

T. O.
İstanbul Teknik Üniversitesi
Temel Bilimler Fakültesi
Sayı : 1124

MATRİSLER

ve

Mühendislik Problemlerine Uygulamaları

Yazan
Prof. Dr. Ing. R. Zurmühl
Berlin Teknik Üniversitesi

Çeviren
Prof. Dr. İlhan Birkan
İstanbul Teknik Üniversitesi

ÇAĞLAYAN BASİMEVİ

Eserin sahibi : İ. T. Ü. Temel Bilimler Fakültesi

İÇİNDEKİLER

Sayfa

BÖLÜM I

MATRİS HESABI

1

1. Temel Kavramlar ve Basit Hesap Kuralları	1
1.1. Lineer Dönüşüm, Matris ve Vektör	1
1.2. Satır ve Sütun Vektörleri	5
1.3. Basit Hesap Kuralları	7
1.4. Transpoze Matris, Simetrik ve Yarisimetrik Matris ...	9
1.5. Köşegen Matris, Skaler Matris ve Birim Matris ...	11
1.6. Lineer Bağımlılık, Rank, Tekil Matris, Determinant ...	12
2. Matris Çarpımı	15
2.1. Matris Çarpımına Giriş	15
2.2. Matris Çarpımı ile İlgili Teoremler	20
2.3. Köşegen ve İlgili Diğer Matrisler	24
2.4. Skaler Çarpım, Reel Vektörlerin Şiddet ve Açıları ...	25
2.5. Diyalık Çarpım	27
2.6. Kuvvetler ve Polinomlar	29
2.7. Gauss Dönüşümü	31
2.8. Ortogonal Matrisler	32

VIII

3. İnvers Matris	34
3.1. İnvers Matris Kavramı ve Bulunması	34
3.2. Ek Matris, a_{ik} Formülü	38
3.3. Matris Bölümü	42
4. Kompleks Matrisler	43
4.1. Kompleks Matrisler ve Vektörler	43
4.2. Kompleks Matrislerin Özel Şekilleri	45
4.3. Kompleks Matrislerin Reel Şekli	48
5. Lineer Tasvirler ve Koordinat Dönüşümleri	52
5.1. Lineer Tasvirler	52
5.2. Matrisler ile Gösteriş	56
5.3. Koordinatların Dönüşümü	58
5.4. Ortogonal Dönüşümler	60
5.5. Kontragradyent Dönüşüm ve Kongrüans	61

BÖLÜM II

LINEER DENKLEMLER

63

6. Gauss Algoritması	63
6.1. Algoritmanın Prensipleri	63
6.2. Matris İşlemi Olarak Zincirleme Algoritma	65
6.3. Simetrik Katsayılar Matrisi. Cholesky Metodu	71
6.4. $b_{ii} = 0$ Halinde Sıraların Değişimi	74
6.5. Bölüm Olmayan Algoritma	79
6.6. İnvers Matris Hesabı - Matris Bölümü	81
6.7. Simetrik Matris için İnvers Matris	84
7. Lineer Bağımlılık ve Rank	86
7.1. Bir Vektör Sisteminin Lineer Bağımlılığı	86
7.2. Bir Matrisin Rankı	89

Çeviri ile ilgili

Prof. Dr.-Ing. R. Zurmühl'ün bu eseri, mühendislik açısından, matrisler konusundaki literatürde yerini tamamen belirlemiş ve dört kez basılmıştır. Yazar, en verimli bir çağında, bir trafik kazasında hayatını kaybetmemiş olsa idi, bildiğimize göre, yeni baskıları da yayınlanmış olacaktı.

Son baskıdan yapılmış olmakla bu çeviride, ikinci baskıdan alınan ekler ile örnek ve uygulamalar arttırılmıştır.

Çeviri, yalnız ve yalnızca, okuyucuya hizmet için yapılmıştır; ve başkacada bir iddiası yoktur. Ancak, tenkit edilecek pek çok yeri bulunan bu çevirinin, ikinci baskısında daha iyi olması için okuyucuların kıymetli yapıcı önerilerini beklediğimi belirtmek isterim.

"Matrisler" i yayınlayan Temel Bilimler Fakültesi, kanımca büyük ve kıymetli bir hizmeti okuyucularına sunmaktadır. Bu hizmete olanak sağlayan, Temel Bilimler Fakültesinin kıymetli Öğretim Üyelerine bütün tashihleri büyük bir titizlikle yapan Asis. İbrahim Özgür'e ve kitabın baskısında itina, candan ilgi gösteren Çağlayan Basımevi sahip ve personeline en içten teşekkürlerimi sunarım.

Prof. Dr. İlhan Birkkan

DÖRDÜNCÜ BASKIYA ÖNSÖZ

Son baskıya göre küçük düzeltmeler ve ekler yanında bir kaç büyük değişiklik de yapılmıştır. Örneğin normlar ile ilgili bir paragraf eklenmiş ve bundan sayısal kısımda hata tahminlerinde yararlanılmıştır. Sayısal yöntemlerin seçim ve işlenmesinde otomatik hesap yine ön plâna çıkmış ve bir kaç ALGOL programı verilmiştir. Yüksek mertebeli özdeğerlerin hesabı için Hotelling yöntemi yerine, kendisi ile özdeş olan Koch yöntemi alınmıştır. Klasik Jacobi yöntemi de ayrıntılı olarak verilmiş olup, Falk ve Langemeyer tarafından verilen genel simetrik özdeğer problemine getirilmesi de buna eklenmiştir. Otomatik hesap için önemi nedeni ile, Rutishauser'in L-R dönüşümü ve Givens yöntemide eklenmiştir. Hessenberg yöntemi ise otomatik hesaba uygun bir şekilde tanımlanmıştır. Eğilme titreşimlerinin - taşıma matrisleri dışında - incelenmesi için, 27.3 ile 27.7 paragraflarında, eski baskıdaki 26.7 ve 26.8'in yerini alan bir yöntem verilmiştir. Esas olarak kitabın eski kapsamı korunmuştur.

Eski baskılara göre, en fazla göze çarpan değişiklik, matris ve vektörlerin koyu harfler ile gösterilmesi olmuştur. Bu önemli karar için Springer yayın evine teşekkürleri belirtmek isterim. Ayrıca kitabı modern seviyede tutmama yarıyan meslekdaş önerilerine teşekkürü borç bilirim. Nihayet, programların yapılmasında ve müsveddelerin okunmasındaki bilinçli ve değerli yardımları için Matematikçi D. Stephan'a teşekkür ederim.

Rudolf Zurmühl

Berlin 41, Nisan 1964
Steglitzer Danım 14

16. Normal ve Normalleştirilebilen Matrisler. Matris Normları ..	221
16.1. Simetrikleştirilebilen Matrisler	222
16.2. Normal ve Normalleştirilebilen Matrisler	224
16.3. Matris Normları ve Özdeğer Sınırları	227
16.4. Özdeğer ile İlgili Diğer Tahminler	235
16.5. Kondisyon Sayıları	238
16.6. Genel Bir Matrisde Asal Eksen Sistem Çifti	241
16.7. Dönme Uzaması Olarak Çarpım. Matrislerin Karekökünü Alınması	244
17. Özel Matrislerin Özdeğerleri	246
17.1. Negatif - olmayan Matrisler. Kapsam Teoremleri ...	246
17.2. Sütun Toplamı Sabiti ve Stokastik Matrisler	249
17.3. Satranç Tahtası Matrisleri	252
17.4. Diferans Matrisleri	257
17.5. Dairesel Tipte Matrisler	260

BÖLÜM V

MATRİSİN İÇ YAPISI (STRÜKTÜRÜ) 262

18. Minimum Denklemi. Karakteristik ve Sınıflandırma	263
18.1. Minimum Denklemi	263
18.2. Determinant Bölünümleri. Elemanter Polinom ve Elemanter Bölün	267
18.3. Minimal Polinom. Rank Düşmesi	269
18.4. Bir Matrisin Karakteristiği ve Sınıflandırılması	271
18.5. Matris Çiftleri, Simültane Ekvivalentlik ve Benzerlik ...	273
19. Normal Form. Asal Vektörler ve Asal Vektör Zincirleri ...	276
19.1. Jordan Normal Formu	276
19.2. Sağ - Sol Özvektörlerin Ortogonalitesi	279
19.3. Weyr Karakteristikleri	282

19.4. Ana Vektörler	285
19.5. Ana Vektör Zincirlerinin Kurulması	289
20. Matris Fonksiyonları ve Matris Denklemleri	295
20.1. Bir Matris Fonksiyonunun Özdeğerleri	295
20.2. Matris Fonksiyonunun Erzats Polinoma İndirgenmesi	297
20.3. Matris Kuvvet Serileri ve Bunların Cinsinden Yazılabilen Matris Fonksiyonları	300
20.4. Örnekler	303
20.5. Matris Fonksiyonunun Daha Genel Tanımı	305
20.6. Lineer Matris Denklemleri	308
20.7. $X^m = O$ ve $X^m = I$ Denklemleri	311
20.8. Genel Cebirsel Matris Denklemi	313

BÖLÜM VI

SAYISAL METODLAR

315

21. Özdeğer Problemi. İteratif Metodlar	315
21.1. Von Mises Vektör İterasyonu	315
21.2. Aynı Değerli, Özellikle Kompleks Özdeğerler	319
21.3. Otomatik Hesap	327
21.4. Yüksek Özdeğerlerin Hesabı : Koch Metodu	328
21.5. Kesirli İterasyon. Genel Özdeğer Problemi	335
21.6. Tek Özdeğer İçin Wielandt Düzeltmesi	339
21.7. İki Özdeğer İçin Wielandt Düzeltmesi	343
21.8. Jacobi Metodu	347
21.9. Matris Çiftleri İçin Jacobi Metodu	353
21.10. Rutishauser'in LR - Dönüşümü	355
22. Özdeğer Problemi : Direkt Metodlar	358
22.1. Genel Bakış	358
22.2. Hessenberg Metodu	360
22.3. Karakteristik Polinomun Kurulması	364

7.3. Matris Çarpımlarının Rankı	94
7.4. Eşdeğerlilik	99
8. Genel Lineer Denklem Sistemleri	101
8.1. Genel Homogen Denklem Sistemleri	101
8.2. Genel Homogen Olmayan Denklem Sistemleri	106
9. Ortogonal Sistemler	110
9.1. Bir Vektör Sisteminin Ortogonalleştirilmesi	110
9.2. Tam Ortogonal Sistemler	113
9.3. Biortogonal Sistemler	116
9.4. Tam Biortogonal Sistemler	119
9.5. Dik Dörtgen Matrisin Yarı İnversi	123
10. Polinom Matrisleri ve Tam Sayılı Matrisler	126
10.1. Parametre Matrisleri. Karakteristik Determinantlar ve Rank Düşmesi	126
10.2. Polinom Matrisleri ve Tam Sayılı Matrisler. Ekvivalent Özelliği	129
10.3. Smith Normal Formu. Elemanter Polinomlar ve Elemanter Bölenler	131

BÖLÜM III

KUVADRATİK FORMLAR VE UYGULAMALARI 138

11. Kuvadratik Formlar	138
11.1. Kuvadratik ve Bilineer Formlar	138
11.2. Pozitif Definit Kuvadratik Formlar	140
11.3. Kuvadratik Formların Dönüşümü. Kongrüent Özelliği	144
11.4. Hermitsel Formlar	148
11.5. Geometrik Anlam	150

X

12. Matris Hesabının Bazı Uygulamaları	152
12.1. Dengeleme Hesabına Uygulama	152
12.2. Kafes Kirişlerin Hesabı	155
12.3. Titreşim Problemlerinin İncelenmesi	159

BÖLÜM IV

ÖZDEĞERLER PROBLEMİ 163

13. Özdeğerler ve Özvektörler	163
13.1. Problemin Takdimi ve Kavramlar	163
13.2. Özvektörler	166
13.3. Örnekler	169
13.4. Sol Özvektörler. Ortogonalite	173
13.5. Benzerlik Dönüşümü. İnvariantlar	176
13.6. Rayleigh - Oranı. Bir Matrisin Değer Aralığı	179
13.7. Matris Kuvvetleri. Matris Çarpımları	182
13.8. Genel Özdeğer Problemi	186
13.9. Kompleks Matrislerde Özdeğer Hesabı	187
14. Köşegen Benzeri Matrisler	190
14.1. Özeksenler Sistemi. Köşegen Şekle Dönüşüm	190
14.2. Açınım Teoremi. Krylov Metodu	193
14.3. Cayley Hamilton Denklemi ve Minimum Denklem	201
14.4. Von Mises İterasyon Metodu	204
14.5. Köşegen Benzeri Matrislerin Spektral Parçalanması	206
15. Simetrik ve Hermitsel Matrisler	207
15.1. Özdeğerler ve Özvektörler	207
15.2. Özdeğerlerin Ekstrem Özellikleri	209
15.3. Ekstrem Özelliği. Devam	213
15.4. Kuvadratik Formlara Uygulama	215
15.5. Genel Özdeğer Problemi	217
15.6. Yarı Hermitsel ve Üniter Matrisler	220

MATRİSLER

ve

Mühendislik Problemlerine Uygulamaları

22.4. Özvektörlerin Bulunması	367
22.5. Hessenberg Metodunun Başka Şekli. Otomatik Hesaplama	368
22.6. Givens Metodu	372
22.7. Householder Metodu	374
23. Lineer Denklem Sistemlerinin İteratif İncelenmesi	379
23.1. Gauss - Seidel İterasyon Metodu	379
23.2. Yok Etme Yolu İle İterasyon	382
23.3. Yakınsanlık ve Hata Tahmini	385
23.4. Gauss - Southwell Relaksasyon Metodu	389
23.5. Ek İteratif İnceleme - III - Conditioned Sistemler	394
23.6. G. Schultz'a Göre İnvers Matrisin İteratif Hesabı	398

BÖLÜM VII

UYGULAMALAR

401

24. Elektroteknikte Matrisler	401
24.1. Yönlenmiş Şebeke Topolojisi	402
24.2. Yönlenmiş Şebeke	406
24.3. Şebeke Hesabı	407
25. Statikte Uygulamalar	414
25.1. Genel Bakış	414
25.2. Elastik Şekil Değiştirmeler	416
25.3. Statik Bilinmeyenlerin Hesabı	417
25.4. Strüktür Matrisi	420
25.5. Şekil Değiştirmeler ve Yer Değiştirmeler	421
25.6. Lineer Olmayan Elastiklik	424
25.7. Bir Örnek	425

26. Elastomekanik Problemlerin İncelenmesinde Taşıma Matrisleri	428
26.1. Prensip	428
26.2. Eğilme Titreşimleri	430
26.3. Ara Koşulları	436
26.4. Yaylar ve Tek Kütleler	438
26.5. Determinant Matrisleri	444
26.6. Kiriş Eğilmesi Problemleri	452
27. Titreşim Problemlerinde Matrisler	459
27.1. Sonlu Serbestlik Dereceli Sönümsüz Titreşim Sistemleri	459
27.2. Sönümlü Titreşim Sistemleri. Stabilité	463
27.3. Eğilme Titreşimlerinin İncelenmesinde Bir Matris Yöntemi	466
27.4. Eğilme Titreşimleri : Rijitlik Matrisi	467
27.5. Eğilme Titreşimleri : Kütle Matrisi	469
27.6. Eğilme Titreşimleri Örnekleri	470
27.7. Tekil Rijitlik Matrisi	474
28. Lineer Diferansiyel Denklemler Sistemleri	477
28.1. Sabit Katsayılı Birinci Mertebeden Homogen Sistemler	477
28.2. Lineer - olmayan Elemanter Bölenler	482
28.3. Yüksek Mertebeden Sistemler	486
28.4. Homogen Olmayan Sistemler	488
28.5. Sabit - olmayan Katsayılar	494
İ N D E K S	499

MATRİS HESABI

1. Temel Kavramlar ve Basit Hesap Kuralları.

1.1. Lineer Dönüşüm, Matris ve Vektör.

Matris hesabının konusu, verilen iki sistem arasındaki lineer bağıntılardır. $x_1, x_2, \dots, x_n$ gibi n tane değişkenden oluşan birinci sistem ile $y_1, y_2, \dots, y_m$ gibi m tane değişkenden oluşan ikinci sistem arasındaki aşağıdaki tipten

$$\left. \begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= y_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= y_2 \\ \dots &\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= y_m \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

şeklindeki böyle bir bağıntı, verilmiş — reel veya kompleks — sayılar kabul edilecek olan a_{ik} katsayılarının $m \times n$ tablosu ile bellidir. a_{ik} katsayılarının — i satırlarına ve k sütunlarına göre — sıralanmış tablosuna "Matris" veya "(1) lineer bağıntısına ait Matris" adı verilir; ve bu kavram "sıralama, düzenleme" anlamına gelir. Dik dörtgen şeklinde sıralanmış katsayılar tablosu anlamında matris kelimesi ilk önce İngiliz matematikçisi Sylvester¹ tarafından kullanılmıştır.

Katsayılar tablosunun yani matrisin başlıbaşına bir matematik büyüklük sayılması ve tek bir sembol ile gösterilmesi mantığa ve amaca uygun olur. Bu kavramın basit sayılardan farkını belirtmek için büyük siyah harfler kullanılacaktır. Böylece

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \mathbf{A} = (a_{ik}). \quad (2)$$

yazılabilir. Başka yazış şekilleri de kullanılmaktadır; örneğin

¹ Sylvester, J.J.: Philos. Mag. Vol. 37 (1850). S. 363.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} = [a_{ik}]. \quad (2a)$$

a_{ik} katsayılarının sayısal değeri yanında, şemada i, k çift indisi ile gösterilen konumu da önemlidir. Burada birinci indis, daima, satırı ve ikinci ise sütunu belirtir. a_{ik} büyüklüklerine matrisin "elemanları" adı verilir. m satır sayısı, n sütun sayısına eşitse matrise "kare" ve " n -mertebeli" adı verilir. m satırlı ve n sütunlu — genellikle kare olmayan — bir matrise " mn matrisi" denir.

(1) lineer bağıntısı ile verilen x_i, y_i büyüklükleri de, tek sıralı matris kabul edilecek olan birer büyüklük sistemi ile yani x veya y vektörü ile gösterilebilir. Bu vektörlerin " x_i, y_i bileşenleri"nin sütunlar şeklinde düzenlenmesi uygun olmaktadır:

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Buna göre, (1) bağıntısında, x vektörünün y vektörüne lineer dönüşümü bahis konusu olur ve bu kısaca şöyle yazılır:

$$Ax = y. \quad (4)$$

(1) ve (4) denklemleri tamamen aynı anlamı taşırlar. Burada Ax aşağıda tanımlanan bir çarpımı göstermektedir:

Tanım 1: Bir mn -matrisi $A = (a_{ik})$ ile n -sıralı $x = (x_k)$ sütun matrisinin (n bileşenli bir vektör) çarpımı Ax , m sıralı $y = (y_i)$ sütun vektörüne eşittir; burada i -ninci y_i bileşeni, A nın i -ninci satırı ile x sütun matrisinin skaler çarpımına eşittir:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n = y_i \quad (5)$$

Bu tanım ile (4) "matris denklemi", (1) sistemine gelmiş olur. Bu ise, aynı zamanda, kısaltma ve bir hesap kuralıdır.

Burada tanımlanan matris ile vektörün çarpımı, Cayley¹ tarafından verilen genel matris hesabının, yani matrislerin analitik ele alınmasının, önemli bir bölümüdür. Lineer dönüşümler ile ilgili hesap, burada katsa-

¹ Cayley, A.: Trans. London. philos. oc. Vol. 148 (1858), S: 17-37.

yılar tablosunu esas alan bazı temel işlemlere indirgenmektedir; bunlar ise matrislerin toplanması, çıkarılması, çarpılması ve bölünmesi olarak isimlendirilebilir. Böylece çok farklı tipten uygulamalarda karşılaşılan lineer bağıntılar ile hesap çok kolaylaştığından, matris hesabı bugün matematiğin önemli bir parçası haline gelmiştir. Genellikle karışık ve sıkıcı olan işlemler, matris hesabı dili ile basit olarak verilebilmektedir. Lineer bağıntılar ile ilgili olduğu sürece mühendislik matematiği de bu modern ve uygun dilden yararlanmaktadır. Bu dil, geniş kapsamlı hesapları, tablo haline getirmekte ve ekseriya birbirinden uzak konuları ortak tek bir çekirdeğe indirgemekte kullanılmaktadır.

Matris hesabı, matematik kısa şekli ile işlemlerin tablo halinde gösterilebilmesi gözönüne alınarak, özellikle mühendisler tarafından tutulmaktadır. Bu özellik, üç boyutlu geometri ve vektör hesabında kendiliğinden ortaya çıkmaktadır; burada bir x vektörüne, veya bunun x_1, x_2, x_3 bileşenlerine, noktanın koordinatları veya vektör bileşenleri adı verilir. Geometrik işlemlere bağlı cebirsel işlemler — vektörel toplam, vektörel çarpım, koordinat dönüşümü ve benzerleri — 3 boyutludan n boyutluya kadar genelleştirilebilir. Böylece istenen n halinde faydalı ve gerekli olan bir geometrik yazış şekli ortaya çıkar. Bu anlamda bir "düzenlenmiş sayılar sistemi": $\{x_1, x_2, \dots, x_n\} = x$, n -boyutlu R_n uzayındaki bir "nokta" veya "vektör" olarak tanımlanır; ve bu R_n uzayına, x sisteminin her " x_i bileşeni" bütün reel — veya kompleks — sayılar alanından geldiğine göre, n -boyutlu x sayı sisteminin alanı adı verilir; yalnız $n = 3$ veya 2 veya 1 ve reel x_i halinde, yukarıda cebirsel olarak tanımlanan R_n uzayına n -boyutlu geometrik bir uzay karşı gelir: $n = 3$ halinde bütün uzay; $n = 2$ halinde bir düzlem; $n = 1$ için bir doğru. Bu anlamda, (1) veya (4) lineer dönüşümü halinde "lineer tasvir" yani x vektörünün y vektörüne tasviri bahis konusu olur¹. Bu tasvirin, herhangi a_{ik} katsayıları için çok genel olmasına karşılık, üç boyutlu halde, şu karakteristik özelliği vardır; lineer şekiller yine lineer şekillere, yani doğrular doğrulara, düzlemler düzlemlere dönüşür. Bu neden ile, tasvire "lineer" denilmektedir.

Bir vektörün, yani x_i düzenlenmiş sayılar sisteminin böyle bir tablosu dikkate alınmaz ise, vektör bir geometrik büyüklük olarak gösterilemez. x_i vektör bileşenlerinin gerçek anlamı, uygulamalarda farklı şekillerde olabilir; örneğin

¹ Burada $m=n$ hali dikkate alınmıştır.

n çubuklu bir kafes kiriş sisteminde S_i çubuk kuvvetleri;

n devreli bir elektrik sisteminde J_i akımları;

n serbestlik dereceli bir titreşim sisteminde x_i yer değiştirmeleri veya $\dot{x}_i$ hızları;

Bir gaz karışımında, r_i hacim yüzdeleri veya g_i ağırlık yüzdeleri;

Bir mamul veya bir işletme için toplam masrafın K_i yüzdeleri;

Bir kiriş kesitinde N, Q, M (normal kuvvet, kesme kuvveti, eğilme momenti) kesit etkileri.

Son örneğe göre, bir vektörün x_i bileşenleri, aynı boyutlu olmak zorunda değildir.

Örnek : m çubuklu bir kafes-kiriş sisteminde m adet S_i çubuk kuvvetleri ile, kafes-kiriş sisteminin düğüm noktalarına etkiyen n adet — düşey — P_k yükleri arasında aşağıdaki gibi bir lineer bağıntı vardır :

$$\left. \begin{aligned} S_1 &= a_{11} P_1 + a_{12} P_2 + \dots + a_{1n} P_n \\ S_2 &= a_{21} P_1 + a_{22} P_2 + \dots + a_{2n} P_n \\ &\vdots \\ S_m &= a_{m1} P_1 + a_{m2} P_2 + \dots + a_{mn} P_n \end{aligned} \right\} \quad (A)$$

veya kısaca

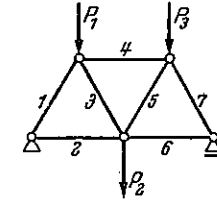
$$\boxed{s = A p}, \quad (B)$$

burada S_i çubuk kuvvetleri ve P_k yükleri, aşağıdaki m- ve n- boyutlu vektörler ile gösterilmiştir :

$$s = \begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 \\ \vdots \\ S_m \end{pmatrix}, \quad p = \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \\ \vdots \\ P_n \end{pmatrix}$$

A matrisinin a_{ik} katsayıları, yani "etki sayıları", S_i çubuk kuvvetleri olarak aşağıdaki yoldan çıkarılabilir : bütün yükler, $P_k = 1$ dışında, $P_j = 0$ alınır. (yani $j = k$ için $P_j = 0$ halinde a_{ik} değerleri boyutsuz S_i/P_k sayıları olur); yani bunlar bilinen metodlardan birine göre (Cremona, Ritter) çubuk kuvvetleri olarak hesaplanır. Böylece, çekme kuvveti pozitif, basınç kuvveti negatif işaretli sayılmak ve ortak çarpan $1/2 \sqrt{3}$ matris dışına çıkarılmak üzere, Şekil 1.1 deki örnek için aşağıdaki matris elde edilir :

$$A = \frac{1}{2\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -3 & -2 & -1 \\ 3/2 & 1 & 1/2 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1/2 & 1 & 3/2 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix},$$



Şekil 1.1

ve bir örnek olarak :

$$S_3 = \frac{1}{2\sqrt{3}} (-P_1 + 2P_2 + P_3).$$

olur. Kafes-kiriş sisteminin simetrisine, matrisin oluşumunda bir simetri karşı gelir. Genellikle her kafes-kirişin- statik belirsiz olsa bile — $A = (a_{ik})$ matrisi vardır; bu matris, izostatik halde, yalnız kafes-kirişin geometrik düzenine bağlıdır; ve S_i çubuk kuvvetleri ile düşey P_k yükleri arasında lineer bir bağıntı verir — kafes-kirişlerin matrisler ile incelenmesi ilerde, gerekli bilgiler verildikten sonra, daha ayrıntılı olarak yapılacaktır. (12.2 ye bakınız).

1.2. Satır ve Sütun Vektörleri.

$x_1, x_2, \dots, x_n$ gibi n adet düzenlenmiş bir sayı sistemine (n boyutlu) vektör adı verilmiş ve yukarda örnekler ile açıklanmıştır. Böyle bir vektörün matris olarak gösterilmesi için, n adet x_i bileşeninin bir satır veya sütun şeklinde tertiplenmesinin önemi yoktur. Her iki şekil sayı sisteminin denk gösterilişidir. Ancak, şimdiye kadar sütun matris şekli kullanılmıştır. Gerektiğinde satır matris şekli de kullanılacaktır. Vektörün gösteriliş şekli -satır veya sütun- dikkate alınmaz ise, sayı sistemini $x = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ ile göstereceğiz.

mn-matrisi $A = (a_{ik})$ nın sütunlarını ve satırlarını da, vektörler (yani yine düzenlenmiş sayı sistemleri) olarak kabul edebiliriz; ve bunları yukarı veya aşağı konulan indisler ile aşağıdaki gibi göstereceğiz :

$$\text{Satır vektörleri } a^i = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}), \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (6a)$$

$$\text{Sütun vektörleri } a_k = \begin{pmatrix} a_{1k} \\ a_{2k} \\ \vdots \\ a_{mk} \end{pmatrix}, \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (6b)$$

Böylece A matrisi, aşağıdaki iki şekilden biri ile yazılabilir :

$$A = (a_1, a_2, \dots, a_n) = \begin{pmatrix} a^1 \\ a^2 \\ \vdots \\ a^n \end{pmatrix} \quad (7)$$

yani, elemanları, sırası ile, sütunlar veya satırlar olan bir satır -veya sütun- matrisi olarak ifade edilebilir.

Matrisin a_k sütun vektörleri, de bir anlam taşırlar; eğer (1) denkleminde $x_k = 1$ dışında her $x_i = 0$ alınır ise, yani x olarak "k-nıncı birim vektör" alınır ise,

$$e_k = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad (8)$$

(k-nıncı bileşen = 1, diğerleri = 0), ile şu yazılabilir :

$$y = A e_k = a_k \quad (9)$$

Böylece " A matrisinin k-nıncı sütun vektörü a_k , $Ax = y$ lineer tasviri halinde, k-nıncı birim vektör e_k nin dönüştüğü şekil olur.

Tasvir belli ise, — verilmiş koordinat sistemi için — ilgili matris hemen bulunabilir : Örneğin, φ açısı kadar düzlemsel dönme halinde, Şekil 1.2, birim vektörler

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

φ açısı kadar dönerek aşağıdaki birim vektörleri verirler :

$$a_1 = \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix}, \quad a_2 = \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \end{pmatrix}.$$

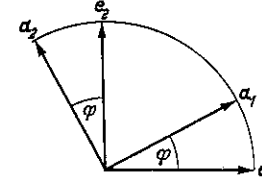
Böylece dönmeyi gösteren matris şöyle olur :

$$A = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}.$$

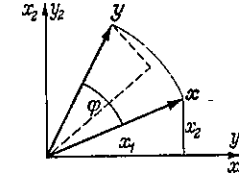
Herhangi bir x vektörünün dönmesi ile ortaya çıkan y vektörünün, y , bileşenleri, Şekil 1.3 den de görüldüğü gibi şöyle olur :

$$y_1 = x_1 \cos \varphi - x_2 \sin \varphi,$$

$$y_2 = x_1 \sin \varphi + x_2 \cos \varphi,$$



Şekil 1.2



Şekil 1.3

Genel olarak, $Ax = y$ tasviri, sütun vektörleri yardımı ile şöyle yazılabilir :

$$Ax = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n = y \quad (10)$$

bu ise, (5) denkleminin özeti sayılır ve A matrisi, a_k elemanlarından oluşmak üzere, çarpım tanımını 1. uyarınca

$$Ax = (a_1, a_2, \dots, a_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

şeklinde yazılarak bulunur. Böylece şunu söyleyebiliriz :

" $Ax = y$ lineer tasvirinin y vektörü, A dönüşüm matrisinin a_k sütun vektörlerinin bir lineer kombinasyonudur".

Burada a_k, x_k vektörleri, $a_{ik} x$ bileşenli vektörlerdir; yani a_{ik} bileşenleri ile x_k sayılarının çarpılmasından oluşurlar.

1.3. Basit Hesap Kuralları.

Matrisler ile hesap için, ilk önce aşağıdaki basit kurallar verilmiştir :

Tanım 2 : $A = (a_{ik})$ ve $B = (b_{ik})$ matrislerinin her ikisinde m satırlı ve n sütunlu (iki mn -matrisi) iseler, A ile B matrislerinin toplamı (farkı) aşağıdaki mn -matrisi C dir :

$$C = A \pm B = (c_{ik}) \quad \text{burada} \quad c_{ik} = a_{ik} \pm b_{ik} \quad (11)$$

Eşit m, n sayılı matrislere "aynı tipten" matrisler denir; ancak aynı tipten matrisler toplanır veya çıkarılabilir.

