaklığına uygun bir hızla fırladığını vurgulayalım. Bu 0,1 elektron volt'a ya da o yakınlarda bir kinetik enerjiye raslar. Bundan çok daha büyük gerilimlerle uğraştıkça, ilk hızı sıfır almak oldukça iyi bir yaklaşıklıktır.

4.26 Metallerin iletkenliğinin elektronlardan ileri geldiğini Tolman ile Stewart 1917'de yapılan bir deneyle doğrudan göstermişlerdir. Bu deney şu yalın düşünceye dayanır. Eğer elektronlar bir metal içinde oldukca özgür iseler, kristal örgüsü ivmeli bir devinime koyulursa, bunlar eylemsizlikleri dolayısiyle, bu devinimi tam olarak izleyemezler. Bir metal parçasını çalkalarsanız elektronlar kristal örgüsünden geride kalma eğilimi gösterirler. Bu ise artı ve eksi yüklerin ***bağıl*** bir devinimde olmasına ve dolayısiyle bir elektrik akımı oluşmasına yol açar. Bu problemde Tolman-Stewart deneyi ile bu düşünceyi geliştireceğiz. Ana ekseni çevresinde yüksek ve sabit bir hızla dönen bir bakır halka ele alalım. Bu elektrikçe ılındır, yani halkada bir akım yoktur, zira elektronlar ile kristal örgüsü içindeki bakır iyonları aynı hızla dönmektedir. Şimdi

Daha Başka Problemler

halkayı birden durduralım; elektronlar devinimi sürdürme eğilimi göstereceklerdir; kristal örgüsünü durdurmak için onlara etkileyebilecek tek kuvvet, elektrik akımı direncini oluşturan "sürtünme" kuvvetinin aynıdır. Bu deneydeki elektronların ivmesiyle, duran iletkenin kristal örgüsünün bağıl devinimini oluşturan E alanı arasında yalın bir bağıntı bulunmalıdır. Bu düşünceyi izleyecek olursanız halkayı durdurmanın ***belirli tutarda yükün akmasına*** yol açacağı sonucuna varırsınız.

Başka bir deyimle $\int I\,dt$ yazımı, halkanın durmazdan önceki hızına, bakırın iletkenliğine, ve özgür yük taşıyıcılarının yüklerinin kütlelerine oranına bağlıdır. Yazımı çıkarın. ***Bu deney yük taşiyıcılarının imlerini*** de verir. Tolman ile Stewart bir tek halka yerine bir çok ince sarımlardan oluşmuş bir kangal kullandılar ve böylece akımı bir dış devreye çıkarıp ölçebildiler.

4.27 Birbirine değmeden çapraz geçen telleri $\times$ şeklinde çizmek üzere anlaşırsak bütün akım örgüleri kâğıt üzerine çizilebilir. Bir kübün her kıyısı boyunca bir direnç bulunduğunu düşünelim. Her köşedeki üç direncin uçları lehimlenmiştir. Bu örgüyü bir çevrim çizimi halinde kâğıt üzerinde gösterin. Bütün dirençler R_0 değerinde olduklarına göre bir köşegenin karşılıklı uçları arasındaki eşdeğer direncin değerini bulun. Bunun için aynı zamanda doğrulanması gereken birçok denklemi çözmek zorunda değilsiniz; bunun yerine bir bakışım irdelemesinden yararlanınız. Şimdi kübün bir yüzünün karşılıklı köşeleri arasındaki eşdeğer direnci bulun. Burada da bakışım düşünüşü problemi çok yalınlaştırır. Bu hesapların ikisi için de bir kübün yapısını çizgelemek gerekli bakışımları belirtme bakımından, kağıt üzerinde çizilmiş yassı bir çizimden daha yararlı olur.

4.28 Önemli bazı akım ağları sonsuz uzanımlıdır. Şeklimizde bir sıralı ve koşut dirençlerin sağa doğru sürüp gittiği gösterilmiştir. Alttaki tel bütün bu dizge için dirençsiz dönüş telidir. Bunun adına kimi zayıflatıcı zincir ya da merdiven ağı denir. Şimdi problem böyle bir çevrimin "Giriş direncini" yani A ve B uçları arasındaki eşdeğer direncini bulmaktır. Bu problemde ilgilendiğimiz nokta, çözüm yolunun kendisidir ki, bu fizikte başka yerlerde de birbiriyle özdeş düzeneklerin yinelendiği dizgelerde hatta optikde, sonsuz bir mercekler zincirinin bulunduğu yerde kullanılabilir. Çözümün inceliği şudur: Henüz bilmediğimiz ve adına R diyeceğimiz bu giriş direncinin değeri, zincirin baş yanına, yeni bir direnç takımı eklemek ve onu bir göz daha uzatmakla bir şey değişmez. Şimdi bu yeni kesimin eklenmesiyle bu yeni giriş direnci R_2 ile R'nin koşut birleştirimine katılan bir R_1 dizik direncidir. Böylelikle R için çözülebilecek bir denklem bulun. Böyle bir zincirin giriş uçlarına V_0 gerilimi uygulanırsa, ardısıra gelen düğüm noktalarındaki gerilimin geometriksel bir dizi halinde azaldığını gösterebiliriz. Dirençlerin oranı ne olmalıdır ki bu merdiven her basamakta gerilimi yarıya düşüren bir zayıflatıcı olsun? Açıkça görüldüğü gibi gerçek bir sonsuz merdivenin kılgınlığı olmazdı. Zayıflatmada bir hataya düşmeksizin birkaç kesimde bitirmek için bir yol önerebilir misiniz?

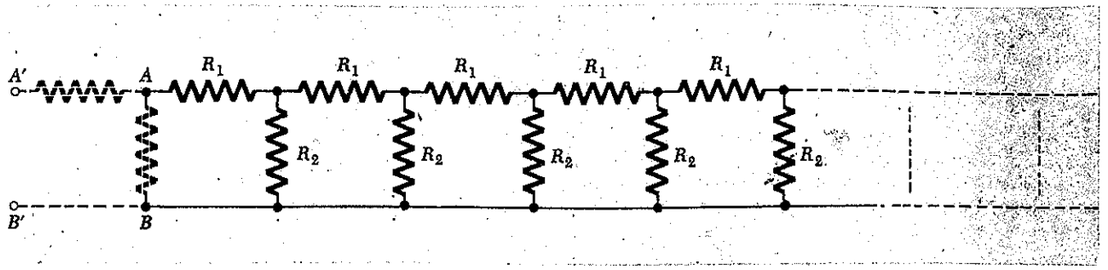
4.29 Şekil, değerleri R_1 ve R_2 olan koşut iki direnç gösteriyor. I_0 akımı bunların arasında bölüşülmüştür. Çevrimde ***güç yitiğinin en küçük*** olması koşulu ile $I_1 + I_2 = I_0$ koşulunu birleştirerek hesaplayacağımız akım yeğinliklerini bildiğimiz çevrim yazımı ile elde ettiğimiz akım yeğinliği ile aynı olduğunu gösterin. Bu bize doğru akım çevrimleri için geçerli bir genel değişirlilik ilkesi örneği verir: Bir ağ içindeki akımların dağılımı verilen bir I_0 akımı için, ***en küçük*** toplam güç yitiği sağlayacak şekilde olur.

4.30 Elektrik mühendisleri arasında bir zaman dolanan bir "bilmece problem" şi idi: Bir ohm'luk sonsuz sayıda direnç iki boyutlu bir kare örgülerinden oluşmuş bir ağ kuracak biçimde bağlanmıştır. Yani, her düğüm noktasına dört direnç gelmektedir. Bir düğüm ile en yakın beş komşu düğüm arasındaki eşdeğer direnç ne tutar? Bu problem bakışımın ve üstüste gelme ilkelerinin gücünü gösteren göz alıcı bir örnektir. Üstüste gelme ilkesini akıllıca kullanarak, bunu kafadan bile çözebilirsiniz. Herhangi başka bir yol kulanarak, ilk çözümün ne denli zarif olduğunu farkedeceksiniz. Bu arada hemen söyleyelim ki sorunun yanıtı 0,5 ohm'dur, ama hangi akım hallerinin üstüste geleceğini söyleyerek bilmecenin tadını kaçırmak istemiyoruz.

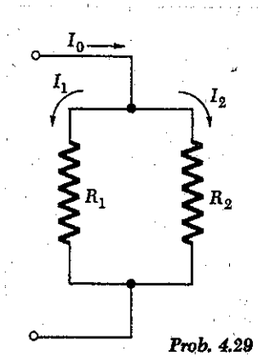
4.31 Bu problemde gerilimleri zamanla değişen iki çevrimin davranışlarını inceleyeceksiniz. Çevrimlerden her biri iki direnç ve bir sığalıkdan oluşmuştur; ama şekilde görüldüğü gibi bunlar farklı biçimde bağlanmışlardır. Bu andaki göreviniz biraz yabansı bir olguyu tanıtlamaktır. R_3 ve R_4 dirençleri ile C''nin sığasına uygun değerler verilmiş ise, sağdaki çevrim ile soldaki çevrim, dıştan yapılan bir ölçü ile hiç bir şekilde ayırdedilemez. Bu demektir ki, zamanla değişen herhangi bir $V(t)$ gerilimi uçlar arasına uygulanırsa, her iki çevrimdeki $I(t)$ akımı aynı olacaktır. Bunun tanıtlanması size, üstüste gelme ilkesine dayanan güçlü ve genel bir yöntem tanıtacaktır. Önce soldaki çevrimin uçları arasına kısa bir gerilim atması uygulanırsa ne olacağını düşünün:

$V = 0,\ t < 0;\quad V = V_0,\ 0 < t < \Delta t;\qquad V = 0,\qquad t > \Delta t$

Bu demektir ki $t = 0$ anına dek çevrimin dış uçlarını kısa çevrim halinde tutuyoruz, sonra kısa çevrimi birden ayırarak bataryayı kısa bir Δt süresince çevrime bağlıyoruz, sonra bataryayı ayırırken aynı anda yeniden kısa çevrim bağlıyoruz. Buradaki Δt süresini o denli kısa tutuyoruz ki, sığalığın uçları arasındaki gerilim V_0'ın yalnız küçük bir bölüntüsünü bulabilsin. Bu aralık içinde sığalıktaki akımın hesaplanmasında R_1 ile direncinin uçları arasında tüm gerilimin bulunduğu varsayılır. Δt sonunda sığalık bir tutam yüklü kalmıştır, ve R_1 ***koşut*** bağlı R_2 dirençleri üzerinden boşalacaktır. Bu boşalma akımının bir kesimi dış iletkende kendini gösterecektir. Böylece $V(t)$ atmasına karşı bütün akımın yanıtı



Prob. 4.28



Prob. 4.29

şeklin (c) kısmındakine benzer bir şey olmalıdır. I_{max}, I_{min} akımlarını ve uzun akım kuyruğunun zaman sabitini bulabilmelisiniz. Şimdi aynı yoldan şeklin (b) kısmındaki çevrimi çözümleyin. Atmaya yanıt olarak benzer bir $I(t)$ akımı gözleneceğini gösterin. R_3, R_4, ve C''nin değerlerini uygun şekilde ayarlayarak iki yanıtın ***özdeş*** kılınabileceğini gösterin. Aslında bu dediğimiz, uygun seçilmiş değerlerle, iki devrenin ***herhangi bir*** $V(t)$ gerilimine benzer yanıtlar vereceklerini tanıtlamaya yeter. Zira herhangi bir $V(t)$ bir çok atmaların üstüste gelmesinden oluşmuş gibi görülebilir; devre çizgisel olduğuna göre, yanıtları da benzerince ayrı ayrı atmaların yanıtlarının üstüste gelmesinden oluşacaktır. Gerçekten bir çevrimin karışık bir $V(t)$ sürücü gerilimine yanıtını, çoğu hallerde, bunun dar bir atmaya gösterdiği yanıtı çözümleyerek bulabilirsiniz. Siz bunu bu çevrimlerden biri üzerinde yoklayabilirsiniz. Uygulanan gerilimin dörtgen tepeli ve RC zaman sabitine göre ***kısa olmayan*** bir atım olduğunu düşünün. Bu problemin verdiği bir ders var: Eşdeğer çevrimde her zaman biricik değildir.

Bölüm 5

5.11 Eğer yükler yük taşıyıcısının hızına bağlı olarak $(1 - v^2/c^2)^{-1/2}$ çarpanı kadar değişseydi ne olurdu? Bir hidrojen molekülü ile bir helyum atomunun net yükleri arasındaki farkın değerini yalnız büyüklük basamağı olarak bulun. H_2 molekülünden He çekirdeğine gidinceye kadar protonların devinim enerjisini savsanabilir bir değerden 1 Mev'e dek arttığını, bu sırada iki elektronun devinim enerjisinin ise 10'nun birkaç katı voltluk değiştiğini düşünün. Bu koşullar altında H_2 bir rastlantı ile tümcek ılın durumda ise, ölçünlü (normal) sıcaklık ve basınç altında 1 litre helyumda ne tutarda bir yük fazlalığı bulmayı beklersiniz. Bununla oluşan elektrik alanının büyüklük basamağı ne olurdu?