Örnek :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 5 & 0 \\ 2 & -3 & 7 \end{pmatrix}, \quad A + B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix},$$

$$A - B = \begin{pmatrix} 4 & -7 & 5 \\ -1 & 3 & -10 \end{pmatrix},$$

Burada $A + B = B + A$ dır; yani toplama, adi sayılarda olduğu gibi, komütatiftir. Ayrıca $A + (B + C) = (A + B) + C$ dir, yani toplam, aynı zamanda, asosiyatiftir.

Tanım 3 : İki mn -matrisleri $A = (a_{ik})$, $B = (b_{ik})$,

$$a_{ik} = b_{ik} \quad \text{her } i, k \text{ için} \quad (12)$$

halinde, "birbirlerine eşit", yani $A = B$, olur.

Tanım 4 : Bir A matrisine, ancak ve ancak bütün elemanları sıfırlar ise, "sıfır" veya "sıfır matrisi" denir.

$$A = O, \quad a_{ik} = 0 \quad \text{her } i, k \text{ için} \quad (13)$$

bu durumda, tek sıralı matris için "sıfır matrisi" veya "sıfır vektörü" kavramları ortaya çıkar.

Örneğin 3 satır ve 2 sütundan oluşan sıfır-matrisi şöyle olur :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = O;$$

ayrıca

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = O$$

2 sıralı kare sıfır-matrisidir.

Toplam tanımında $B = A$ alınır ve $A + A = 2A$ gibi ifadeler yazılır ise aşağıdaki tanım ortaya çıkar :

Tanım 5 : mn -matrisi A ile bir k skaler sayısının çarpımı, kA veya Ak matrisi bir mn -matrisi olup, elemanları, A daki elemanların k -katıdır :

$$kA = Ak = \begin{pmatrix} k a_{11} & \dots & k a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ k a_{m1} & \dots & k a_{mn} \end{pmatrix}. \quad (14)$$

Matrisin bütün elemanlarında ortak olan bir k çarpanı matris dışına çıkarılabilir; örneğin :

$$\begin{pmatrix} 2,7 & -0,9 \\ 1,8 & 5,4 \end{pmatrix} = 0,9 \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Burada, okuyucu bu kuralı determinantlar için geçerli olan, satır veya sütunun ortak çarpanının dışarı çıkarılması ile ilgili kural ile karıştırmamalıdır. Bir matrisin skaler sayılar ile çarpımı için aşağıdakiler geçerlidir :

$$kA + kB = k(A + B)$$

$$kA + lA = (k + l)A.$$

Matrisler ile ilgili bu hesap kurallarına, matris hesabının temeli olarak, "matrislerin birbiri ile çarpımı" yani "matris çarpımı" kuralı da eklenmelidir; ve bu ilerde 2. de ele alınacaktır. Çarpımın tersi ise, "invers matrisi" verir; bu ise daha ilerde 3. de ele alınacaktır.

1.4. Tranpoze Matris, Simetrik ve Yarı-Simetrik Matris.

Çok sık uygulanan bir matris işlemi, transpoze A' , veya A^T matrisine geçişdir; bu matris, verilen $A = (a_{ik})$ matrisinde "satır ve sütunlar aralarında değiştirilerek" elde edilir, örneğin,

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix}, \quad A' = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{pmatrix}.$$

Kare matriste bu işlem, birinci köşegeni göre simetri almağa denktir; birinci köşegen, matrisin sol üst köşesinden sağ alt köşesine giden köşegen olup bunun üzerinde bulunan elemanlar eşit indislerle sahiptirler : $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$. Bu işlem esnasında, birinci köşegen üzerindeki elemanlar sabit kalırlar :

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ -2 & 3 & -1 \end{pmatrix}, \quad A' = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -2 \\ -3 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

A' transpoze matrisinin elemanları a'_{ik} ile gösterilir ise, şu yazılabilir :

$$\mathbf{A}' = (a'_{ik}) = (a_{ki}). \quad (15)$$

Bu durumda şu bağıntı elde edilir :

$$(\mathbf{A}')' = \mathbf{A}. \quad (16)$$

$\mathbf{a}$ sütun vektörü, transpoze edilerek $\mathbf{a}'$ satır vektörü, ve ters olarak satır vektörden sütun vektörü elde edilir :

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}' = (a_1, a_2, \dots, a_n).$$

$\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{x}, \mathbf{y}$ gibi indisi olmayan harfler, sütun matrislerini (sütun matrisleri olarak vektörleri) gösterir. Satır matrisleri (satır matrisleri olarak vektörler) ise, transpoze işlemi ile $\mathbf{a}', \mathbf{b}', \mathbf{x}', \mathbf{y}'$ olarak gösterilir. Burada $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ matrislerinin $\mathbf{a}', \mathbf{b}'$ satır vektörleri ayrıcalık gösterir ve buradaki üst indisler satır karakteri belirtirler. Yer darlığından dolayı sütunlar aşağıdaki şekilde de yazılabilir :

$$\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)'$$

Transpozese eşit olan bir kare matrise, "simetrik" denir :

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}' \quad \text{veya} \quad a_{ik} = a_{ki}. \quad (17)$$

Birinci köşegene göre simetrik elemanlar, birbirine eşittir; buna karşılık köşegen üzerindeki a_{ii} elemanları herhangi olabilir.

Örnek :

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -1 \\ 3 & 4 & 5 \\ -1 & 5 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{A}'. \quad \begin{matrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 5 \\ 1 & 5 & 0 \end{matrix}$$

Simetrik matrisler, ve özellikle reel simetrik olanlar, uygulamada önemli bir rol oynarlar. Bir çok teknik problemler belirli simetri özelliklerine sahiptirler; ve bu özellikler, simetrik katsayılar tablosu ile ifade edilirler. Diğer taraftan, reel simetrik matrislerin, özellikle, Bölüm IV de incelenecek özdeğer problemleri ile ilgili bir çok dikkate değer matematik özellikleri vardır.

Bir kare matrise, transpozese ters işaretli olarak eşit olması halinde "yarı simetrik" veya "antimetrik" denir.

$$\mathbf{A} = -\mathbf{A}' \quad \text{veya} \quad a_{ik} = -a_{ki}, \quad a_{ii} = 0. \quad (18)$$

Bu halde birinci köşegene göre simetrik elemanlar, ters işaret ile eşittirler; köşegen üzerindeki elemanlar ise sıfırdır. Örnek :

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ -2 & 2 & -1 \\ -4 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}' = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -4 \\ 2 & 0 & 1 \\ 4 & -1 & 0 \end{pmatrix} = -\mathbf{A}.$$

Her kare matris $\mathbf{A}$, biri simetrik ve diğeri yarı simetrik iki matrisin toplamı şeklinde ifade edilebilir :

$$\boxed{\mathbf{A} = \mathbf{A}_S + \mathbf{A}_A} \quad (19)$$

burada,

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{A}_S &= \frac{1}{2} (\mathbf{A} + \mathbf{A}') \\ \mathbf{A}_A &= \frac{1}{2} (\mathbf{A} - \mathbf{A}') \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

Örnek :

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -3 \\ 3 & 7 & 8 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -3 \\ 2 & 7 & 4 \\ -3 & 4 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 4 \\ 1 & -4 & 0 \end{pmatrix}.$$

1.5. Köşegen Matris, Skaler Matris ve Birim Matris.

Birinci köşegeni dışındaki bütün elemanları sıfır ve köşegen üzerindeki d_i elemanları herhangi olan bir kare matrise "köşegen matris" adı verilir :

$$\mathbf{D}_n = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & d_n \end{pmatrix} = \text{Diag}(d_i). \quad (21)$$

Burada da, d_i sayılarının düzenlenmiş bir sistemi bahis konusu olup bu sayılar bir vektörün bileşenleri olarak düşünülebilir. Burada, bunun yapılmamasının nedeni, d_i sayılarından oluşan sistemin lineer dönüşümünün yapılmamış olmasıdır; 2.3'e bakınız.

Bir köşegen matris ile lineer dönüşüm, aşağıdaki gibi basit bir şekilde olur :

$$\left. \begin{aligned} d_1 x_1 &= y_1 \\ d_2 x_2 &= y_2 \\ \vdots & \vdots \\ d_n x_n &= y_n \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

Yani D köşegen matrisi ile bir x vektörünün Dx çarpımı, d_i ler ile bileşenlerin çarpımından oluşur. Bu durum köşegen matrisin, matris hesabındaki rolünü belirler. Bir köşegen matris, daima simetriktr : $D = D'$.

Köşegen matrisin elemanları eşit ise, $d_i = k$, bir "skaler matris" den bahis edilir; çünkü bu, ilerde görüleceği gibi, bir diğer matris ile çarpımı halinde, skaler k çarpanı gibi işleme girer. Denklem (22) de olduğu gibi, bir x vektörü ile çarpımı halinde bu matris ve kural uygulanır. Nihayet, birinci köşegen üzerindeki bütün elemanlar bire eşit ise, "birim matris" I , daha doğrusu, aşağıdaki n -sıralı birim matris elde edilir :

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}. \quad (23)$$

Birim matris ile dönüşümde x vektörü sabit kalır :

$$Ix = x; \quad (24)$$

Bu durumda, "özdeş dönüşüm"den bahis edilir. Ayrıca, ilerde görüleceği gibi matris çarpımında birim matris, bir yerine kullanılır. Skaler matris ise, denklem (14) gereğince, şöyle yazılabilir :

$$kI = Ik$$

1.6. Lineer Bağımlılık, Rank, Tekil Matris, Determinant.

Herbiri n adet a_k bileşenli p adet a_k vektörlerinden oluşan bir sistem verilmiş olsun. Aşağıdaki şekilde bir lineer bağıntının var olmasını sağlamak üzere, hepsi birden sıfır olmayan, p adet c_k sabitleri bulunabiliyor ise, bu vektörlere "lineer bağımlı" vektörler denir :

$$c_1 a_1 + c_2 a_2 + \dots + c_p a_p = 0 \quad (25)$$

Ancak denklem (25) den $c_1 = c_2 = \dots = c_p = 0$ bulunuyor ise, vektörlere "lineer bağımsız" denir. Denklem (25) in ikinci tarafındaki "sıfır" değeri "sıfır vektörünü" göstermektedir. Yani vektörlerin lineer bağımlılığından şu anlaşılır : Bunların uygun bir lineer kombinasyonu ile sıfır vektörü elde edilebilir. Örnek :

$$a_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, a_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, a_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Burada $a_1 + 2a_2 - a_3 = 0$ dir. Yani vektörler lineer bağımlıdır.

Lineer bağımlılık halinde, c_k sabitlerinden en az bir tanesi sıfırdan farklıdır, örneğin $c_k \neq 0$. Bu durumda ilgili a_k vektörü, lineer olarak diğerleri cinsinden ifade edilebilir, bunun için denklem (25) i, a_k ye göre çözeriz. Örneğimizde $a_3 = a_1 + 2a_2$ veya $a_1 = -2a_2 + a_3$ veya $a_2 = -1/2 a_3$ olduğu kolayca görülebilir. Bir vektör sisteminde sıfır vektörü de var ise, bu sisteme lineer bağımlı denir; çünkü bu halde ilgili sabit $\neq 0$ ve diğerleri $= 0$ alınarak denklem (25) sağlanır.

Genellikle, bir vektör sisteminin lineer bağımlı olup olmadığı kolayca görülemez. Ancak belirli özel hallerde bu mümkündür. Özellikle aşağıdaki üç birim vektör (genel olarak birim matrisin n adet sütun vektörleri) lineer bağımsızdır :

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Çünkü

$$c_1 e_1 + c_2 e_2 + c_3 e_3 = \begin{pmatrix} c_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ c_2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

den $c_1 = c_2 = c_3 = 0$ bulunur. Birim vektörlerden, lineer kombinasyon ile, sıfır vektörünün oluşturulması imkansızdır.

p adet a_k vektöründen oluşan bir vektör sisteminde belirli "maximum sayıda" lineer bağımsız vektörler vardır; ve bu sayıya vektör sisteminin "rank"ı r adı verilir, burada

$$0 \leq r \leq p. \quad (26)$$

geçerlidir. Eğer bütün vektörler sıfır ise, $r = 0$ olur.

Verilen ilk örnekte $r = 2$ dir; çünkü, vektörlerin ikisi lineer bağımsız, üçü birden lineer bağımlıdır. Aşağıdaki sistemin rankı yine 2 dir :

$$a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}, a_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, a_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Burada a_1, a_2 vektörleri lineer bağımlıdır : $a_1 + a_2 = 0$. Fakat a_1, a_3 ve a_2, a_3 vektörleri bağımsızdır; buna karşılık üçü birden bağımlıdır :

$$a_1 + a_2 + 0 \cdot a_3 = 0.$$

$$a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}, a_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, a_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix}$$

sisteminde $r = 1$ dir; çünkü burada vektörler, ikişer ikişer bağımlıdır. Yani bir vektör sisteminin rankı, sistemin "temel farklı vektörlerinin" sayısını gösterir.

Bir $m \times n$ -matrisi $A = (a_{ik})$, n adet sütun vektöründen veya m adet satır vektöründen oluşan bir sistem olarak gözönüne alınabilir. Her iki sistemin belirli bir rankı olup, buna matrisin sütun rankı veya satır rankı denebilir. Ancak Bölüm 2 de, bu iki rank sayısının çakışık olduğu, yani matrisin tek bir rankı olduğu gösterilecektir. Buna göre, bu rank en fazla, n ve m sayılarından küçüğüne eşit olur :

$$r \leq \min(m, n), \quad (27)$$

ve sıfır matrisi halinde sıfırdır. Verilen bir matrise ait r rankının, uygulamada bulunması Bölüm 2 de ele alınacaktır :

Sütunları (ve satırları) lineer bağımlı olan kare matrise "tekil" denir; aksi halde "tekil-olmayan" veya "düzgün" adını alır.

$$d = n - r \quad (28)$$

farkına, n sıralı matrisin "defekt" veya "rank düşmesi" veya "sıfırlılığı" denir; bu önemli bir kavramdır.

Her kare matris A için, bilindiği gibi, a_{ik} elemanlarından belirli kural uyarınca hesaplanarak bulunan bir sayı olan "determinant" vardır. Bu ise, aşağıdaki işaretlerden biri ile gösterilir :

$$\det A = \det(a_{ik}) = A.$$

burada düzey çizgi ile mutlak değer işareti karıştırılmamalıdır. İki sıralı bir matris için

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21} = A,$$

olup bu, malesef, daha yüksek mertebeli determinantlara uygulanamayan bir kuraldır. ($n = 3$ için Sarrus kuralı vardır). Genel determinant hesabı da Bölüm 2 de ele alınacaktır. Katsayılar şemasının (matrisin)

satır veya sütunları lineer bağımlı ise, yani matris tekil ise, determinantın sıfır olacağı bilinmektedir; böylece "tekil" bir matris

$$\det A = 0, \quad (29)$$

ile bellidir; buna karşılık tekil olmayan A halinde daima $\det A \neq 0$ olur.

"Kare olmayan" $m \times n$ -matrisleri, ne düzgün ne de tekildir, ancak ya satırlarının ($m < n$ için) veya sütunlarının ($m > n$ için) lineer bağımsız olması, yani rank için $r = m < n$ veya $r = n < m$ 'in geçerli olması hali maximum haldir. Bu tip matrislere "satır-düzgün" veya "sütun-düzgün" adı verilir. Bunlar, bazı bakımlardan, tekil-olmayan kare matrislerin özelliklerine sahiptir; bakınız 2.2. teorem 5 ve 6. satır-düzgün kare matris, $r = m = n$, aynı zamanda sütun-düzgündür; yani düzgün = tekil-olmayan yazılabilir.

Nihayet, kare matrisin birinci köşegeni üzerindeki a_{ii} elemanlarının toplamını gösteren "iz" i de önemli bir role sahiptir : ("iz", sp ile gösterilecektir).

$$\text{sp } A = s = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}. \quad (30)$$

Bu, ilerde görüleceği gibi, matrise uygulanacak dönüşümler halinde, matrisin determinanı gibi "invariant" olur. Bu dönüşümlerde, matrisin elemanları değişirken, matrise ait det ve sp sabit kalırlar. Bunlar, bu özelliğe, kare matrise ait diğer sayısal değerler, yani Bölüm 4 de verilen "özdeğerler" ile birlikte sahiptirler : Özdeğerlerin toplamı ve çarpımından sp ve det bulunur.

2. Matris Çarpımı.

2.1. Matris Çarpımına Giriş.

Matris hesabının temeli, Cayley tarafından verilmiş matris çarpımıdır. Bu işlem, lineer dönüşümlerin ardışık uygulanması ile oluşur; burada katsayılar şeması, yani matrisler arasında, matrislerin çarpımı olarak tanımlanan belirli bir bağıntı ortaya çıkar.

$x = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ ve $y = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ vektörleri arasında, aşağıdaki bağıntı ile tanımlanan bir dönüşüm vardır :

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= a_{11} y_1 + \dots + a_{1n} y_n \\ &\vdots \\ x_m &= a_{m1} y_1 + \dots + a_{mn} y_n \end{aligned} \right\} \text{ veya } x = A y \quad (1)$$

burada $A = (a_{ik})$ mn -matrisidir. y_k bileşenleri ile, üçüncü bir $z = \{z_1, z_2, \dots, z_p\}$ vektörü arasında da aşağıdaki şekilde bir bağıntı var olsun :

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= b_{11} z_1 + \dots + b_{1p} z_p \\ &\vdots \\ y_n &= b_{n1} z_1 + \dots + b_{np} z_n \end{aligned} \right\} \text{veya } y = B z \quad (2)$$

burada $B = (b_{ik})$ np matrisidir. Şimdi x ile z arasındaki direk bağıntı istenmiş olsun. Bu bağıntı homogen lineer yani, $c = (c_{ik})$ mp -matrisi olmak üzere

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= c_{11} z_1 + \dots + c_{1p} z_p \\ &\vdots \\ x_m &= c_{m1} z_1 + \dots + c_{mp} z_p \end{aligned} \right\} \text{veya } x = C z \quad (3)$$

şeklindedir; ve şimdi verilen a_{ik} ve b_{ik} katsayıları ile bu matrisin c_{ik} elemanları bulunacaktır.

c_{ik} katsayısı, x_i ifadesindeki, yani (3) ün i -ninci denklemindeki z_k bileşenin çarpanıdır; bu ifade ise (1) den şöyle bulunur :

$$x_i = a_{i1} y_1 + \dots + a_{in} y_n,$$

burada denklem (2) gereğince her y_r in, çarpanı b_{rk} olan bir z_k bileşeni vardır; yani toplam olarak x_i , denklem (3) e göre çarpanı

$$c_{ik} = a_{i1} b_{1k} + a_{i2} b_{2k} + \dots + a_{in} b_{nk} = \sum_{r=1}^n a_{ir} b_{rk} \quad (4)$$

olan z_k büyüklüklerine sahiptir. Böylece aranan c_{ik} katsayısının belirlenmesi için, A nın i -ninci satırındaki a_{ir} elemanları ile B nin k -ninci sütunundaki b_{rk} elemanlarının skaler çarpımı bulunmuş olur. Şimdi $c = (c_{ik})$ matrisine, AB sırasında A ile B matrislerinin çarpımı denir. (1) ve (2) matris denklemlerinin özetlenmesi ile

$$x = A y = A (B z) = A B z = C z \quad (5)$$

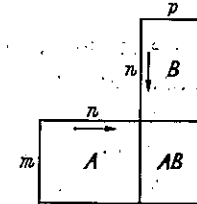
bulunur. Bunu özetliyelim :

Tanım 1 : mn -matris A ile np -matrisi B nin, verilen sırada, çarpımı AB , mp -matrisi olan $C = AB$ matrisidir; bunun c_{ik} elemanı, A nın i -ninci satırı (satır vektörü a^i) ile B nın k -ninci sütunu (sütun vektörü b_k) nın skaler çarpımı olarak (4) den bulunur; yani kısaca şudur :

$$c_{ik} = \sum_{r=1}^n a_{ir} b_{rk} = a^i b_k \quad \begin{matrix} i = 1, 2, \dots, m, \\ k = 1, 1, \dots, p. \end{matrix} \quad (4a)$$

Burada $a^i b_k$ ifadesi de, a^i satırı ile b_k sütununun bir matris çarpımı olup bunun sonucu 1.1. matrisi c_{ik} dır; yani burada c_{ik} bir sayıdır. A nın m adet satırından her biri, B nin p adet sütunundan her biri ile ve belirtilen şekilde tertiplenir ise, c çarpım matrisinin elemanları ardışık olarak ortaya çıkar. mp adet c_{ik} elemanın hesabı için $m.p.n$ adet çarpım gerekli olur; bu ise oldukça zor bir işlem olup şematik bir şekilde yapılabilir; özellikle, skaler parçımalar hesap makinasında otomatik olarak, kısmi çarpımlar yardımı ile, yapılabilir; ancak işaretlere dikkat edilmek gerekir. Hesap, toplamaları ile kontrol edilebilir.

Pratik yoldan hesap için Falk¹ tarafından ortaya atılan bir tablo yararlı olmaktadır, Şekil 2.1. Burada her çarpım elemanı c_{ik} , A nın i -ninci satırı ile, B nin k -ninci sütununun kesişme noktasında ortaya çıkar. AB çarpımının yapılabilmesi için, A nın sütun sayısı B nin satır sayısına eşit olmalıdır. Şunu söyleyebiliriz; A ile B , AB sırasında "çarpılabilir". Çarpılabilirlik bakımından, iki çarpanın sırasının değiştirilmesi ancak $m = p$ veya $m = p = n$ için olumludur. AB ve BA çarpım matrisleri, genellikle, farklıdır. BA çarpım matrisinin iki çarpanı, çarpımda farklı rol oynarlar; yani birincisi satır ikincisi sütun olarak hesaba katılır. Bu durumu birkaç örnek ile açıklayalım.



Şekil 2.1

1. Örnek :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Kare matrisler olarak 2 çarpan, 2 değişik şekilde çarpılır; ancak farklı çarpım matrisleri ortaya çıkar :

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ 5 & 12 \end{pmatrix} = AB \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 8 & -14 \end{pmatrix} = BA$$

¹ Falk, S., : Z. angew. Math. Bd. 31 (1951), S. 152.

2. Örnek :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Burada da çarpanlar iki şekilde çarpılabilir; ancak **AB** iki sıralı, **BA** ise üç sıralı bir çarpım matrisi olur :

$$\begin{array}{ccc|ccc} & & & 1 & 4 & \\ & & & 2 & 3 & \\ & & & -1 & 2 & \\ \hline 2 & 1 & 3 & 7 & 5 & \\ -1 & 0 & 2 & -3 & 0 & \end{array} = AB \quad \begin{array}{ccc|ccc} & & & 2 & 1 & -3 \\ & & & -1 & 0 & 2 \\ & & & 1 & 4 & \\ \hline 1 & 4 & & -2 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & & -4 & -1 & 7 \end{array} = BA$$

3. Örnek :

$$A = (2 \ -1 \ 3), B = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 0 & -3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$$

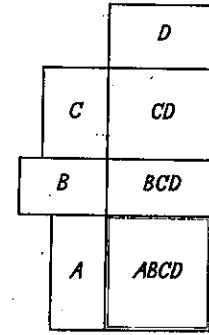
Burada **A** ile **B**, yalnız **AB** şeklinde çarpılabilir; **BA** çarpımı olanaksızdır.

$$\begin{array}{ccc|cc} & & & -2 & 1 \\ & & & 0 & -3 \\ & & & 4 & 2 \\ \hline 2 & -1 & 3 & 8 & 11 \end{array} AB = (8 \ 11)$$

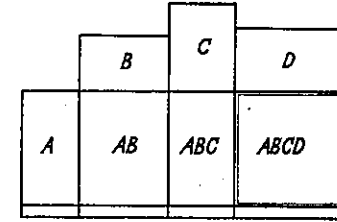
Daha geniş kapsamlı sayısal hesaplar için kontrol gereklidir; ve bunların en basit ve etkili olan Gauss'un verdiği "toplam kontrol", ya sütun-veya satır toplamı şeklinde kullanılır. **AB = C** çarpımında **A** nın satırları ek bir satır toplamı (sütun toplamlarının satırı) olarak gösterilir; bu ise, **A** nın diğer satırları gibi, **B** ile çarpılır ve böylece **C** nin ek bir satırı bulunur; bunun elemanları da **C** nin sütun elemanları toplamına eşit olur. Veya **B** çarpımına ait sütunlar, ek bir toplam sütun (satır toplamlarının sütunu) ile gösterilir. Bu ise, **B** nin diğer sütunları gibi, **A** nın satırları ile çarpılır ve böylece **C** nin ek bir sütununu verir; bunun elemanları ise **C** nin elemanları toplamına eşit olur. Çünkü **A** nın her satırı, diğer satırlardan bağımsız olarak, **C** nin karşılık gelen satırını verir; ve böylece satırlar toplanabilir. **B** nin her sütunu da, diğer sütunlardan bağımsız olarak, **C** nin karşı gelen sütununu verdiğinden, sütunların da toplanabileceği anlaşılır. Örnek :

$$\begin{array}{ccc|ccc} & & & 4 & 1 & 5 \\ & & & 2 & -2 & 0 \\ & & & -3 & -1 & -4 \\ \hline 3 & 2 & 1 & 13 & -2 & 11 \\ 5 & -1 & 2 & 12 & -5 & 17 \\ 0 & 2 & 3 & -5 & -6 & -12 \end{array} \quad \begin{array}{ccc|ccc} & & & 4 & 1 & \\ & & & 2 & -2 & \\ & & & -3 & -1 & \\ \hline 3 & 2 & 1 & 13 & -2 & \\ 5 & -1 & 2 & 12 & -5 & \\ 0 & 2 & 3 & -5 & -7 & \\ \hline 8 & 3 & 6 & 20 & -4 & \end{array}$$

Falk tablosu, her matrisin ve her kısmi çarpımın tek bir defa yazılacağı, ikiden fazla çarpımdan oluşan çarpımlar için de uygundur; örneğin **P=ABCD** ye **D** çarpanı ile başlanır ise Şekil 2.2, deki tablo elde edilir; burada satır toplamı kontrolü uygulanmıştır. Görüleceği gibi, çarpım matrisinin satır sayısı **A** ninkine eşittir, sütun sayısı ise **D** ninkine eşittir; ve ayrıca ikinci çarpanın her sütunu (ilk çarpanın her satırı) çarpma kendi başına katılmıştır. Hesaba **A** matrisi ile başlanır ise, tablo aşağıya değil sağa doğru gelişir ve bir sütun toplamı ile kontrol edilir, Şekil 2.3.



Şekil 2.2

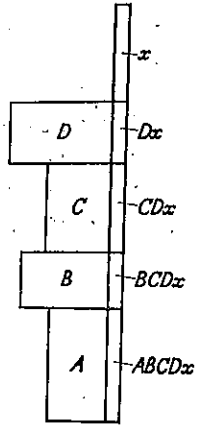


Şekil 2.3

Burada şuna dikkat edilmelidir : $x = ABz$ bağıntısında z vektörü sayısal olarak verilmiş ise, $C = AB$ çarpım matrisinin ayrıca hesaplanması açık bir fayda sağlamaz. Buna karşılık, önce $y = Bz$ vektörü **B** matrisi ile z vektörünün çarpımından ve $x = Ay$ vektörü ise **A** matrisinin y vektörü ile çarpımından bulunmalıdır. Yani bir vektöre ait matris ile çalşılr ve böylece işlemlerden kazanılır. $C = AB$ nin bulunmasındaki $m \cdot n \cdot p$ adet çarpıma ve Cz nin bulunmasındaki $m \cdot p$ adet çarpıma karşılık, burada toplam çarpım sayısı $M = n \cdot p + m \cdot n = n(m + p)$ dir. $m = n = p$ halinde, bir tarafta $n^3 + n^2$ adet diğer tarafta $2n^2$ adet çarpım olacaktır. Bu durum daha uzun çarpım zincirleri için geçerlidir. İlgili vektöre ait matris çarpanları, daima çarpım matrisinin hesaplanmasına tercih edilmelidir. Yani

$$z = ABCDx = Px$$

dönüşümü, daima ara vektörlerin hesaplanması ile yapılmalıdır; fakat $ABCD = P$ çarpım matrisi esas olarak ele alınmalıdır, Şekil 2.4.



Şekil 2.4

2.2. Matris Çarpımı ile İlgili Teoremler.

Matris çarpımı, bazı bakımlardan adi sayıların çarpımı özelliklerine sahip iken, bazı bakımlardan da tamamen değişik özellikler gösterir. Göze en çok çarpan ve bir çok defa belirtilmiş olan fark şudur :

Teorem 1 : Matris çarpımı komütatif değildir; yani çarpılabilen iki matris için AB ve BA çarpımları yapılabiliyor ise, genellikle

$$\boxed{\text{Genel olarak: } AB \neq BA} \quad (6)$$

Yani çarpanların sırası önemlidir; matrislerin çarpımında şuna dikkat edilmelidir: bir matris, diğer bir matris ile sağdan veya soldan çarpılabilir. Özellikle bir denklemde her iki taraf, aynı şekilde, bir matris ile çarpılmalıdır. Örneğin iki tarafta ya sağdan veya soldan çarpılmalıdır. $ABC \dots N$ çarpımlar zincirinde, yalnız dış uçlar, yani A ve N , bir diğer P matrisi ile çarpılabilir; böylece A solundan ve N de sağından çarpılmış olur. Çarpan matrislerin yer değiştirmesi denklem (6) nedeni ile, genellikle, yapılamaz.

Kare matrislerde özel hallerde, $AB = BA$ olabilir; bu halde, değişebilen = komütatif A, B matrisleri ortaya çıkar. Örnek :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}, AB = BA = \begin{pmatrix} -8 & -7 \\ 21 & 6 \end{pmatrix}.$$

Eşit mertebeli köşegen matrisler, komütatif matrislerdir, yani daima, birbirleri ile değiştirilebilir; ve $A = \text{Diag}(a_i)$, $B = \text{Diag}(b_i)$ için :

$$C = AB = BA = \text{Diag}(a_i b_i).$$

bulunur. Adi sayılarda olduğu gibi şu geçerlidir.

Teorem 2 : Matris çarpımı, assosiyatif ve distribütif tir; yani

$$(AB)C = A(BC) = ABC, \quad (7)$$

$$(A + B)C = AC + BC, \quad (8a)$$

$$C(A + B) = CA + CB. \quad (8b)$$

Adi sayılarda olduğu gibi, çok katlı çarpımlarda ardışık sıra değiştirilebilir; örneğin, denklem (7) gereğince parantezler kaldırılabilir ve denk-

lem (8) gereğince, cebirde olduğu gibi parantezler açılabilir. Her iki özellik, çarpım matrisinin tanımı (4) den doğmaktadır; örneğin;

$$(AB)C = \left(\sum_s \left(\sum_r a_{ir} b_{rs} \right) c_{sk} \right) = \left(\sum_r \sum_s a_{ir} b_{rs} c_{sk} \right) = \left(\sum_r a_{ir} \sum_s b_{rs} c_{sk} \right) = A(BC).$$

Matrisler ile işlemde "çarpımların tranpoze" si kuralı büyük önem taşır; bu kurala göre

$$\boxed{(AB)' = B' A'} \quad (9)$$

veya daha genel olarak

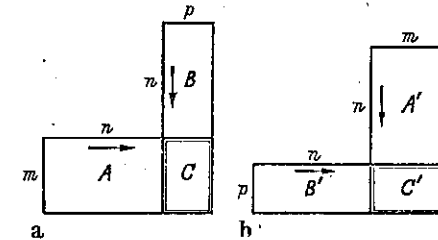
$$(ABC \dots N)' = N' \dots C' B' A'. \quad (9a)$$

dır. Bu kural, çarpım tanımlarından ortaya çıkar :

$$C = AB = (c_{ik}) = \left(\sum_r a_{ir} b_{rk} \right)$$

$$C' = (AB)' = (c_{ki}) = \left(\sum_r a_{kr} b_{ri} \right) = \left(\sum_r b'_{ir} a'_{rk} \right) = B' A'.$$

Ayrıca, çok basit olarak, çarpım tablomuzdan da bulunur; bunun için Şekil 2.5. ters çevrilir.