5.12 Şek. 5.20'de laboratuvar çatkısı içinde artı yüklerin devinimsiz, yalnızca eksi yüklerin devinimli bulunduğunu düşünün. Bu hal için devinimli sınama yüküne etkiyen kuvveti türetin.

5.13 "Çarpışan-demet" hızlandırıcısı adı verilen bir hızlandırıcıda, her birinin enerjisi 2 Bev olan bir elektron ve bir pozitron demeti zıt yönlerde devinerek birbiri içinden geçmektedir. Bunların karşılaşmaları o denli yakındadır ki her biri ilk uçuş doğrultusundan 10^{-2} radyanlık bir açı kadar ancak ayrılırlar. Prob. 5.9'daki sonucu kullanarak bunların birbirlerine ne denli sokulduklarını bulun.

5.14 Şek. 6.3'deki düzenlenişte bakır tellerin her birindeki karşılanmamış yük yoğunlu ne olmalıdır ki mıknatısal etkileşim için hesapladığımız kuvvetin büyüklüğüne eşit bir durgun yük etkileşim kuvveti doğsun? Böyle bir yük taşıyan 1 mm çapında bir telin yüzeyi üzerindeki alan yeğinliğinin değeri nedir? Bu alanın statvolt/cm tutarını bu örnekteki telin yüzeyi üzerindeki mıknatısal alanın gauss değeri ile karşılaştırın. Bu sonuç bir raslantı mıdır, yoksa bunun her zaman böyle çıkması gerektiğini gösterebilir misiniz?

5.15 Her birinin hızı değişik, birçok ayrı yük taşıyıcısından oluşmuş karmaşık bir çizgisel yük ele alınız. Laboratuvar gözlem çatkısında görüldüğüne göre bunların k'ıncı bileşeni, q_k yüklü ve $v_k = \beta_k c$ hızıyla devinen cm başına n_k taneden oluşmuştur. O zaman bu çerçevede toplam I akım yeğinliği ve λ çizgisel yük yoğunluğu

$$I = c\sum_k n_k q_k \beta_k \qquad \lambda = \sum_k n_k q_k$$

ile verilmiştir. βc. hızıyla devinen bir çatkıya dönüşelim. Şek. 5.20 dolayısıyle gösterdiğimiz gibi, hızlar ve yük yoğunlukları aşağıdaki gibi dönüşürler:

$$\beta_k' = \frac{\beta_k + \beta}{1 + \beta\beta_k} \qquad n_k' = \frac{n_k \gamma_k'}{\gamma_k} \qquad q_k' = q_k \text{ -}$$

Yeni gözlem dizgesinde,

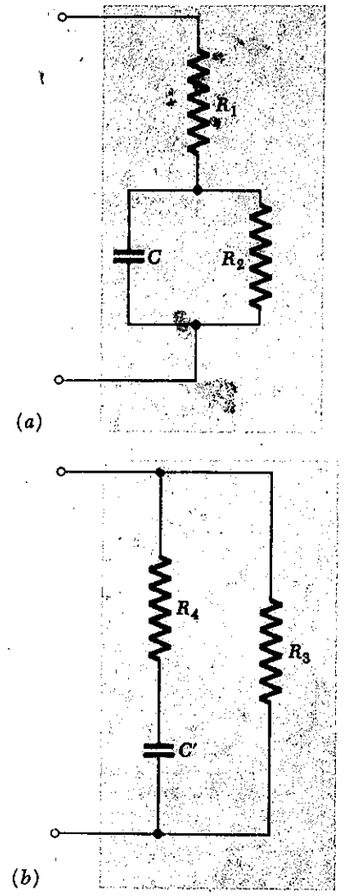
$$I' = \gamma(I + c\beta\lambda) \qquad \lambda' = \gamma\left(\lambda + \frac{\beta I}{c}\right)$$

olduğunu gösterin. Bu gösteriyor ki ilk sonucumuz taslama bağlı değildir. Bundan başka bu, bir çatkıda bir çizgi üzerindeki *tüm* yük ve *tüm* akım sıfır ise, akım bileşeni ve yükler ne olursa olsun *bütün* çatkılarda aynı kaldığını gösterir; bu hoşa gidecek denli yalın ama hiç kuşkusuz pek açık olmayan bir sonuçtur.

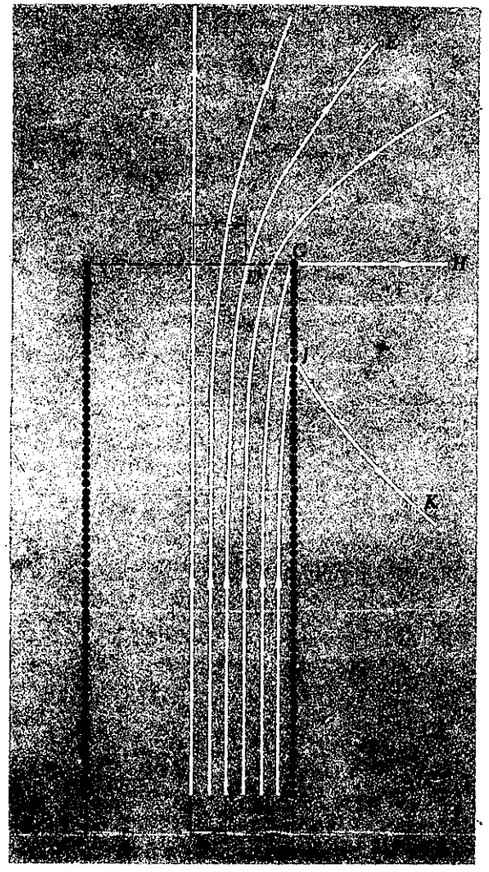
Bölüm 6

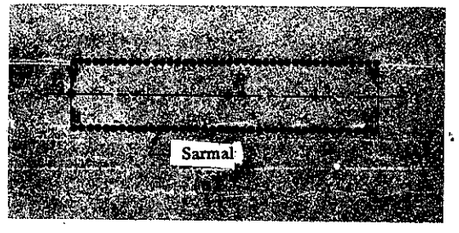
6.16 Rowland deneyinde döner pulun hemen üst yanında bekleyebileceğiniz mıknatısal alanı yaklaşıkça hesaplayın. Bunun için gerekli verileri Şek. 6.27'de bu fencinin kendi verdiği açıklamadan alın. Dönen pulun altında ve üstünden bulunan topraklanmış yapraklara göre gerilimini de bilmeniz gerekebilir ki bu, birçok deneylerde 10 kV yakınlarındadır. Bu bilgi doğal olarak söz konusu makalenin, soldaki düşey tüpün içindeki "duruk" mıknatısölçer için olduğu gibi daha sonraki kısımlarında anlatılmıştır.Bu mıknatıs ölçer zıt olarakyönelmiş iki mıknatıs iğnesinin birbirine sıkıca tutturularak bir tele asılması ile oluşmuştur ki, böylece yerin mıknatısal alanının yolaçacağı döngü önlenmiş olur. Dönen pulun uyardığı alan, çokçası yakındaki iğneyi etkileyerek, çok daha kuvvetli, sürekli bir alan içinde de kendini belli edebilir. Doğal olarak Rowland'ın almak zorunda bulunduğu önlemler yalnız bunlar değildir.

6.17 Sarmalların alanları üzerine birçok yalın olgular ustüste gelme ilkesini kullanarak bulunabilir. Buradaki düşünce, aynı çap ve aynı uzunluğundaki iki sarmalın ucuca eklenince $2L$ boyunda bir sarmal oluşturmasıdır. Yarı sonsuz uzunlukta iki sarmal ağız ağıza birleştirilirse sonsuz bir sarmal oluşur, vb. (Yarı sonsuz bir sarmalın bir ucu burada ve ötekisi sonsuzdadır). İşte sizin bu şekilde tanıtlayabileceğiniz bazı olgular:

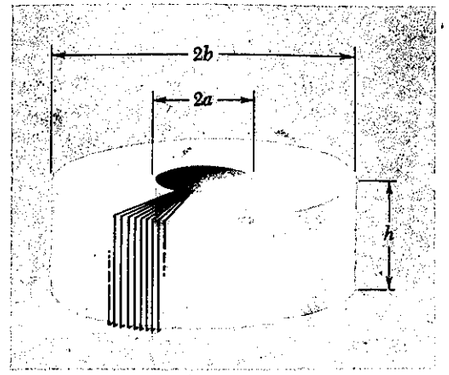


Prob. 4.31





Prob. 6.17



Prob. 6.19

(a) Şeklin (a) kesimindeki sonlu uzunlukta sarmallar halinde, eksen üzerinde bir uçta bulunan P_2 noktasındaki mıknatısal alan ortada P_1 noktasındaki alanın yaklaşıkça yarısına eşittir. (Bu yarıdan azıcık fazla mıdır yoksa azıcık eksik midir?)

(b) Şeklin (b) kesiminde. görülen yarı sonsuz sarmal halinde, sarımların tam bittiği yerden geçen FGH alan çizgisi G'den sonra sonsuza doğru bir doğru halinde gider.

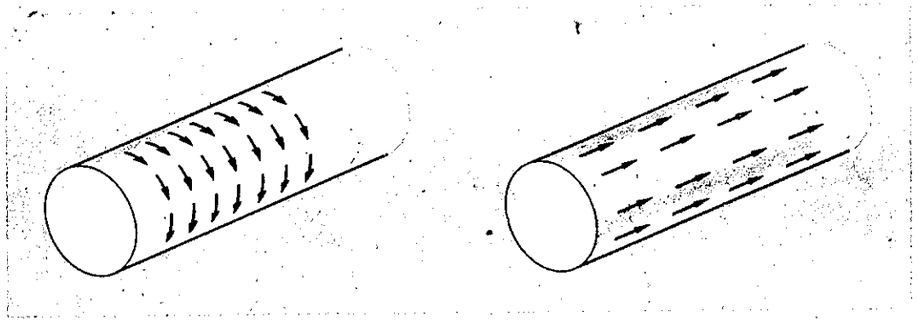
(c) Yarı sonsuz sarmalın B alanının uç yüzeyinden geçen akısı içte ve çok gerideki bir kangaldan geçen akının yarısı tutarındadır.

(d) Sarmalın içinde ve eksenden r_0 cm uzakta bulunan herhangi bir alan çizgisi, kangalın ağzından içte ve tam $\sqrt{2}r_0$ 'a eşit bir r_1 uzaklığından çıkar.

Bu deyimlerin doğru olduğunu gösterin. Bundan başka daha ne gibi bilgiler elde edebilirsiniz?

6.18 Çok düzgün sabit bir mıknatısal alan elde edebilmek için çok uzun bir sarmal kullanmak ve bunun içinde orta kesimde çalışmak gerekir. Bu çoğu zaman elverişsiz bir durumdur, yer ve güç iyitiğine yol açar. Yeter sayıda kangalı ya da kısa sarmalı düzenleyerek sınırlı bir bölgede iyi bir biteviyelik sağlayacak bir yol söyleyebilir misiniz? (Bunun üzerinde çalıştıktan sonra, elektrik ve mıknatısal üzerinde bir kitapta bulunabilecek "Helmuoltz kangallarına" bakın ve sizin bulduklarınızdan herhangi birinin o düzeneğe uyup uymadığını yoklayın.)

6.19 Dörtgen kesitli bir demirsimit üzerine düzgün bir kangal sarılmıştır. Kangalda tümü N tane sarım var. Şekilde ancak bunlardan birkaç tanesi gösteriliyor. Bu sarımlarla, simidin düz yüzeyi üzerindeki akımın tam ışınsal doğrultuda aktığını, halka yüzeyler üzerinde ise iç ve dıştaki si-



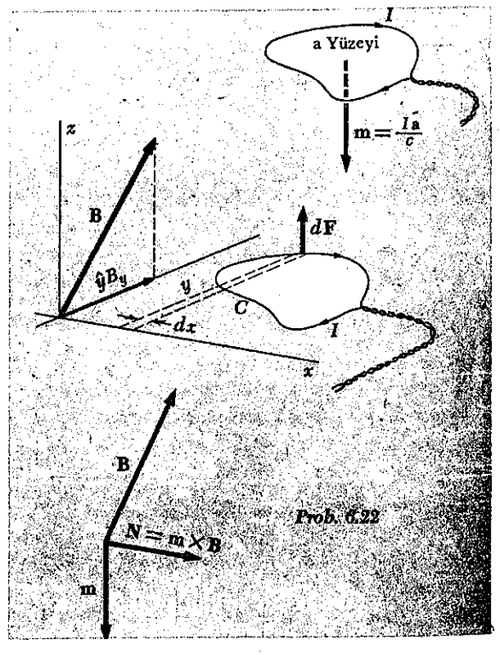
Prob. 6.21

lindir yüzeyleri üzerinde boylamasına olduğunu düşünebiliriz. Önce bu varsayımagöre bakışımın her yerdeki mıknatısal alanın "dairesel" doğrultuda olmasını gerektirdiğini, yani, bütün alan çizgilerinin simidin ekseni çevresinde daireler şeklinde olduğuna kendinizi inandırınız. Sona, simidin dışında bulunan bütün noktalarda ve bu arada merkezdeki oyuk içinde alanın sıfır olduğunu gösterin. Üçüncüsü simidin içindeki alan büyüklüğünün yarıçapın işlevi olarak değerini bulun.