Şekil 2.5

Determinant için ispatlanan aşağıdaki teorem, burada ispatsız olarak, verilecektir¹ :

Teorem 3 : İki kare matrisin çarpımı AB matrisinin determinantı $\det(AB)$, iki çarpanın determinantlarının çarpımına eşittir :

¹ Bak. Schmeidler, W : Determinanten und Matrizen [12], S : 22-23.

$$\boxed{\det(AB) = \det A \cdot \det B = A \cdot B} \quad (10a)$$

ve bu neden ile, ayrıca şu geçerli olur :

$$\boxed{\det(AB) = \det(BA) = A \cdot B} \quad (10a)$$

Benzer şekilde kare olmayan iki matrisin, $m \times n$ -matrisi A ile $n \times m$ -matrisi B nin, çarpımın izi şöyle bir özelliğe sahiptir :

$$\boxed{\text{sp}(AB) = \text{sp}(BA)} \quad (11)$$

$$\text{sp}(AB) = \sum_{i=1}^m a_i b_i = \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{ki} = \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^m b_{ki} a_{ik} = \sum_{k=1}^n b_k a_k = \text{sp}(BA).$$

Örnek :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -1 & 4 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 5 \\ 3 & -2 \end{pmatrix},$$

$$AB = \begin{pmatrix} -8 & 15 \\ 1 & 14 \end{pmatrix}, \quad BA = \begin{pmatrix} 0 & 9 & 1 \\ -7 & 19 & 12 \\ 8 & -16 & -13 \end{pmatrix}, \quad \text{sp}(AB) = \text{sp}(BA) = 6.$$

Adi sayılar ile hesap arasındaki bir fark, özellikle belirtilecektir; bu şudur :

Bir matris çarpımı, çarpanlardan biri sıfır olmasa bile, sıfıra eşit olabilir :

$$\boxed{AB = 0} \quad \text{burada} \quad A \neq 0, B \neq 0. \quad (12)$$

Örnek :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 3 & -5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{ccc|cc} 1 & -2 & 2 & 2 & 4 \\ -2 & 3 & -5 & 3 & 6 \\ & & & 1 & 2 \\ \hline 1 & -2 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & -5 & 0 & 0 \end{array} = AB.$$

A bir $m \times n$ -matrisi, B bir $n \times p$ -matrisi olsun. Bu durumda

$$AB = A(b_1, b_2, \dots, b_p) = (Ab_1, Ab_2, \dots, Ab_p) = (0 \ 0 \ \dots \ 0) = 0$$

den

$$\boxed{Ab_k = 0} \quad k = 1, 2, \dots, p. \quad (13)$$

elde olunur. Bu lineer homogen denklem sistemi, a_i sütunları A ya lineer bağımlı ise, triviyal-olmayan $b_k \neq 0$ çözümlerine sahiptir; zira a_i sütunları ve b_k nin b_{ik} bileşenleri halinde, denklem (13) lineer bağımlılık koşulunu gösteren

$$a_1 b_{1k} + a_2 b_{2k} + \dots + a_n b_{nk} = 0, \quad (13a)$$

şeklinde yazılabilir. $B'A' = 0$ transpoze sistemine geçilerek, B nin satırlarının lineer bağımlı olduğu anlaşılır.

Teorem 4 : A nın, sütunları lineer bağımlı ise, $m \times n$ -matrisi $A \neq 0$ için, $AB = 0$ olacak şekilde $B \neq 0$ gibi $n \times p$ -matrisleri vardır. B nin satırları lineer bağımlı ise, $n \times p$ -matrisi $B \neq 0$ için, $AB = 0$ olmak üzere, $A \neq 0$ gibi $m \times n$ -matrisleri vardır.

İlerde (8-de) homogen denklem sistemi (13) için, $d_A = n - r_A$ adet lineer bağımsız b_k çözümlerinin var olduğu görülecektir. Böylece B nin rankı, en fazla A nın rank düşmesi $n - r_A$ ya eşit olur; yani $r_B \leq n - r_A$ veya

$$\boxed{r_A + r_B \leq n}. \quad (14)$$

Teorem 4 e ek olarak şunu verelim :

Teorem 5 : $A \neq 0$ halinde, $AB = 0$ dan $B = 0$ bulunması için, A sütun-düzgün (özellikle karesel tekil-olmayan) olmalıdır. $B \neq 0$ halinde, $AB = 0$ dan $A = 0$ bulunması için, B satır-düzgün (özellikle karesel tekil-olmayan) olmalıdır.

Buradan aşağıdaki önemli ve ilginç teorem çıkar :

Teorem 6 : Yalnız ve yalnız A sütun-düzgün (özellikle karesel, tekil-olmayan) ise, $AB = AC$ den, $B = C$ bulunur.

Zira

$$AB - AC = A(B - C) = 0$$

den $B - C = 0$ yani $B = C$ bulunur. Matrisler ile hesaplamalarda, buna dikkat etmek gerekir. Düzgün-olmayan matrisler, bir çok bakımdan,

¹ Kare olmayan matrisli denklem sistemlerinde rank düşmesi d olarak, bilinmeyenler sayısı ile matris rankının farkı alınır.

adi sayılardaki sıfıra benzer özellikler gösterirler. Bunlar, özellikle kısıtlanamaz. Örnek :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 3 & 1 & -2 \\ 5 & -3 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ -6 & 5 & -9 \\ -3 & 6 & -5 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 6 \\ 2 & -3 & 7 \\ 4 & -1 & 9 \end{pmatrix}.$$

Burada gerçekten

$$AB = AC = \begin{pmatrix} 7 & 6 & 10 \\ 3 & 5 & 7 \\ 17 & 17 & 27 \end{pmatrix} \quad \text{burada } B \neq C.$$

bulunur.

2.3. Köşegen ve İlgili Diğer Matrisler.

Bir A matrisi ile, bir köşegen matris $D = \text{Diag.}(d_i)$ nin çarpımı kolayca yapılabilir. Kare matris A halinde

$$DA = \begin{pmatrix} d_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} \dots a_{1n} \\ \dots \dots \dots \\ a_{n1} \dots a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 a_{11} \dots d_1 a_{1n} \\ \dots \dots \dots \\ d_n a_{n1} \dots d_n a_{nn} \end{pmatrix}, \quad (15a)$$

$$AD = \begin{pmatrix} a_{11} \dots a_{1n} \\ \dots \dots \dots \\ a_{n1} \dots a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 a_{11} \cdot d_n a_{1n} \\ \vdots \vdots \vdots \\ d_1 a_{n1} \cdot d_n a_{nn} \end{pmatrix}. \quad (15b)$$

DA , a_{ik} lar ile d_i çarpanlarının satır şeklinde çarpımı, AD ise a_{ik} ların d_k çarpanları ile sütun şeklinde çarpılmasını verir. Kare -olmayan A halinde, çarpılabilme olanağı var olmalıdır; yani m -matrisi A için, DA halinde D , m sıralı, AD halinde ise n sıralı bir köşegen matris olur.

n sıralı bir kare matris A nın, n sıralı birim matris I ile çarpımında denklem (15) in özel hali olarak hemen görüleceği gibi, A matrisi çarpım sırasından bağımsız ve değişimsiz kalır :

$$IA = AI = A$$

(16)

I , matris çarpımında bir rolünü oynar. m satır ve n sütunlu kare-olmayan A matrisi halinde, AI de I , n sıralı, IA da ise m sıralı birim matrisi gösterir.

Tekil-olmayan kare matris J_{ik} , I nın, i -inci ve k -nıncı satırın (veya sütunun) değiştirilmesi ile elde edilen matris olsun. Bu, A kare matris ile çarpılır ise,

$J_{ik}A$ halinde, i -inci satır ile k -nıncı satırın yer değiştirmesini

AJ_{ik} halinde, i -inci sütun ile k -nıncı sütunun yer değiştirmesini

verir. Örnek :

$$J_{25}A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^1 \\ a^2 \\ a^3 \\ a^4 \\ a^5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^1 \\ a^5 \\ a^3 \\ a^4 \\ a^2 \end{pmatrix}.$$

Bu da her hangi m -matrisi A ya genişletilebilir; burada J_{ik} , birinci halde m sıralı, ikinci halde n sıralı kare matrisidir.

Benzer şekilde, tekil-olmayan kare matris K_{ik} da, $i \neq k$ dışında, I matrisinde i ve k nın kesişme noktasındaki sıfır yerine istenen c sayısı konularak bulunur;

$K_{ik}A$ halinde, k -ıncı satırın c katı i -inciye eklenir;

AK_{ik} halinde, i -inci sütunun c katı k -nıncıya eklenir.

Örnek :

$$K_{24}A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^1 \\ a^2 \\ a^3 \\ a^4 \\ a^5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^1 \\ a^2 + ca^4 \\ a^3 \\ a^4 \\ a^5 \end{pmatrix}.$$

J_{ik} , K_{ik} matrisleri, elemanter matris dönüşümlerini gösterirler; bunlar ise, özellikle, lineer denklem sistemlerinin çözümlerinde kullanılır. Bilindiği gibi, son dönüşümler, $\det A$ nın değerini değiştirmez ve bu durum yukardaki paragrafta, teorem 3 den, $\det K_{ik} = 1$ nedeni ile açıktır.

2.4. Skaler Çarpım, Reel Vektörlerin Şiddet ve Açıları.

n adet a_i ve b_i bileşenli a , b reel vektörlerinin skaler çarpımı, bilindiği gibi, şöyle olur :

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n. \quad (17)$$

Bu iki vektör, iki sütun matrisi şeklinde verilmiş ise, matris hesabına göre, skaler çarpımın hesaplanması, a veya b sütununun bir satıra dönüştürülmesini gerektirir. Bu da transpoze işlemi ile yapılır. Yani çarpım şu iki şekilden biri ile gösterilebilir :

$$a' b = (a_1, \dots, a_n) \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n, \quad (18a)$$

$$b' a = (b_1, \dots, b_n) \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n. \quad (18b)$$

Bu durumda

$$a' b = b' a, \quad (19)$$

olup bu, aynı zamanda, bir sayının transpozisinin gene kendisi olduğu dikkate alınarak, bir çarpımın transpoze edilmesi ile ilgili genel kural (9) dan da elde edilir : $(a'b)' = ba$

Reel a vektörünün kendisi ile skaler çarpımı,

$$a' a = a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 \quad (20)$$

reel sayıların karelerinin toplamı olarak pozitif ve yalnız $a = 0$, yani sıfır vektörü için, sıfır olur. a' a'nın pozitif kare köküne vektörün (Euklid) normu, şiddeti veya uzunluğu denir; üç boyutlu geometrik uzaydaki anlamın genelleştirilmiş hali şöyle yazılabilir :

$$|a| = \sqrt{a' a} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}. \quad (21)$$

Uzunluğu 1 olan vektörlere "birim vektörler" denir. Keyfi uzunluktaki bir a vektörü, normuna bölünerek, 1 uzunluğuna indirgenilerek "normlaştırılır".

Bir çok bakımdan önemli olan bir bağıntı da Cauchy-Schwarz eşitsizliğidir :

$$(a' b)^2 \leq (a' a) (b' b), \quad (22)$$

daha açık yazılır ise

$$(\sum a_i b_i)^2 \leq (\sum a_i^2) (\sum b_i^2). \quad (22')$$

(22) den eşitsizlik şu şekilde de yazılabilir :

$$|a' b| \leq |a| |b|. \quad (22a)$$

İspat için, önce reel keyfi λ faktörü ile,

$$|a - \lambda b|^2 = (a - \lambda b)' (a - \lambda b) = a' a - 2\lambda a' b + \lambda^2 b' b \geq 0.$$

yazılabilir; burada

$$\lambda = a' b / b' b,$$

alınır ise, (22) eşitsizliği elde edilir. Burada eşit işareti $a = \lambda b$ için, yani, iki vektörün orantılı olması hali içindir. Böylece $a' = \lambda b'$ ve b ile sağdan çarpım sonucunda yukarıda verilen özel λ -değeri bulunur.

(22 a) ya göre, üç boyutlu vektör hesabına benzer olarak n boyutlu a, b reel vektörleri için de a ile b arasında bir φ açısı, aşağıdaki gibi tanımlanır :

$$\cos \varphi = \frac{a' b}{|a| |b|} \quad (0 \leq \varphi \leq \pi). \quad (23)$$

a, b vektörlerine,

$$a' b = 0. \quad (24)$$

ise, "ortogonal" denir. $a = \lambda b$ için, bunlar birbirine "paralel" olur. Örnek :

$$\begin{aligned} a' &= (3, 0, 4, -5), & |a| &= \sqrt{50} \\ b' &= (-3, 2, 1, 2), & |b| &= \sqrt{18} \\ a' b &= -15, & |a| |b| &= 30, \cos \varphi = -0,5, \varphi = 2\pi/3 = 120^\circ. \end{aligned}$$

Üç boyutlu vektör hesabında kullanılan, üçgen eşitsizliği :

$$|a + b| \leq |a| + |b| \quad (25)$$

n -boyutlu vektör uzayı için de geçerlidir. İspat :

$$|a + b|^2 = (a + b)' (a + b) = a' a + 2a' b + b' b \leq$$

$$|a|^2 + 2|a| |b| + |b|^2 \leq |a|^2 + 2|a| |b| + |b|^2 = (|a| + |b|)^2,$$

burada, ikinci satırda Schwarz eşitsizliği (22 a) kullanılmıştır.

2.5. Diyakik Çarpım.

a, b vektörlerinin (sütunlarının) $a'b$ şeklindeki skaler çarpımı yanında, ikinci imkân olarak sütun kere satır şeklindeki bağıntı yani "diyakik çarpım $a'b'$ vardır; burada vektörler farklı boyuttan olabilir.

$a = (a_1, \dots, a_m)'$, ve $b = (b_1, \dots, b_n)'$, m ve n boyutlu iki vektör (sütun) ise,

$$ab' = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} (b_1, \dots, b_n) = \begin{pmatrix} a_1 b_1 \dots a_1 b_n \\ \dots \dots \dots \\ a_m b_1 \dots a_m b_n \end{pmatrix} = C = (c_{ik}) \quad (26)$$

bir mn -matrisi olup elemanları

$$c_{ik} = a_i b_k, \quad (27)$$

dır; bu ise $m \cdot n$ tane sayısal çarpım, yani çok basit tipte matrisdir: C nin her c_k sütunu bir ve aynı a sütununun bir katı ve her c^i satırı bir ve aynı b' nün bir katıdır:

$$\begin{matrix} c_k = b_k a \\ c^i = a_i b' \end{matrix} \quad \text{burada} \quad C = a b' \quad (28)$$

bu ise, derhal

$$ab' = a (b_1, \dots, b_n) = (b_1 a, \dots, b_n a) \\ = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} b' = \begin{pmatrix} a_1 b' \\ \vdots \\ a_m b' \end{pmatrix}$$

den çıkar. Yani $C = a b'$ matrisi, sıfır matrisine ait sıfır rankı dışında, mümkün olan en küçük ranka sahiptir:

$$r_C = 1, \quad (29)$$

$m = n$ ise, $C = a b'$ karesel tekil olur; ve rank düşmesi $d = n - 1$ olur. Yalnız determinant değil, ($\det C = 0$), matrisde bulunan her iki sıralı alt-determinant da sıfır olur:

$$\begin{vmatrix} a_i b_k & a_i b_l \\ a_j b_k & a_j b_l \end{vmatrix} = 0.$$

Yalnız birinci mertebeli determinantlar, da bizzat $a_i b_k$ elemanları sıfıra eşit değildir, ($a = 0$ veya $b = 0$ triviyal hali dışında).

Skaler çarpımda $a'b = b'a$ olmasına karşılık, burada sıranın değiştirilmesi ile transpoze matrisi için:

$$ba' = (ab')' = C' \quad (30)$$

Örnek: $a = (1 - 2 \ 3)'$ $b = (2 \ 1 - 1)'$

$$ab' = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} (2 \ 1 - 1) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -4 & -2 & 2 \\ 6 & 3 & -3 \end{pmatrix},$$

$$ba' = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} (1 - 2 \ 3) = \begin{pmatrix} 2-4 & 6 \\ 1-2 & 3 \\ -1 & 2-3 \end{pmatrix}.$$

Skaler ve diyadik çarpımlar, $C = AB$ matris çarpımı ifadesi için de kullanılabilir. Bu amaç ile çarpanlar ya sütun vektörlerinin satırları veya satır vektörlerinin sütunları şeklinde yazılır; veya şunu yazabiliriz:

$$C = AB = \begin{pmatrix} a^1 \\ \vdots \\ a^m \end{pmatrix} (b_1, \dots, b_p) = \begin{pmatrix} a^1 b_1 \dots a^1 b_p \\ \dots \dots \dots \\ a^m b_1 \dots a^m b_p \end{pmatrix} \quad (31)$$

Çarpım, burada, diyadik çarpım, yani mp -matrisi şeklinde olmak ile beraber, bunun elemanları gerçek diyadik çarpımdaki gibi sayısal çarpımlar olmayıp skaler çarpımlardır:

$$c_{ik} = a^i b_k, \quad (32)$$

bu ise, çarpım matrisin tanımında, denklem (4 a) da kullanılmış olan bir yazış şeklidir. Veya şöyle yazabiliriz:

$$C = AB = (a_1, \dots, a_n) \begin{pmatrix} b^1 \\ \vdots \\ b^n \end{pmatrix} = a_1 b^1 + a_2 b^2 + \dots + a_n b^n$$

$$AB = a_1 b^1 + a_2 b^2 + \dots + a_n b^n \quad (33)$$

Çarpım, skaler çarpım olmakla beraber, elemanları sayısal çarpımlar değil, diyadik çarpımlardır; yani 1 ranklı mp -matrislerdir. Buna göre, bir matris çarpımı, diyadik çarpımların toplamı olarak gösterilebilir. — Herhangi tek bir matrisin de bu şekilde gösterilebileceği ve diyadik çarpımlara ayrılacağı Bölüm 2 de lineer denklem sistemleri incelenirken, belirtilecektir:

2.6. Kuvvetler ve Polinomlar.

Kare matris A nın kendisi ile p defa çarpılması sonucu p -inci kuvvet A^p elde edilir; burada p pozitif tam sayıdır. Böylece pozitif tam p , q sayıları ile şunlar yazılabilir:

$$\boxed{A^p A^q = A^q A^p = A^{p+q}} \quad (34)$$

Aşağıdaki paragrafta görüleceği gibi, bu kural, tekil olmayan A halinde negatif tam sayılar içinde geçerlidir (bak 3.1.).

$D = \text{Diag}(d_i)$ köşegen matrislerinin kuvvetlerinin alınması çok basittir. Çünkü burada, kolayca görüleceği gibi, elemanları d_i^2 olan D^2 de, köşegendir; genel olarak pozitif tam sayı p için şu elde edilir :

$$\boxed{D^p = \text{Diag}(d_i^p)} \quad (35)$$

Bu tam sayı olmayan kuvvetler için de geçerlidir; örneğin

$$\boxed{D^{1/2} = \text{Diag}(\sqrt{d_i})} \quad (36)$$

burada $\sqrt{d_i}$, d_i nin pozitif kabul edilen kare kökleri olup bunlar, yalnız $d_i \geq 0$ halinde reeldirler. Buna göre, genel A matrisinin kare kökünün alınması, daha geniş bilgiler gerektirir ve ancak daha ilerde yapılacaktır (Bak 16.4 ve 20.4).

Pozitif tam sayı matris kuvvetleri yardımı ile, bir matrisin tam rasyonel fonksiyonları, yani matris polinomları tanımlanır. A , n -sıralı bir kare matris ve

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_m x^m$$

a_i katsayılı x skaler değişkenine göre m -inci dereceden bir polinom ise, bu polinom için

$$\boxed{B = p(A) = a_0 I + a_1 A + a_2 A^2 + \dots + a_m A^m} \quad (37)$$

şeklinde n -sıralı $B = p(A)$ matrisi vardır.

Teorem 7: Aynı A matrisine ait B_1, B_2 polinomları çarpmada yer değiştirebilir :

$$\boxed{B_1 B_2 = B_2 B_1} \quad (38)$$

İlerde görüleceği gibi (Bak. 20). polinomlardan hareket ile e^A , $\sin A$, $\cos A$ gibi genel matris fonksiyonları tanımlanabilir. Bütün bu fonksi-

yonlar ise, polinomlara indirgenebilir; bu da matrislerin bir özelliği olup, adi sayılarla yapılan hesapta bunun karşısı yoktur.

Örnek :

$$p(x) = x^2 + 2x + 5, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$B = p(A) = A^2 + 2A + 5I = \begin{pmatrix} -5 & -6 \\ 9 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 6 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -10 \\ 15 & 7 \end{pmatrix}.$$

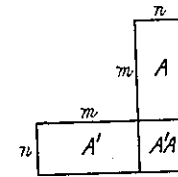
2.7. Gauss Dönüşümü.

a reel vektörünün, a 'a norm karesinin genelleştirilmesi olarak reel mn -matrisi A nın Gauss dönüşümü

$$\boxed{B = A' A} \quad (39)$$

olarak tanımlanır, Sonuç, simetrik n -sıralı kare matris B dir, Şekil 2.6.,

$$B' = (A' A)' = A' A = B.$$



Şekil 2.6

Çarpım, Gauss tarafından, dengeleme hesabındaki normal denklemlerin kurulmasında gösterilmiştir (bak : 12.1).

Matrisin yapısı, aşağıdaki gibidir :

$$B = A' A = \begin{pmatrix} a'_1 & \dots & a'_n \\ \vdots & & \vdots \\ a'_m & \dots & a'_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & \dots & a_n \\ \vdots & & \vdots \\ a_m & \dots & a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a'_1 a_1 & \dots & a'_1 a_n \\ \vdots & & \vdots \\ a'_m a_1 & \dots & a'_m a_n \end{pmatrix}.$$

Çarpım matrisinin b_{ik} elemanı, A nın i -ninci ve k -nıncı sütun vektörlerinin skaler çarpımıdır :

$$\boxed{b_{ik} = a'_i a_k} \quad (40)$$

Köşegen elemanları, sütun vektörlerinin norm kareleridir; ve dolayısı ile pozitifler ($a_i = 0$ hariç). Bunların toplamı, yani $A' A$ nın izi, veya a_{ik}^2 lerin toplamı, "Euklid matris normu" $N(A)$ adı verilen bir matris normunun karesidir :

$$N(A) = \sqrt{\text{sp } A' A} = \sqrt{\sum_{i,k} a_{ik}^2} \quad (41)$$

Bu özellik ilerde, genel anlamda ele alınacaktır (bak 16.5); aynı durum $A' A$ matrisinin pozitif pozitif definit özelliği içinde geçerlidir (bak 11.2).

Örnek :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}, \quad A' A = \begin{pmatrix} 13 & -4 \\ -4 & 14 \end{pmatrix}, \quad A A' = \begin{pmatrix} 5 & 3 & -4 \\ 3 & 9 & 6 \\ -4 & 6 & 13 \end{pmatrix},$$

$$N(A) = \sqrt{27} = 3\sqrt{3} = 5,196.$$

Genellikle (ve kare A halinde)

$$A' A \neq A A'$$

olur. Reel kare ve

$$A' A = A A' \quad (42)$$

özelliğine sahip matrislere "normal matrisler" denir. Bunlar Bölüm 4 de incelenen özdeğer problemindeki belirli özellikler ile karakterize olurlar; bu nedenle de önemli bir role sahiptirler. Simetrik ve yarı simetrik matrisler, hatta aşağıda verilen ortogonal matrisler bu tiptendir. Komlekslere genelleştirme için 4.2 ye bakınız.

2.8. Ortogonal Matrisler.

Reel kare matrislerin önemli bir sınıfı, ortogonal matrisler olup, bunların sütun vektörleri, bir ortogonal birim vektörler sistemi verirler :

$$a'_i a_k = \delta_{ik} \quad (43a)$$

burada δ_{ik} Kronecker sembolü olup, $i \neq k$ için 0 ve $i = k$ için 1 dir; yani I birim matrisin elemanlarına eşittir. Yukarda gösterildiği gibi, sütun vektörlerinin skaler çarpımı, $A' A$ matrisinin elemanına eşit olduğundan, denklem (40), denklem (43 a) ya göre

$$A' A = I \quad (44a)$$

ortogonal matris A nın karakteristik özelliği olarak yazılabilir.

Bir ortogonal matris, daima tekil olmayan bir matrisdir. Bu

$$c_1 a_1 + \dots + c_k a_k + \dots + c_n a_n = 0$$

lineer bağımlılık özelliğinin soldan a_k' ile çarpılmasından anlaşılır. Burada denklem (43a) dan dolayı, geriye $c_k \cdot 1 = 0$ kalır; böylece bütün $c_i = 0$ olur; bu ise a_k sütun vektörlerinin bağımsızlığını gösterir. Ayrıca yukarda verilen determinant teoremi 3, denklem (10), denklem (44a) ya uygulanarak

$$\det A' \cdot \det A = \det I$$

bulunur; veya bir determinanda satır ile sütun yer değiştirebileceğinden $\det A' = \det A$ elde edilir; ve birim matrisin determinanı 1 e eşit olur :

$$(\det A)^2 = 1$$

veya

$$\det A = \pm 1 \quad (45)$$

bu da ortogonal matrislerin bir diğer özelliğidir. Şimdi denklem (44 a) sağdan itibaren A' ile çarpılır ise, asosiyatif kural

$$(A' A) A' = A' (A A') = A',$$

kullanılarak ve A' tekil - olmayan bir matris olduğu bilindiğinden denklem (44 a) ya ek olarak şu elde edilir :

$$A A' = I \quad (44b)$$

veya

$$a^i a^{k'} = \delta_{ik} \quad (43b)$$

yani, sütun vektörleri yanında, bir ortogonal matrisin satır vektörleri de ortogonal birim vektörler sistemini verir. Ortogonal matrisler de $A' A = A A'$ den dolayı yukarda belirtilen (reel) normal matrisler sınıfına girerler. (44) denklemleri aynı zamanda, aşağıdaki paragrafta gösterileceği gibi, A ortogonal matrisinin A' transpozisinin, kendisinin "invers matrisi" olacağını belirtir.

A ve B eşit n-sıralı iki ortogohal matris ise, bunların AB ve BA çarpımları da ortogonal olur :

$$c_i \cdot 1 = 0,$$

bulunur; yani bütün c_i ler sıfır olur; bu ise a_k sütunlarının bağımsızlığını gösterir. Böylece problemin çözümlenebilmesi için gerek koşul

$$\boxed{\det A \neq 0} \quad (4)$$

olur. Bu aynı zamanda yeterli koşuldur. Zira A^{-1} in hesaplanmasında, n adet özel denklem sistemi (1) den, yani sağ tarafı k -nıncı birim vektör e_k olan

$$\boxed{Ax_k = e_k}, \quad k=1, 2, \dots, n \quad (5)$$

den hareket edilir. Bu sistemler ise, ancak, A tekil olmayan bir matris ise, çözümlenebilirler. (5) ile A^{-1} in çarpımı, (3) gözönüne alınarak

$$A^{-1}Ax_k = x_k = A^{-1}e_k,$$

verir; burada, sağ tarafta A^{-1} in k -nıncı sütunu α_k bulunmaktadır.

Böylece

$$\boxed{x_k = \alpha_k}, \quad k=1, 2, \dots, n, \quad (6)$$

ve buradan

Teorem 1 : A^{-1} invers matrisinin k -nıncı sütunu x_k , tekil-olmayan A katsayılar matrisli ve sağ tarafında k -nıncı birim vektör e_k olan (5) denklem sisteminin çözümü olur.

Böylece problem, pratik olarak çözülmüştür. Sayısal uygulama 6. dadır.

n adet $x_k = \alpha_k$ sütunlu, n -sıralı X matrisi, ikinci tarafları e_k , I birim matrisi yardımı ile gösterilir ise, (5) ve (6) denklemleri, matris denklemleri olarak şöyle yazılabilir :

$$\boxed{AX = I} \quad (5a)$$

$$\boxed{X = A^{-1}} \quad (6a)$$

kelimeler ile :

Teorem 1 : A^{-1} invers matrisinin k -nıncı sütunu α_k tekil-olmayan A katsayılar matrisi ve ikinci taraf n -katlı I birim matrisi olmak üzere, (5 a) denklem sisteminin çözüm sistemi X olarak bulunur.

(5a), (6a) ve (3) denklemlerini şu şekilde yazalım :

$$\boxed{A^{-1}A = AA^{-1} = I} \quad (7)$$

bu invers matrisin karakteristik özelliğidir. (1) den (2) ye geçiş halinde

$$\boxed{Ax = y} \quad (1)$$

$$\boxed{x = A^{-1}y} \quad (2)$$

(2), (1) in A^{-1} ile soldan çarpılması ye (7) nin gözönüne alınması ile bulunur. Sayısal verilmiş y vektörü halinde, x , bilinmeyenlerinden oluşan x vektörü, lineer denklem sisteminin Gauss algoritmasına göre çözümlenmesi ile hesaplanır. Bu durum 6. da ayrıntıları ile incelenecektir. Buna karşılık A^{-1} in, daha sonraki $A^{-1}y$ çarpımı halinde, açık hesabı daha fazla işlemi gerektirir. Invers matris, açık olarak, çok az kullanılır. Bunun önemi, teorik düşüncelerin uygulanmasında şekilsel hesap olanaklarını vermesidir.

Invers matris de, yukarda A için söylendiği gibi ve burada $AA^{-1} = I$ dan anlaşılacağı üzere tekil-olmayan bir matrisdir. 2.2. denklem (10) da belirtilen Teorem 3 den,

$$\boxed{\det A^{-1} = 1/A} \quad (8)$$

bulunur; burada $A = \det A$ dır.

Böylece basit bazı hesap kuralları ortaya çıkar. Transpoze işlemi ile $AA^{-1} = I$ den $(A^{-1})'A' = I$ bulunur; ve A ile birlikte A' nünde bir invers matrisi olduğundan şu yazılabilir :

$$\boxed{(A')^{-1} = (A^{-1})'} \quad (9)$$

Transpoze matrisin invers matrisi, invers matrisin transpozeseine eşittir. Bu neden ile simetrik A matrisi halinde, A^{-1} de simetriktir.