6.20 Nazik bir mıknatısal deney için, bir fizikçi oylumu kabaca 30 X 30 X 30 cm olan bir bölge içinde yerin mıknatısal alanını tümcek sıfıra düşürmek istiyor; o denli ki bu bölge içindeki bir noktada alan 10 miligauss'dan daha büyük olmasın. Yerin bu yerdeki mıknatısal alanının yeğinliği 0,55 gauss'tır ve düşeyle 30° lik açı yapmaktadır. Söz konusu oylum boyunca alanın miligauss hata içinde sabit kaldığı düşünülebilir. (Yerin alanı 40-50 cm aralık içinde bu ölçüde bile değişemez ama bir laboratuvar içinde bölgesel bir takım değişiklikler olabilir.) Bu işi yapmaya elverişli bir kangal düzenlenişi öneriniz ve karşılama dizgenizin gerekli ampere sarım sayısını bulun.

6.21 Sarmal biçimli bir kangal gerçekte bir helistir. Çevre boyunca dairesel akımın boyuna bir bileşeni vardır, zira sarımlar bir uçtan ötekine ilerlemek zorundadır. Bu akımın şekilde görüldüğü gibi tam dairesel bir akım katmanı ile tam boyuna bir akım "borusu"nun üstüste gelmesinden oluştuğunu düşünelim. Bu düzenlenişin silindir içindeki ve dışındaki mıknatısal alanlarını anlatın. (Silindiri sonsuz uzun varsayın.) Silindirin içindeki ve dışındaki alan yeğinlikleri oranını, bu akım dağılımını gösterimlediğini düşündüğümüz helisin adımına bağlayabilir misiniz?

6.22 Bu problemin baş amacı, sabit bir mıknatısal alan içinde bulunan bir akım ilmeğine etkiyen kuvvet döngüsünü bulmaktır. Sabit **B** alanı uzayda bir doğrultuya yönelmiştir. Konumluklarımızı öyle yöneltceğiz ki **B** yöngüsü x eksenine dik olsun ve akım ilmeğimiz şekilde görüldüğü gibi xy düzlemi içinde bulunsun. İlmeğin biçimi ve büyüklüğü bize kalmıştır; akımın birbirine sarılı iletkenlerle verildiğini düşünebiliriz ve bu iletkenlere etkiyen net kuvvet sıfır olacaktır. Akım ilmeğinin küçük bir öğesini ele alın ve bunun x ekseni çevresindeki toplam döngüsüne katkısını bulun. Bu akım öğesine etkiyen kuvvetin yalnızca z bileşeni ve dolayısiyle **B** alanının yalnızca y bileşeni işe karışacaktır ki biz bu bileşeni çizimde $\hat{y}B_y$ ile gösterdik. Şimdi toplam döngüyü verecek olan bir tümlev elde edin. Bu tümlevin bir sabit katsayı yaklaşıklığıyla ilmeğin *yüzölçümünü* verdiğini gösterin. Akım ilmeğinin *mıknatısal döngüsü*, büyüklüğü Ia/c olan bir **m** yöngüsü ile tanımlanır, burada I esb/saniye olarak akım, a cm² olarak ilmeğin yüzölçümüdür ve yöngünün doğrultusu şekilde görüldüğü gibi, ilmeğin yüzeyine dik ve akıma sağ vida kuralı bağıntısı ile bağlıdır. (Akım ilmeğine ve bunun mıknatısal döngüsüne Bölüm 10'da yine rastlayacağız.) Elde ettiğimiz sonucun, yani herhangi bir akım ilmeğine etkiyen **N** döngüsüne



Prob. 6.22

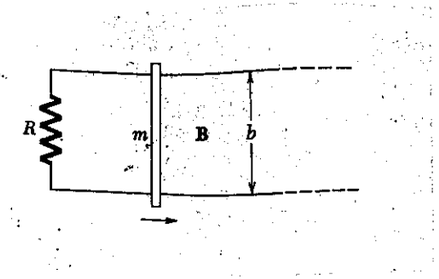
$$\mathbf{N} = \mathbf{m} \times \mathbf{B}$$

yöngül bağıntı ile elde edildiğini gösterin. İlmeğe etkiyen net *kuvvet* üzerinde ne söyleyebiliriz?

6.23 Bazı amaçlar için eksi hidrojen iyonlarını bir siklotron içinde hızlandırmak gerekir. Eksi bir hidrojen iyonu (yani H^-), bir elektron bağlanmış bir hidrojen atomudur. Bu bağlantı oldukça zayıftır; 1,5 X 10^4 statvolt/cm gibi atomsal ölçüler için zayıf bir elektrik alanı bu elektronu kurtarabilir ve geriye hidrojen atomu kalır. H^- iyonunu Bev kinetik enerjisine dek hızlandırmak istiyorsak, taneciğin bu son enerji değerinde dairesel bir yörünge üzerinde tutabilmek için uygulamamız gereken mıknatısal alanın en büyük değeri ne olmalıdır? (Bu problemde γ 'nın değerini bulabilmek için, H^- iyonunun durgun kütlesinin bilinmesi gerekir ki, bu da protonun kütlesine yani yaklaşıkça 1 Bev'ye eşittir.)

6.24 Bir buluşta bulunmak isteyen biri, "irgitimle" uyarılan $(v/c) \times \mathbf{B}$ elektrik alanını ölçerek uçaklar için hız ölçeri yapmak istiyor. Bu önerinin ne gibi üstünlükleri olduğunu tartışın. Tartışmaya yardımcı olsun diye, yerin atmosferi içinde genel olarak biraz değişen, tam büyüklüğünün ve doğrultusunun ne olduğu pek belli olmayan 10^{-2} statvolt/cm basamağında bir duruk yük alanı bulunduğunu gözönünde tutun. Bir zamanlar haber güvercinlerinin uçuşlarını nasıl yönelttikleri üzerine, buna benzer bir kuram ileri sürülmüştü: buna göre güvercin kendi hızını bildiğine göre "irgitimle" uyarılan $(v/c) \times \mathbf{B}$ alanını duyuları ile her nasılsa almakta ve böylece **B**'yi anlayarak yer yüzündeki konumunu bulmaktadır. Bunun bir anlamı var mı? Devinimli bir taşıtın içindeki **B** alanının kendisinin ölçülmesi hakkında ne denebilir? Yukarda söylediğimiz büyüklük basamağından ve geniş ölçekteki atmosfer elektrik alanlarının bilinmeyen değerlerinin **B** üzerinde yolaçtığı belirsizlik ne tutar?

6.25 Aralıkları b olan koşut iki iletkenin oluşturduğu ray üzerine çapraz olarak konulan m kütlesinde bir çubuk sürtünmesiz devinebilmektedir. Rayların bir ucuna R gibi bir direnç bağlanmıştır; çapraz konan çubuğun ve rayların direnci R'nin yanında savsanacak ölçüde küçüktür. Şekil düzlemine dik **B** gibi biteviye bir mıknatısal alan bulunuyor. $t = 0$ anında çapraz konulmuş çubuğa v_0 gibi sağa yönelmiş bir hız verilmiştir. Bu durumda ne olur? (a) Çubuk sonunda durabilir mi? (b) Çubuk nereye dek gidebilir? (c)



Prob. 6.25

Enerjinin korunumu üstüne ne söylenebilir?

6.26 Denk. 58'in türetilmesinde yaptığımız gibi F ve F' konumluk çatkılarının devinimlerinin hep x ekseni doğrultusunda olması gerekli bulunduğunu sanmayalım. Hızın y doğrultusunda olduğunu varsayarak dönüşüm denklemleri ne biçime girer (eksi imini unutucağız)? İsterseniz $E_\parallel$ ve $E_\perp$, vb genel yazımlarını, alt göstergeleri v'ye koşut ya da ona dik anlamını taşıyacak biçimde çıkarabilirsiniz.

6.27 Elinizde y doğrultusunda E_y gibi biteviye bir elektrik alanı ve z doğrultusunda B_z gibi biteviye bir mıknatısal alan bulunduğunu düşünün; burada $E_y < B_z$ olsun. Elektrik alanının sıfır olduğu bir Lorentz konumluk çatkısı bulun. Bu çatkıdaki B'nin değerini hesaplayın. $E_y > B_z$ olsun. Bu halde elektrik alanının sıfır olduğu bir çatkı bulabilir misiniz? Mıknatıslık alanın sıfır olduğu bir çatkı bulabilir misiniz?

6.28 Bir öğrenci şöyle konuşuyor: "Akımlar arasında mıknatıslık olduğunu sandığım kuvvetlerin, devinen yüklerin elektriksel alanıyla açıklanabildiğine beni hemen hemen inandırdınız. Ama eğer bu doğru ise, Şek. 5.1c'de metal yaprak bir telin akımının ötekini etkilemesine neden engel (bir perde) olamıyor?" Bunu açıklayabilir misiniz?

6.29 Bir mıknatısal alanın bir yaprağa koşut bileşeninin yaprağın her iki yanında aynı *büyüklükte* olduğu ama geçiş sırasında *doğrultusunu* 90°değiştirdiği bir durum karşısında bulunduğumuzu düşünelim. Burada ne oluyor? Yaprağa etkiyen kuvvet nedir? Bir akım yaprağına etkiyen kuvvet yazımımız böyle bir duruma uygulanabilir mi?

6.30 Prob. 6.7'de anlatılan sarmalın çok büyük bir akım verecek bir yüksek gerilim kaynağına, kısa bir süre bağlanmakla çok kısa bir süre için çok kuvvetli bir alan uyarmak için kullanıldığını düşünün. Bütün öteki sınırlamalar bir yana, telin gerginlik ile zorlanma sınırını gözönüne alın. Mıknatısal basınç, bir lastik boru içindeki basınç gibi, sarmalı parçalayıp açmaya çalışır. Telin çekme dayanıklılığı 2 X 10^9 din/

cm^2 ise, sarmal içinde uyarılabilecek alan yeğinliği en çok ne tutar?

Yanıt: 42 kilogauss.

6.31 Sodyum metalinde Hall etkisi üzerine bir ölçüde 10^4 gauss'luk bir mıknatısal alan içinde sodyum iletkenden geçen akım yoğunluğunun 1000 amp/cm^2 olduğu sırada, enine alanın 25 mikrovolt/cm olduğu ölçülmüştür. Bu gözlemin gerektirdiği İletim elektronlarının cm^3 'deki sayısının ne olduğunu, hesaplayın, ve bunu bir cm^3 sodyumdaki atom sayısı ile karşılaştırın. (Sodyumun yoğunluğu: 0,97 gram/cm^3 .)

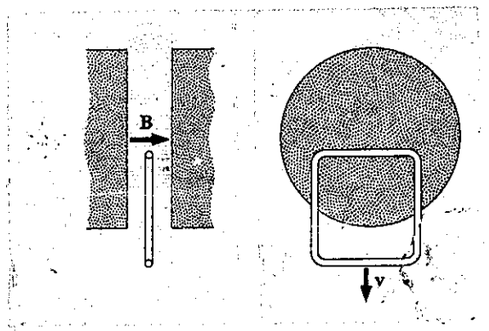
Bölüm 7

7.16 Faraday, bir çevrimin bir kısmı, yerin mıknatısal alanı içinde devinen su olduğu zaman irgitimle oluşan akımı yüze çıkarmak için giriştiği başarısız bir çalışmayı şu sözlerle anlatır:

"Bu nedenle deneyi Waterloo köprüsünde yaptım ve 320 metre uzunluğunda bakır teli köprünün korkuluğu boyunca gererek uçlarına su ile iyi bir değme sağlasın diye bağladığım büyük metal yaprakları ırmağın içine daldırdım. Böylece tel ve su iletken bir çevrim oluşturdu: Sular gel-git ile yükselip alçaldığı zaman, pirinç küre halinde olduğu gibi, akımlar elde etmeği umdum. Galvonoölçerde hep sapmalar elde ettim, ama bunlar çok düzensizdi, ve benim aradığımdan başka nedenlere yorulabilecek değerler gösteriyordu. Irmağın iki yanındaki suyun saflığının değişik olması gibi koşullar; sıcaklık değişimleri; kullanılan metal yapraklarda ve bunların tellere kaynadığı noktalardaki hafif değişiklikler dolayısiyle az ya da çok kusurlu bir değme sağlanması gibi etkenlerin hepsi olayda kendini belli ediyordu; Bununla birlikte köprünün yalnız orta kemeri altından geçen su ile deney yapmış olmama, bakır yerine platin yapraklar kullanmış ve bütün önlemleri almış bulunmama karşın üç günlük çabadan sonra memnunluk verici sonuç elde edememiştim. *(Elektrikte denel araştırmalar Cilt I sayfa 55, London 1939)*

Alanın düşey bileşenini 0,5 gauss sayınız ve Thames nehrinde suların yükselme hızı üzerine akla yatkın bir değerlendirimle Faraday'ın yüze çıkarmağa çalıştığı irgitim geriliminin büyüklüğünü hesaplayın.

7.17 Kare biçimli bir metal çerçeve şekilde görüldüğü gibi bir elektromıknatısın kutupları arasına yerleştirilmiştir. Çerçevenin üst yanı B yeğinliğinde yatay ve oldukça düzgün bir mıknatısal alanın içinde bulunuyor. Çerçevenin alt kıyısı elektromıknatısın aralığı dışında kalmakta ve burada alan sıfır değilse bile problemimiz için savsanacak ölçüde küçük bulunmaktadır. Şimdi çerçeve kendi ağırlığının etkisi altında düşmeğe bırakılırsa, aşağı doğru öyle bir hız kazanır



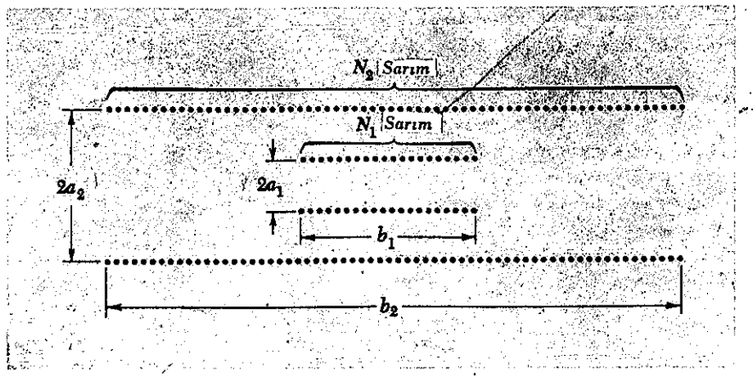
Prob. 7.17

ki, bu verilen bir çerçeve maddesi için, yalnız B'ye bağlıdır ve çerçevenin büyüklüğüne kesitine ve yapıldığı telin ya da çubuğun kalınlığına bağlı değildir. Bunu gösterin. Eğer B, 15 kilogauss ise ve çerçeve alüminyumdan (yoğunluk 2,7 g/cm^3; özdirenç 2,8 X 10^{-6} ohm-cm) yapılmış ise bu düşme hızı ne kadardır? Çerçeve son hızını buluncaya dek ne tutarda düşmesi gerekir?

7.18 Şek. 7.6'daki kangalın **B** alanı içinde devinen ilmek çok küçük dirençli bir telden yapılmış olsun. Oluşan $\mathcal{E}$ elektromotor kuvveti bu ilmekten çok büyük bir akım geçmesine yol açar mı? İlmekte oluşan akımın yeğinliği I_z ve bunun uyardığı mıknatısal alan da $\mathbf{B}_2$ ile gösterilsin. Bu $\mathbf{B}_2$ alanı ile **B** alanı arasındaki bağıntı üzerine ne söyleyebilirsiniz? Eğer ilmek direnci büsbütün sıfır olan süperiletken telden yapılmış olsa idi ne olacağını kestirebilir misiniz?

7.19 Şek. 7.20'deki, aynı merkezli büyük ve küçük iki halka için $\Phi_{12} = \Phi_{21}$ teoreminin sonuçlarını tartışın. Dış I_1 sabit akımının iç halkadan geçirdiği Φ_{21} akısı, eğer R_1 artırılırsa azalır; zira merkezdeki alan küçülür. Ama iç halkada sabit bir akım bulunduğuna göre, dış halkadan geçen Φ_{12} akısı R_2 sabit tutulduğu halde R_1 artırılınca neden *azalır?* Çünkü teoremin doğru olması bunu gerektirir.

7.20 Bir akım halkası düzlemi içinde halkanın yarıçapına bakınca çok uzakta bulunan bir noktada uyarılan mıknatısal alan yeğinliğini bulmak için $\Phi_{21} = \Phi_{12}$ teoremini kullanmanın bir yolunu düzenleyebilir misiniz? (*İpucu:* Şek. 7.20'deki dış halkanın yarıçapında ΔR_1 gibi küçük bir değişikliğin etkisinigöz önüne alın;bunun Φ_{12}'ye olduğu kadar Φ_{21}'e de özdeş etki yapması gerekir.)



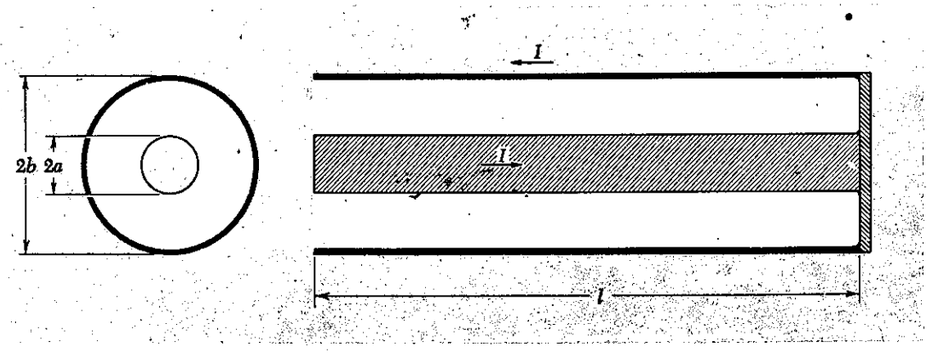
Prob. 7.21

7.21 Şekil, yarıçapı a_1 ve uzunluğu b_1 olan bir sarmalı yarıçapı a_2 uzunluğu b_2 olan daha büyük bir sarmal içinde gösteriyor. İç kangaldaki sarımların toplam sayısı N_1 ve dıştakinde ise N_2'dir. Dizgenin karşılıklı M irgitlik katsayısı için bir yazım bulun.

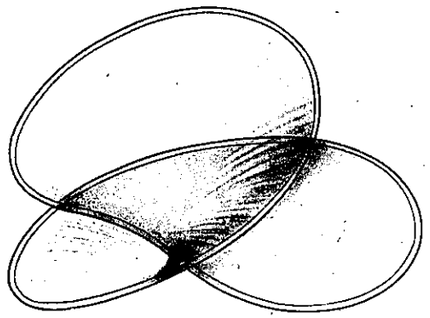
7.22 Ayni eksenli bir enerji taşıma yolunun şekilde görünen iç iletkeni yarıçapı a olan bir katı metal çubuktur. Dış iletken ise yarıçapı b olan ince bir metal borudur. Bir uçta her iki iletkene bir metal pul kaynatılmıştır. Bu iletken dizgenin l boyunda bir kısmının L özirgitim katsayısını kestirmek istiyoruz. İç iletkenden akan bir akımın çubuğun bütün kesitince biteviye dağılmış olduğunu varsayın. Verilen I akımı için B mıknatısal alan yeğinliğinin çubuğun içindeki ve iki iletken arasındaki halka biçimli uzaydaki değeri yarıçapın işlevi olarak ne tutar?

Mıknatısal alanda biriken toplam enerjiyi hesaplayın ve biriken enerji $= \frac{1}{2}LI^2$ genel yazımını kullanarak L'yi bulun. Böyle bir hesaplamanın, iletkenin içindeki değişik akım borularının değişik akılar içereceği olgusunun yolaçacağı güçlükleri gidereceğini gözden kaçırmayın. Bununla birlikte sonuçlar yalnız yavaş değişen akımlar için doğrudur. Neden?

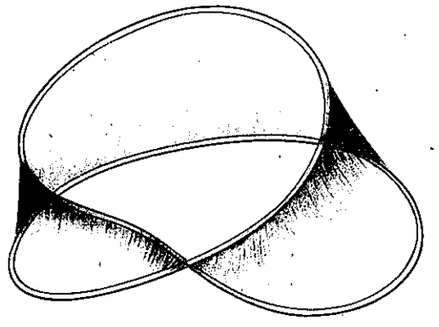
7.23 Şekilde görülen tel ilmeğinden **B** alanının geçirdiği akıyı hesaplamak isteyelim. İlmeğin sınırlayabileceği iki yüzey şeklin (a) ve (b) kısımlarında gösterilmiştir. Bunlar arasındaki ana ayrım nedir? Akıyı bulmak için $\int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a}$ tümlevini hesaplamakta kullanmamız gereken yüzey hangisidir?



Prob. 7.22



(*a*)



(*b*)

Prob. 7.23

Üç sarımlı bir kangal için buna uyan yüzeyi anlatın. Bu bulgularımızın N sarımla sıkı bir kangalda uyarılan elektromotor kuvvetin, özdeş büyüklük ve özdeş biçimde bir tek ilmekdekinin N katı olacağı olgusu ile bağdaştığını gösterin.

7.24 Böl. 7'nin başlangıcında Faraday'den aldığımız yazının ikinci paragrafında "Arago'nun olaganüstü deneyi" ne değiniliyor. Bu yazının daha sonra gelen bir kesiminde Arago'nun Mıknatıslık Olayının Açıklanması başlığı altında şu anlatılmaktadır:

" Eğer bir bakır yaprak bir mıknatıs iğnesi yakınında döndürülürse ya da bir mıknatıs çubuğu bir bakır yaprağın düzlemine koşut bir düzlem içinde dönebilecek şekilde asılırsa, mıknatıs iğnesi yaprağın devinimini izleme eğilimi gösterir ya da mıknatıs çubuğu döndürülünce yaprak bunun devinimini izlemeye çalışır; etki o kadar güçlüdür ki kilolarca ağırlıkta bir yaprak ya da mıknatıs bu yolla sürüklenip döndürülebilir. Eğer yaprak ile mıknatıs birbirine bakınca devinimsiz halde iseler aralarında itme ya da çekme gibi en küçük bir etki gözlenmez. Bu M. Arago'un bulduğu olaydır".

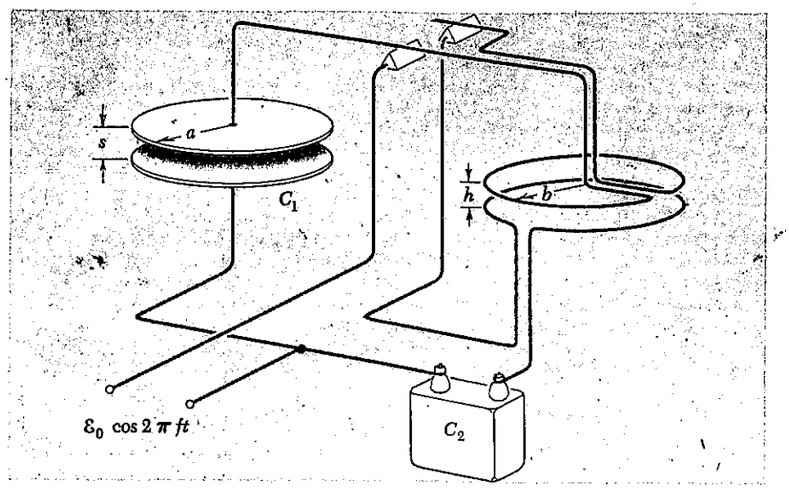
Arago Olayının kendinize göre "açıklamasını" verin.

7.25 Maxwell denklemlerinde kendini gösteren c sabiti yalnız alçak frekanslı alanların işe karıştığı elektrik deneyleri ile bulunabilir. Şekilde görülen düzenlenişi ele alın. Burada sığaç yaprakları arasındaki kuvvet, aynı yönde akım geçiren koşut teller arasındaki kuvvetle denkleştirilmiştir. f hertz frekansı ile sinüsel biçimde değişen bir gerilim, koşut yapraklı C_1 sığacına ve bir de C_2 sığacına uygulanmıştır. C_2 'ye gelen ve bu sığaçtan gidenyük, halkalardaki akımdır. C2 'nin ve işe karışan çeşitli uzaklıkların öyle düzenlenmiş olduğunu düşünüyoruz ki, C_1 'in üst yaprağına aşağı doğru etkiyen kuvvet, üst halkayı aşağı çeken kuvveti tam olarak denkleştirsin. (Kuşkusuz her iki yanın *ağırlıkları* gerilim sönük iken denkleştirilmiştir.) Bu koşullar altında ölçülen niceliklerden c sabitinin şöyle hesaplanabileceğini gösterin:

$$c = (2\pi)^{3/2}\, a\left(\frac{b}{h}\right)^{1/2}\left(\frac{C_2}{C_1}\right) f \quad \text{cm/s}$$

Yalnızca *aralık ve zaman* (ya da frekans) ölçüleri ile C_1 ve C_2 sığalıklarının sıgaları oranından başka ölçü gerekli olmadığını gözden kaçırmayın. Elde edilen sonuç içinde elektriksel birimler yoktur. (Eğer C_2 sıgalığı C_1 'in 10^6 katı kadar alanırsa ve zayıf akımların etkisini artırma bakımından birçok akım sarımları kullanılacak olursa, deney 60 hertz gibi alçak bir frekans ile de yapılabilir.)