Ayrıca 2.2. deki (9) bağıntısına benzer bir diğer bağıntı

$$\boxed{(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}}, \quad (10)$$

geçerli olur; bunun doğruluğu

$$(AB)^{-1}AB = B^{-1}A^{-1}AB = B^{-1}IB = B^{-1}B = I$$

den açıktır; genel olarak, şu yazılabilir :

$$(ABC \dots N)^{-1} = N^{-1} \dots C^{-1} B^{-1} A^{-1}. \quad (10a)$$

Tekil olmayan matrisler için, kuvvet kuralları negatif kuvvetlere de uygulanabilir. Pozitif tam sayılı p için şu tanım verilir :

$$A^{-p} = (A^{-1})^p, \quad A^0 = I. \text{ dir.} \quad (11)$$

Bu durumda keyfi (pozitif ve negatif) p, q tam sayıları ile şu yazılabilir :

$$A^p A^q = A^q A^p = A^{p+q}. \quad (12)$$

Köşegen matrisler $D = \text{Diag}(d_i)$ ler için, $d_i \neq 0$ ile, $D^{-1} = \text{Diag}(1/d_i)$ bulunur.

3.2. Ek Matris, a_{ik} Formülü.

Aşağıda okuyucunun yeterli bir ölçüde bildiği kabul edilen bazı basit determinant bilgileri ve teoremlerini kullanacağız; aksi halde literatürde verilenler ve diğer ilgili matematik kitaplarına başvurmalıyız.

n-sıralı $A = [a_{ik}]$ determinantının a_{ik} elemanlarına ait alt determinant, a_{ik} elemanının minörü, katsayılar şemasında i-ninci satır ve k-nıncı sütun (elemanın satırı ve sütunu) atılarak elde edilen (n-1) sıralı determinanttır.

Bu alt determinanta $(-1)^{i+k}$ işaret çarpanı verilir; yani elemanın konumuna göre aşağıdaki şekilde artı veya eksi işareti ile gösterebilir ise,

$$\begin{vmatrix} + & - & + & - & \dots \\ - & + & - & + & \dots \\ + & - & + & - & \dots \\ - & + & - & + & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}$$

buna a_{ik} elemanına ait A_{ik} cebirsel tümüleri denir. Kare (düzgün veya tekil) bir A matrisinin her a_{ik} elemanı için böylece cebirsel tümüleri A_{ik} tanımlanmıştır.

Bu A_{ik} tümüleri ile ve transpoze olmuş sırada oluşan yeni matrise, A ya Ek matris adı verilir; A_{adj} ile gösterilir :

$$A_{adj} = (A_{ki}) = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}. \quad (14)$$

Örnek : Aşağıda, verilen matrise ait tümler görülmektedir.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 2 & 4 & 3 \\ 1 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} = 9, \quad A_{12} = - \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 3, \quad A_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -10$$

$$A_{21} = - \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} = 6, \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 2, \quad A_{23} = - \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = 10$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 11, \quad A_{32} = - \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -13, \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 10$$

Yani ek matris şöyle olur :

$$A_{adj} = \begin{pmatrix} 9 & 6 & 11 \\ 3 & 2 & -13 \\ -10 & 10 & 10 \end{pmatrix}.$$

Tümleler kullanılarak determinantların açılımı teoremi şöyle ifade edilebilir : A determinant değeri, işaretli determinantlar ile bir satır veya sütunun elemanlarının çarpımlarının toplamıdır; yani tümleler kullanılarak :

$$A = a_{i1} A_{11} + a_{i2} A_{12} + \dots + a_{in} A_{in} \quad \text{i-nici satır elemanlarına göre açılım} \quad (14a)$$

$$A = a_{1k} A_{1k} + a_{2k} A_{2k} + \dots + a_{nk} A_{nk} \quad \text{k-nıncı sütun elemanlarına göre açılım} \quad (14b)$$

Böylece, örnekteki A determinantı, birinci satıra veya 2 inci sütuna göre şöyle açılır :

$$A = 3.9 + 1.3 + 2.10 = 50$$

$$= 1.3 + 4.2 + 3.13 = 50$$

(14a) açımında i-inci satırın a_{ir} elemanları yerine, paralel ($j \neq i$) satırların a_{jr} elemanları konulur ise, ve bu esnada i-inci satıra ait tümler A_{ir} korunur ise, sonuç, i-inci satırı ile, j-inci satırı aynı olan bir determinanta eşit olur; bu ise bilinen determinant teoremi gereğince sıfıra eşittir. Aynı düşünce (14b) deki sütunlar içinde doğrudur; böylece yukarıdaki açım teoremine ek olarak şu formüller elde edilir :

$$a_{j1} A_{i1} + a_{j2} A_{i2} + \dots + a_{jn} A_{in} = 0 \quad i \neq j \text{ için} \quad (15a)$$

$$a_{11} A_{1k} + a_{21} A_{2k} + \dots + a_{n1} A_{nk} = 0 \quad k \neq 1 \text{ için} \quad (15b)$$

(14a), (15a) denklemlerinin birinci tarafları A nın bir satırı ile A_{adj} nın bir sütununun skaler çarpımını gösterirler; buna karşılık denklem (14b), (15b) de A nın bir sütunu ile A_{adj} nın bir satırının çarpımı vardır; diğer bir deyimle burada AA_{adj} ve $A_{adj}A$ matris çarpımlarının elemanları bahis konusudur. Böylece her iki denklem çifti aşağıdaki matris denklemleri şeklinde yazılabilir :

$$AA_{adj} = A_{adj}A = AI = \begin{pmatrix} A & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & A \end{pmatrix} \quad (16)$$

Tekil A matrisi halinde, sıfır bulunur :

$$AA_{adj} = A_{adj}A = 0 \text{ için } \det A = A = 0$$

A tekil-olmayan bir matris ise, denklem (16), A ya bölünebilir; ve bu durumda A ile bölünmüş A_{adj} , invers matrise eşit olur :

$$A^{-1} = \frac{1}{A} A_{adj} = \frac{1}{A} (A_{ki}) \quad (17)$$

böylece, invers matrisin α_{ik} elemanları için bir formül bulunmuş olur :

$$\alpha_{ik} = \frac{1}{A} A_{ki} \quad (18)$$

Örneğimiz için :

$$A^{-1} = \frac{1}{50} \begin{pmatrix} 9 & 6 & 11 \\ 3 & 2 & -13 \\ -10 & 10 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,18 & 0,12 & 0,22 \\ 0,06 & 0,04 & -0,26 \\ -0,20 & 0,20 & 0,20 \end{pmatrix}$$

İki sıralı matrisler için, aşağıdaki sonuç kolayca görülür :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, A^{-1} = \frac{1}{A} \begin{pmatrix} a_{22} - a_{12} \\ -a_{12} & a_{11} \end{pmatrix} \text{ burada } A = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21} \quad (19)$$

Bu ek matris yardımı ile, lineer denklem sistemlerinin teorik incelenmesinde önemli olan ve Cramer kuralı denen formül kolayca çıkarılabilir. Bu formül x_i çözümlerini iki determinantın oranı şeklinde gösterir :

$$x_i = A_i : A \quad (20)$$

burada $A \neq 0$ olan katsayılar determinantıdır; buna karşılık A_i pay determinantları, A dan şu şekilde bulunur : A nın i-ninci sütunu yerine ikinci taraf y_i nin sütunu konulur. Bu kural

$$Ax = y \quad (21)$$

in, ek matris A_{adj} ile soldan çarpılması ve (16) denkleminin göz önüne alınması ile bulunur :

$$A x_i = A_{adj} y_i \quad (22)$$

bu ise aşağıdaki denklemlere ayrılabilir :

$$A x_i = y_1 A_{1i} + y_2 A_{2i} + \dots + y_n A_{ni} = A_i \quad (23)$$

Burada sağdaki toplam ifadesi, yukarıda gösterilen A_i determinanı olup, y_i elemanlı i-ninci sütuna göre açılarak bulunmuştur. Denklem (23) den şu çıkar : (21) denklem sisteminde x_i dışındaki bütün bilinmeyenler yok edilirse geri kalan bilinmeyen, $A = \det A$ çarpanına sahip

olur; buna karşılık sağ taraf A_1 determinantıdır. Katsayılar matrisimizin tekil-olmayan, $A \neq 0$, hali için, denklem (23), keyfi y_i ikinci tarafları halinde, — ki bunlar denklem (23) ün ikinci tarafları A_1 de vardır; Cramer kuralına göre çözülebilir —. Bu kural teorik bakımdan x_i çözümlerinin ifade edilebilmesi için, çok değerli olmakla beraber, daha geniş kapsamlı denklem sistemlerinde çözüm kuralı olarak — $n + 1$ adet $A, A_1, \dots, A_n$ determinantlarının açık hesabı için — hiçte uygun değildir. Bir denklem sisteminin pratik çözümü daha ziyade, yukarıda belirtildiği gibi Gauss algoritması şeklindeki bir ardışık ve sayısal yok etme işlemi ile yapılır. Bu ise Bölüm 2 de ayrıntıları ile ele alınacaktır.

3.3. Matris Bölümü.

Matris çarpımının komitatif olmayan karakterine uygun şekilde, bölme adı verilen ters işlem içinde iki tip ayırt edilir: bunlar verilen A ve B matrisleri ve aranan X matrisi halinde, şu iki problemdir:

$$\boxed{AX = B} \quad (24a)$$

$$\boxed{XA = B} \quad (24b)$$

Her iki problem, tekil-olmayan A halinde, genel şekilde çözülebilirler; ve bu durumda X çözümü denklemin, birinci halde soldan, ikinci halde sağdan invers matris A^{-1} ile çarpılmasından bulunur.

$$\boxed{X = A^{-1}B} \quad (25a)$$

$$\boxed{X = BA^{-1}} \quad (25b)$$

İki sonuç, genellikle, farklıdır. Ancak A ve B , yer değiştirebiliyor ise, $AB = BA$ olur. A matrisi, tekil-olmayan matris olarak kare matrisdir; B ve X matrislerinin böyle olmaları gerekmez; yalnız yer değiştirme özelliği olmalıdır. A matrisi n -sıralı ise, birinci halde B matrisi np tipinde olabilir (keyfi p için) ve bu durumda X de aynı tipten olur; ikinci halde ise ikisi birden pn tipindedirler.

Bölmenin gerçek uygulanması, yani $A^{-1}B$ ve BA^{-1} matrislerinin hesaplanması A^{-1} ile çarpılarak yapılmaz; ve invers matris bilinmediği sürece zaten mümkün olmaz. (24a) problemi, A katsayılar matrisli ve p -katlı $B = (b_1, b_2, \dots, b_p)$, ikinci tarafı bir lineer denklem sistemi kabul edilir. Çözüm sonuçları, yani p adet x_k vektörü, bu durumda aranan

$X = (x_1, x_2, \dots, x_p)$ matrisinin sütunları olur. (24b) problemi halinde, transpoze işlemi ile

$$A'X' = B'$$

bulunur; yani A' katsayılar matrisli ve B' nin p adet sütununa sahip bir denklem sistemi çözülür. Bu sütunlar, B' nin ikinci tarafını oluşturan p adet b_i satırları olup, bunlara çözüm vektörleri olarak X' nün p adet sütunu karşı gelir. Bunlar ise X in p adet x_i satırlarıdır. Her iki problemde analitik olarak birleştirilebilir. Pratik uygulama 6.6. da verilmiştir.

4. Kompleks Matrisler.

4.1. Kompleks Matrisler ve Vektörler.

Şimdiye kadar bir matrisin elemanları, ekseriya söylenmeksizin reel sayılar olarak alınmıştır. Bilindiği gibi sayı kavramı, kompleks sayıların da işlemlere sokulması ile gerekli olan genişliğe sahip olur. Ancak bunların yardımı ile matematiğin temel problemleri, örneğin cebirsel denklemler çözülebilir. Aynı şekilde, elemanları kompleks sayılar olan kompleks matrisler de, teori ve uygulamada önemli bir rol oynarlar.

Kompleks matrisler ile çalışma sırasında, kompleks sayılar ile hesaptan bilinenlere benzer belirli özellikler ortaya çıkar. Orada $x = u + iv$ gibi bir kompleks sayısının karesinin hesabı karakteristiktir; bu ise burada reel sayılarda olduğu gibi, x in karesi olarak değilde eşlenik kompleks $x = u - iv$ sayısı ile çarpılarak

$$|x|^2 = \overline{x}x = u^2 + v^2 = r^2. \quad (1)$$

şeklinde bulunur. Zira, yalnız bu şekilde, her hal için reel ve pozitif (veya sıfır) olan bir sayı elde edilir. Eşlenik kompleks sayıların bu çarpım işlemi, kompleks matrisler ve vektörler içinde, karakteristiktir.

İlk önce $x_j = u_j + iv_j$ bileşenli x kompleks vektörünü ve $\overline{x}_j = u_j - iv_j$ bileşenli $\overline{x}$ eşlenik kompleks vektörünü ele alalım. Her iki vektör reel ve sanal kısımlara ayrılabilir:

$$x = u + iv,$$

$$\overline{x} = u - iv$$

burada u, v reel vektörler olup bileşenleri u_j ve v_j dir. Kompleks vektörün, şiddetinin karesi, yani normunun karesi denklem (1) e benzer şekilde x vektörü ile bunun eşleniği olan $\bar{x}$ vektörünün skaler çarpımı olarak

$$|x|^2 = \bar{x}' x = (u' - i v') (u + i v) = u' u + v' v, \quad (2)$$

şeklinde bulunur, daha açık bir ifade ile

$$\bar{x}' x = (u_1^2 + v_1^2) + (u_2^2 + v_2^2) + \dots + (u_n^2 + v_n^2) = |x_1|^2 + \dots + |x_n|^2. \quad (2')$$

Ancak bu halde norm, sıfır vektörü dışında reel (pozitif) bir sayı olduğundan, "1'e normlaştırma" daima mümkün olur, bunun için herhangi bir vektörün şiddetine bölünmesi yeterlidir. Burada, başka yerlerde ortaya çıkan, eşlenik transpoze $\bar{x}'$ vektörü için aşağıdaki yazış şekli kullanılmaktadır.

$$\boxed{\bar{x}' = x^*} \quad (3)$$

Böylece norm karesi

$$|x|^2 = x^* x.$$

olarak yazılır.

n -boyutlu x ve y kompleks vektörlerinin skaler çarpımı olarak $x'y$ ifadesi yerine x^*y veya y^*x ifadelerinden birinin tanımlanması uygundur. Skaler çarpımı

$$\boxed{x^* y = 0}, \quad (4)$$

olan iki kompleks vektöre birbirine göre "üniter" denilir; bu ortogonallığın komplekslere genelleştirilmesidir, yani eşlenik ortogonallık bahis konusudur. Reel bölgede, üniter ve ortogonal kavramları aynı manaya gelir.

Ortogonal birim vektörlerinin komplekslere genişletilmesi, kompleks, 1 e normlaştırılmış üniter x_j vektörlerinden oluşan bir sistemdir ve bunlar için

$$\boxed{x_j^* x_k = \delta_{jk}} \quad (5)$$

bağıntısı, δ_{jk} Kronocker sembolü olmak üzere vardır; bu sisteme "üniter vektör sistemi" denilir.

Bir vektör gibi, $a_{jk} = b_{jk} + i c_{jk}$ elemanlı kompleks A matrisi ve $\bar{a}_{jk} = b_{jk} - i c_{jk}$ elemanlı eşlenik $\bar{A}$ matrisi de reel ve sanal kısımlara ayrılabilir :

$$\begin{aligned} A &= B + i C, \\ \bar{A} &= B - i C \end{aligned}$$

burada $B = (b_{jk})$ ve $C = (c_{jk})$ reel matrislerdir. Burada da eşlenik transpoze matris

$$\boxed{\bar{A}' = A^*} \quad (6)$$

ile işlem yapılması, bir çok bakımdan, uygun olur. Bu durum, özellikle aşağıda verilenler için geçerlidir.

4.2. Kompleks Matrislerin Özel Şekilleri.

Reel matrislerin en önemli özel şekillerine ait karakteristik özelliklerin, bilhassa simetrik, yarı simetrik ve ortogonal özelliklerinin kompleks bölgede geçerli olması isteniyor ise, reel bölgedeki tanımlar kelimesi kelimesine dönüştürülemez; ancak transpoze matris yerine, eşlenik transpoze matris gelecek şekilde yazılabilir. Bu durumda, basit ortogonal özelliği yerine eşlenik ortogonallık yani üniterler özelliği, simetri veya yarı simetri yerini de eşlenik simetri alır. Bunun içinde özel semboller verilir: Bu durumda Hermitsel ve yarı Hermitsel matrislerden bahis edilir (Charles Hermite 1822 - 1901).

Reel simetrik bir matrisin, kompleks genelleştirmesi olarak Hermitsel matrisi

$$\boxed{A^* = A}, \quad (7)$$

özelliliği ile tanımlanır; bu ise $A = B + iC$ halinde, reel ve sanal kısımları ve

$$\boxed{B' = B} \quad \text{reel kısımla simetrik} \quad (8a)$$

$$\boxed{C' = -C} \quad \text{sanal kısımlar yarı-simetrik} \quad (8b)$$

şeklinde ayrılır. Böylece köşegen elemanları reel olur; $a_{ii} = b_{ii}$. Reel bölgede Hermitsel matris, simetrik matris ile, tam sanal bölgede ise yarı simetrik matris ile çakışır. Kompleks (ne reel ne de tam sanal)

simetrik bir matrisin karakteristik özellikleri yoktur; ve böylece önemli değildir.

Reel, yarı simetrik matrisin kompleks genelleştirmesi olarak "yarı-Hermitsel matris"

$$\boxed{A^* = -A} \quad (9)$$

şeklinde tanımlanmış bu ise yine

$$\boxed{B' = -B} \quad \text{reel kısımlar yarı-simetrik} \quad (10a)$$

$$\boxed{C' = C} \quad \text{sanal kısımlar simetrik} \quad (10b)$$

şeklinde ayrılır. Köşegen elemanları tamamen sanaldır: $a_{jj} = ic_{jj}$. Reel bölgede yarı Hermitsel matris yarı simetrik matris ile, tam sanal bölgede ise simetrik matris ile çakışır. Kompleks (ne reel ne de tam sanal) yarı simetrik matris de, karakteristik özelliklere sahip olmadığından ilginç değildir.

Reel ortogonal matrisin, kompleks genelleştirmesi "üniter bir matris" sütun vektörlerinin 'üniter bir vektör sistemi' oluşturması ile tanımlanır:

$$\boxed{a'_j a_k = a^*_j a_k = \delta_{jk}} \quad (11)$$

bu ise, kendisinden çıkan satır vektörlerinin benzer özelliği ile birlikte aşağıdaki tanım denklemini verir:

$$\boxed{A^* A = A A^* = I} \quad (12)$$

veya

$$\boxed{A^* = A^{-1}} \quad (13)$$

Denklem (12) den aşağıdaki determinant bağıntısı bulunur:

$$\det A' \cdot \det A = (\det A) \cdot |\det A| = \det A^2 = 1,$$

$$\boxed{|\det A| = 1} \quad (14)$$

Reel bölgede üniter matris ile ortogonal matris çakışır.

Her üç özel şekil, aşağıdaki özellik ile tanımlanan, daha genel bir sınıfın, yani "normal matrislerin" özel halleridir:

$$\boxed{A^* A = A A^*} \quad (15)$$

Hem Hermitsel, hem de üniter (veya hem simetrik hem de ortogonal) bir matris $A^* = A$ ve $A^* A = I$ aşağıdaki özelliğe sahiptir:

$$\boxed{A^2 = I} \quad (16a)$$

ve "involut" adını alır. (Geometride, iki defa uygulanması ilk şekli yani özdeş şekli veren tasvire involusyon denir). Hem yarı-Hermitsel, hem de üniter (veya hem yarısimetrik hem de ortogonal) bir matrisin

$$\boxed{A^2 = -I} \quad (16b)$$

özellik vardır; buna "yarı-involut" denir.

Burada incelenen matrislerin üç özelliklerinin arasındaki bağıntı Şekil 4-1 de verilen bir özellik matrisi ile gösterilir: Bir satırın solunda, bir sütunun başında ve satır ile sütunun kes-

me noktasında verilen üç özellik birbirine bağlıdır; burada aşağıdaki kısaltmalar kullanılmıştır:

S	: simetrik	S'	: yarı simetrik
H	: Hermitsel	H'	: yarı Hermitsel
Iv	: Involut	Iv'	: yarı Involut
O	: Ortogonal	U	: Üniter
Re	: Reel	Im	: tam sanal

Örneğin sema şunları belirtir:

	S	H	S'	H'	O	U
S	•	Re	Im	Im	Iv	—
H	Re	•	Im	Im	—	Iv
S'	Im	Im	•	Re	Iv'	—
H'	Im	Im	Re	•	—	Iv'
O	Iv	—	Iv'	—	•	Re
U	—	Iv	—	Iv'	Re	•

Şekil 4.1

Simetrik reel olan bir matris, aynı zamanda Hermitseldir; Simetrik ve ortogonal olan matris, aynı zamanda Involut tur; üniter simetrik bir matrisin karakteristik özellikleri yoktur. Aynı zamanda simetrik ve yarı simetrik matris, sıfır matrisi dışında, yoktur.

Her kare matris A , 1.4. deki denklem (19), (20) de olduğu gibi H ve K Hermitsel ve yarı-Hermitsel kısımlarına ayrılır :

$$A = H + K \quad (17)$$

burada

$$\left. \begin{aligned} H &= \frac{1}{2} (A + A^*) \text{ Hermitsel} \\ K &= \frac{1}{2} (A - A^*) \text{ yarı-Hermitsel} \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

Örnekler :

a) Hermitsel Matris :

$$H = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} + i c_{12} \\ b_{12} - i c_{12} & b_{22} \end{pmatrix}.$$

b) Yarı Hermitsel Matris :

$$K = \begin{pmatrix} i c_{11} & b_{12} + i c_{12} \\ -b_{12} + i c_{12} & i c_{22} \end{pmatrix}.$$

c) Üniter Matris :

$$A = \begin{pmatrix} \cos \varphi & i \sin \varphi \\ i \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}.$$

d) Involut Matris :

$$A = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ \sin \varphi & -\cos \varphi \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -\cos \varphi & i \sin \varphi \\ -i \sin \varphi & i \sin \varphi \end{pmatrix}.$$

A simetrik ortogonal, B ise Hermitsel üniterdir.

4.3. Kompleks Matrislerin Reel Şekli.

Kompleks sayılar, yani reel sayı çiftleri, reel elemanları, sayının reel ve sanal kısımlarından oluşan iki sıralı kare matrisler ile gösterilebilir. Kompleks sayılar bölgesindeki reel ve sanal 1 ve i birimlerine aşağıdaki matrisler karşılık gelir :

$$e = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad i = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (19)$$

e için bu durum açıktır. Ancak i matrisi, i sayısının kendisi ile çarpımı sonucu negatif birimi vermesi şeklindeki karakteristik özelliğe sahiptir; buna göre

$$i^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -e. \quad (20)$$

Yani burada i yarı-involut bir matris olmaktadır.

Reel x sayısının xe skaler matrisi şeklinde gösterilebilmesi yanında tam sanal iy sayısında yi matrisi ile verilebilir; böylece $z = x + iy$ kompleks sayısına reel matris¹

$$z = ex + iy = \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix} \quad (21)$$

ve eşlenik kompleks $\bar{z} = x - iy$ kompleks sayısına

$$\bar{z} = ex - iy = \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix}, \quad (22)$$

matrisi karşılık gelir; buna "eşlenik matris" adı verilir: Bu matris, Z nin sağdan ve soldan

$$k = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (23)$$

involut matrisi ile çarpılması ile

$$\widehat{z} = k z k, \quad (24)$$

şeklinde elde edilir.

¹ Z kompleks sayısı ve Z matrisi birbirine eşit değildir. Burada 2 farklı matematik büyüklük vardır; ancak bunlar birbirlerine aşağıdaki şekilde karşı gelirler: analitik bağıntılar, her iki bölgede yani, kompleks sayılar bölgesinde ve ilgili matrisler bölgesinde, birbirlerine karşı gelirler; bağıntı kurallarının geçerli olması halinde, matematik bölgelerin birbirine bu şekilde tasvir olmasına "izomorfluk" denir.

$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$ "dönme çarpımına"

$$\mathbf{c} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}, \quad (25)$$

dönme matrisi karşı gelir; bu ise aşağıdaki gibi bir ortogonal matrisdir :

$$\mathbf{c}' \mathbf{c} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{e}.$$

Bu durumda Z

$$\mathbf{z} = \mathbf{r} \mathbf{c}, \quad (26)$$

şeklinde yazılır; bu ise $z = re^{i\varphi}$ şekline karşılık gelendir :

Tek kompleks Z sayısına, iki sıralı reel Z matrisinin karşı gelmesi gibi, n-sıralı kompleks matris $\mathbf{A} = \mathbf{B} + i\mathbf{C}$ içinde 2n-sıralı reel matrisi verilebilir; bunun için, ya her kompleks eleman $a_{ik} = b_{ik} + i c_{ik}$ yerine

$$\mathbf{a}_{ik} = \begin{pmatrix} b_{ik} & -c_{ik} \\ c_{ik} & b_{ik} \end{pmatrix} \quad (27)$$

kısmi matrisi konular; veya reel-sanal kısımlar aşağıdaki şekilde ayrılır :

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} \mathbf{B} & -\mathbf{C} \\ \mathbf{C} & \mathbf{B} \end{pmatrix}. \quad (28)$$

2n-sıralı involut matris

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} \mathbf{I} & 0 \\ 0 & -\mathbf{I} \end{pmatrix} \quad (29)$$

yardımı ile $\mathbf{U}$ den eşlenik matris $\mathbf{U}$

$$\mathbf{u} = \mathbf{u} \mathbf{u} \mathbf{u} = \begin{pmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{C} \\ -\mathbf{C} & \mathbf{B} \end{pmatrix}. \quad (30)$$

bulunur. Burada

Kompleks Hermitsel $\mathbf{A}$ matrisine, bir reel simetrik $\mathbf{U}$

» yarı Hermitsel matrise, reel yarı simetrik $\mathbf{U}$

» uniter $\mathbf{A}$ ya, reel ortogonal $\mathbf{U}$ matrisi

karşı gelir.

4.2. deki kompleks matris örneklerine aşağıdaki reel ifadeler karşı gelir :

a) Hermitsel matrisin reel şekli : Simetrik

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & 0 & -c_{12} \\ b_{12} & b_{22} & c_{12} & 0 \\ 0 & c_{12} & b_{11} & b_{12} \\ -c_{12} & 0 & b_{12} & b_{22} \end{pmatrix}.$$

b) Yarı Hermitsel matrisin reel şekli : yarı simetrik

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 0 & b_{12} - c_{11} - c_{12} \\ -b_{12} & 0 & -c_{12} - c_{22} \\ c_{11} & c_{12} & 0 & b_{12} \\ c_{12} & c_{22} & -b_{12} & 0 \end{pmatrix}.$$

c) Uniter matrisin reel şekli : ortogonal

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & 0 & 0 & -\sin \varphi \\ 0 & \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ 0 & \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ \sin \varphi & 0 & 0 & \cos \varphi \end{pmatrix}.$$

d) Hermitsel-uniter matrisin reel şekli : Simetrik-ortogonal

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} -\cos \varphi & 0 & 0 & -\sin \varphi \\ 0 & \cos \varphi & +\sin \varphi & 0 \\ 0 & \sin \varphi & -\cos \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & 0 & 0 & \cos \varphi \end{pmatrix}.$$

Kompleks matrislerin reel gösterişine ait önemli bir uygulama, kompleks katsayılı lineer denklem sistemlerinin incelenmesinde ortaya çıkar.

$$\boxed{\mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{a}} \quad (31)$$

da

$$\mathbf{A} = \mathbf{B} + i \mathbf{C}$$

$$\mathbf{a} = \mathbf{b} + i \mathbf{c}$$

$$\mathbf{x} = \mathbf{u} + i \mathbf{v}$$

yerine konularak

$$(\mathbf{B} \mathbf{u} - \mathbf{C} \mathbf{v}) + i(\mathbf{C} \mathbf{u} + \mathbf{B} \mathbf{v}) = \mathbf{b} + i \mathbf{c}$$

buradan da reel ve sanal kısımlar ayrılarak aşağıdaki iki reel denklem sistemi bulunur :

$$\boxed{\begin{array}{l} \mathbf{B} \mathbf{u} - \mathbf{C} \mathbf{v} = \mathbf{b} \\ \mathbf{C} \mathbf{u} + \mathbf{B} \mathbf{v} = \mathbf{c} \end{array}} \quad (32)$$

bunları ise şöyle kısaca gösterebiliriz :

$$\boxed{\begin{pmatrix} \mathbf{B} & -\mathbf{C} \\ \mathbf{C} & \mathbf{B} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{b} \\ \mathbf{c} \end{pmatrix}} \quad (32a)$$

Böylece, n-adet $\mathbf{x}_j = \mathbf{u}_j + i \mathbf{v}_j$ bilinmeyenli kompleks sistem, 2n-adet $\mathbf{u}_j$ ve $\mathbf{v}_j$ bilinmeyenli reel sisteme dönüştürülmüş olur.

5. Lineer Tasvirler ve Koordinat Dönüşümleri.

5.1. Lineer Tasvirler.

Okuyucudan biraz fazla bilgi isteyen aşağıdaki kısımlar, ilk okumada atlanabilir; ancak Bölüm IV den önce ele alınmalıdır; zira bunlar özdeş problemlerinin incelenmesinde kullanılacaktır.

Kare matris $\mathbf{A}$ yardımı ile yapılan $\mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{y}$ lineer dönüşümü, bilindiği gibi, tasvirin geometrik özelliğini gösterir. Sıralanmış $a_1, a_2, \dots, a_n$ sayılarından oluşan bir sisteme, n boyutlu R_n uzayında bir n-nokta veya n-vektör, $\mathbf{a} = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, adı verilir; bu uzaya vektör uzayında diyebiliriz ve burada vektör bileşenleri a_i ile gösterilir ve bunlar reel veya kompleks olurlar. Bu durumun her defa ayrıca belirtilmemesi için daha genel olarak şunu söyleyebiliriz. a_i sayıları, toplama, çıkarma, çarpma ve (0 ile bölme dışında) bölme işlemlerinin yapılabildiği bölgeden

alınırlar. Böyle bir bölgeye cebir de genellikle "cisim" veya "sayı cismi" denir. (tam sayılar bölgesi, böyle bir bölge değildir; zira bölme işlemi bunun dışına çıkar). Buna göre a_i elemanları yani vektör bileşenleri her defasında esas alınan bir cismin elemanlarıdır; burada cisimden kasıt reel sayı cismidir. — Bu duruma göre, eğer her a_i bileşeni bütün sayı cisminden (reel sayılar bölgesinden) alınıyor ise R_n uzayı n-boyutlu $\mathbf{a}$ vektörlerinin (n-vektör) tümünü gösterir.

Şimdi R_n de, n adet lineer bağımsız sabit $\hat{\mathbf{e}}_1, \hat{\mathbf{e}}_2, \dots, \hat{\mathbf{e}}_n$ vektörlerinden oluşan bir sistem, bir "baz" verilmiş olsun; buna "koordinat sistemi" deriz. Buna R_3 de, keyfi lineer bağımsız (yani bir düzlemde olmayan) $\hat{\mathbf{e}}_1, \hat{\mathbf{e}}_2, \hat{\mathbf{e}}_3$ baz vektörlü (bunların birim vektör olması gerekmez; $\hat{\mathbf{e}}_i$ sembolü aşağıda açıklanmıştır), genellikle dar açılı, bir uzay koordinat sistemi karşı gelir. Buna göre keyfi $\hat{\mathbf{x}}$ vektörü (sıralanmış n adet sayıdan oluşan sistem), $\hat{\mathbf{e}}_i$ baz vektörleri yardımı ile aşağıdaki şekilde yazılabilir.

$$\hat{\mathbf{x}} = x_1 \hat{\mathbf{e}}_1 + x_2 \hat{\mathbf{e}}_2 + \dots + x_n \hat{\mathbf{e}}_n \quad (1)$$

buradaki n adet x_i çarpanı, 7.2. deki teorem IV de açıklanacağı gibi, temel cisme aittir. Bu x_i büyüklüklerine $\hat{\mathbf{x}}$ vektörünün, $\hat{\mathbf{e}}_i$ "koordinat sistemindeki bileşeni" denir; ve bunlar, $\hat{\mathbf{x}}$ vektörünün "matris ile ifadesinde" esas alınacak basitçe $\hat{\mathbf{x}}$ ile gösterilecektir :

$$\hat{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad (2)$$

Koordinat sisteminin $\hat{\mathbf{e}}_i$ baz vektörleri ise, birim matrisin sütunlarıdır :

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \mathbf{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \quad (3)$$

ancak burada bu vektörlerin başlangıçta, genel, lineer bağımsız n-vektör olarak verildiği ve baz olarak, birim olmayan vektörlü, dar açılı, bir koordinat sisteminin bahis konusu olduğu dikkate alınmamıştır.

Örnek :

$$\widehat{e}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \widehat{e}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \widehat{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

$\widehat{e}_1$ koordinatları cinsinden $x = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ olur, zira

$$-1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

olduğu açıktır. $\widehat{e}_1, \widehat{e}_2, \widehat{x}$ vektörlerinin kartezyen koordinatlar ile verilmesi ve $\widehat{x}$ in $-1, 1$ bileşenleri ile vektörlerinden bulunmasında aynı sonucu verir; bu işlem okuyucuya bırakılmıştır.

R_n uzayının bir $\widehat{x}$ vektörünü, belirli bir kural gereğince, dönüşümü aynı uzayın bir $\widehat{y}$ vektörü olsun; yani $\widehat{x}$ vektörü $\widehat{y}$ vektörüne dönüşsün; bunu sembolik olarak

$$\sigma(\widehat{x}) = \widehat{y} \quad (4)$$

şeklinde yazabiliriz, burada σ dönüşüm (operatörü) işlemcisidir. Eğer lineerliği karakterize eden aşağıdaki iki özellik sağlanıyor ise, σ dönüşümüne "lineer" ve (4) bağıntısına "lineer dönüşüm" denir. Temel cisimden (yani vektör bileşenlerinin de dahil olduğu sayı bölgesinden) alınan keyfi λ sayısı ve R_n den alınan $\widehat{x}_1, \widehat{x}_2$ vektörleri için

$$\left[\begin{array}{l} \sigma(\lambda \widehat{x}) = \lambda \sigma(\widehat{x}) \\ \sigma(\widehat{x}_1 + \widehat{x}_2) = \sigma(\widehat{x}_1) + \sigma(\widehat{x}_2) \end{array} \right], \quad (5)$$

geçerlidir. $\widehat{x}$ ile $\lambda \widehat{x}$ vektörleri arasındaki orantı, bunların dönüşümlerinde olmalıdır; ve bir vektörel toplamın dönüşümü, dönüşümlerin toplamına eşittir: Zira, ancak bu durumda dönüşüm esnasında, doğrular doğrulara, düzlemler de düzlemlere, genel olarak, lineer şekiller lineer şekillere dönüşürler.

Bu tip çok basit bir dönüşüm, temel cisimden alınan keyfi c halinde $\widehat{x}$ in $c\widehat{x}$ 'e aşağıdaki lineer dönüşümüdür :

$$\sigma(\widehat{x}) = c\widehat{x}. \quad (7)$$

Özellikle $c = 1$ den, "özdeş dönüşüm" bulunur; ve bunun için $\sigma = 1$ yazılır; $c = 0$ halinde bütün $\widehat{x}$ vektörlerinin sıfır vektörlerine dönüşümü elde edilir.

İki veya daha fazla lineer dönüşümün birleştirilmesi için belirli kurallar verilebilir. Bunların en önemlisi, iki lineer dönüşümün, örneğin birincisi τ ile ve ikincisi σ ile, ardışık yapılmalıdır. Sonuç yeni bir dönüşüm olup, sıra göz önüne alınarak iki ayrı dönüşümün çarpımı

$$\varphi = \sigma \tau \quad (8)$$

şeklinde gösterilir; bu ise

$$\varphi(\widehat{x}) = \sigma(\tau(\widehat{x})) = \sigma \tau(\widehat{x})$$

anlamındadır. Ayrıcalıklar dışında çarpım komütatif değildir : $\varphi = \sigma \tau$ nın anlamı şudur : Önce τ sonra σ işlemi uygulanmalıdır. $\psi = \tau \sigma$ halinde, sıra tersdir; ve φ ile ψ dönüşümleri genellikle farklıdır. Ancak ikisinde, (5) ve (6) denklemleri ile verilen koşulları sağladığından, yine lineerdirler. $\sigma(\widehat{x}) = c\widehat{x}$ dönüşümü ise, $\lambda = c$ halinde denklem (5) den anlaşılacağı gibi, diğer τ ile değiştirilebilir.

Lineer σ dönüşümü, belirli koşullar altında "tersinir" olur; yani

$$\xi \sigma = 1, \quad \sigma \xi = 1 \quad (9)$$

çarpınlarının, özdeş dönüşümü göstermesini sağlayan bir ξ dönüşümü vardır, σ dönüşümü, ξ yi ve buda yine dönüşümünü tersinir yapar. Bu "invers dönüşüm" $\xi = \sigma^{-1}$ in varlık koşulu şöyledir :

Teorem 1 : σ lineer dönüşümü için, ancak ve ancak, R_n uzayına ait $\widehat{e}_1, \widehat{e}_2, \dots, \widehat{e}_n$ bazı ile $\sigma(\widehat{e}_1), \sigma(\widehat{e}_2), \dots, \sigma(\widehat{e}_n)$ dönüşüm vektörleri lineer bağımsız iseler, $\xi = \sigma^{-1}$ invers dönüşümü var olur; burada

$$\left[\sigma^{-1} \sigma = \sigma \sigma^{-1} = 1 \right], \quad (10)$$

dır.

R_n deki herhangi bir $\widehat{x}$ vektörü denklem (1) şeklinde yazılır ise, bu vektör σ dönüşümü halinde

$$\sigma(\mathbf{x}) = x_1 \sigma(\hat{\mathbf{e}}_1) + x_2 \sigma(\hat{\mathbf{e}}_2) + \dots + x_n \sigma(\hat{\mathbf{e}}_n).$$

şeklini alır. $\sigma(\hat{\mathbf{e}}_i)$ dönüşümleri lineer bağımlı iseler $\mathbf{x} \neq 0$ halinde $\sigma(\hat{\mathbf{x}}) = 0$ olacak şekilde $\mathbf{x}$ bileşenleri vardır. Ancak bu durumda $\xi \sigma(\hat{\mathbf{x}}) = \hat{\mathbf{x}} \neq 0$ olan bir ξ dönüşümü yoktur. Eğer $\sigma(\hat{\mathbf{e}}_i)$ lineer bağımsız ise $\mathbf{x}_i$ lerin temel cismin bütün sayılarını kaplaması yani $\hat{\mathbf{x}}$ in R_n uzayını kaplaması halinde $(\hat{\mathbf{x}})$ dönüşümlerinin hepsi R_n vektör uzayında bulunur. Bu durumda tek bir dönüşüm olup n adet $\sigma(\hat{\mathbf{e}}_i)$ nin hepsini ilgili $\mathbf{e}_i$ ye dönüştürür: $\xi \sigma = 1$. Böylece $\sigma \xi = 1$ de geçerli olur; zira

$$\sigma(\hat{\mathbf{x}}) = \sigma(\xi \sigma(\hat{\mathbf{x}})) = \sigma \xi \sigma(\mathbf{x}) = (\sigma \xi) \sigma(\mathbf{x}) = \sigma(\mathbf{x})$$

den $\sigma \xi = 1$ bulunur.

$\sigma(\mathbf{e}_i)$ dönüşümleri bir baza lineer bağımlı iseler, σ dönüşümüne “dallanmış” veya “tekil” adı verilir. R_n deki $\hat{\mathbf{y}} = \sigma(\hat{\mathbf{x}})$ dönüşümlerinin lineer uzayı, $\hat{\mathbf{x}}$ den daha küçük boyutludur. R_n uzayı, daha küçük boyutlu bir alt uzaya dönüştürülür. Bu durumda, dönüşüm tek ve tersinir olamaz; zira bir $\hat{\mathbf{y}}$ için çok sayıda $\hat{\mathbf{x}}$ vardır. Örneğin, R_3 uzayının böyle bir düzlemdeki dönüşümü dallanmış, tek tersinir olmayan bir dönüşümdür. Aksi halde, dönüşüme “dallanmış-olmayan”, “tekil-olmayan” veya “düzgün” adı verilir. Teorem 1 gereğince yalnız bu tip bir dönüşüm tersinirdir.

5.2. Matrisler ile Gösteriş.

R_n deki bir $\hat{\mathbf{x}}$ vektörü, sabit koordinat sisteminin seçiminden sonra ve $\hat{\mathbf{e}}_i$ bazı, $\hat{\mathbf{e}}_i$ nin koordinat sisteminde ölçülen $\mathbf{x}_i$ bileşenlerinden oluşan sütun matrisi ile sayısal olarak gösterilebilir. Bunun yanında lineer bir dönüşüm, yani $\hat{\mathbf{y}} = \sigma(\hat{\mathbf{x}})$ lineer dönüşümü şu şekilde sayısal olarak ifade edilebilir; bunun için $\mathbf{A} = (a_{ik})$ dönüşüm matrisine sahip $\mathbf{Y} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ matris denklemi yazılır; matrisin a_{ik} elemanları ise, bu koordinat sistemine bağlıdır ve temel cisme aittir. Baz vektörlerinin $\sigma(\hat{\mathbf{e}}_i)$ dönüşümleri verilmiş ise, σ dönüşümü belli olur; zira keyfi $\hat{\mathbf{x}}$ vektörleri halinde denklem (5) ve (6) kullanılarak denklem (1) den

$$\hat{\mathbf{y}} = \sigma(\hat{\mathbf{x}}) = x_1 \sigma(\hat{\mathbf{e}}_1) + x_2 \sigma(\hat{\mathbf{e}}_2) + \dots + x_n \sigma(\hat{\mathbf{e}}_n). \quad (11)$$

bulunur. Diğer taraftan

$$\hat{\mathbf{y}} = y_1 \hat{\mathbf{e}}_1 + y_2 \hat{\mathbf{e}}_2 + \dots + y_n \hat{\mathbf{e}}_n, \quad (12)$$

olup burada dönüşmüş vektörün, $\hat{\mathbf{e}}_i$ lerden oluşan sisteme göre y_i bileşenleri $\mathbf{x}_i$ bileşenlerine bağlı olarak bulunur. Baz vektörlerinin verilmiş $\sigma(\hat{\mathbf{e}}_i)$ dönüşümleri

$$\sigma(\hat{\mathbf{e}}_k) = \hat{\mathbf{a}}_k = a_{1k} \hat{\mathbf{e}}_1 + a_{2k} \hat{\mathbf{e}}_2 + \dots + a_{nk} \hat{\mathbf{e}}_n, \quad (13)$$

olsunlar; bunlar matris şeklinde de yazılabilir:

$$\sigma(\mathbf{e}_k) = \begin{pmatrix} a_{1k} \\ a_{2k} \\ \vdots \\ a_{nk} \end{pmatrix} = \mathbf{a}_k, \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (14)$$

Denklem (13), denklem (11) de yerine konularak

$$\hat{\mathbf{y}} = \sum_i \hat{\mathbf{e}}_i y_i = \sum_k \mathbf{x}_k \sigma(\hat{\mathbf{e}}_k) = \sum_k \mathbf{x}_k \left(\sum_i a_{ik} \hat{\mathbf{e}}_i \right) = \sum_i \hat{\mathbf{e}}_i \left(\sum_k a_{ik} \mathbf{x}_k \right),$$

buradan, (12) denklemi ile karşılaştırma yapılarak y_i bileşenleri

$$\boxed{y_i = \sum_k a_{ik} x_k} \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (15)$$

veya matris şeklinde

$$\boxed{\mathbf{y} = \mathbf{A} \mathbf{x}} \quad (15')$$

bulunur; burada nn -matris $\mathbf{A} = (a_{ik}) = (\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \dots \mathbf{a}_n)$ dir. Böylece bu $\hat{\mathbf{y}} = \sigma(\hat{\mathbf{x}})$ lineer dönüşümünün $\hat{\mathbf{e}}_i$ koordinat sistemine göre sayısal ifadesi olur. $\mathbf{A}$ dönüşüm matrisinin $\mathbf{a}_k$ “sütun vektörleri” burada, denklem (14) ile verilen baz vektörlerinin dönüşmüşleridir. k -nıncı sütunun a_{ik} elemanları $\hat{\mathbf{a}}_k = \sigma(\hat{\mathbf{e}}_k)$ nın, $\hat{\mathbf{e}}_i$ koordinat sisteminde ölçülen bileşenleridir. Ayrıca (14) denkleminde şu matris denklemi karşı gelir:

$$\mathbf{A} \mathbf{e}_k = \mathbf{a}_k, \quad (16)$$

bu ise $\mathbf{A}$ matrisinin $\mathbf{A} = (\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \dots \mathbf{a}_n)$ şeklindeki ifadesinden ve $\mathbf{e}_k$ nın matris şekli denklem (3) den, doğrudan doğruya bulunur.

Yeni bir koordinat sistemine geçiş te, hem vektörlerin x_i, y_i bileşenleri, hemde $\widehat{y} = \sigma(\widehat{x})$ dönüşümüne ait dönüşüm matrisinin a_{ik} elemanları dönüşürler. Bunun nasıl olduğu aşağıda gösterilecektir.

5.3. Koordinatların Dönüşümü.

Şimdi şunu soralım : yeni bir koordinat sistemine geçiş esnasında x ile y arasında var olan $y = Ax$ lineer dönüşümünün $\widehat{e}_i$ sistemine göre, x_i, y_i vektör bileşenleri ve a_{ik} matris elemanları ne olur? Bu yeni sistem $\widehat{t}_k$ baz vektörleri ile belli olsun; bunlar ise, eski $\widehat{e}_k$ baz vektörlerinin dönüşümleri olarak, diğerlerine $\widehat{t}_k = \tau(\widehat{e}_k)$ dönüşümü veya buna karşılık gelen

$$t_k = T e_k \quad (17)$$

dönüşüm denklemi ile bağlanmış olsunlar; burada

$$T = (t_{ik}) = (t_1, t_2, \dots, t_n), \quad (18)$$

daima tekil-olmayan matrisi olup, bunun sütunları $\widehat{t}_k$ yeni baz vektörlerinin, eski $\widehat{e}_i$ sisteminde ölçülmüş bileşenlerinden oluşurlar. Yani $\widehat{e}_i$ sistemi ile ifade edilir ise,

$$\widehat{t}_k = t_{1k} \widehat{e}_1 + t_{2k} \widehat{e}_2 + \dots + t_{nk} \widehat{e}_n \equiv \begin{pmatrix} t_{1k} \\ t_{2k} \\ \vdots \\ t_{nk} \end{pmatrix}. \quad (19)$$

olur. Eski sistemdeki x_i bileşenlerine sahip herhangi belli

$$\widehat{x} = x_1 \widehat{e}_1 + x_2 \widehat{e}_2 + \dots + x_n \widehat{e}_n \equiv \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad (20)$$

$\widehat{x}$ vektörünün yeni sistemindeki — aranan — $\bar{x}_i$ bileşenleri de şunlar olsun :

$$\widehat{x} = \bar{x}_1 \widehat{t}_1 + \bar{x}_2 \widehat{t}_2 + \dots + \bar{x}_n \widehat{t}_n \equiv \begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \\ \vdots \\ \bar{x}_n \end{pmatrix} = \bar{x}, \quad (21)$$

burada — $\bar{x}$ ile gösterilen — sütun matrisi yeni sisteme aittir. Denklem (19) daki $\widehat{t}_k$ ifadesinin bu son denklemde yerine konulması ve denklem (20) ile karşılaştırılması halinde,

$$\widehat{x} = \sum_k \bar{x}_k \widehat{t}_k = \sum_k \bar{x}_k \sum_i t_{ik} \widehat{e}_i = \sum_i \widehat{e}_i \sum_k t_{ik} \bar{x}_k = \sum_i \widehat{e}_i x_i$$

nedeni ile, eski ve yeni bileşenler arasında

$$\boxed{x_i = \sum_k t_{ik} \bar{x}_k} \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (22)$$

bağıntısı veya matris şeklinde

$$\boxed{x = T \bar{x}} \quad (22')$$

vektör bileşenlerine ait aranan dönüşüm denklemi bulunur. Burada şunu belirtmek gerekir : dönüşüm matrisi, x_i bileşenlerinden oluşan x matrisine çarpan olarak eklenir; buna karşılık $y = Ax$ lineer dönüşümünde matris eski vektörün yanındadır; yani bu vektörlerin bir dönüşümü gösteren baz vektörlerine ait dönüşüm denklemi (17) dir. Ayrıca, bileşenlerin ve baz vektörlerinin kontragradyent şekline dönüşükleri söylenebilir¹.

Şimdi düzgün ve tekil dönüşüm matrisi A halinde, vektör uzayının x vektörlerinin aynı uzaydaki y vektörlerine

$$y = Ax \quad (23)$$

şeklinde bir lineer dönüşümünü ele alalım; ve şunu soralım : T koordinant dönüşümü halinde $A = (a_{ik})$ matrisi hangi yeni $\bar{A} = (\bar{a}_{ik})$ matrisine dönüşür? Buna kolayca cevap verilebilir : Orijinal ve dönüşüm vektöre ait dönüşüm formülleri

$$\left. \begin{aligned} x &= T \bar{x} \\ y &= T \bar{y} \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

¹ Burada baz vektörleri sütun sayıldığından, matrisin ayrıca transpoze edilmesi ortadan kalkar.

denklem (23) de yerine konularak $T\bar{y} = AT\bar{x}$ ve tekil-olmayan T nedeni ile,

$$\bar{y} = T^{-1}AT\bar{x} = \bar{A}\bar{x} \quad (25)$$

bulunur. Buna göre şunu söyleyebiliriz :

Teorem 2 : $y = Ax$ lineer dönüşümündeki A dönüşüm matrisi tekil-olmayan T matrisi halinde yeni bir koordinat sistemine geçişte

$$\bar{A} = T^{-1}AT \quad (26)$$

matrisine dönüşür; denklem (26) gereğince A ve $\bar{A}$ gibi matrislere, "bir-birine benzer" ve (26) bağıntısında "benzerlik" dönüşümü denir. İki farklı koordinat sistemi ile belli bir ve aynı lineer dönüşümün sayısal ifadesine oranla benzerlik, iki matris arasında daha yakın bir bağıntı anlamına gelir. Bu neden ile benzer matrislerin belirli önemli ortak özellikleri olmaları beklenir. Burada kısaca benzer matrislerin eşit determinant değerine sahip olduklarını belirtelim :

$$\det \bar{A} = \det A \quad (27)$$

Bu ise 3.1. deki invers matris determinantına ait (9) denklemi ile 2.2. deki denklem (10) teorem 3 den ortaya çıkar.

5.4. Ortogonal Dönüşümler.

2.8. de

$$A'A = AA' = I \quad (28)$$

karakteristik özellikli "ortogonal matrisler" sınıfı tanımlanmış idi. Buradan

$$A^{-1} = A' \quad (29)$$

Yani invers matrisin çok basit ifadesi ve diğer taraftan hem sütun ve hem de satır vektörlerinin çiftler ortogonal birim vektörler olduğu çıkar.

Sütunlarının ortogonallığı nedeni ile, bir ortogonal matris daima tekil-olmayan bir matristir; ve bunun determinantı için 2.2. denklem (10) da verilen teorem III den

$$\begin{aligned} (\det A)^2 &= 1 \\ \det A &= \pm 1 \end{aligned} \quad (30)$$

bulunur. Ortogonal matrisler ile yapılan "ortogonal dönüşümler" bu iki determinant değerine uygun olarak $\det A = +1$ "esas olan" ve $\det A = -1$ "esas olmayan" şekillere ayrılırlar. İki ortogonal dönüşümün çarpımı yine ortogonal dönüşümdür; 2.8. de gösterildiği gibi. Böylece ortogonal dönüşümler — invers ve bir elemanın varlığı ile — bir "grup" oluştururlar. Aynı tipte, yani esas olan veya esas olmayan, iki ortogonal dönüşümün çarpımı, esas olan; ve aynı tipten olmayan iki dönüşümün çarpımı ise, esas olmayan bir ortogonal dönüşümdür; bu durum determinant teoreminden ortaya çıkar. Esas olan ortogonal dönüşümler, bütün ortogonal dönüşümlerin bir alt grubunu oluştururlar. Esas olmayanlar için bu durum bahis konusu değildir; zira bunların çarpımı esas olmayan bölgenin dışına çıkar.

Dönüşümün geometrik anlamına uygun olarak şu teorem geçerlidir :

Teorem 3 : A ortogonal matrisli $y = Ax$ ortogonal dönüşümü halinde, ortogonal birim vektör sistemi aynı şekilde bir sisteme dönüşür. Ortogonal e_i birim vektörleri için bu durum, a_k sütunlarının, e_k ların dönüşümleri olmasından anlaşılır. C ortogonal matrisin sütunları e_k birim vektörlerinden oluşan bir sistem için $B = AC$ halinde, yine ortogonal çarpım matrisi B nin ortogonal b_k birim sütunları bulunur. Böylece gösterilen dönüşüm üç boyutlu geometrik uzayda, dönüşüm esnasında üç eksenin birinin yönü değişmek şartı ile, bir dönme veya bir dönme ve simetri gösterir. Birinci halde $\det A = +1$ ikinci halde ise -1 dir. Bu durumların genelleştirilmesi halinde, esas olan bir ortogonal dönüşüm ile bulunan tesvire R_n de yalnız "dönme", esas olmayan ise "simetrik dönme" adı verilir.

5.5. Kontragradyent Dönüşüm ve Kongrüans.

İki matrisin benzerlik bağıntısı (26) yanında bir diğer matris dönüşümü, yani "kongrüans" da önemlidir.

$$Ax = y \quad (31)$$

Bunu şöyle gösterebiliriz :

1. Adım : $A \rightarrow A_1$ birinci satır b^1 in katlarının A dan çıkartılması, yani $c_1 b^1$ diyadik çarpımının çıkarılması :

$$A_1 = A - c_1 b^1 \quad (4.1)$$

burada

$$c_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ c_{21} \\ \vdots \\ c_{n1} \end{pmatrix}, \quad b^1 = (b_{11}, b_{12}, \dots, b_{1n}).$$

buradaki $c_1, a_1 - c_1 b_{11} = 0$ dan bulunur.

2. Adım : $A_1 \rightarrow A_2$, A_1 den 2-satır b^2 nin katları, yani $c_2 b^2$ diyadik çarpımı çıkarılır :

$$A_2 = A_1 - c_2 b^2 = A - c_1 b^1 - c_2 b^2 \quad (4.2)$$

burada

$$c_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ c_{32} \\ \vdots \\ c_{n2} \end{pmatrix}, \quad b^2 = (0, b_{22}, \dots, b_{2n}).$$

buradaki $c_2, a_2 - c_1 b_{12} - c_2 b_{22} = 0$ dan bulunur. Böylece en sonundan $A_n = 0$ sıfır matrisi elde edilir :

$$0 = A - c_1 b^1 - c_2 b^2 - \dots - c_n b^n = A - CB. \quad (4)$$

Burada çıkarılan terimlerin (diyadik çarpımların) toplamı $c_i b^i$, matris çarpımı CB den başka bir şey değildir :

$$CB = (c_1, c_2, \dots, c_n) \begin{pmatrix} b^1 \\ b^2 \\ \vdots \\ b^n \end{pmatrix} = c_1 b^1 + c_2 b^2 + \dots + c_n b^n.$$

böylece (4) denklemini,

$$\boxed{A = CB} \quad (5)$$

gereğince başlangıç matrisi A nın aşağıdaki üçgen matrislere ayrılması olarak bulunur :

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ c_{21} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ c_{31} & c_{32} & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n1} & c_{n2} & c_{n3} & \dots & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \dots & b_{1n} \\ 0 & b_{22} & b_{23} & \dots & b_{2n} \\ 0 & 0 & b_{33} & \dots & b_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & b_{nn} \end{pmatrix}. \quad (6)$$

A matrisinin bu şekilde üçgenlere ayrılması aşağıdaki gibi olur : Sırası ile; B nin 1. satırı ve C nin 1. sütunu, bundan sonra B nin 2. satırı ve C nin 2. sütunu, v.s... hesaplanır. Burada her seferinde, iki üçgen matriste bir tane bilinmeyen eleman ortaya çıkar. İki üçgen matris, bir-biri içine sokulmuş şekilde tertiplenebilir, bu durumda C nin 1-köşegeninin yazılması gerekmez, yani yalnız (3) sisteminin b_{ik} katsayıları, c_{ik} yoketme katsayıları yazılır. Normal algoritmanın $A_1, A_2 \dots$ ara sistemlerinden geriye yalnız yoketme satırları kalır. — Bütün işlem, ayrıca a_i veya b_i sağ taraflarının ek sütunu ile ve σ_k veya τ_k ile gösterilen satır toplamı ve s_i veya t_i ile gösterilen sütun toplamı ile genişletilebilir; böylece, geniş kapsamlı hesaplarda, kaçınılmaz olan toplam kontrolü yapılabilir. $A = CB$ matris çarpımında bulunacak skaler çarpım : satır kerre sütun, hesap makinasında, kısmi çarpımlar yapılmaksızın, otomatik olarak bulunur. Normal algoritmaya göre zincirleme algoritmaya göre zincirleme algoritmanın büyük üstünlüğü, buradaki yazı işlerinin kısaltılmış olmasıdır; yapılan çarpımların sayısı her iki algoritmada da aynıdır. Hesap, geniş ölçüde otomatikleştirilmiştir; ayrıca belirli hallerde önemli olan yuvarlatma hatalarının etkisi de azalır.

b_{ik}, c_{ik} elemanlarının bulunması ile ilgili açık hesap kuralı, B ve C üçgen matrisleri dikkate alınarak, genel çarpım formülü : satır kerre sütun'dan

$$b_{ik} = a_{ik} - c_{i1} b_{1k} - c_{i2} b_{2k} - \dots - c_{i,i-1} b_{i-1,k} \quad (7a)$$

$$c_{ik} = (a_{ik} - c_{i1} b_{1k} - c_{i2} b_{2k} - \dots - c_{i,i-1} b_{i-1,k}) : b_{kk} \quad (7b)$$

bulunur. Bu formüller ikinci tarafların ek sütunları ve satır toplamları, ayrıca sütun toplamlarının ek kısımları içinde geçerlidir. Pratik hesapta c_{ik} yerine $-c_{ik}$ yazılması amaçla uygundur. Bu durumda (7) denklemlerinde yalnız toplamlar ortaya çıkar; aşağıda verilen hesap şemasında kural şöyle gösterilebilir :

$$b_{ik} = a_{ik} + \text{skalares Produkt i-te Zeile} - c_{i0} \quad (7aa)$$

$$c_{ik} = (a_{ik} + \text{skalares Produkt i-te Zeile} - c_{i0}) : b_{kk} \quad (7bb)$$

Burada çarpım kendiliğinden, hesaplanacak olan b_{ik} ve c_{ik} elemanlarından durur. Birinci satır $b_{1k} = a_{1k}$, $b_1 = a_1$ ve $t_1 = s_1 = a_{1n} + \dots + a_{1n}$ $a_{1n} + a_1$ dahil olmak üzere a_{1k} değerlerinin yazılması ile oluşur. Birinci sütun $-c_{11} = -a_{11}/a_{11}$, ve $-\tau_1 = -\sigma_1/a_{11}$ sütun toplamı $\sigma_k = \sum a_{1k}$ olmak üzere, sadece bölme ile bulunur. İkinci satır b_{k2} , t_2 ile kontrol edilerek ve ikinci sütun $-c_{12}$, $-\tau_2$ ile kontrol edilerek v.s. bulunur. Burada $-\tau_k$ sütun toplamında yazılmamış olan köşegen eleman $-c_{kk} = -1$ de dikkate alınacaktır. Bu satır-sütun sırası ile, daha sonraki hesapta kullanılmadan önce, her sayısal değer kontrol edilir.

$n = 4$ için toplam ve sonuç satırları da dahil tam hesap şeması aşağıdaki gibidir :

σ_1	σ_2	σ_3	σ_4	σ	S
a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	a_1	s_1
a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{24}	a_2	s_2
a_{31}	a_{32}	a_{33}	a_{34}	a_3	s_3
a_{41}	a_{42}	a_{43}	a_{44}	a_4	s_4
b_{11}	b_{12}	b_{13}	b_{14}	b_1	t_1
$-c_{21}$	b_{22}	b_{23}	b_{24}	b_2	t_2
$-c_{31}$	c_{32}	b_{33}	b_{34}	b_3	t_3
$-c_{41}$	$-c_{42}$	$-c_{43}$	b_{44}	b_4	t_4
$-\tau_1$	$-\tau_2$	$-\tau_3$	-1	0	0
x_3	x_2	x_3	x_4	-1	0

Basamaklı sistemdeki b_{ik} , b_i katsayılarının hepsi bulunduğundan sonra, x_n ile başlamalı ve x_1 e kadar çıkmak üzere x_i bilinmeyenlerinin hepsine geçilir. $n = 4$ için şunlar bulunur :

$$\left. \begin{aligned} x_4 &= b_4 : b_{44}, \\ x_3 &= -(-b_3 + b_{34}x_4) : b_{33}, \\ x_2 &= -(-b_2 + b_{24}x_4 + b_{23}x_3) : b_{22} \\ x_1 &= -(-b_1 + b_{14}x_4 + b_{13}x_3 + b_{12}x_2) : b_{11}. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Yine hesap makinasında otomatik olarak skaler çarpımlar bulunur; burada b_i ikinci tarafları -1 çarpımı ile dikkate alınır ve nihayet son kontrol x_i sonuçlarının

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n + a_{i0} - 1 = 0 \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (9)$$

sisteminde yerine konulması ile yani skaler çarpımlar şeklinde yapılır. Tamamen emin olmamakla beraber, sütun toplamı ile yapılan kontrol daha kısadır :

$$\sigma_1x_1 + \sigma_2x_2 + \dots + \sigma_nx_n + \sigma - 1 = 0 \quad (9a)$$

(9) kontrolunda sonuçlar yeterli sıhhatli çıkmaz ise, ki bunun sebebi sınırlandırılmış hane sayısının nedeni ile ortaya çıkan yuvalatma hatalarıdır, sonuçlar 23.5. de ki gibi ek bir tashihe konu olurlar.