7.26 Elektromıknatısal irgitimle uzaktan imlenimin olasılığını tartışın. Yalnızca Faraday'ın irgitim yasasına dayanan bir telsiz telgraf geliştirmek olanağı var mı?

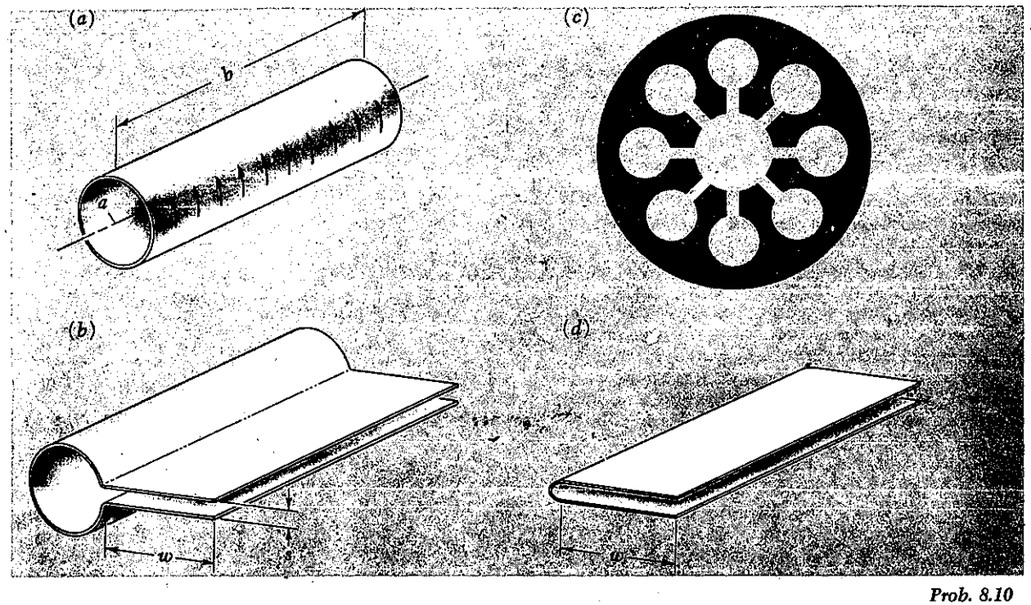


Prob. 7.25

Bölüm 8

8.8 Şek. 8.2'deki RLC sönümlü devresinde herhangi bir t anında biriken toplam enerji, yani sığalıktaki enerji ile irgitgideki enerji toplamı için bir yazım türetin. "Kritik sönüm" koşulları içinde, yani $R = 2\sqrt{L/C}$ için toplam enerjinin en çabuk yitirildiğini gösterin.

8.9 Denk. 10 ve 13'ü kullanarak seri bir RLC çevriminin frekansına sönümün etkisini deyimleyiniz. Sönümsüz çevrimin frekansını $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ alın. Q'yü ∞'dan 1000'e indirmek için yeterince direnç eklendiğini varsayın. O zaman ω frekansı ω_0'dan yüzde kaç tutarında kaymıştır.



Prob. 8.10

8,10 Prob. 7.7'nin sonuçlarını kullanarak şeklin (a) kesiminde gösterilen açık uçlu iletken silindir için bir özirgitim yazımı geliştirin. Ele alınan akım yolu çevreseldir. Prob. 7.7'de olduğu gibi içerdeki alanın uçlara dek biteviye olduğu yaklaşıklığını varsayıyoruz. Şimdi çevrimi açın ve (b)kesiminde olduğu gibi bir sığalık ekleyin. Bu düzeneğin çınlanım frekansını hesaplayın. Bunun b uzunluğuna bağlı olmadığını unutmayın. İkinci Dünya Savaşı içinde minidalga radarlarının yapılması olanağını açan ilk koğuk mağnetronları içinde bu gibi 8 çınlanım çevrimi vardı. Şeklin (c)'kesiminde bu tüplerden birinin bakır anodunun kesiti doğal büyüklüğünde gösterilmiştir. Bunun yayınladığı ışınımın frekansını hesaplayın. (Bir koğuk yerine sekiz koğuğun bulunması frekansı pek fazla etkilemez.) Şekildeki w ve s boyutlarını sabit tutarak silindirin çapını küçültmekle çınlanım frekansını olabildiğine yükseltmek istediğimizi ve böylece şeklin (d) kesiminde gösterildiği gibi $a = \frac{1}{2}s$ boyutuna indiğimizi düşünelim. Elde ettiğiniz yazımın bu haldede işlemesini bekler misiniz? Gerçek frekansın yazımınızın öngördüğünden daha yüksek mi yoksa daha alçak mı olmasını beklersiniz?

Bölüm 9

9.16 "Yüksek Q"lü bir çınlanım çevrimi bir bakır sarmal ile metal yapraktan yapılmış bir sığalıktan oluşmuştur ve dizge havası tümcek boşaltılabilen çan biçimli bir kab içine yerleştirilmiştir. Çanın içinde normal basınçta hava bulunduğu zaman çınlanım frekansı 41,405 $\pm$ 0,002 Mhertz olarak ölçülmüştür. Çan boşaltılarak frekansın yeniden ölçülmesi 41,418 $\pm$ 0,002 Mhertz değerini veriyor. Bu verilerden yola çıkarak havanın dielektrik sabiti için ne söyleyebilirsiniz? Bu değişikliğe başka herhangi bir etkinin katkıda bulunabileceğini düşünebilir misiniz?

9.17 Sulu çözeltiler kimyasında hidratasyon olayı önemlidir. Bu bir çözelti içinde bulunan bir yükün (iyon)un her yanında su molekülleri ile çevrilmesi ve bu moleküllerin yüküne oldukça sıkı şekilde bağlanması olayıdır. (Örnek olarak bak. G.C. Pimentel *Kimya, Denel bir Bilim* Milli Eğitim Bakanlığı Yayınları); ya da (L. Pauling, *Genel Kimya* sayfa 205.) Bir ikizkutup ile bir nokta yük arasındaki çekim kuvveti bu olayın sorumlusudur. Bir tek e yükü taşıyan bir yükünü bir su molekülünden ayırmak için gerekli enerjiyi, yükünün H_2O ikizkutuplarından etkin uzaklığını 1,5 angström olduğuna göre hesaplayın. (Bu uzaklık iyi tanımlanmış bir nicelik değildir, çünkü su molekülü, yakından bakılınca, sonsuz küçük bir ikizkutup değil bir yük dağılımı halindedir.) Su molekülünün hangi kesimi eksi yükünün daha yakınında bulunur?

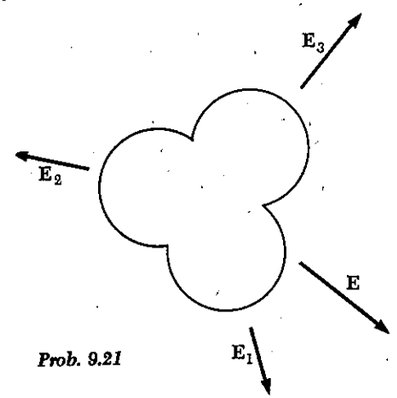
*Yükün: iyon

9.18 Şek. 9.29'daki alan çizgilerinin incelenmesinden maddenin dielektrik sabiti çıkarılabilir. Çizgiler oldukça sağlıklı çizilmişlerdir. Alan yapısının kolay ölçülebilir bir belirtgenini tanımak ve bunu ölçerek kuram ile karşılaştırabilirmisiniz görünüz; böylece çizimin hazırlanmasında kullanılan değerini yaklaşıkca hesaplayabilir misiniz.

9.19 Büyük bir sığacın yağı içinde enbüyük elektrik alan yeğinliği sığaç tam yükle çalıştığı zaman 90 kV/cm'dir. Yağın dielektrik sabiti 2,24'dür. Yağ içinde bir hava kabarcığı bulunduğunu düşünelim. Kabarcığın içindeki elektrik alanı ne tutardadır? (Bu dielektrik küre probleminin ters çevrilmişidir. Dielektrik küre için bulduğumuz sonuçları bu hale uygulayabilmemiz gerekir.) Bir sığaç yağı içinde bir gaz kabarcığı hiç istenmeyen bir şey midir?

9.20 Eksi kutuplanırlığın anlamı ne olabilir? Böyle bir şeyin bulunabileceğini düşünüyor musunuz?

9.21 Özdeş atomlardan kurulmuş eşkenar üçgen yapısında üç atomlu bir molekül düşünün. (Aslında böyle bir molekül yoktur ama aldırmayın.) Bu molekülde üçgen düzlemi içinde bulunan bir elektrik alanının oluşturduğu kutuplanma ile ilgiliyiz. Molekülün bakışımından görüldüğü gibi, gösterilen doğrultularda uygulanan $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \mathbf{E}_3$ alanları için kutuplanırlığın özdeş olması gerekir. Bundan yola çıkarak bileşenleri ve üstüste gelme ilkesini kullanarak, düzlem içinde herhangi bir doğrultuda uygulanan $\mathbf{E}$ alanı için kutuplanımın özdeş olduğunu gösterebilir misiniz? Böylece üçlü bakışım gösteren bir molekülün bu düzlem içindeki kutuplanırlığı bakımından tam olarak dairesel bakışım gösteren bir molekülden ayırdedilmeyeceğini tanıtlıyorsunuz. Üç boyut için benzer bir teorem Şek. 9.13'deki eşkenar dört yüzlü biçimindeki metan molekülünün, küresel bakışımlı bir kutuplanırlık gösterdiğini ortaya koyar.



Prob. 9.21

9.22 Bu problem, bir yardımdan yararlanarak kutuplanırlık gergil (tensor)'sinin bakışımlı oluşunu sınamaya yarayacaktır. Yalın olsun diye yalnız iki boyut içinde çalışacağız; ama bu, tartışmanın iç yapısını gösterecek kadar etkili olacak ve üçüncü bir boyut ekleme hiç bir yenilik getirmeyecektir. Elimizde hiç bir bakışım göstermeyen kutuplanabilir bir cisim bulunsun ve cismi xy konumlukları içine yerleştirmiş olalım. Bir $\mathbf{E}$ alanı irgitimle bir $\mathbf{p}$ ikizkutup döngüsü oluşturur ve bunlar arasında

$$p_x = \alpha_{xx}E_x + \alpha_{xy}E_y$$
$$p_y = \alpha_{yx}E_x + \alpha_{yy}E_y \qquad (1)$$

çizgisel bağıntıları vardır. Görevimiz α_{xy} ile α_{yx}'in eşit olduklarını tanıtlamaktır.

Tanıtlama enerjinin korunumuna dayanacaktır. Eğer uygulanan $\mathbf{E}$ alanı içinde bu dizge çiftkutup döngüsünü $\mathbf{p}$'den $\mathbf{p} + d\mathbf{p}$'ye dek değiştirirse, alanın gördüğü iş $dW = \mathbf{E} \cdot d\mathbf{p}$ dir. Kes. 9.14'de açıkladığımız gibi bunun nedeni dp'nin değişim sırasında, tam bir yük kayması olduğu, oysa $d\mathbf{p}$'nin $\mathbf{E}$ boyunca bileşeni, alan doğrultusunda yük yer değiştirmesi kadar olduğudur. Şimdi dizgenin bir $\mathbf{E}_1$ alanı içinde bulunduğunu ve bununla ilgili ve Denk. 1 ile verilen ikizkutup döngüsünün $\mathbf{p}_1$ olduğunu varsayalım. Bu koşul I olsun. Alan kaynağında oynayarak uygulanan alanı $\mathbf{E}_2$ değerini alacak biçimde değiştirelim. İkizkutup döngüsü $\mathbf{p}_2$ olacak ve dizgeyi II koşuluna getirecek şekilde W_{12} kadar bir iş görülecektir. Şimdi problemin önemli noktası şudur; bu değişim farklı yollardan sağlanabilir. Bununla birlikte, eğer enerji korunumlu ise bütün bu yollar boyunca yapılan iş özdeş olmalıdır; zira bunlar dizgeyi aynı son koşul içinde yani $\mathbf{p}_2$ ikizkutup döngüsüyle kutuplanmış halde bırakmaktadır. Şimdi koşul I olarak $E_1 = 0$, $\mathbf{p}_1 = 0$ alalım ve koşul II'ye varmak için özellikle yalın iki hali karşılaştıralım. Alanı sıfırdan, bileşenleri E_{2x} ve E_{2y} olan $\mathbf{E}_2$ değerine dek değiştirmenin iki yolu aşağıda gösterilmiştir.

Birinci yol:

E_y'yi 0'da bırak; E_x'i E_{2x}'e dek değiştir, görülün iş =
$E_x = E_{2x}$ olarak bırak; E_y'yi E_{2y}'ye dek değiştir görülen iş =
toplam iş =.....

İkinci yol:

$E_x = 0$ bırak; E_y'yi E_{2y}'ye dek değiştir, görülen iş =
$E_y = E_{2y}$ bırak; E_x'i E_{2x}'e dek değiştir, görülün iş =
toplam iş =.....