Hesap tekniği bakımından şuna dikkat edilmelidir, b_{ik} büyüklükleri, a_{ik} ların (ekseriya eşit) mertebesindedir; buna karşılık c_{ik} oranları bir mertebesindedir. Bu duruma göre b_{ik} ve c_{ik} değerleri virgülden sonra eşit hane sayısı yerine, eşit toplam hane sayısı ile hesaplanacaktır (S. 76 daki örneğe bakınız). b_{ik} ve a_{ik} çarpanları makinanın bir gözüne c_{ik} çarpanları ile diğer gözüne verilir; buna göre (7b) deki b_{kk} ile bütün hesap işlerine girmiş olur. Parantez içindeki ifade (bölünen) negatif ise bölme işlemi, sıfıra kadar doldurularak yapılır. a_i sağ tarafları a_{ik} katsayılarından başka mertebede ise, bunlar satır toplamı kontrolü dikkate alınarak 10^m gibi bir kuvvet ile çarpılarak a_{ik} ile aynı mertebeli yapılır. Bu ise $x'_i = 10^m x_i$ bilinmeyenlerine geçiş ile aynı anlamdadır; bu bilinmeyenler 1 mertebelidir.

Örnek :

$$2x_1 = x_2 - x_3 + 3x_4 + 2x_5 = 6$$

$$6x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_5 = -3$$

$$-4x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 3x_4 - 2x_5 = -5$$

$$2x_1 + 4x_3 - 7x_4 - 3x_5 = -8$$

$$x_2 + 8x_3 - 5x_4 - x_5 = -3$$

Sonuç: $x_1 = 8, x_2 = 21, x_3 = -2, x_4 = 1, x_5 = -3$.

6	0	17	-12	-5	-13	-7
2	-1	-1	3	2	6	11
6	-2	3	0	-1	-3	3
-4	2	3	-3	-2	-5	-9
2	0	4	-7	-3	-8	-12
0	1	8	-5	-1	-3	0
2	-1	-1	3	2	6	11
-3	1	6	-9	-7	-21	-30
2	0	1	3	2	7	13
-1	-1	1	2	4	14	20
0	-1	-2	1	6	18	24
-3	-3	-2	0	-1	0	0
8	21	-2	1	3	-1	0

$x_i =$

Zincirleme algoritma işlemini bir katsayılar örneği ile gösterelim; bu halde hesapta tam sayılı olduğundan kolayca yapılabilir. Algoritmanın esas manası olan hesap makinası ile çalışma, burada bahis konusu değildir. Bunun için S. 76. v.s. 6.4 deki örneğe bakınız.

Algoritma işlemi esnasında denklem sisteminde yapılan dönüşümler — bir satırın katlarının diğer satırlara eklenmesi — determinantın değerinde bir değişiklik yapmazlar. Yani başlangıç sisteminin, katsayılar determinantı $\det A$, determinantın işaretini değiştiren satır dönüşümleri yapılmamak üzere, basamaklı sistemin determinantına eşit olacaktır.

$$\det A = \det B.$$

Bu ise determinantların açınımı teoremine göre, b_{ii} köşegen elemanlarının çarpımı olarak hemen verilebilir. Böylece algoritma ile, katsayılar determinantının değeri aşağıdaki gibi bulunur :

$$\det A = b_{11} b_{22} \dots b_{nn}. \quad (10)$$

Bir kerre daha özetliyelim : zincirleme algoritmaya göre yoketme işlemi, — daha önceki tekil-olmayan kabul edilen — A katsayılar matrisi, alt üçgen matris C ve üst üçgen matris B nin çarpımı şeklinde yazıla-

bilir (üçgenlere ayrılma). Bilinmeyenlerin yok edilmesi ve hesaplanması, matris çarpımına indirgenir, Burada çarpanlar, denklem sisteminin çözülme işleminin invers karakterine uygun bir yapı gösterirler ve çarpanların üçgen şekli önem kazanır. Aşağıdaki çalışma adımları söylenebilir :

1. a) A nın yok-edilmesi, yani

$$CB = A \rightarrow [C, B],$$

gereğince C ve B üçgen matrislerinin kurulması.

b) Yok-edilmenin sağ tarafa genişletilmesi.

$$Cb = a \rightarrow [b],$$

2. Bilinmeyenlerin hesaplanması :

$$Bx = b \rightarrow [x].$$

M çarpım sayısı ve bütün kontroller ile bilinmeyenlerin hesaplanması dahil olmak üzere bütün çalışma genel n -sıralı matris ve simetrik katsayılar matrisi için şöyledir :

$$\text{Genel matris :} \quad M = \frac{1}{3}(n^3 + 6n^2 + 8n - 9) \approx \frac{n^3}{3}. \quad (11a)$$

$$\text{Simetrik matris :} \quad M' = \frac{1}{6}(n^3 + 12n^2 + 11n - 12) \approx \frac{n^3}{6}. \quad (11b)$$

n	M	M'
10	560	380
20	3520	2170
40	24640	13940
100	353600	186850

6.3. Simetrik Katsayılar Matrisi. Cholesky Metodu.

Uygulamalarda çok sık rastlanan simetrik katsayılar matrisi $A = A'$, $a_{ik} = a_{ki}$, halinde hesapta önemli bir sadeleşme olur, ve gerekli işlemlerin sayısı, yaklaşık olarak yarıya iner. İndirgenmiş $A_1, A_2 \dots$ sistemleri de yine simetrikdir :

$$a'_{ik} = a_{ik} - c_{i1} a_{1k} = a_{ik} - a_{i1} a_{1k} : a_{11}$$

$$a'_{ki} = a_{ki} - c_{k1} a_{1i} = a_{ki} - a_{1k} a_{i1} : a_{11} = a'_{ik}$$

Ayrıca birinci basamaktaki yoketme katsayıları

$$c_{i1} = a_{i1} : a_{11}$$

ve daha sonraki basamaklar, yani tüm olarak

$$c_{ik} = b_{ik} : b_{kk} \quad (12)$$

bulunur. Bu duruma göre c_{ik} yoketme katsayılarının denklem (7 b) ye göre ayrı hesaplanması gerekmez; ve bunlar **B** nin k-nıncı satırındaki b_{ik} değerlerini b_{kk} köşegen elemanına bölünmesi ile bulunurlar. Böylece hesap yaklaşık olarak yarıya indirgenir.

b_{ii} köşegen elemanlarının hepsi pozitif iseler, yani bir çok uygulamalarda ortaya çıktığı gibi, simetrik **A** matriside "pozitif definit" ise (bak. 11-2) üçgenlere ayrılma tamamen simetrik olarak yapılabilir; bu amaç ile b_{ik} yerine $v_{ik} = b_{ik}/b_{ii}$, c_{ik} yerine $c_{ki}/b_{ii} = b_{ik}/b_{ii} = v_{ik}$ değerleri kullanılır. Bu durumda **A** = **CB** yerine

$$\mathbf{A} = \mathbf{R}' \mathbf{R} \quad (13)$$

yazılabilir; burada **R** = (v_{ik}) üst üçgen matrisidir. Bu işlem, ilk defa Cholesky tarafından verilmiş ve onun adını almıştır¹ (12) denklemleri,

D = Diag (b_{ii}) olmak üzere

$$\mathbf{C}' = \mathbf{D}^{-1} \mathbf{B}$$

matris şeklinde yazılır ve bu köşegen matris $\mathbf{D}^{1/2} = \text{Diag} (b_{ii})$ cinsinden parçalarına ayrılır ise, başlangıçtaki üçgen ayrılmasından

$$\mathbf{A} = \mathbf{CB} = \mathbf{B}^1 \mathbf{D}^{-1} \mathbf{B} = \mathbf{B}^1 \mathbf{D}^{-1/2} \mathbf{D}^{-1/2} \mathbf{B} = \mathbf{R}' \mathbf{R}$$

bulunur; burada **R** = $\mathbf{D}^{1/2} \mathbf{B}$ dir; ve bu $v_{ik} = b_{ik}/b_{ii}$ bağıntısına karşı gelir. Aşağıdaki formüllere göre hesap yapılır :

¹ Benoit : Sur une méthode de resolution des equaions.

$$r_{ik} = (a_{ik} - r_{1i} r_{1k} - r_{2i} r_{2k} - \dots - r_{i-1,i} r_{i-1,k}) : r_{ii} \quad (14a)$$

$$r_{ii}^2 = a_{ii} - r_{1i}^2 - r_{2i}^2 - \dots - r_{i-1,i}^2 \quad (14b)$$

v_{ii} köşegen elemanlarının hesabı karekök alınmasını gerektirmektedir; bu ise pratik bir zorluk göstermez ve hesap makinasında yapılır. Hesap cetvelinde r_0 yaklaşık değeri ve buna bağlı olarak $r_0 = v_{ii}^2 / r_0$ (kök altındaki ifadenin yaklaşık değere bölümü) bulunur. Böylece, r_0 ve r_0 nin aritmetik ortalaması r_1 , aynı şekilde bulunan daha iyi bir yaklaşım : $r_1 = r_{ii}^2 / r_1$ ve buradan v_2 ortalaması çıkar. İşlem 2 veya 3 adımda sonuç verir. Ortalamanın bulunması son hamleler ile ilgili olduğundan bu işlem, kafadan yapılabilir ve normal bir bölmeden daha zor olmaz.

R matrisi

$$r_{11} = \sqrt{a_{11}}, r_{1k} : r_{11}$$

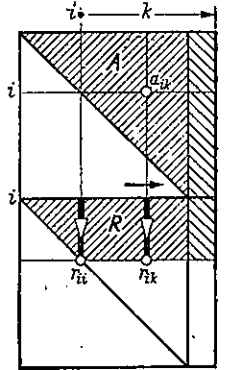
ile başlanarak satırlar şeklinde bulunur. Yeni i-inci satırın r_{ik} hesaplanması için, Şekil 6.1. de gösterilen şema kullanılır Simetrik **A** matrisinin yalnız üst üçgen kısmının yazılması gereklidir. Sütun toplamaları kontrolü yeterli olur; katsayılar determinantı için denklem (13) den

$$\det \mathbf{A} = (\det \mathbf{R})^2 = (r_{11} r_{22} \dots r_{nn})^2 \quad (15)$$

bulunur.

Eğer matris simetrik ise, fakat pozitif definit değil ise, negatif köşegen elemanları b_{ii} ve dolayısı ile sanal v_{ii} değerleri ortaya çıkar. Ancak bu durum diğer bir güçlüğe yol açmaz. r_{ii} değerleri ile birlikte denklem (14 a) gereğince, bu satırın geri kalan r_{ik} elemanları da tamamen sanal olurlar ve skaler çarpımlarda yalnız aynı satırın iki elemanı birbiri ile çarpıldığından bu çarpımlarda yine reel olur.

Katsayılar matrisi, hemen hemen tekil, yani determinantı çok küçük ise, metod faydalı olur. B udurumda çok küçük b_{ii} köşegen elemanları ortaya çıkar ve böylece önemli ölçüde hane kaybı olur ve hesabın pratik uygulanabilmesi tehlikeye girer. $r_{ii} = b_{ii}$ şeklinde kare kökleri alınarak bu kayıp azaltılır; bu takdirde geçerli haneler, virgüle doğru yak-



Şekil 6.1

laşırılar (örneğin $0,0001 = 0,01$). Böylece Cholesky metodu, bu tip zor-koşullu sistemlerde faydalı, hatta tek yol denebilir.

6.4. $b_{ii}=0$ halinde Sıraların Değişimi.

Şimdiye kadar tarif edilen şekli ile, zincirleme algoritmanın mükemmel işleyişi, sıfıra eşit olmayan b_{ii} köşegen elemanlarının varlığını ön görür. Ancak hesap esnasında $b_{ii} = 0$ olur ise (yani matrisin ilk i satır ve sütunundan oluşan alt determinant sıfıra eşit ise), bu durum, öngörülen $\det A = \det B \neq 0$ nedeni ile satırlar değiştirilerek, yani denklemlerin sırası değiştirilerek ortadan kaldırılabilir. Bu değiştirme işleminin muhakkak yapılması gerekmez; ve aşağıdaki şekilde, şimdiye kadar verilen hesap kurallarının az bir değişimi ile gerçekleştirilebilir.

Bilinmeyenler $x_1, x_2, x_3 \dots$ sırasında yok edilecektir. Örneğin $a_{11} = b_{11} = 0$ ise, birinci denklem, yok edilmek için uygun olmaz. Bu durumda birinci sütun boyunca aşağı inilir ve Z_1 inci satırda sıfırdan farklı ilk eleman a_{z11} e gelindiğinde bu elemana yeni "köşegen eleman" b_{z11} adı verilir ve çerçevelenerek gösterilir. Böylece birinci sütuna z_1 satırı ait kılınmış olur ve bu durum çerçevelenmiş "köşegen elemanından" anlaşılır. Bu satırın $b_{z1k} = a_{z1k}$ elemanları, A başlangıç matrisinin z_1 satırı yazılarak bulunur. Birinci sütunun c_{i1} elemanları ise $c_{i1} = a_{i1}/b_{z11}$ olup bunlar yeni köşegen elemanın üst tarafından sıfır olurlar.

Şimdi ikinci sütunda yukardan başlayarak-bulunmuş olan z_1 satırı atlanarak-sıfırdan farklı ilk eleman $b_{z22} \neq 0$ bulunur ve bu yine çerçeve ile "köşegen elemanı" olarak belirtilir; böylece 2 inci sütun için z_2 satırı bulunmuş olur. Bundan sonra, bu satırın b_{z2k} elemanları, satır kontrolü ile ve 2 inci sütunun c_{i2} elemanları sütun kontrolü ile bulunur.

Böylece her k sütununa bir z_k satırı, yani sütunların tabii sıralanmasına, satırların permütasyonlar sıralaması karşı gelir.

Sütun	1	2	3	4...
Satır	z_1	z_2	z_3	$z_4 \dots$

Bu sıralama, denklem (7) gereğince skaler çarpımların bulunması sırasında gözönüne alınmalıdır: i satırının c_i çarpanları tabii sırada izlenerek k -ninci sütunun b_{zk} çarpanı, c_i nin üstünde veya altında bulunan çerçevelenmiş köşegen elemanı hizasında elde edilir. Bu (7) denklemleri, bu anlamda şekil değiştirecektir.

Örnek :

5	2	3	4	4	-9	9
1	-2	4	-3	2	4	6
-2	4	-8	8	-5	-5	-8
3	-4	9	-5	4	7	14
1	2	-2	1	2	-10	-6
2	2	0	3	1	-5	3
<u>1</u>	-2	4	-3	2	4	6
2	0	0	<u>2</u>	-1	3	4
-3	<u>2</u>	-3	4	-2	-5	-4
-1	-2	0	2	<u>2</u>	2	4
-2	-3	<u>1</u>	-3	3	2	3
-5	-6	-1	1	-1	0	0
$x_1 =$	-8	2	5	2	-1	0

Basamaklı sistemin b_{ik} katsayılarının altları çizilmiş c_{ik} lar ise eğik yazılmıştır. Sütun-satır durumu burada şöyledir :

Sütun :	1	2	3	4	5
Satır :	1	3	5	2	4

Bu permütasyonda 3 inversiyon vardır; yani, büyük bir sayı kendisinden küçük olan bir sayıdan önce 3 defa yazılmıştır (Satırda : 2 den önce 3, 2 den önce 5, 4 den önce 5). Bu tip her inversiyona, determinantda işaret değiştirme karşı gelir; yani determinantın değeri

$$\det A = (-1)^3 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 2 = -8.$$

olur.

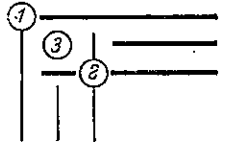
Eğer bir köşegen eleman sıfır değilse, ancak hesabın hassaslığı hane kaybı ile yok olacak kadar küçük ise, bu şekilde hareket edilir; aşağıdaki örneğe bakınız.

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	a_i	s_i
-10	46	11	-37	-3	50	57
21	-31	11	-15	43	17	46
-39	58	-21	-18	-29	18	-31
18	10	-17	-35	28	37	41
7	-12	26	16	-24	-33	-20
-17	21	12	15	-21	11	21
<u>21</u>	-31	11	-15	43	17	46
1.857 143	-0.011 719	0.012 386	<u>-45.35005</u>	50.48115	48.84233	53.97341
-0.857 143	<u>36.57143</u>	-26.42857	-22.14286	-8.85715	22.42857	1.57142
-0.333 333	0.045 573	<u>21.12890</u>	19.99088	-38.73698	-37.64453	-35.26172
0.809 524	0.111 979	-0.849 326	-0.366 067	<u>27.23856</u>	41.36635	68.60488
0.476 191	-0.854 166	-1.836 938	-1.366 067	-1.000 00	-	-
0.363 897	1.667 615	0.422 166	0.613 491	1.518 669	-1	-0.000 03

 $x_1 =$

Yine ilgili sütunda, var olması halinde, uygun büyüklükte bir diğer köşegen elemanı seçilir. Aksi halde $\det A$ çok küçük değerli olan matris hemen hemen tekdir; ve her hal için sayısal hesap emin sonuç vermez. Özellikle hesap makinelerinde her sütunda sistematik olarak en büyük değerli eleman bulunur ve bu köşegen elemanı sayılarak c_{ik} yok etme sayılarının miktar bakımından ≤ 1 olması sağlanır. Böylece yuvarlatma hataları minimuma indirilir. Bu ise geniş sistemlerde gereklidir.

Simetrik matris halinde, verilen metod için simetri ve buna bağlı olan önemli çalışma kazancı ortadan kalkar. Bunun korunması için her satır değişimi aynı adlı sütun değişimine bağlanmalıdır. Bu ise numaraların değiştirilmesi, yani hesap şemasındaki sıranın değiştirilmesi ile mümkün olur. İşlem Şekil 6.2. yardımı ile gösterilecektir; Orada ilk önce $b_{22} = 0$ olduğu kabul edilmiştir. Bundan sonra ikinci satır ve sütun atlanarak, şekilde 2 ile gösterilen 3 üncü köşegen elemanı b_{33} e geçilir ve,



Şekil 6.2

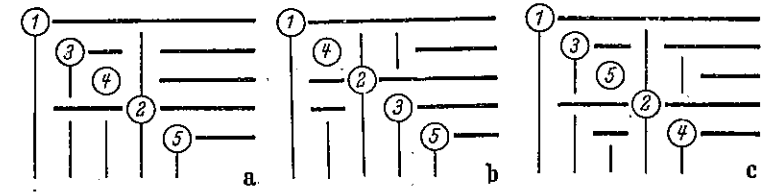
$e_s \neq 0$ ise, ilgili b_{3k} satırı (koyu çizilmiş yatay doğru) ve $c_{k3} = b_{3k}/b_{33}$ den $-c_{k3}$ sütunu (ince düşey doğru) hesaplanır; indisler, burada, Şekil 6.2. deki köşegen sayılar yerine, gerçek satır ve sütun numaralarını gösterir. Bu durumda üçüncü satır, ikinci sütuna ve üçüncü sütun ikinci satıra gider. Buna göre c_{ik} ların b_{ik} lara göre, uygun şekilde (örneğin farklı renkte çizilerek) gösterilmesi tavsiye edilir. Nihayet ikinci köşegen elemanı b_{22} — Şekilde 3 ile gösterilmiştir — sıfırdan farklı olur ise, ilgili satır ve sütun ile hesaplanır; yani

$$b_{2k} = o_{2k} - c_{21} b_{1k} - c_{23} b_{3k}, \quad c_{k2} = b_{2k} : b_{22}.$$

Bu durumda şemada, ilk önce atlanmış olan ikinci satır ve sütunun keşilmesi gerekir.

Sıfırdan farklı — veya değeri çok küçük olmayan — bir köşegen elemanı bulununcaya kadar, birden fazla sıranın atlanması gerekebilir. Şekil 6.3. a. daki örneğe bakınız, orada 1 4 2 3 5 ... sırası vardır. Ayrıca şuda olabilir: ilk önce atlanan sıra, kendinden sonrakinin hesaplanmasından sonra bile kullanılamaz, Şekil 6.3. b. deki 1 3 4 5 ... sırası. Veya güçlükler Şekil 6.3. c. de olduğu gibi birlikte ortaya çıkarlar; burada 1 4 2 5 3 ... sırası gereklidir. Aşağıdaki iki sayısal örnekten birincisi Şekil 6.2. deki basit hali, ikincisi ise Şekil 6.3. c. dek hali göstermektedir. $-c_{ik}$ oranları, b_{ik} dan ayırt edebilmek için, eğik ve parantez içinde

Örnek 1	7	16	-5	18	11	-22
	1	2	-1	3	2	-3
	2	4	-4	6	8	-8
	-1	-4	3	1	-4	11
	3	6	1	8	0	-3
	2	8	-4	0	5	-19
	<u>1</u>	2	-1	3	2	-3
	(-2)	<u>-2</u>	(-1)	4	2	6
	(1)	-2	<u>2</u>	4	-2	8
	(-3)	(2)	(-2)	<u>-1</u>	2	2
	(-2)	(1)	(1)	(2)	<u>5</u>	5
	(-7)	(2)	(-7)	(1)	(-1)	0
$x_1 =$	2	-2	3	0	1	-1
Örnek 2	3	12	5	9	-2	20
	1	2	-1	3	-2	-6
	2	4	2	4	0	10
	-1	2	1	-1	4	12
	3	4	-1	7	-4	-8
	-2	0	4	-4	0	12
	<u>1</u>	2	-1	3	-2	-6
	(-2)	<u>2</u>	2	(-1)	2	12
	(1)	(-1)	<u>1</u>	(1)	(1/2)	3
	(-3)	-2	2	<u>-2</u>	2	10
	(2)	(-1)	2	(1)	<u>-4</u>	-2
	(-3)	(-3)	(-1)	(0)	(-1/2)	0
$x_2 =$	2	1	3	-1	2	-1



Şekil 6.3

gösterilmiş; b_{ik} ların altına ise ? işaretleri konulmuştur. Cholesky metodunda b_{ik} ların yerine r_{ik} konulur, bu arada c_{ik} lar ortadan kalkar.

6.5. Bölüm Olmayan Algoritma.

Küçük hane sayılı, tam katsayılar halinde, şimdiye kadar kullanılan şekildeki algoritma işlemi esnasında bölmeler nedeni ile tam sayı özelliği ortadan kalkar. Bu durum, değiştirilmiş, bölüm olmayan algoritma ile önlenir. a_{11} ile çarpılmış birinci satır, $a_{11} = b_{11}$ ile çarpılmış diğer satırlardan çıkartılarak birinci sütun yok edilir; yani A_1 indirgenmiş matris aşağıdaki şekilde bulunur :

$$A_1 = b_{11} A - c_1 b^1, \quad (16.1)$$

burada c_1 , A nın birinci sütun ve b^1 ise birinci satırıdır. İkinci basamakta da benzer şekilde hareket edilir ise, iki defa indirgenmiş matrisin, bütün elemanlarının, b_{11} köşegen elemanına bölünebileceği görülür. Mümkün olan minimum haneli sayılara geçmek için, b_{11} e bölme işlemi yapılır; yani kural gereğince

$$A_2 = (b_{22} A_1 - c_2 b^2) : b_{11} \quad (16.2)$$

olur; burada c_2 , A_1 nın ikinci sütunu, b^2 ise ikinci satırıdır. (16.1) denkleminde

$$b_{11} A_2 = b_{11} b_{22} A - b_{22} c_1 b^1 - c_2 b^2.$$

bulunur; burada

$$b_{22} = b_{11} a_{22} - c_{21} b_{12}$$

$$c_2 = b_{11} a_2 - c_1 b_1^2$$

$$b^2 = b_{11} a^2 - c_{21} b^1.$$

dır; böylece (16.2) denklemindeki parantez ifadesi için,

$$b_{11} A_2 = b_{11} b_{22} A - (b_{11} a_{22} - c_{21} b_{12}) c_1 b^1 - b_{11} a_2 b^2 + b_{11} b_{12} c_1 a^2 - c_{21} b_{12} c_1 b^1$$

elde edilir; burada $c_{21} b_{12} c_1 b^1$ dışında her terimde b_{11} çarpan vardır. Aynı durum, daha sonraki basamaklar içinde mümkündür; ve indirgenme işlemine aşağıdaki gibi devam edilir :

$$A_3 = (b_{33} A_2 - c_3 b^3) : b_{22} \quad (16.3)$$

$$A_4 = (b_{44} A_3 - c_4 b^4) : b_{34} \quad (16.4)$$

$$\dots \dots \dots$$

b_{1k}, c_{1k} ile ilgili hesap kuralı gereğince şinler elde edilir :

1. Satır ve Sütun $b_{1k} = a_{1k}, c_{11} = a_{11}$
2. Satır ve Sütun $b_{2k} = a_{2k} b_{11} - c_{21} b_{1k}$
 $c_{12} = a_{12} b_{11} - c_{11} b_{12}$
3. Sıra $b_{3k} = [(a_{3k} b_{11} - c_{31} b_{1k}) b_{22} - c_3^2 b_{2k}] : b_{11}$
 $c_{13} = [(a_{13} b_{11} - c_{11} b_{13}) b_{22} - c_{12} b_{23}] : b_{11}$

Genellikle, hesap kuralı aşağıdaki şekilde ifade edilebilir : sıra ile

$$a_{1k} b_{11} - c_{11} b_{1k} = d_{1k} \quad (17.1)$$

$$(d_{1k-2} b_{22} - c_{12} b_{2k}) : b_{11} = d_{1k-1} \quad (17.2)$$

$$(d_{1k-3} b_{33} - c_{13} b_{3k}) : b_{22} = d_{1k-2} \quad (17.3)$$

$$\dots \dots \dots$$

bulunur. Bu hesap

$$d_{1k-1} = b_{1k} \quad \text{für } k \geq i \quad (18.a)$$

$$d_{1k-k} = c_{1k} \quad \text{für } g \geq i \quad (18.b)$$

elemanlarında sona erer; ve

$$d_{11-1} = b_{11} c_{11} \quad (18.c)$$

i-inci ana bölge determinantına eşit olur. Son köşegen elemanı b_{nn} , burada $\det A$ katsayılar determinantına eşittir. Genellikle $d_{1k} \cdot j$ değerleri matrisin j-sıralı alt determinantlarını gösterirler. (17) denklemindeki parantez ifadelerinin yukardaki köşegen elemanına bölünebilmesi kontrol

olarak kullanılmalıdır. Ayrıca toplam şeklinde kontrollarda yapılabilir. Bu bölüm olmayan algoritmada, ana bölge determinantı $d_{11} \cdot 2 = b_{ij}$ sıfır ise, satır değişimi yolu uygulanabilir.

Örnek :

$$\begin{aligned} 3x_1 - x_2 + 2x_3 + 4x_4 &= 11 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 - 2x_4 + x_5 &= -6 \\ 2x_1 - 2x_2 + 2x_3 - x_4 &= 1 \\ 4x_1 + 3x_2 - 2x_3 + x_4 - x_5 &= -1 \\ -x_1 + 3x_2 + 2x_3 - x_4 + x_5 &= -8 \end{aligned}$$

9	6	5	1	1	-3	19
3	-1	2	4	0	11	19
2	3	1	-2	1	-6	-1
1	-2	2	-1	0	1	1
4	3	-2	1	-1	-1	4
-1	3	2	-1	1	-8	-4
5	-1	2	4	0	11	10
2	11	-1	-14	3	-40	-41
1	-5	13	-49	5	-96	-127
4	13	-47	-194	-7	-409	-610
-1	8	32	191	267	801	1068
9	27	-2	-3	267	0	0
1	-2	-1	2	3	-1	0

$$\det A = 267.$$

6.6. Invers Matris Hesabı. Matris Bölümü.

Tekil olmayan A matrisinin $X = A^{-1}$ invers matrisinin hesabı, 3.1. de görüldüğü gibi aşağıdaki denklem sisteminin çözümüdür :

$$AX = I \quad (19)$$

burada n adet e_k sütunu, n -katlı ikinci taraftır, (Şekil 64 deki şemada gösterildiği üzere) sağ taraf I , yok etme esnasında $\Gamma = (\gamma_{jk})$ alt üçgen matrisine dönüşür; bu ise $CI = I$ gereğince C nin invers matrisidir. Sağ taraf olarak k -ninci sütun γ_{jk} için, basamaklı $BX = \Gamma$ sisteminden alınan invers matris X in k -ninci sütunu x_k çözüm olarak bulunur. Bu çözüm sütunları şemada sütun şeklinde gösterilir ise, X tranpoze şekli X' nü alır; burada Γ in k -ninci sütunu sağ taraf olarak, sağda verilen negatif birim matrisin -1 elemanından çıkar; Şekil 6.4. e ve sayfa 82 deki

hesap şemasına bakınız — Yani yapılacak tüm matris işlemleri şunlardır :

1. **C** ve **B** nin kurulması

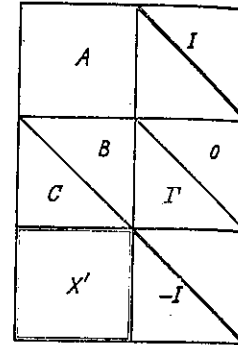
$$CB = A \rightarrow [C, B]$$

2. Yeni sağ taraf Γ nin bulunması

$$C\Gamma = I \rightarrow [\Gamma]$$

3. **X** bilinmeyeninin hesaplanması

$$BX - \Gamma I = 0 \rightarrow [X]$$



Şekil 6.4

Satır toplamları kontrolü **A** veya **B** dışında **I** veya Γ sağ taraflarının her n sütununa da genişletilebilir. Γ in denklem (19) da yerine konması ile yapılması son kontrol, kısa şekilde, **A** in σ_k sütun toplamları ile de, ve **X** nin x'_k satırı için yapılabilir :

$$\sigma_1 \alpha_{1k} + \sigma_2 \alpha_{2k} + \dots + \sigma_n \alpha_{nk} - 1 = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, n). \quad (20)$$

n = 4 için, sayfa 82 de tam hesap şeması ve bir sayısal örnek verilmiştir. Hane sayısı için S. 86 daki örneğe bakınız.

	σ_1	σ_2	σ_3	σ_4	1	1	1	1	S
A	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	1	0	0	0	s_1
	a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{24}	0	1	0	0	s_2
	a_{31}	a_{32}	a_{33}	a_{34}	0	0	1	0	s_3
	a_{41}	a_{42}	a_{43}	a_{44}	0	0	0	1	s_4
B	b_{11}	b_{12}	b_{13}	b_{14}	1	0	0	0	t_1
	$-c_{21}$	b_{22}	b_{23}	b_{24}	γ_{21}	1	0	0	t_2
	$-c_{31}$	c_{32}	b_{33}	b_{34}	γ_{31}	γ_{32}	1	0	t_3
	$-c_{41}$	c_{42}	c_{43}	b_{44}	γ_{41}	γ_{42}	γ_{43}	1	t_4
X'	$-\tau_1$	$-\tau_2$	$-\tau_3$	-1	0	0	0	0	Probe
	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}	-1	0	0	0	0
	x_{12}	x_{22}	x_{32}	x_{42}	0	-1	0	0	0
	x_{13}	x_{23}	x_{33}	x_{43}	0	0	-1	0	0
X	x_{14}	x_{24}	x_{34}	x_{44}	0	0	0	-1	0

ÖRNEK

	2	2	1	-4	1	1	1	1	5
A	1	0	-1	2	1				3
	2	-1	-2	3		1			3
	-1	2	2	4			1		0
	0	1	2	-5				1	-1
(A⁻¹)'	1	0	-1	2	1				3
	-2	-1	0	-1	-2	1			-3
	1	2	1	-4	-3	2	1		-3
	0	1	-2	2	4	-3	-2	1	2
(A⁻¹)'	-2	2	-3	-1					
	2	0	5	2	-1				0
	-1	1/2	-4	-3/2		-1			0
	-1	1	-3	-1			-1		0
(A⁻¹)'	1	-1/2	2	1/2				-1	0

3.3. de verilen matris bölümü.

$$AX = P \quad \text{veya} \quad X = A^{-1}P \quad (21)$$

içinde aynı şekilde hareket edilir : burada np-matrisler, **P**, **X**, p-katlı ikinci taraf **P** li denklem sisteminin çözümlenmesi ile bulunur; bu ise **P** nin p-adet p_k sütunundan oluşur; ve **X** in p-adet x_k sütunu bunlara karşı gelir. Böylece Şekil 6.5 deki hesap şemasının başka bir açıklamaya ihtiyacı yoktur. Çalışma adımları şunlardır :

1. **C** ve **B** nin bulunması

$$CB = A \rightarrow [C, B]$$

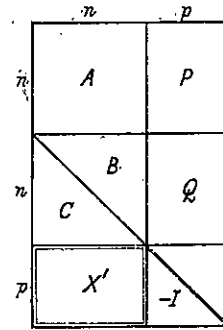
2. Yeni sağtaraf **Q** nin bulunması

$$CQ = P \rightarrow [Q]$$

3. **X** = (x_k) bilinmeyenlerin hesabı.

$$BX - QI = 0 \rightarrow [X]$$

$X = A^{-1}P$ bölme probleminin çözümü, A^{-1} invers matrisinin ayrı hesaplanması ve bundan sonra P ile A^{-1} in çarpılması uzun bir yoldur. Zira $A^{-1}P$ in bulunması için, tam matrisler halinde n^2p çarpım gereklidir. Bu ise 2 ve 3 işlemlerinin gerektirdiği sayıdır. 1 işlemi iki halde de yapılmalıdır; fakat A^{-1} in hesabı için ayrıca Γ ve $X = A^{-1}$ bulunmalıdır. Bu fazla çalışma, denklem sistemlerinin çözüleceği sağ taraf sayısı p den tamamen bağımsızdır; hatta bu tip sağ taraflar sonradan keyfi sayıda eklenebilirler. Eğer α_{ik} elemanları herhangi bir amaç için ifade edilmişler ise, invers matrisin bulunması bir anlam taşır.



Şekil 6.5

6.7. Simetrik Matris için Invers Matris.

Önemli $A = A'$ simetrik matrisi özel halinde $A^{-1} = (\alpha_{ik})$ nın hesabı büyük ölçüde sadeleşir¹. İlk önce A nın yanında A^{-1}

$$(A^{-1}A)' = A' A^{-1} = A A^{-1'} = I = A A^{-1}$$

den anlaşılacağı gibi A^{-1} de simetriktir: $X = A^{-1'}$. Hesabın ilk kısmı yani C, B üçgen matrislerinin bulunması 6.6. daki gibi olur; ancak simetrik halde denklem (12) ye göre b_{ki} ler ile birlikte verilen c_{ik} ların hesabı sadeleşir. Buna göre, Γ invers matrisinin C den hesaplanması uygun olur. Böylece 6.6. da aranan $X = A^{-1}$ invers matrisi

$$BA^{-1} = \Gamma \quad (22)$$

¹ T. Banachiewicz tarafından verilen Cholesky şeklinde bir metoda göre: On the computations of inverse arrays. Acta Astron. C. Vol. 4 (1939) p: 26—30.

den bulunur. Zira A^{-1} in matrisinden dolayı, denklem (22) de köşegen elemanları 1 dışında alt üçgen matris Γ nın yalnız köşegenin üstündeki sıfır elemanları kullanılabilir; ve böylece Γ matrisinin geri kalan kısmının bilinmesine lüzum kalmaz. Denklem (22) deki matris çarpımında A^{-1} in sütun şeklinde hesabına A^{-1} in son sütunundan başlanır ve sırası ile B nin son, sondan bir evvelki... satırı ile çarpılır ise, 1 nın $n-1$ adet sıfırdan ve Γ adet birden oluşan son sütunu kullanılarak $\alpha_{nn}, n, \dots, \alpha_{1n}$ elemanları aşağıdaki gibi bulunur:

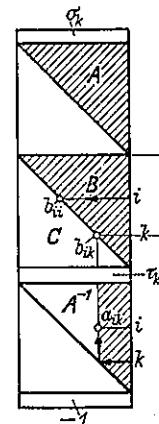
$$\left. \begin{aligned} \alpha_{nn} &= 1/b_{nn} \\ \alpha_{n-1,n} &= -b_{n-1,n} \alpha_{nn} : b_{n-1,n-1} \\ \alpha_{n-2,n} &= -(b_{n-2,n} \alpha_{nn} + b_{n-2,n-1} \alpha_{n-1,n}) : b_{n-2,n-2} \\ &\dots \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

Aynı işlem A^{-1} in sondan ikinci sütunu ile de yapılır; bu sütunun son elemanı $\alpha_{n,n-1}$ ise, simetriden dolayı bilinen $\alpha_{n-1,n}$ elemanına eşittir; bu neden ile hesap ana köşegenden itibaren yukarı doğru yapılacaktır; burada ise Γ nın bütün elemanları ise 0 ve 1 olarak bellidir. Genel olarak A^{-1} in k -ninci sütunun elemanları ana köşegenden yukarı doğru şu şekilde hesaplanır:

$$\alpha_{kk} = (1 - b_{kn} \alpha_{nk} - b_{k,n-1} \alpha_{n-1,k} - \dots - b_{k,k+1} \alpha_{k+1,k}) : b_{kk} \quad (24a)$$

$$\alpha_{ik} = -(b_{in} \alpha_{nk} + b_{i,n-1} \alpha_{n-1,k} + \dots + b_{i,i+1} \alpha_{i+1,k}) : b_{ii} \quad (24b)$$

$$i = k-1, k-2, \dots, 2, 1,$$



Şekil 6.6

Bu esnada daima A^{-1} in matrisinden faydalanılır. Bunun için A^{-1} ve A nın yalnız köşegenin üst tarafında ve üzerindeki elemanlar yazılır ve A^{-1} in aşağıda kalan sütun parçası yerine köşegene simetrik satır parçası konur.

Denklem (24) deki çarpımın bulunması için Şekil 6.6. da verilen yol izlenir; bunun için sabit k halinde B matrisinde $i = k$ dan $i = 1$ e kadar satır yukarı doğru çıkarılır; ve böylece k -ninci sütunun α_{ik} elemanları sırası ile elde edilir. $k = n, n-1, \dots, 2, 1$, içinde aynı şekilde hareket edilerek invers matris tamamlanır. A^{-1} in her satırı bittikten sonra denklem (20) gereğince A nın σ_k sütun toplamları ile kontrol yapılır.

Denklem (24) den anlaşılacağı gibi, eğer det **A** nın değeri çok küçük değilse α_{ik} elemanları, $1/b_{ik}$ veya $1/a_{ik}$ mertebeli olur. Anlaşıldığı üzere, ortaya çıkan bütün değerler için aynı sayıda geçerli hane esas alınır; sayısal örneğe bakınız.

Örnek : Aşağıdaki matrisin invers matrisini bulunuz.

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} 38 & -14 & 17 & 0 \\ -14 & 25 & 21 & 10 \\ 17 & 21 & -18 & 3 \\ 0 & 10 & 3 & 15 \end{pmatrix}.$$

41	42	23	28	134	Probe
38	- 14	17	0	41	0
	25	21	10	42	0
		- 18	3	23	0
			15	28	0
38	- 14	17	0	41	0
0,368 421	19,84206	27,263 16	10	57,10526	- 4 · 10 ⁻⁵
- 0,447 368	- 1,374 008	- 63,065 06	- 10,740 08	- 73,80517	3 · 10 ⁻⁵
0	- 0,503 980	- 0,140 302	11,789 26	11,78926	0
0,01878375	- 0,00167502	0,01545690	- 0,00197470	A ⁻¹	
	0,02664512	0,02568721	- 0,02290085		
		- 0,01339655	- 0,01444549		
			0,08482297		
1,000 000	1,000 001	1,000 001	0,999 998	Probe	

Sonuç, çok yuvarlatılmıştır.

7. Lineer Bağımlılık ve Rank.

7.1. Bir Vektör Sisteminin Lineer Bağımlılığı.

1.6. da verilen lineer bağımlılık kavramı burada, önemli noktalar-
da genişletmek amacı ile tekrarlanacaktır. Her birinin n bileşen a_j^k bu-
lunan p adet a_k vektörlerinden oluşan

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{a}_1 &= \{\mathbf{a}_1^1, \mathbf{a}_2^1, \dots, \mathbf{a}_n^1\} \\ \mathbf{a}_2 &= \{\mathbf{a}_1^2, \mathbf{a}_2^2, \dots, \mathbf{a}_n^2\} \\ &\vdots \\ \mathbf{a}_p &= \{\mathbf{a}_1^p, \mathbf{a}_2^p, \dots, \mathbf{a}_n^p\} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

sistemi ele alalım; bu p-sayılı n-katlı sistemdir. a_j^k bileşenleri genellikle reel, bazı hallerde ise kompleks sayılar olabilir. Bu vektörlerin, aynı sayı bölgesine, (yani reel veya kompleks bölgeye) ait c_k sabitleri ile lineer kombinasyonları yapılarak sıfır vektörü çıkarılır ise, bu ve vektörlere lineer bağımlı adı verilir.

Tanım 1. Eğer p adet ve sıfıra eşit olmayan $c_1, c_2, \dots, c_p$ sabitleri

$$c_1 \mathbf{a}_1 + c_2 \mathbf{a}_2 + \dots + c_p \mathbf{a}_p = \mathbf{0} \quad (2)$$

bağıntısını sağlayacak şekilde, aynı sayı bölgesinden seçilebiliyor ise, reel veya kompleks bölgedeki a_j^k bileşenli $a_1, a_2, \dots, a_p$ vektörlere lineer bağımsız denilir. Buna karşılık denklem (2) den $c_1 = c_2 = \dots = c_p = 0$ çıkması halinde, vektörlere lineer bağımsız denir.

Vektör denklemi (2), aşağıdaki n adet bileşen denklemi, yani c_{ik} cinsinden n -adet homogen lineer denklem sistemi ile denktir :

[illegible]

Bu sistemin triviyal olmayan, yani sıfır olmayan, c_k çözümlerine sahip olması halinde, vektör sistemi denklem (1) lineer bağımlı olur.

Ancak belirli özel hallerde bir vektör sisteminin lineer bağımlılığı veya bağımsızlığı doğrudan doğruya görülebilir. Buna karşılık bir vektör sisteminin lineer bağımlı olup olmadığı sorusuna cevap vermek için, genellikle özel dönüşümler gerekli olur. Fakat vektörlerden birisi sıfır vektörüne eşit, örneğin $a_q = 0$ ise, tanım gereğince lineer bağımlılık vardır; çünkü burada $k \neq q$ için $c_k = 0$, $c_q \neq 0$ halinde (2) koşulu sağlanmaktadır. Sıfırlardan oluşan bir katsayılar sütununa sahip olduğu için, denklem sistemi (3) $c_q \neq 0$ için çözülebilir. — a_k vektörleri arasında iki tanesi eşit ise, veya bir vektör diğeri ile orantılı ise, yine bağımlılık vardır. Örneğin $a_i = c a_k$ halinde $c_i = c$ ve $c_k = -1$ dir; geri kalan sabitler ise, (2) denklemini sağlamak için sıfıra eşit alınmalıdır. — n adet birim vektör

$$\left. \begin{aligned} e_1 &= \{1 \ 0 \ 0 \dots 0\} \\ e_2 &= \{0 \ 1 \ 0 \dots 0\} \\ &\dots \dots \dots \\ e_n &= \{0 \ 0 \ 0 \dots 1\} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

nün lineer bağımsızlığı daha evvel belirtilmiş idi. Burada

$$c_1 e_1 + c_2 e_2 + \dots + c_n e_n = \{c_1, c_2, \dots, c_n\} = c,$$

olur; yani c_i bileşenli bir c vektörüne eşittir; ve bu ancak ve ancak, her $c_i = 0$ halinde sifıra eşit olur. — Ayrıca

$$\left. \begin{aligned} a_1 &= \{a_1^1, a_2^1, a_3^1, \dots, a_n^1\} \\ a_2 &= \{0, a_2^2, a_3^2, \dots, a_n^2\} \\ a_3 &= \{0, 0, a_3^3, \dots, a_n^3\} \\ &\dots \dots \dots \\ a_n &= \{0, 0, 0, \dots, a_n^n\} \end{aligned} \right\}, \quad (5)$$

şeklindeki n vektörden oluşan sistemde lineer bağımsızdır; burada “köşegen bileşenleri” $a_1^1, a_2^2, \dots, a_n^n$ sıfırdan farklıdır: her i için $a_i^i \neq 0$. Zira tek bileşenler halinde lineer bağımlılık koşulları, yani denklem sistemi (3)

$$\begin{aligned} c_1 a_1^1 &= 0 \rightarrow c_1 = 0 \\ c_1 a_1^2 + c_2 a_2^2 &= 0 \rightarrow c_2 = 0 \\ c_1 a_1^3 + c_2 a_2^3 + c_3 a_3^3 &= 0 \rightarrow c_3 = 0 \\ &\dots \dots \dots \end{aligned}$$

şeklini alır; burada da sırası ile $c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0$ çıkar.

Lineer bağımlı vektörlerden oluşan bir sistemde, en az bir vektör, geri kalanların lineer kombinasyonudur. p adet c_k sabitlerinden en az bir tanesi sıfırdan farklı olacağından, örneğin $c_q \neq 0$, denklem (2) c_q ye bölündükten sonra a_q ye göre çözülebilir:

$$a_q = k_1 a_1 + \dots + k_{q-1} a_{q-1} + k_{q+1} a_{q+1} + \dots + k_p a_p.$$

Burada bir kaç (a_q nün sıfır vektörü olması halinde bütün) k_j çarpanları sıfır olabilir.

$(p-1)$ adet $a_1, a_2, \dots, a_{p-1}$ lineer bağımsız vektörlerinden oluşan bir sistem verilmiş ve ayrıca, $a_1, a_2, \dots, a_p$ sistemi lineer bağımlı olacak şekilde bir a_p vektörü eklenir ise, eklenen bu a_p vektörünün diğerlerine bağılı olduğu açıktır. Eğer denklem (2) de $c_p = 0$ olsa idi geriye $c_1 a_1 + \dots + c_{p-1} a_{p-1} = 0$ kalır idi, ve buradan $p-1$ adet vektörün bağımsızlığı nedeni ile, $c_1, c_2 = \dots = c_{p-1} = 0$ bulunurdu; yani hipoteze aykırı olarak, bütün sistem lineer bağımsız olurdu. Bu durumda $c_p \neq 0$ olur; ve a_p ye göre çözüm yapılır.

Teorem 1. $p-1$ adet $a_1, a_2, \dots, a_{p-1}$ vektörleri lineer bağımsız, buna karşılık p adet $a_1, a_2, \dots, a_p$ vektörleri lineer bağımlı ise, yalnız $a_p \neq 0$ halinde,

$$a_p = c_1 a_1 + c_2 a_2 + \dots + c_{p-1} a_{p-1} \quad (6)$$

bulunur; burada c_k katsayılarının hepsi birden sıfır olamaz.

Bir vektör sistemi $a_1, a_2, \dots, a_p$ ye, r tane lineer bağımsız vektöre sahip olması, fakat vektörlerden $r+1$ tanesinin daima lineer bağımlı olması halinde, r ranklı denir. Görüleceği gibi $r \leq p$ dir; ve $r = p$ için vektörler lineer bağımsız olur.

7.2. Bir Matrisin Rankı.

Bir $m \times n$ -matrisi $A = (a_{ik})$, m bileşenli n adet a_k sütun vektörlerinin veya n bileşenli m adet satır vektörlerinin sistemi sayılır. Bunlardan her birine lineer bağımsız sütun veya satırların maximum sayısı olarak bir “rank” verilir. Bu iki rankın aynı olduğu ve dolayısı ile matris için rankın r olduğu görülecektir. Bu r sayısı, m ve n sayılarının küçüğünden daha büyük olamaz; yalnız sıfır matrisi halinde $r = 0$ dir.

Hipotezimizin ispatı, aynı zamanda matrisin pratik rank belirlenmesi — ayrıca herhangi bir vektör sisteminde rank belirlenmesi — için matrisde, ne satır ne de sütun rankını değiştiren bir seri dönüşümler yapılacaktır. Bunlar aşağıdaki “elementer dönüşümler” dir:

- I. İki satır veya sütunun yer değiştirmesi;
- II. Bir satır veya sütunun, $c \neq 0$ çarpanı ile çarpılması;
- III. Herhangi bir c sayısı ile çarpılmış bir satır veya sütunun diğer bir satır veya sütuna eklenmesi;

6.4. de tanımlanan satır değiştirmesi yanında, bir sütunda, hesaplanacak sayılar arasında, köşegen eleman olabilecek sıfırdan farklı bir elemana rastlanmaması halinde, bir sütun değişiminde gerekli olur. Bu durumda, bir sonraki sütuna geçilir; ve burada, serbest sütunlarda, sıfırdan farklı ve köşegen eleman rolünü oynayan bir eleman aranır. Bu yoldan — satır ve sütun yer değiştirmesinden sonra — sıfır olmayan r adet $b_{ii} \neq 0$ köşegen elemanları bulunmuş olur. Böylece r adet bağımsız satır ortaya çıkar; satır rankı r olur. Sütun rankıda aynidir. İlk r sütun, üçgen şekli nedeni ile, lineer bağımsızdır; fakat bundan sonraki her s sütunu bağımlıdır; zira

$$c_1 b_{1s} + \dots + c_r b_{rs} + e_s b_s = 0$$

aşağıdaki şekilde bir denklem sistemidir.

$$\left. \begin{aligned} b_{11} c_1 + b_{12} c_2 + \dots + b_{1r} c_r + b_{1s} c_s &= 0 \\ b_{22} c_2 + \dots + b_{2r} c_r + b_{2s} c_s &= 0 \\ \dots &\dots \\ b_{rr} c_r + b_{rs} c_s &= 0 \end{aligned} \right\},$$

bu ise, $b_{ii} \neq 0$ nedeni ile, tamamen çözülebilir. $c_s = 0$ için $c_1 = \dots = c_r = 0$, buna karşılık $c_s \neq 0$ için, genellikle sıfırdan farklı c_j sabitleri bulunur ve böylece sütun rankıda r olur. Yani matrisin rankıda r dir.

Tanım 2 : Bir $m \times n$ -matrisine, r adet lineer bağımsız veya sütunlu ise, buna karşılık $r + 1$ ve daha fazla satır veya sütunlar lineer bağımlı ise, r ranklı denir.

Okuyucununda bildiği gibi III. dönüşümü, yani satır ve sütunların lineer kombinasyonu, daha basit değerlendirilebilecek bir şekle getirmek için, determinant hesaplarına da uygulanır. Burada, bilindiği gibi, determinantın değeri değişmez. I. dönüşümü, yani iki sıranın değiştirilmesi halinde, determinantın işareti değişir ve II. dönüşümü halinde $c \neq 0$ ile çarpılır. Bu üç dönüşümden hiç biri determinantın sıfır olmasını veya olmamasını dikkate almaz. Buradan, ve elemanter dönüşümler ile A dan çıkan B matrisinin üçgen şeklinden şu sonuca varılır : B nin yanında A da en aşağı bir tane sıfırdan farklı r sıralı determinanta sahiptir; buna karşılık A da var olan daha fazla sıra sayılı bütün determinantlar ortadan kalkar. Böylece matris rankının ikinci tanımı elde edilir.

Tanım 3 : Bir $m \times n$ -matrisine, sıfır olmayan en aşağı bir tane r sıralı determinanta sahip ise ve mevcut olan diğer daha yüksek sıra sayılı determinantlar da ortadan kalkıyor ise, r ranklı denir.

Örnek : Aşağıdaki kare matrisin rankını bulunuz.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & 4 & -2 \\ -2 & 6 & -4 & -3 & 2 \\ 3 & -7 & 5 & 8 & -3 \\ -2 & 8 & -5 & -2 & 3 \\ 1 & -5 & 3 & 3 & -3 \end{pmatrix}.$$

Aşağıdaki şemaya göre, toplam kontrolleri ile genişletilmiş zincirleme algoritma ile dönüşüm : -

1	-1	1	10	-3	8
1	-3	2	4	-2	2
-2	6	-4	-3	2	-1
3	-7	5	8	-3	6
-2	8	-5	-2	3	2
1	-5	3	3	-3	-1
1	-3	2	4	-2	2
2	0	0	5	-2	3
-3	2	-1	-4	3	0
2	-1	0	-2	0	0
-1	1	0	1	0	0
-1	-1	0	-2	0	0

3. sütunda artık sıfırdan farklı eleman yoktur; 2. satırda köşegen elemanı olarak 5 bulunan 4. sütuna geçilir. Böylece satırların yer değiştirilmesi ile şu elde edilir :

$$B^* = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & 4 & -2 \\ 0 & 2 & -1 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Sıfırdan farklı 3 satırı nedeni ile B^* in ve dolayısı ile A nın rankı $r = 3$ dür, 3 ve 4 sütun değiştirilerek üçgen matris elde edilir :

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & -4 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Üçgen şeklinden şu teorem çıkar :

Teorem 2 : Bir mn -matrisinin rankı, en fazla m ve n sayılarının küçüğüne eşittir.

Buradan da teorem III çıkar :

Teorem 3 : n adet a_1^k bileşenli n adet a_k vektörlerinden fazlası daima lineer bağımlıdır; diğer bir deyimle n -boyutlu R_n uzayında en fazla n adet lineer bağımsız vektör vardır.

Zira vektörlerin a_1^k bileşenleri — $p > n$ için p adet — np -matrisinin elemanları olarak sütun şeklinde sıralanabilirler; bunların rankı en fazla n e eşit olur; ve böylece p adet sütun vektörü a_k , $p > n$ nedeni ile, lineer bağımlıdır. Ayrıca — teorem 3 ile birlikte — şu teorem söylenebilir :

Teorem 4 : n adet lineer bağımsız, n boyutlu a_k vektörü verilmiş ise, keyfi, n -boyutlu bir a vektörü a_k ların lineer kombinasyonu olarak yazılabilir :

$$a = c_1 a_1 + c_2 a_2 + \dots + c_n a_n. \quad (10)$$

a_k vektörleri R_n de bir "baz" oluştururlar. Denklem (10) tekil olmayan $A = (a_1 a_2 \dots a_n)$ katsayılar matrisi ve a sağ taraflı homogen olmayan bir denklem sistemini ifade eder ve buradan, keyfi a halinde c_k katsayıları bulunur.

7.3. Matris Çarpımlarının Rankı.

Eğer A ve B çarpanlarının r_A ve r_B rankları belli ise, AB matris çarpımının rankı hakkında çeşitli, az-veya çok doğru tahminler yapılabilir. A veya B matrisini tekil-olmayan ve kare olması halinde bu durum çok basitleşir. A matrisi, r ranklı bir mn -matrisi ve B matrisi tekil-olmayan m sıralı kare matris olsun. $BA = C$ çarpım matrisinin rankı ne olur? A nın n adet a_k sütunu ile, çarpım aşağıdaki gibi yazılır :

$$BA = B(a_1, \dots, a_n) = (Ba_1, \dots, Ba_n) = (c_1, \dots, c_n) = C.$$

C nin c_k sütunları, a_k sütunlarının dönüşmüşleridir :

$$c_k = Ba_k.$$

Şimdi r adet lineer bağımsız a_k sütunu vardır; ve genelliğe zarar vermeden, bunların ilk r olduğu kabul edilebilir. $s > r$ halinde her a_s sütunu için teorem 1, gereğince

$$k_1 a_1 + \dots + k_r a_r + a_s = 0, \quad (11)$$

veya kısaca

$$A_s k = 0 \quad (11')$$

olup, burada

$$A_s = (a_1, \dots, a_r, a_s)$$

kısmi matris ve

$$k = (k_1, \dots, k_r, 1) \neq 0.$$

vektördür. Böylece

$$BA_s k = C_s k = 0, \quad (12)$$

daha ayrıntılı olarak

$$k_1 c_1 + \dots + k_r c_r + c_s = 0. \quad (12')$$

bulunur. Yani $r + 1$ adet c_k vektörü lineer bağımlıdır, ve C nin rankı r den büyük olamaz. Fakat B nin tekil-olmayan bir matris olması nedeni ile $BA = C$ bağıntısı tersinir olmadığından, A nın rankının da C ninkinden büyük olamayacağı sonucuna varılır. Yani C ile A aynı ranklıdır. Tekil-olmayan nn -matrisi B halinde, AB çarpımı incelenmek istenir ise, $B'A'$ ne geçilir ve aynı sonuç bulunur.

Teorem 5 : A , r ranklı mn -matrisine B kare, tekil-olmayan ve A ile çarpılabilen bir matris ise, çarpım matrisi AB veya BA aynı r ranklı olur. Karesel tekil-olmayan A halinde şu özel hal elde edilir :

Teorem 6 : Tekil-olmayan kare matrisler A, B nin çarpımı AB de tekil-olmayan bir matristir. Bu durum 2.2. de verilen determinant teoremi 3 den de elde edilebilir. Bu iki teoremi biraz değişik şekle sokabiliriz.

A nın ilk önce üçgen şekline, ondan sonra III ve II sütun dönüşümleri ile aşağıdaki "normal şekle" getirildiğini kabul edelim : (Bak. 7.4.).

$$N_A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \dots 0 & 0 \dots 0 \\ 0 & 1 \dots 0 & 0 \dots 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 \dots 1 & 0 \dots 0 \\ 0 & 0 \dots 0 & 0 \dots 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 \dots 0 & 0 \dots 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} \end{pmatrix}$$

Burada **I**, r_A sıralı birim matrisidir. Gerekli bütün satır dönüşümleri tekil-olmayan **P** matrisi ile soldan çarpım, sütun dönüşümleri ise tekil-olmayan **Q** matrisi ile sağdan çarpım ile yapılır :

$$\mathbf{P} \mathbf{A} \mathbf{Q} = \mathbf{N}_A.$$

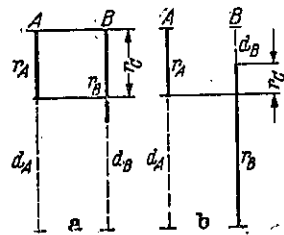
Aşağıdaki matris incelendiğinde

$$\bar{\mathbf{C}} = \mathbf{P} \mathbf{C} = \mathbf{P} \mathbf{A} \mathbf{Q} \cdot \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{B} = \mathbf{N}_A \bar{\mathbf{B}},$$

$\bar{\mathbf{C}} = \mathbf{P} \mathbf{C}$ ile **C** nin ve $\bar{\mathbf{B}} = \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{B}$ ile **B** nin aynı ranklı olduğu anlaşılır. $\bar{\mathbf{B}}$ nin, r adet satırdan oluşan üst $\bar{\mathbf{B}}_1$ ve geri kalanlardan oluşan alt $\bar{\mathbf{B}}_2$ parçalarına ayrılması ile

$$\bar{\mathbf{C}} = \mathbf{N}_A \bar{\mathbf{B}} = \begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{B}}_1 \\ \bar{\mathbf{B}}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{B}}_1 \\ \mathbf{O} \end{pmatrix}.$$

elde edilir. Yani $\bar{\mathbf{C}}$ matrisi, $\bar{\mathbf{B}}$ nin r_A adet üst satırından ve $n - r_A = d$ alt sıfır satırından oluşur. $\bar{\mathbf{B}}$ nin rankı r_B olduğundan; r_B adet lineer bağımsız satır vardır. Bunun üst parçası en fazla r_A adet bağımsız satıra sahip olabilir, Şekil 7.2a. Bu halde aranan rank $r_C = r_A$ dir. $\bar{\mathbf{B}}$ nin lineer bağımsız satırları, r_B adet alt satır olabilir ve üst satırlardan her biri bunlara bağımlı olabilir, Şekil 7.2b. Bu halde r_C rankı, en aşağı iki rankın çakışan kısmına eşittir; yani eğer bu büyüklük negatif değil ise, $r_A + r_B - n = r_A - d_B$ olur; aksi halde sıfıra eşittir. r_C bu iki sınır arasında olabilir; yani $r_A \leq r_B$ nedeni ile



Şekil 7.2 a ve b. çarpım matrislerinin rankı.

$$r_{\min} - d_{\min} \leq r_C \leq r_{\min}. \quad (17)$$

di, bu ise, Sylvester'in sıfırlılık kanunu adı altında bilinen şu teoremdir :

Teorem 9 : n -sıralı kare **A** ve **B** matrislerinin rankları r_A ve r_B ve defektleri $d_A = n - r_A$ ve $d_B = n - r_B$ ise, $\mathbf{C} = \mathbf{AB}$ veya $\mathbf{C} = \mathbf{BA}$ çarpım matrisinin rankı r_C , en fazla iki rankın küçüğüne, veya en az, en küçük defekt kadar azaltılmış en küçük ranka eşittir. Böylece çarpım matrisinin rankı, sınırlanmış olup, sınırlama aralığı **A** ve **B** çarpanlarının en küçük defektine eşittir. Tekil-olmayan çarpan özel halinde sınırlar birleşir ve $r_C = r_A$ olur; **Teorem 5.**

Genel halde, **Teorem 9** dakinden daha fazla bir şey söylenemez; ancak özel hallerde, özellikle 2.7. de verilen Gauss dönüşümüne ait **A/A** matrisi halinde bazı şeyler söylenebilir; 11.2. deki kuadratik formlara bağlı olarak bunların $m \times n$ -matrisi **A** ile aynı r ranklı olduğu gösterilecektir :

7.4. Eşdeğerlilik.

Bir r ranklı $m \times n$ -matrisi, satırların kombinasyonu ve gerektiğinde satır — w sütun değiştirmeleri ile, r adet sıfırdan farklı $b_{ii} \neq 0$ köşegen elemanlı üçgen şekline getirilebilir; ve buradan r rankı doğrudan doğruya okunabilir idi. Eklene sütun kombinasyonu ile bu üçgen matris, köşegen şekline dönüştürülebilir : b_{ik} / b_{ii} ile çarpılmış, birinci sütunun, $k = 2, 3, \dots, n$ halinde k -ninci sütundan çıkarılması ile, b_{ii} dışında, birinci satırın bütün b_{ik} elemanları sıfır olur; b_{2k} / b_{22} ile çarpılmış ikinci sütunun kendinden sonraki $k = 3, 4, \dots, n$ sütunlarından çıkarılması ile, ikinci satırın elemanları v.s. elde edilir. En sonunda bütün bu $b_{ii} \neq 0$ köşegen elemanları, ilgili b_{ii} 'ye bölünerek (dönüşüm II) bire eşitlenir; ve böylece matris aşağıdaki normal şekle gelir.

$$\mathbf{N} = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{array} \right) \begin{matrix} r \\ \\ \\ m-r \\ \end{matrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} \end{pmatrix} \quad (18)$$

Rankı r olan her $m \times n$ -matrisi sonlu sayıda elemanter dönüşümler yardımı ile sol üst köşesinde r sıralı I birim matrisi olan m satırlı ve n sütunlu bu normal şekle sokulabilir. Böylece şu tanım yapılır :

Tanım 4 : Bir tanesinden diğerine sonlu sayıda elemanter dönüşümler ile geçilen A ve B gibi iki tane $m \times n$ -matrisine bir birine "eşdeğerli" denir ve şöyle gösterilir :

$$A \sim B, \quad (19)$$

Bu ise, ikisinin birden (18) normal şekline getirilebilme halidir; ve şu söylenebilir :

Teorem 10 : Eşdeğerli matrislerin rankları eşittir. Aynı $m \times n$ tipinde ve eşit ranklı matrisler eşdeğerlidirler.