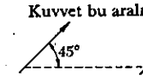
İlk yolun birinci basamağında görülen iş $\int_{E_x=0}^{E_x=E_{2x}} E_x\, dp_x$'dir ve dp_x Denk. 1 yardımıyla dE_x cinsinden yazılabilir. Her değişim yoluna dayanarak yapılan toplam işi bulun ve bu tutarları eşitleyin.

9.23 Bir gergi öğelerinin bir konumluk dizgesi dönmesiyle nasıl dönüştüğünü görmek için yalınca iki boyutlu bir hal ele alalım. İki boyutlu $\mathbf{A}$ ve $\mathbf{B}$ yöngülerinin aşağıda özel bir xy konumluğu halinde görüldüğü gibi çizgisel biçimde bağlı olduklarını varsayalım:

$$B_x = \alpha_{xx}A_x + \alpha_{xy}A_y;\ B_y = \alpha_{yx}A_x + \alpha_{yy}A_y.$$

Buradaki α katsayıları bir gergi oluştururlar. Şimdi x' ve y' eksenlerini ele alalım ki bunlar x ve y eksenlerine göre saat iğneleri ile zıt yönde bir θ açısı kadar dönmüş olsunlar. Yeni konumluklar uzayda sabit kaldıklarını düşündüğümüz $\mathbf{A}$ ve $\mathbf{B}$ yöngülerinin bu kez $A_{x'}$, vb gibi farklı bileşenleri bulunacaktır. Eskiler cinsinden deyimlenen yeni bileşenler nelerdir? A'ya uygulanan α gergisi aynı $\mathbf{B}$ yöngüsünü vermelidir. Eğer bu doğru ise, yeni gergi öğesi ile eskisi arasındaki bağıntı ne olmalıdır? $\alpha_{xy} = \alpha_{yx}$ olduğunu düşünelim. Gerginin bu bakışımının dönme etkisi altında korunduğunu ve bu çapraz katsayıları sıfıra eşit kılan bir θ açısının bulunabileceğini gösterin. Böyle bir çözümlemeyi üç boyut içinde yürüterek kutuplanırlık gibi bir gergi için dönüşüm kurallarını elde etmek yalnızca biraz daha sabır gerektirir.

9.24 İkizkutuplar arasındaki kuvvetler üzerine bir inceleme. İki ikizkutup $\rightarrow\ \rightarrow$ biçiminde düzenlenmiş olurlarsa birbirini çekerler; yine iki $\uparrow\ \uparrow$ ikizkutup biçiminde düzenlenirlerse birbirlerini iterler. Bu niçin böyledir? Her hal için kuvvetin büyüklüğünün ne olduğunu hesaplayın. Bir ikizkutbu belli bir aralıkla duran iki nokta yük ile gösterebilirsiniz. Kuvvet bu aralığa bağlı olarak nasıl değişir Şimdi



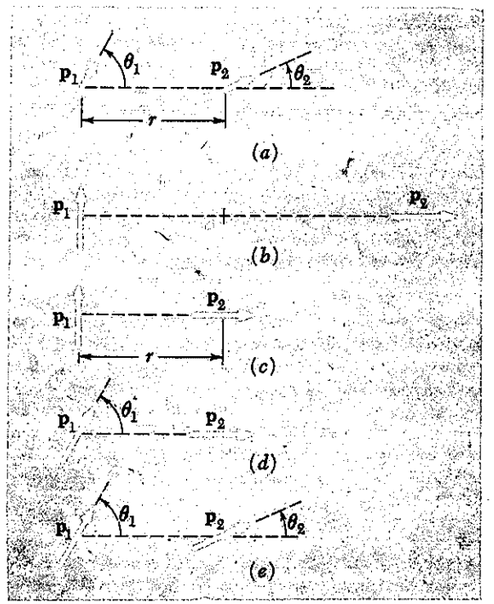
biçiminde düzenlenmiş iki ikizkutup ele alalım: Her iki kutba etkiyen kuvvetin *doğrultusu* nedir? ***Bu merkezsel olmayan*** bir kuvvet için iyi bir örnektir. Elektriksel kaynaktan gelmeyen ve merkezsel olmayan kuvvetler çekirdekte önemli bir rol oynarlar; döteryum çekirdeğinin tam küresel olmayıp bir yaprak sigarası gibi uzunca oluşundan bu kuvvetler sorumludur ki bu biçimin anlaşılması nukleonlar arasında bu gibi kuvvetlerin varlığını ortaya koymuştur.)

9.25 Sürekli iki $\mathbf{p}_1$ ve $\mathbf{p}_2$ ikizkutup döngüsü şeklin (a) kesiminde gösterildiği gibi aralarında r cm uzaklık olacak ve bunları birleştiren doğru ile θ_1 ve θ_2 açılarını yapacak biçimde yönelmişlerdir. Şimdi problemimiz bu dizgenin enerjisini, yani birbirinden sonsuz uzaklıkta bulunan böyle iki ikizkutbu bu düzenlenişe getirmek için harcanan işi hesaplamaktır. Bir ikizkutbun yaratılması ile ilgili enerji bunun içinde değildir. İkizkutupların büyüklüklerinin saptanmış olduğu ama çeşitli doğrultulara yöneltecek şekilde döndürülebildikleri varsayılıyor. İkizkutuplar son konumlarına çeşitli yollardan getirilebilirler ve bu sırada görülen toplam işin her hal için aynı olması gerekir. Harcanan işin hesaplanmasını oldukça kolaylaştıracak olan bir çizge şu olabilir: $\mathbf{p}_1$ ve $\mathbf{p}_2$ ikizkutupları şeklin (b) kesiminde görüldüğü yönelişde birbirlerinden sonsuz uzaklıkta olsunlar. Bu yönelmeyi tutarak $\mathbf{p}_2$'yi sağdan

beriye doğru p_1'den istenilen r uzaklığına getirelim. Bunun için hiç bir iş gerekmez. Niçin bu böyledir? Sonra p_1'i son yönelişine çevirelim. Şimdi bu dönmenin yine $\theta = 0$ boyunca yönelik bulunan p_2 'nin alanı içinde yapılabilmesi için gerekli işi hesaplıyalım. Şimdi p_2 'yi son yönelişine çevirelim. Bu dönmenin p_1 'in alanı içinde ne tutarda iş gerektirdiğini hesaptayabilmek için, p_1'in biri $p_1 \cos\theta_1$ gibi boyuna, öteki $p_1 \sin\theta_1$ gibi enine iki bileşene ayıralım ve bunların p_2 'nin bulunduğu yerde uyardıkları alanları işleme sokalım. Böylece görülen bütün işleri toplayalım, bu yoldan

$$W = \frac{p_1 p_2}{r^3}[\cos(\theta_1 - \theta_2) - 3\cos\theta_1 \cos\theta_2]$$

bulunur.



Prob. 9.25

9.26 Bu problem ve bundan sonra gelen problem için çok yalın kimi ikizkutup çiftleri halinde Prob. 9.25'de bulunan sonuçları gerekseyeceğiz. Eksi sonsuzdan artı sonsuza dek uzanan eşit aralıklı kutuplardan kurulmuş çizgisel bir dizi ele alalım. İkizkutupların yerlerinin değişmediğini ve döngü büyüklüğü p olan her ikizkutbun, bir iğne üzerine oturtulmuş gibi, herhangi bir doğrultuyu almakta özgür olduğunu düşünelim. Sorumuz böyle bir düzenlenişin en küçük enerjisinin ne olduğudur. Hiç kuşkusuz sonsuz uzunlukta bir düzen var ise, toplam enerji sonsuz olabilir, ama biz bu düzenlenişin her birimi başına düşen enerjiyle ilgiliyiz. İkizkutup başına düşen ortalama enerji bakımından şu düzenlenişleri karşılaştırın. Hangisinin enerjisi en büyüktür? Hangisinin ki en küçüktür?

(a) $\cdots \uparrow \uparrow \uparrow \uparrow \uparrow \uparrow \uparrow \uparrow \uparrow \cdots$
(b) $\cdots \uparrow \downarrow \uparrow \downarrow \uparrow \downarrow \uparrow \downarrow \uparrow \cdots$
(c) $\cdots \rightarrow \rightarrow \rightarrow \rightarrow \rightarrow \rightarrow \rightarrow \rightarrow \rightarrow \cdots$
(d) $\cdots \leftarrow \rightarrow \leftarrow \rightarrow \leftarrow \rightarrow \leftarrow \rightarrow \leftarrow \cdots$

9.27 Şu şekilde sıralanmış $\cdots \rightarrow \rightarrow \rightarrow \rightarrow \cdots$ sonsuz bir ikizkutup dizisi ile, bu dizinin içinde belli bir b noktasının sağında bulunanların tümcek ters geldiği şu.

$$\cdots \rightarrow \rightarrow \rightarrow \rightarrow_b \leftarrow \leftarrow \leftarrow \leftarrow \cdots$$

dizi arasındaki enerji farkını bulun. Bu enerji farkı iki bölge (domain) arasındaki b sınırı ile ilgili enerjidir.

[Matematiksel not: $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2} = \frac{\pi^2}{6}$.]

Aşağıdaki gibi birbirinden oldukça uzak böyle iki sınır bulunduğu halde oluşan,

$\cdots \rightarrow \rightarrow \rightarrow_b \leftarrow \leftarrow \leftarrow \leftarrow \leftarrow \leftarrow \leftarrow \leftarrow \leftarrow_b \rightarrow \rightarrow \rightarrow \rightarrow \cdots$

dizisi ile, bu iki sınırın birbirini yoketmeksizin yaklaşırsa oluşan,

$\cdots \rightarrow \rightarrow \rightarrow \rightarrow \rightarrow \rightarrow \rightarrow \rightarrow_b \leftarrow_b \rightarrow \rightarrow \rightarrow \rightarrow \rightarrow \rightarrow \cdots$

dizisinin enerjisini yaklaşık olarak karşılaştırın.

Bu enerji farkına göre iki sınır birbirini itmek mi yoksa çekmekmi eğilimi gösterir. Böyle bir ters gelmenin buraya dek ele alınan biçimde sert bir dönüşe bakınca daha ekonomik bir biçimde yani daha az enerji harcamayla, sağlanması için bir yol var mı? Aşağıdaki ters gelme desenlerini karşılaştırınız. Daha da ucuz sınırlar tasarlayabilirsiniz.

(a) (Sert) $\cdots \rightarrow \rightarrow \rightarrow \rightarrow \rightarrow \leftarrow \leftarrow \leftarrow \cdots$
(b) $\cdots \rightarrow \rightarrow \rightarrow \rightarrow \uparrow \leftarrow \leftarrow \leftarrow \cdots$
(c) $\cdots \rightarrow \rightarrow \rightarrow \searrow \uparrow \swarrow \leftarrow \leftarrow \cdots$

9.28 Denk. 72'deki bağıntının adına Clausius-Mosotti yazımı denir. Bu, genel olarak, dielektrik sabiti cinsinden yazılır. Eşdeğer bir yazımın $\frac{3}{N}\left(\frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 2}\right) = 4\pi\alpha$ olduğunu gösterin.

Aşağıdaki çizelgede, farklı sıcaklık ve basınçlarda saf azotun dielektrik sabitini ölçen Michels, Jaspers ve Sanders'ın (Physica 1,627 (1934)'de yayınladıkları yazıdan alınmıştır. Denel veriler aşağıya çıkarılmıştır:

Sıcaklık derecesi(°C)	23,8	23,8	23,8	2,38
Basınç (atmosfer)	1,2	57,5	221,6	1011,6
Yoğunluk(g./cm³)	0,0018	0,06604	0,2361	
Dielektrik sabiti	1,00052	1,03109	1,11413	

Bunlar Clasius-Mosotti denklemleri ile ne ölçüde bağdaşır.

9.29 Denk. 72'de $4\pi N\alpha/3 \geq 1$ olduğu zaman beklenen felâket gerçekten olabilir mi? Bunun ne gerektirdiğini görebilmek için d cm aralıkla her nasılsa sabit duran A ve B gibi iki benzer atomun oluşturduğu bir "Kristal" ele alın. Eğer A atomu AB çizgisi boyunca kutuplanmış ise, bu B'yi aynı doğrultuda kutuplandırmaya çalışan bir alan oluşturur. A'nın alanının B'yi kutuplaması ve tersine B'nin alanının A'yı kutuplaması, bu yapının kendini "kapana alması" gibi düşünülebilir. r mi? Bu soruyu iki bakımdan tartışın. Önce A ve B atomlarının her birinin kutuplanabilirliği α cm³ ise bunun olabileceği uzaklığı hesaplayın. Bu A've B"nin alabileceği büyüklüklere göre ne tutar? İkincisi, varsayılan kutuplu dizgenin enerjisini de alın.

9.30 Kısa boylu radyo dalgalarını odaklamak için plastik köpükten bir kalıp içine küçük metal küreleri yerleştirmek ve bu yoldan bir kristal örgüsü içindeki atomlara benzer bir düzen oluşturmakla yapma bir dielektrik elde edilmiştir. Plastik köpüğün kendisi yalnız küreleri taşımaya yarar ve önemsiz bir elektriksel etki gösterir. Metal kürelerin kutuplanabilirliği Prob. 9.9'da tanımlandığı gibi hesaplanabilir. Bu yoldan kurulmuş tipik metal küre örgüsünün kürelerinin her birinin çapı 2,5 cm ve merkezden merkeze uzaklıkları da 5 cm ise, dizgenin dielektrik sabitini bulun. Böyle bir topluluk için $4\pi N\alpha/3 > 1$ değeri sağlanabilir mi? Sizin için en iyi şans yüzey merkezli tipik örgüdür ki küre paketlemesine en yakın olan budur. Metal kürelerden oluşmuş bir örgü bir irgitimle kendiliğinden kutuplanma gösterse idi hangi teorem çiğnenirdi?

Bölüm 10

10.14 Şek. 10.9'da basit olsun diye, B alanının eksen boyunca bakışımlı olduğunu ve dolayısiyle B_r'nin bütün halka çevresinde sabit değer alması gerektiğini varsaydık. Bunun gerçekten gerekli olmadığını yani halka çevresinde B_r sabit olmasa Denk. 18'i elde edebileceğimizi gösterin.

10.15 Silindirsel bir sarmal r_0 yarıçaplı yalın-kat sarımlardan oluşmuştur. Sarmal öyle uzun ki bir ucuna yakın bir yerdeki alan yarı-sonsuz sarmalın alanına eşit alınabilir. Küçük bir paramıknatısal örneğin en büyük bir kuvvet etkisi altında kalacağı noktanın sarmalın ekseni üzerinde ve bir ucundan iç tarafa doğru $r_0/\sqrt{15}$ uzaklığında bulunduğunu gösteriniz.

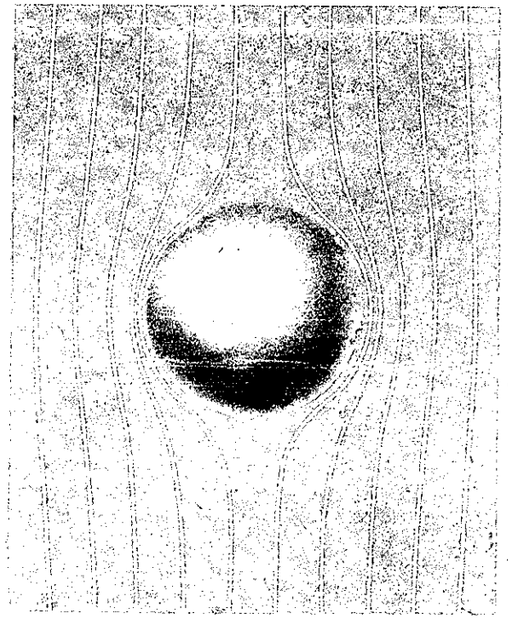
10.16 Uzaklıkları s olan Q ve $-Q$ gibi iki ikil yükten oluşmuş bir elektrik ikizkutbu halinde alanın, ülkü bir ikizkutbun alanından temelden değişik olduğu yakın bölgenin oylumu s^3 ile oranlıdır. Bu bölgedeki alan yeğinliği, s 'ye göre Q/s^2 ile oranlıdır. Dizgenin ikizkutup döngüsü $p = Qs$ ise p'yi sabit tutarak s'yi küçültecek olursak oylum ile alan yeğinliğinin çarpımı ne olur? Benzer bir tartışmayı bir akım ilmeğinin uyardığı mıknatısal alan için yapın. Bundan alacağınız ders şudur: İkizkutbun bulunduğu herhangi bir oylum içinde, alanın uzay-ortalaması ile ilgilenmekte isek, elektriksel ve mıknatısal çiftkutupların "iç bölgesi" arasındaki temel ayrım, ikizkutupları sonsuz küçük olarak işleme koysak bile gözden uzak tutulamaz.

10.17 Çelik gövdeli bir denizaltı gemisi, yerin mıknatısal alanını yerel ölçüde değişimlere uğratır ki, bu zayıf değişimlere duygun bir alet yardımıyle, bu değişimler, denizaltının ele verilmesine yolaçar. Bir uçağın arkasından, ve uçağın kendi etkisinden kurtarmak için epey uzağından çekilebilen bir mıknatıslıkölçer bulunduğunu ve bunun çevredeki alanın $10^{,5}$ de bir bölüngüsünce değişimini gösterebildiğini düşünelim. Denizaltı gemisinin gövdesinin mıknatıslığı giderilmiş olsun ve hiç bir kalan mıknatıslık bulunmasın. Ama bu cisim yine de yerin mıknatısal alanı için anormal bir mıknatısal ortamdır, ve gemi gövdesinde irgitimle bir çiftkutup döngüsü oluşabilir; bu ikizkutup döngüsü, bir gemi boyu uzakta yerin mıknatısal alanında, alanın değeri kadar bir değişikliğe yolaçabilir. Eğer durum bu ise, denizaltıyı gençok ne uzaklıktan ortaya çıkarmayı umabiliriz? Yaptığımız tasarıyı düzelterek mıknatıslıkölçerin duyarlığını iki çarpanınca artırabildiğimizi düşünelim. Bu olanak okyanusun verilen bir bölgesini aramak için gerekli uçakmil sayısını nasıl değiştirir? (Gerçekte problem bunca yalın değil. Yerin alanının doğal dalgalanmaları bir "gürültü düzeyi" oluşturur ki bu mıknatısölçer ne denli duygun olursa olsun, denizaltı gemisinin yol açacağı alan anormalliğini peçeler. Böyle bir alan dalgalanmasının kaynağı çok yalındır: Okyanus dalgaları deniz suyunu yerin mıknatısal alanı içinde devindirir; deniz suyu bir iletkendir: Akım bir mıknatısal alan uyarır.)

10.18 Çapları 1,25 cm olan iki cam küremiz var. Bunlardan birinin içinde uzunluğu aşağı yukarı bir santimetre olan bir mıknatıs çubuk bulunmaktadır. Ötekinde ise bir elektret, yani sürekli bir elektriksel kutuplanım gösteren bir maddeden küçük bir çubuk bulunsun. Bu, kusursuz yalıtkan bir maddeden yapılmış, bir ucuna bir artı yük ötekine ise eksi yük yapıştırılmış küçük bir çubuk gibi alınabilir. Bunlardan birinci cismin mıknatısal ikizkutup döngüsünün, kabaca ikincinin elektriksel ikizkutup döngüsüne eşit olduğu düşünülüyor. Bunlardan biri bir kimsenin avucunda saklandığına göre bunun hangisi olduğunu nasıl ortaya çıkarılabileceğini bulun. Sizin bu derse başladığınız zamanki kadar fizik bilen birine bu farkı nasıl anlatırsınız?

10.19 Yeğinliği m olan bir mıknatısal ikizkutup B_0 yeğinliğinde bir mıknatısal alana zıt yönlü olarak konulmuştur. Bu dizgenin oluşturduğu bileşik alan içinde, merkezi ikizkutup üzerinde bulunan bir yüzeyden hiç bir alan çizgisi geçmediğini gösterin. Dış alanın bu kürenin yüzeyinden, dışa itildiği söylenebilir. Şekilde kürenin dışındaki alan çizgileri gösterilmiştir. Kürenin içindeki alan çizgilerinin biçimi

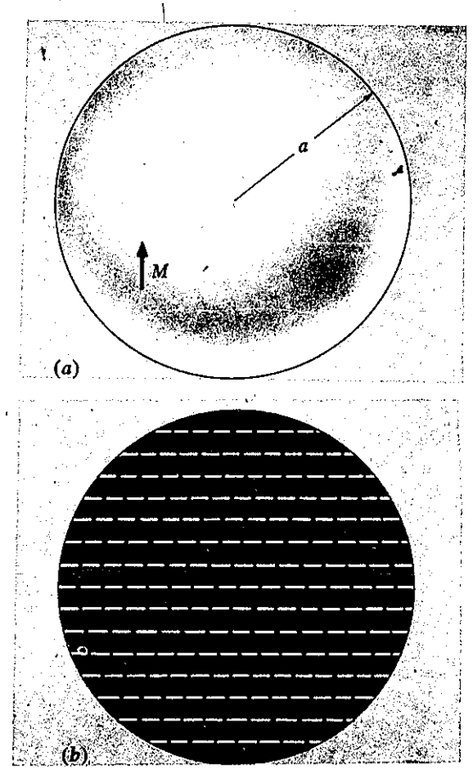
ne olacaktır? Dış alana etkisi bakımından, ikizkutup yerine, küresel yüzeyde akan bir akım alabiliriz; yeter ki uygun akım dağılımını sağlayabilelim. Bu halde kürenin içindeki alan ne tutar? Buna neden güvenebilirsiniz? (Bu, üstün iletkenliğin incelenmesi bakımından önemli bir düzenleniştir. Üstün-iletken olan bir küre, gerçekte, bütün alanı dışa doğru iter.)

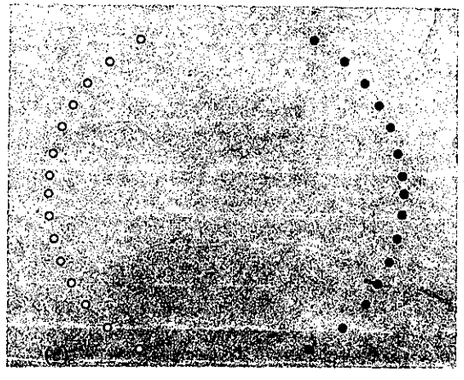


Prob. 10.19

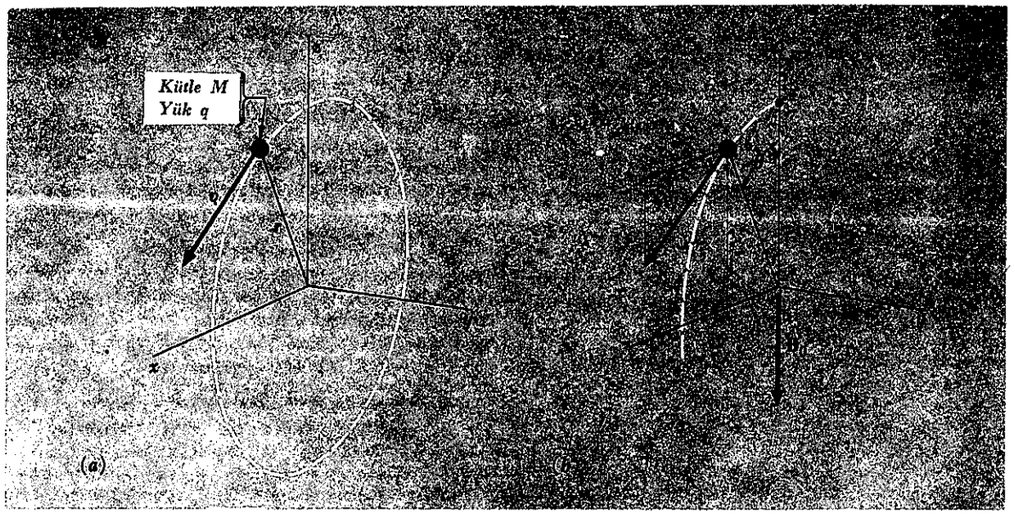
10.20 Şekildeki gibi biteviye mıknatıslanmış bir küre ele alalım. Küreyi aynı kalınlıkta dilimler halinde keserek, bunun şeklin (*c*) bölüngüsünde görülen akım kangalına eşdeğer olduğunu gösterebilir misiniz? Bu eşdeğerliği kullanarak böyle bir kangalın içindeki ve dışındaki alanın yeğinliğini tartışınız. Bu kangalı Prob. 10.6'daki döner yüklü kabuğunki ile karşılaştırın.

10.21 Maxwell denklemlerini, elektrik yükleri ve elektrik akımları gibi sanki mıknatıs yükleri ve mıknatıs yük akımları varmış gibi düşünerek yazın. Bunun için istediğiniz bir simge uydurun ve bunun ne olduğunu titizlikle tanımlayın. Bu arada +ve −imleri için uyanık davranın.





Prob. 10.20



Prob. 10.22

10.22 Şek. 10.12 ile gösterimlenen Kes. 10.5'de başka bir kuvvetin etkisi ile bir daire üzerinde dolanan bir yüklü parçacığın yörüngesine dik bir mıknatısal alanın yolaçtığı etkiyi tartıştık. Bu problemde, alan yörünge düzlemi içinde bulunursa ne olacağını göreceksiniz. Bütün yapacağınız iyice düşündükten sonra aşağıdaki çözümlemede tümcelerin içinde boş bırakılan yerleri adım adım doldurmaktır:

Kütlesi M ve yükü q olan bir parçacık xz düzlemi içinde v hızı ile dairesel bir yörünge üzerinde dolanmaktadır. Parçacık bu yörünge üzerinde kaynağının ne olduğu şu anda önemli olmayan bir kuvvetle tutulmaktadır; şeklin (*a*) kısmına bakın. Bu hareketle ilgili **L** açısal döngüsü ---------- doğrultusunda bir yöngüdür ve büyüklüğü $L =$ ---------- dir. (Bir şekil çizin). Şimdi şeklin (*b*) kısmında olduğu gibi $\mathbf{B} = -\hat{z}B$ değerinde bir mıknatısal alan uyarıyoruz. Parçacık hâlâ xz düzlemi içinde devinirken, bu ---------- değerinde ve ---------- doğrultusunda bir kuvvete yol açacaktır. (Şekilde gösterin.) Bu kuvvetin o denli zayıf olduğunu düşünüyoruz ki, parçacığın devinimini ancak yavaş yavaş değiştirebilsin. Sonra kuvvetin etkisinin dairesel yörüngenin tümü üzerinde ortalamasını alacağız. Kuvvetin ortalaması sıfırdır, ama bu kuvvetin *döngüsünün* ortalaması sıfır değildir. Kuvvetin ---------- ekseni çevresinde bir anlık döngüsünün değeri ---------- 'dir; bütün bir daire boyunca bunun ortalaması ---------- dır. O halde ortalama **N** kuvvet döngü yöngüsünün büyüklüğü $N =$ ---------- 'dir ve doğrultusu ---------- 'dır. Kuvvet döngüsü açısal döngüsünün değişim hızı olduğuna göre, bu bize **L** açısal döngüsü yöngüsünün zaman içinde ---------- olacağını söyler. Şimdi bunu yörünge alana dik olduğu zamanki (Şek. 10.12) haliyle karşılaştırırsak görüyoruz ki ---------- 'dır. Bu halde z ekseni boyunca yukarıdan aşağı bakan bir gözlemcinin gördüğü parçacık yörüngesi aşağı yukarı şu şekildedir: (Çizim yapılacak.)

10.23 Kes. 10.5'de biteviye bir **B** dış alanı uyandırmakla yüklü parçacığın yarıçapında bir değişiklik olmadığını, yalnız yörünge üzerindeki hızın değiştiğini gördük. Ama bu dediğimiz ancak qvB/c mıknatısal kuvvetinin parçacığı çekim merkezine bağlayan F_0 kuvvetinden çok daha küçük olduğu zaman, yani $\Delta v \ll v_0$ olunca doğrudur. Bu düşüncenin açıkca geçerli olmadığı ilginç bir hal, bağımsız bir özgür elektron halidir. Bu halde ne oluyor? Bunu incelemek için, yükü q ve kütlesi M olan ve bir **B** mıknatısal alan içinde bir daire üzerinde devinen bir yükle işe başlayalım. Bu bildiğimiz "siklotron" durumudur, ve bunu yöneten koşul $Mv^2/r = qvB/c$'dir. B'nin yavaş yavaş değiştiğini varsayalım. İrgitimle uyarılan bir elektrik alanı parçacığı devinim doğrultusunda hızlandıracak ve öteki halde olduğu gibi, $dv = (qr/2Mc)\,dB$ bağıntısı uygulanabilecektir. Bunun ve siklotron koşulunun B ile r arasında bir bağıntıya götürdüğünü gösterin. Bundan

MKS Dizgesi Üstüne Not

Ek MKS Elektrik Birimleri Üzerine Not

Elektrik mühendisliği üzerine yazılmış birçok ders kitabı ve pek çok giriş fiziği kitabı ussallaştırılmış MKS dizgesi denilen elektrik birimlerini kullanırlar. Bu dizge *metre, kilogram ve saniye* üzerine dayanan MKS mekanik birimlerini kullanır. MKS kuvvet birimi *newton*'dır ki bu bir kilogram kütleyi bir metre/saniye karelik ivme kazandıran kuvvetin değeri olarak tanımlanır. Buna göre newton tam olarak 10^5 din'e eşdeğerdir. Bunu karşılayan enerji birimi newton-metre ya da *joule*'dur ki bu da 10^7 erg'e eşdeğerdir.

MKS dizgesindeki elektrik birimleri bizim "pratik" (kılgın) birimler dediğimiz coulomb, volt, ampere, ve ohm'u ve daha başka yeni birimleri içerir. Uzun zamandır kullanılan kılgın birimlerin aşağıdaki gibi tanımlanan bir birim takımı içine alınabileceği anlaşıldı. Bunun için Coulomb yasasını Denk. 1.1'de yaptığımız gibi:

$$\mathbf{F}_2 = k\frac{q_1 q_2 \hat{\mathbf{r}}_{21}}{{r_{21}}^2} \tag{1}$$

biçiminde yazalım. Şimdi k'yi 1'e eşitleyecek yerde ona öyle bir değer verilim ki eğer q_1 ile q_2 coulomb ve r_{21} metre olarak alınırsa F_2 kuvveti newton çıksın. Newton ile din, coulomb ile esb, ve metre ile santimetre arasındaki bağıntıları bildiğimize göre, kolayca hesaplayabileceğiniz gibi k'nın değeri 0,8988 X 10^{10} olur. (Bir coulomb'luk iki yük 1 metre aralıkla dururlarsa bir milyon ton yakınlarında oldukca büyük bir kuvvet oluştururlar.) Formüldeki k yerine $1/(4\pi\epsilon_0)$ yazarsak hiç bir şey değişmez. Burada ϵ_0 sabit $1/(4\pi\epsilon_0) = k = 0{,}8988 \times 10^{10}$ değerini verecek bir sayıdır. Buna göre Coulomb yasası,

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r^2} \tag{2}$$

biçiminde yazılabilir; buna göre ϵ_0 sabiti

$$\epsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12}\ \text{coulomb}^2/\text{newton-m}^2 \tag{3}$$

dir.

Böylece $1/4\pi$ katsayısını ayırmak gibi isteğimize kalmış bir eyleme giriştik ki bu birçok elektrik eşitliklerde 4π katsayısının aradan çıkmasını sağlayacak ama Coulomb yasasında olduğu gibi daha başka eşitliklere de bu katsayıyı sokacaktır. İşte burada "ussallaştırılmış" sözünün anlamı budur. Eşitliklerde ϵ_0 sabitinin adına boş uzayın dielektrik sabiti (ya da elektrik geçirgenliği) adı verilir.)

Bu dizgede elektrik gerilimi volt ile ve E elektrik alan yeğinliği volt/metre ile ölçülür. Bir $\mathbf{E}$ alanı içindeki q yüküne etkiyen kuvvet

$$\mathbf{F}\ (\text{newton}) = q\mathbf{E}\ (\text{coulomb} \times \text{volt/metre}) \tag{4}$$

dir.

Görüldüğü gibi ampere, 1 coulomb/saniyedir. Aralıkları r metre olan ve ampere olarak I yeğinliğinde akım geçiren koşut iki telin her metre uzunluğuna etkiyen kuvvet,

$$f\ (\text{newton/metre}) = \left(\frac{\mu_0}{4\pi}\right)\frac{2I^2\ (\text{amp}^2)}{r\ (\text{metre})} \tag{5}$$

olur. Aynı etki ile ilgili CGS eşitliğini anımsarsak,

$$f\ (\text{din/cm}) = \frac{2I^2\ (\text{esb/s})^2}{rc^2\ (\text{cm}^3/\text{s}^2)} \tag{6}$$

olur ki buradaki $(\mu_0/4\pi)$ sabitini hesaplayabilir ve 10^{-7} buluruz. Buna göre boş uzayın mıknatısal geçirgenliği denilen μ_0 sabiti

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}\ \text{newton/amp}^2 \quad (\text{tam olarak}) \tag{7}$$

olarak tanımlanır.

$\mathbf{B}$ mıknatısal alanı Lorentz kuvvet yasası yazılarak şöyle tanımlanır:

$$\mathbf{F}\ (\text{newton}) = q\mathbf{E} + q\mathbf{v} \times \mathbf{B} \tag{8}$$

burada $\mathbf{v}$ parçacığın, metre/saniye olarak hızı, q coulomb olarak yüküdür. Bu tanım $\mathbf{B}$ için yeni bir birim gerektirir. Bu birimin adı *tesla* ya da *weber/metre*^{2} 'dir. Bir tesla tam olarak 10^4 gauss'a eşittir. Bu takımda yardımcı $\mathbf{H}$ alanı farklı birimlerle anlatılır ve boş uzayda $\mathbf{B}$ ile şöyle bağlanmıştır:

$$\mathbf{B} = \mu_0\mathbf{H} \quad (\text{açık uzayda}) \tag{9}$$

$\mathbf{H}$'nin özgür akım ile bağlılığı

$$\int \mathbf{H}\cdot ds = I_{\text{özgür}} \tag{10}$$

dır; burada I_{free} soldaki çizgi tümlevinin hesaplandığı ilmeğin sardığı yüzeyden geçen özgür akımın ampere olarak değeridir. Mademki ds'nin birimi metredir, H'ninki yalınca *ampere/metre* olur.

Özgür uzaydaki Maxwell denklemleri ussallaştırılmış MKS dizgesinde şu biçime girer:

$$\begin{aligned} &\text{ırak } \mathbf{E} = \rho && \text{dönül } \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ &\text{ırak } \mathbf{B} = 0 && \text{dönül } \mathbf{B} = \mu_0\epsilon_0\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mu_0\mathbf{J} \end{aligned} \tag{11}$$

Şimdi bu eşitlikleri, c'yi bir katsayı halinde içeren CGS Gauss dizgesindeki eşitliklerle karşılaştıracak olursanız, Denk. 11'in $1/\sqrt{\epsilon_0\mu_0}$ gibi metre/saniye olarak çıkan bir dalga hızı gerektirdiğini görürsünüz. Yani:

$$\epsilon_0\mu_0 = \frac{1}{c^2} \tag{12}$$

olur.

Bizim kullanageldiğimiz CGS Gauss dizgesindaki yük birimi, yani esb, coulomb yasasında $k \equiv 1$ alarak tanımlanır. Oysa bu MKS takımında coulomb'un tanımına temel olarak alınan yasa Denk. 1 değil, Denk. 5'dir, yani, yükler arasındaki kuvvet değil akımlar arasındaki kuvvet temel alınmıştır.

Gerçekten Denk. 5'de $\mu_0 \equiv 4\pi \times 10^{-7}$dir. Başka bir deyimle, ışığın c yayılma hızı yeni ölçülerle bu günkünden değişik çıkarılırsa, biz bunun üzerine μ_0'ın değil, ϵ_0 sabitinin değerini yeniden gözden geçirmek zorunda oluruz.

Aşağıdaki çizelgede MKS birimlerinin bazıları CGS Gauss dizgesindeki eşdeğerleri ile verilmiştir.

Bu MKS dizgesi mühendisliğe uygundur. Ama alanlar ve madde fiziğinin işlenmesinde temelden önemli bir kusuru vardır. Boşluktaki alanlar için Maxwell denklemleri bu dizgede yazılırsa, mıknatısal alan rolünde $\mathbf{B}$ değil de $\mathbf{H}$ yazmakla ancak mıknatısal ve elektriksel alanlar arasındaki bakışım korunabilir. (Yukardaki Denk. 11 takımının $\mathbf{J}$'siz de bakışımlı olmadığına bakınız.) Bundan başka Bölüm 10'da gösterdiğimiz gibi madde içinde temel mıknatısal alan $\mathbf{B}$'dir, $\mathbf{H}$ değildir. Bu bir tanım ya da bir birim sorunu değil doğanın bir olgusudur, ve mıknatısal yük diye bir şeyin var olmadığı gerçeğini yansıtır. Bu nedenle MKS dizgesi bu kuruluşu ile boşluğun temel elektromıknatısal bakışımını ya da kaynakların temel bakışımsızlığını gölgeleme eğilimi gösterir. İşte bu kitapta CGS Gauss dizgesini yeğ tutmamızın dört nedeninden biri budur. Başak bir neden de CGS Gauss birimlerinin gerektiği zaman kılgın birimlerle desteklenmesiyle fizik yapan fizikçilerin çoğu tarafından kullanılan birim dizgesi oluşudur.

Nicelik	*Simge*	*Ussal MKS dizgesindeki birim*	*CGS Gauss birimlerindeki eşdeğeri*
Uzaklık	s	metre	10^2 cm
Kuvvet	$\mathbf{F}$	newton	10^5 din
İş, enerji	W	joule	10 erg
Yük	q	coulomb	2,998 X 10^9 esb
Akım	I	ampere	2,998 X 10^9 esb/s
Elektriksel gerilim	φ	volt	(1/299,8) statvolt
Elektriksel alan	$\mathbf{E}$	volt/metre	(1/29980) statvolt/cm
Direnç	R	ohm	1,139 X 10^{-12} s/cm
Mıknatısal alan	$\mathbf{B}$	tesla	10^4 gauss
Mıknatısal akı	Φ	weber	10^8 gauss-cm
Yardımcı H alanı	$\mathbf{H}$	ampere/metre	4π X 10^{-3} oersted