Burada iki matrisin belirli — fakat oldukça geniş — bir iş yakınlığı bahis konusudur. Kare matrislerin daha önce verilen benzerlik (5.3.) ve kongruent özelliği (5.7.) gibi daha yakın bağlar, genel eşdeğerlilikten daha önemlidir; ve bunlar eşdeğerliliğin özel halleridir.

Eşdeğerlilik bir matris denklemi ile ifade edilebilir. Bir A matrisindeki elemanter dönüşümlerin her biri, A nın tekil-olmayan daha basit yapı bir kare matris ile çarpılması yolu ile yapılabilir. Örneğin 2.3. de verilen J_{ik} (dönüşüm I), veya C_i matrisi, bu I de i -inci köşegen elemanı 1 yerine $c \neq 0$ (dönüşüm II) konularak bulunur; ve ayrıca yine 2.3. de verilen K_{ik} matrisi (dönüşüm III). A matrisinin soldan çarpımı satırların dönüşmesini, sağdan çarpım ise sütunların dönüşmesini sağlar. Ardışık dönüşümler halinde, bütün sol çarpımlar tekil-olmayan $m \times n$ -matrisi P , ve bütün sağ çarpanlar tekil-olmayan $m \times n$ -matrisi Q ile gösterilir ise, başlangıç matrisi A ile, elemanter dönüşümler ile bulunan, yani kendisine eşdeğerli, B matrisi arasında şu bağıntı var olur :

$$B = PAQ, \quad (20)$$

Bu ise tekil-olmayan P ve Q nedeni ile tersine çevrilerek

$$A = P^{-1} B Q^{-1}. \quad (20a)$$

bulunur. A, B matrisleri arasında, tekil-olmayan P ve Q halinde, (20) bağıntısı var ise, A ve B eşdeğerli matrislerdir. Zira A nın tekil-olmayan bir matris ile çarpılmasında teorem 5 gereğince A nın rankı değişmez.

Teorem 11 : A ve B gibi iki $m \times n$ -matrisi, yalnız ve yalnız, denklem (20) ve (20a) bağıntılarını sağlayan tekil-olmayan P ve Q matrislerinin (bunlardan birisi birim matris de olabilir) var olması halinde eşdeğerlidir. Özellikle r ranklı her $m \times n$ -matrisi A , (18) normal şekline getirilebilir. İki kare matrisin, yukarıda verilen "benzerliği", burada $P = Q^{-1}$ hipotezli özel hal ve kongruent özelliği ise $P = Q'$ hipotezli özel hal olmaktadır. Her iki halde de bağ, tekil-olmayan tek dönüşüm matrisi Q ye dayanır.

8. Genel Lineer Denklem Sistemleri.

8.1. Genel Homogen Denklem Sistemleri.

Şimdiye kadar bir lineer denklem sisteminin çözümünde tekil-olmayan kare katsayılar matrisi öngörülmüş idi. Şimdi ise, kare olmayan katsayılar matrisli genel denklem sisteminin çözümü ele alınacak ve ilk önce aşağıdaki homogen sistem çözülecektir :

$$Ax = 0 \quad (1)$$

Burada A $m \times n$ -matrisidir ve ikinci taraflar sıfıra eşittir. Bu tip sistemler bir taraftan genel homogen olmayan denklemlerin esaslarıdır; diğer taraftan Bölüm IV de incelenecek özdeğer problemi ile ilgili, kare matrisli sistemler olarak ortaya çıkarlar. Her halde sistemin

$$x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0, \text{ kısaca } x = 0, \quad (2)$$

trivial çözümü vardır. Bu ise genellikle önemsizdirler; zira herhangi A matrisi için geçerli bir çözümdür. Trivial olmayan $x \neq 0$ çözümleri yani n adet x_i bilinmeyenlerinden en az bir tanesinin sıfırdan farklı olduğu çözümler önemlidir. Fakat sistemin bu tip bir çözümü var ise, aynı zamanda bu tip sonsuz sayıda çözümü olur; yani çözüm tek değildir.

Teorem 1 : x_1 , (1) in bir çözümü ise keyfî c çarpanlı $x = c x_1$ de bir çözüm olur. x_1 ve x_2 , (1) in iki çözümü ise $x = x_1 + x_2$ de yine bir çözümdür. Homogen lineer denklem sistemlerinin bu karakteristik özelliği, yerine koyma işlemi ile hemen anlaşılır :

$$A(c x_1) = c A x_1 = 0,$$

$$A(x_1 + x_2) = A x_1 + A x_2 = 0.$$

Trivial olmayan çözümlerin varlığına gelince A matrisinin a_k sütunlarına sahip

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n = 0 \quad (1a)$$

şeklindeki (1) denklemlerinden 7.1., tanım 1. gereğince şu yazılır :

Teorem 2 : n adet x_k bilinmeyenli homogen denklem sisteminin, katsayılar matrisinin a_k sütunları lineer bağımlı ise, yani r rankı, n den küçük ise ve sistemin pozitif defekti $d = n - r > 0$ ise, trivial olmayan çözümleri vardır. A matrisi, sütun düzgün ise, (1) in yalnız trivial çözümü vardır. Buradan şu teorem çıkar:

Teorem 3 : Denklem sayısı, bilinmeyenler sayısından az ($m < n$) homogen denklem sisteminin, daima trivial olmayan çözümleri vardır. Zira ancak bu durumda rank $r \leq m < n$ dir, yani teorem 2 deki koşul sağlanmıştır. Buna göre

Teorem 4 : n bilinmeyenli n denklemden oluşan homogen bir sistemin, ancak ve ancak, nn -matrisi tekil, yani $\det A = 0$ ise, trivial olmayan çözümleri vardır.

Pratik çözüm yine şöyle yapılır : A matrisi Gauss algoritması ile B üst üçgen matrisine, yani verilen sistem basamaklı bir sisteme dönüştürülür; burada — gerekli satır dönüşümleri yapılarak — ilk satır sıfırdan farklı olur; var olan diğer satırlar ($m > n$ halinde) sıfır olur. Sistem kendiliğinden r adet lineer bağımsız denkleme indirgenir; geri kalan denklemler ortadan kalkar. Gerektiğinde sütun dönüşümü ile (yani bilinmeyenlerin numaraları değiştirilerek) r adet $b_{ji} \neq 0$ köşegen elemanı bulunur; ve basamaklı sistem aşağıdaki şekli alır :

x_1	x_2	$\dots$	x_a	x_{a+1}	x_{r+2}	$\dots$	x_n			
b_{11}	b_{12}	$\dots$	b_{1r}	$b_{1,r+1}$	$b_{1,r+2}$	$\dots$	b_{1n}	}		
0	b_{22}	$\dots$	b_{2r}	$b_{2,r+1}$	$b_{2,r+2}$	$\dots$	b_{2n}			
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$			
0	0	$\dots$	b_{rr}	$b_{r,r+1}$	$b_{r,r+2}$	$\dots$	b_{rn}			
x_1	x_{11}	x_{21}	$\dots$	x_{r1}	1	0	$\dots$	0	$\dots$	c_1
x_2	x_{12}	x_{22}	$\dots$	x_{r2}	0	1	$\dots$	0	$\dots$	c_2
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
x_d	x_{1d}	x_{2d}	$\dots$	x_{rd}	0	0	$\dots$	1	$\dots$	c_d

r bağımlı bilinmeyen | d serbest bilinmeyen

Burada bilinmeyenler, kendiliğinden (belirli şekilde olmasa bile) $b_{ji} \neq 0$ köşegen elemanlarına ait r ve geriye kalan $n - r = d$ kısımlarına ayrılırlar. “serbest bilinmeyenler” adı verilen bu sonunculara keyfi sayısal değerler verilerek “bağımlı bilinmeyenler” adı verilen ilk r adet bilinmeyen sırası ile basamaklı sistemden bulunur. Özellikle yukarıda belirttiğimiz gibi, serbest bilinmeyenler yerine, sırası ile, d sıralı e_k birim vektörlerinin bileşenleri konularak “ d adet lineer bağımsız $x_1, x_2, \dots, x_d$ çözümleri” elde edilir. Buradan “genel çözüm” yani serbest bilinmeyenlerin keyfi c_i değerlerine ait çözüm şu şekilde bulunur :

$$x = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_d x_d \quad (3)$$

Yukarıda yapılan seçim halinde c_i ler serbest bilinmeyen $x_{r+1}, \dots, x_n$ ile özdeştir; böylece c_i ler yerine bunlar alınabilir. Serbest bilinmeyenlerin daha genel seçilmesi halinde c_i ler artık bu özel anlamı taşımazlar. Serbest bilinmeyenlerin değerleri, d adet $x_1, x_2, \dots, x_d$ çözümleri, lineer bağımsız olacak şekilde seçilir ise, denklem (3) den genel çözüm bulunur. Bunun için her kez birinci, ikinci ... d -inci dışında bütün serbest bilinmeyenler sıfıra eşitlenmelidir. Buna göre

Teorem 5 : n bilinmeyenli ve rankı r olan katsayılar matrisli homogen lineer denklem sisteminin $d = n - r$ adet lineer bağımsız $x_1, x_2, \dots, x_d$ çözümleri; yani bir “temel sistemi” vardır; buradan genel çözüm d adet c_k serbest parametresi cinsinden (3) denklemini şeklinde bulunur.

Denklem (3) deki d adet c_k parametresi bir birinden bağımsız olarak, katsayılar matrisinin a_{ik} elemanlarının ve x_k çözümlerinin x_{ik} bileşenlerinin alındığı sayı bölgesindedir (yani reel A matrisi halinde reel sayı bölgesindedir); buna karşılık x vektörü, R_n in d boyutlu bir alt uzayını kaplar; $d = 1$ halinde bu bir doğru, $d = 2$ halinde bir düzlemdir. Burada, bu kavramlar $n > 3$ için tam cebirsel anlam taşırlar. Bu durumda x e de “lineer vektör dönüşümü” denir ve bu teorem 1 deki hipoteze göre karakterize edilir. Boyutu ise d dir. Böyle bir şekil, geometrik olarak sıfır noktasından geçen d boyutlu lineer bir alt uzayı gösterir. Böylece şu teoremi söyleyebiliriz :

Teorem 6 : Defekti $d = n - r$ olan homogen bir denklem sisteminin çözümü d boyutlu lineer bir vektör dönüşümüdür; ve bu R_n uzayının d boyutlu bir lineer alt uzayını kaplar.

$d = 1$ halinde, genel çözüm, denklem sisteminin matrisine has bir uzaysal doğrultu; $d = 2$ halinde ise, uzaysal düzlem vs. gösterir. Her özel çözüm bu alt uzayın içindedir. Genel çözüm, bütün özel çözümlerin toplamıdır.

Söylediklerimizi aynı zamanda algoritmanın hesap tekniğini gösteren iki örnek ile açıklayalım :

1. Örnek :

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 - 5x_3 + 4x_4 &= 0 \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 + 2x_4 &= 0 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 - 2x_4 &= 0 \\ x_1 + 4x_2 - 7x_3 + 6x_4 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -5 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & -4 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & -1 & -2 & 2 \\ 1 & 4 & -7 & 6 & 4 \\ \hline 1 & 3 & -5 & 4 & 3 \\ -2 & -3 & 6 & -6 & -3 \\ -3 & -7 & 3 & 0 & 0 \\ -1 & 1/3 & 6 & 0 & 0 \\ \hline x_1: & -1 & 2 & 1 & 0 & .c_1 = x_3 \\ x_2: & 2 & -2 & 0 & 1 & .c_2 = x_4 \\ \hline x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & \end{array}$$

Sonuç :

$$\begin{aligned} x_1 &= -c_1 + 2c_2 \\ x_2 &= 2c_1 - 2c_2 \\ x_3 &= c_1 \\ x_4 &= c_2 \end{aligned} \quad \text{veya} \quad \mathbf{x} = c_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

veya

$$\begin{aligned} x_1 &= -x_3 + 2x_4 \\ x_2 &= 2x_3 - 2x_4 \end{aligned}$$

Burada x_3, x_4 serbest bilinmeyen olarak seçilir ve denklemler bağımlı x_1, x_2 bilinmeyenlerine göre çözülmüştür. Örneğin x_1, x_2 serbest bilinme-

yen kabul edilmek ve bağımlı x_3, x_4 bilinmeyenlerine göre çözüm bulunmak istenir ise, zincirleme algoritma sıralar değiştirilerek uygulanır ve üçüncü sütundaki üçüncü eleman olan -1 ile başlanır. Denklem katsayıları ile yok etme çarpanlarının daha iyi ayırt edilebilmesi için, sonuncular parantez içine alınacaktır :

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -5 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & -4 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & -1 & -2 & 2 \\ 1 & 4 & -7 & 6 & 4 \\ \hline 0 & 0 & (-5) & (-1,4) & 0 \\ -10 & -5 & (-4) & 10 & -5 \\ 3 & 3 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & (-7) & (-2) & 0 \\ \hline x_1: & 1 & 0 & 1 & 1 & .c_1 = x_1 \\ x_2: & 0 & 1 & 1 & 1/2 & .c_2 = x_2 \\ \hline x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & \end{array}$$

Sonuç :

$$\begin{aligned} x_1 &= c_1 \\ x_2 &= c_2 \\ x_3 &= c_1 + c_2 \\ x_4 &= c_1 + \frac{1}{2}c_2 \end{aligned} \quad \text{veya} \quad \mathbf{x} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

veya

$$\begin{aligned} x_3 &= x_1 + x_2 \\ x_4 &= x_1 + \frac{1}{2}x_2 \end{aligned}$$

2. Örnek : 1.2. de verilen A matrisli denklem sistemi

$$\begin{aligned} x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 - 2x_5 &= 0 \\ -2x_1 + 6x_2 - 4x_3 - 3x_4 + 2x_5 &= 0 \\ 3x_1 - 7x_2 + 5x_3 + 8x_4 - 3x_5 &= 0 \\ -2x_1 + 8x_2 - 5x_3 - 2x_4 + 3x_5 &= 0 \\ x_1 - 5x_2 + 3x_3 + 3x_4 - 3x_5 &= 0 \end{aligned}$$

Algoritma işleminden şu sonuç çıkar : rank $r = 3$, defekt $d = n - r = 2$. Yani 2 adet lineer bağımsız çözüm vardır. Algoritmanın köşegen elemanlarına bağımlı bilinmeyenler verilecektir; örneğimizde x_1, x_2, x_4 . Geri ka-

lan x_3, x_5 serbest bilinmeyen olup, bunlara (1,0), (0,1) veya keyfi lineer bağımsız başka sayı takımları, örneğin, tam sayılı çözümler için uygun olan (2,0) ve (0,10) verilebilir. Seçilen takımlar koyu basılmıştır.

1	-3	2	4	-2	2	
-2	6	-4	-3	2	-1	
3	-7	5	8	-3	6	
-2	8	-5	-2	3	2	
1	-5	3	3	-3	-1	
1	-3	2	4	-2	2	
(2)	0	0	5	-2	3	
(-3)	2	-1	-4	3	0	
(2)	(-1)	0	(-2)	0	0	
(-1)	(1)	0	(1)	0	0	
x_1	-0,5	0,5	1	0	0	$\cdot x_3$
x_2	-1,7	-0,7	0	0,4	1	$\cdot x_5$
x_1	-1	1	2	0	0	$\cdot c_1$
x_2	-17	-7	0	4	10	$\cdot c_2$
x_1	x_2	x_3	x_4	x_5		

Sonuç :

$$\begin{aligned} x_1 &= -c_1 - 17c_2 \\ x_2 &= c_1 - 7c_2 \\ x_3 &= 2c_1 \\ x_4 &= 4c_2 \\ x_5 &= 10c_2 \end{aligned} \quad \text{veya} \quad x = c_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -17 \\ -7 \\ 0 \\ 4 \\ 10 \end{pmatrix};$$

veya

$$\begin{aligned} x_1 &= -0,5 x_3 - 1,7 x_5 \\ x_2 &= 0,5 x_3 - 0,7 x_5 \\ x_4 &= 0,4 x_5 \end{aligned}$$

8.2. Genel Homogen-olmayan Denklem Sistemleri.

Homogen denklem sistemi (1) in her halde, triviyal $x = 0$ da olabilen bir çözüm olmasına karşılık, $m \times n$ -matrisi A keyfi ve sağ tarafı $a \neq 0$ olan genel homogen-olmayan sistem

$$Ax = a$$

(4)

için aynı şey söylenemez. Burada şu görülür :

1. Sistem genellikle yalnız özel ikinci taraf a halinde çözülebilir; x çözümünün var olması gerekmez.

2. Eğer bir çözüm var ise, bunun tek olması gerekmez. Buna göre şu söylenebilir :

Teorem 7 : x_0 homogen-olmayan (4) sisteminin bir çözümü ve z ilgili homogen sistem $Az = 0$ in genel çözümü ise, yani, $d = n - r$ lineer bağımsız z_k çözümlü ve d adet serbest c_k parametrelili

$$z = c_1 z_1 + c_2 z_2 + \dots + c_d z_d \quad (5)$$

şekilde ise,

$$x = x_0 + z \quad (6)$$

homogen-olmayan sistemin çözümü olur. x in bir çözüm olduğu

$$Ax = Ax_0 + Az = a + 0 = a.$$

den açıktır. Bu, aynı zamanda, genel çözümdür; yani her keyfi x çözümü, denklem (5), (6) şeklinde gösterilebilir; eğer x_0 belirli ve (4) ün özel bir çözümü ise, ve x keyfi diğer bir çözümü ise, $Ax_0 = a$, $Ax = a$ dan çıkartma yolu ile $A(x - x_0) = 0$ bulunur; yani $x - x_0 = z$, homogen sistemi bir çözümdür ve (6) denklemini ile her x çözümü için sağlanır. Eğer var ise, çözüm artık genellikle tek değildir; içinde d adet keyfi sabit vardır. Ancak $d = 0$, yani $n = r$ ve A matrisinin sütun düzgün olması halinde, çözüm tekdir. Ayrıca $m = n = r$ ise, yani A "kare tekil-olmayan" ise 7.2. deki teorem 4, denklem (10) gereğince, çözümün varlığında bir gerçektir.

Bir çözümün var olmasının gerekmediği aşağıdaki basit örnekten anlaşılır :

$$\begin{aligned} 2x - y &= 3, \\ 4x - 2y &= 7. \end{aligned}$$

Burada birinci denklem, ikinciden iki defa çıkarılarak,

$$0 \cdot x + 0 \cdot y = 1,$$

elde edilir; ve bunun hiçbir x, y sayı sistemi ile sağlanamayacağı açıktır. Burada denklemlerin sol tarafları lineer bağımlıdır; fakat tamamı bağımlı değildir. Eğer sağ taraflar, sol taraflar gibi aynı bağımlılığı gösterse idi, örneğin sağ taraflar için 3 ve 6 halinde sistem çözülebilir idi. (4) denkleminin sol tarafları, genellikle lineer bağımlı ise, yani A matrisinin a^i satırları arasında belli y_i sabitli

$$y_1 a^1 + y_2 a^2 + \dots + y_m a^m = 0 \quad (7)$$

şeklinde bir lineer bağımlı var ise, sistem, ancak ve ancak, çözülebilir; aynı bağıntı a_i sağ tarafları için geçerli ise,

$$y_1 a_1 + y_2 a_2 + \dots + y_m a_m = 0. \quad (8)$$

denklemler "birbirleri ile uyumludur". Şimdi denklem (7)

$$A' y = 0, \quad (7')$$

homogen sistemini, denklem (8) ise, bu y çözüm vektörünün a ile ortogonal olduğunu gösterir; böylece şu yazılabilir :

Teorem 8 : Ancak ve ancak a sağ tarafları, tranpoze olmuş homogen (7) sisteminin bütün y çözümleri ile ortogonal ise, homogen-olmayan denklem sistemi (4) çözülebilir; ve denklemleri uyumludur.

Çözümün varlığı koşulu, başka şekilde de yazılabilir. Genişletilmiş $\bar{A} = (A, a)$ matrisinin satırları a^i ile gösterilir ise, denklem (7) gereğince

$$y_1 \bar{a}^1 + y_2 \bar{a}^2 + \dots + y_m \bar{a}^m = 0 \quad (9)$$

sağlanır. Şimdi A nın rankı r ise, yani A nın herhangi $r + 1$ adet a^i satırları için denklem (7) şeklinde bir bağıntı var ise, aynı bağıntı $\bar{a}^i$ için de var olmalıdır; yani genişletilmiş $\bar{A}$ matrisinin rankı A matrisinin rankından daha büyük olamaz.

Teorem 9 : Katsayılar matrisi r ranklı genel $m \times n$ -matrisi A olan, homogen-olmayan denklem sistemi (4), yalnız ve yalnız, genişletilmiş $\bar{A} = (A, a)$ matrisinin rankı r den büyük değil ise, uyumludur.

Bu durum pratikte çok basit olarak belirlenebilir. (A, a) genişle-

tilmiş matrisine Gauss algoritması uygulanır. Tamamen sıfır olan $b^s = 0$ satırlarında hiç birisi için sıfırdan farklı sağ taraf $b_s \neq 0$ ortaya çıkmıyor ise, sistem çözülebilir; zira, aksi halde

$$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \dots + 0 \cdot x_n = b_s \neq 0,$$

bulunur; bu ise hiç bir x_k sayı sistemi ile sağlanamaz. Böylece sistem satır düzgün A matrisi yani $m \leq n$ olmak üzere $r = m$ için daima çözülebilir; burada B satırlarında hiç biri sıfır olamaz, Şimdi $r = m$ hali için tranpoze homogen sistem (7') nün yalnız $y = 0$ triviyal çözümü vardır. ve yalnız bu halde a sağ tarafları için koşul yoktur; satır düzgün sistem keyfi sağ taraflar halinde çözülebilir.

Şimdi çözümün varlığı öngörüldüğü ise, aşağıdaki çözüm şemasından, örneğin $r = 4, d = n - r = 3$ için şunlar bulunur :

	bağımlı	serbest	b_i	
	$\begin{pmatrix} \odot & . & . & . \\ & \odot & . & . \\ & & \odot & . \\ & & & \odot \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} . \\ . \\ . \\ . \end{pmatrix}$	
$z_1:$	$. \ . \ . \ .$	$1 \ 0 \ 0$	0	$. \ c_1$
$z_2:$	$. \ . \ . \ .$	$0 \ 1 \ 0$	0	$. \ c_2$
$z_3:$	$. \ . \ . \ .$	$0 \ 0 \ 1$	0	$. \ c_3$
$x_0:$	$. \ . \ . \ .$	$0 \ 0 \ 0$	-1	$. \ 1$
$x:$	$. \ . \ . \ .$	$c_1 \ c_2 \ c_3$		

Homogen sistemlerin
Temel sistemi
Özel çözüm
Genel Çözüm

Sıfırdan farklı $b_{ii} \neq 0$ köşegen elemanları için, — kendiliğinden — bağımlı bilinmeyenler ortaya çıkar ve çözüm bunlara göre yapılır. $z_1 \dots z_d$ temel sistemi 8.1. de olduğu gibi şöyle elde edilir: b_i sağ tarafları için sıfır, ve serbest bilinmeyenler için sırası ile $100 \dots, 010 \dots$ v.s. sayı takımları kullanılır. Bütün serbest bilinmeyenler sıfıra eşitlenerek, özel x_0 çözümü, en basit şekilde elde edilir. Genellikle satırların değiştirilmesi yanında, sütunlarında değiştirilmesi gerekli olur; yani bağımlı olarak ilk r adet bilinmeyen yerine, $b_{ii} \neq 0$ gibi bir köşegen elemanın var olduğu bilinmeyenlere göre çözüm yapılır. Aşağıya bakınız.

Örnek :

$$\begin{aligned}
x_1 - 3x_2 + 2x_3 - x_4 &= 2 \\
-2x_1 + 6x_2 - 4x_3 + 3x_4 + 2x_5 &= -1 \\
3x_1 - 7x_2 + 8x_3 - 3x_4 + x_5 &= 4 \\
x_1 - x_2 + 4x_3 - x_4 + x_5 &= 0 \\
2x_1 + 10x_3 + 7x_5 &= 4
\end{aligned}$$

	5	-5	20	-2	11	9	38
1	-3	2	-1	0	2	1	
-2	6	-4	3	2	-1	4	
3	-7	8	-3	1	4	6	
1	-1	4	-1	1	0	4	
2	0	10	0	7	4	23	
<u>1</u>	-3	2	-1	0	2	1	
2	0	0	<u>1</u>	2	3	6	
-3	<u>2</u>	2	0	1	-2	3	
-1	-1	0	0	0	0	0	
-2	-3	0	-2	0	0	0	
-5	-5	0	-3	0	0	0	
z_1	-5	-1	1	0	0	0	c_1
z_2	-7	-1	0	-4	2	0	c_2
x_0	2	-1	0	3	0	-1	.1
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5		

denklemler :

$$\begin{aligned}
x_1 &= 2 - 5c_1 - 7c_2 \\
x_2 &= -1 - c_1 - c_2 \\
x_3 &= c_1 \\
x_4 &= 3 - 4c_1 \\
x_5 &= 2c_2
\end{aligned}
\quad \text{veya} \quad
x = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} -5 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -7 \\ -1 \\ 0 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

9. Ortogonal Sistemler.

9.1. Bir Vektör Sisteminin Ortogonalleştirilmesi

$r \leq n$ halinde r adet reel bağımsız ve n -boyutlu $a_1, a_2, \dots, a_r$ vektörlerinde oluşan bir sistem verilmiş olsun. Bunun rankı r olan sütun düzgün $n \times r$ -matrisi

$$A = (a_1, a_2, \dots, a_r) \quad (1)$$

ile gösterelim. Bazı amaçlar için bu sistemden, lineer kombinasyon ile aynı ranklı

$$X = (x_1, x_2, \dots, x_r) \quad (2)$$

sisteminin elde edilmesi yararlı olur; bu yeni sistemin vektörleri birbirine ikişer ikişer ortogonal dir :

$$x_i x_k = 0, i \neq k \text{ için}$$

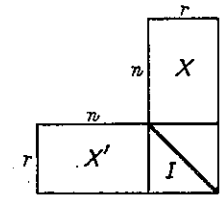
Burada genellikle x_k ların birim vektörler olması, yani normlarının bire eşit olması öngörülür. Böylece bunlar aşağıdaki "ortonormal bağıntıları" sağlarlar :

$$x_i x_k = \delta_{ik} \quad i, k = 1, 2, \dots, r, \quad (3')$$

bunlar ise, r sıralı I birim matrisli

$$X'X = I \quad (3)$$

matris denklemleri ile ifade edilirler, Şekil 9.1. x_k vektörleri "normlaştırılmış ortogonal sistem", "yani ortonormal sistem" belirtirler.



Şekil 9.1. $X'X$ ile X ortonormal sistemi.

A başlangıç sisteminin, X ortonormal sistemine "ortogonalleştirilmesi" işlemi Unger'in teklifine göre matris hesabı yardımı ile çok basit şekilde yapılabilir¹. Bunun için simetrik (pozitif definit) $r \times r$ -matrisi

$$N = A' A \quad (4)$$

kullanılır. Bu matris r adet a_k sütunun lineer bağımsızlığı nedeni ile tekil olmayan bir matrisdir. Eğer tekil olsa idi $A'Ax = 0$ denklem sisteminin triviyal olmayan $x \neq 0$ çözümü olur idi. Bu neden ile kuadratik form $Q = x'A'Ax = y'y$ ve $y = Ax$, sıfır olurdu; (bak : 11.1). Bu ise yalnız $y = Ax = 0$ için mümkündür; ve A nın a_k sütunlarının lineer bağımsızlığı nedeni ile, triviyal olmayan x çözümleri kabulüne aykırı olarak $x = 0$ çözümü ortaya çıkar.

¹ Unger, H.: Z. Angew. Math. Mech. Bd. 31 (1951) S. 53—54; Bd. 33 (1953) S. 319—331.

X ortonormal sisteminin elde edilmesi için şöyle yazalım :

$$\boxed{A = X C} \quad (5)$$

burada C , bulunacak tekil-olmayan bir matrisdir. Böylece

$$N = A' A = C' X' X C,$$

ve buradan ortogonalite koşulu (3) gereğince

$$\boxed{N = C' C} \quad (6)$$

bulunur. N (simetrik ve pozitif definit) matrisinin bu şekilde parçalanması 6.3. de görüldüğü gibi daima mümkündür; ve oradaki R yerine C üst üçgen matrisi kullanılır (Cholesky metodu). Denklem (5) aynı zamanda ortogonalleştirme kuralını da verir; biz bunu aşağıdaki şekilde yazalım :

$$C' X' = A' \quad (5a)$$

Bunun anlamı şudur : Cholesky — parçalanması $N = A' A$ dan — N in oluşturulmasında kullanılan — A' matrisine sağ taraf olarak genişletilir ve aranan X' ortonormal sistemi, yeni sağ taraf olarak bulunur; bak : Şekil 9.2. deki hesap şeması. Burada A matrisi alınmamıştır, zira N yalnız A' den hesaplanabilir.

r	n
N	A'
C'	X'

Örnek : Aşağıdaki vektör sisteminin ortonormalleştirilmesi.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \\ 3 & -1 \\ 1 & 0 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}$$

Şekil 9.2. r ranklı A matrisinin ortogonalleştirilmesinin hesap şeması.

Hesap :

36	6	3	-1	3	1	-4
6	10	1	2	-1	0	-2
6	1	3/6	-1/6	3/6	1/6	-4/6
1	3	3/18	13/18	-9/18	-1/18	-8/18

$$X = \frac{1}{18} \begin{pmatrix} 9 & 3 \\ -3 & 13 \\ 9 & -9 \\ 3 & -1 \\ -12 & -8 \end{pmatrix}$$

9.2. Tam Ortogonal Sistemler.

Reel olan ve sütun düzgün matrisi A_1

$$A_1 = (a_1, a_2, \dots, a_r), \quad (7)$$

ile gösterilen r adet lineer bağımsız n -boyutlu a_k vektörlerinden oluşan sistem $r < n$ halinde, n adet lineer bağımsız vektörden oluşan, tam bir sisteme, yani tekil olmayan

$$A = (A_1, A_2) \quad (8)$$

matrisine tamamlanabilir; burada

$$A_2 = (a_{r+1}, \dots, a_n) \quad (9)$$

dır; ve buradan n adet x_k ortogonal birim vektörlerinden oluşan X tam ortogonal sistemi, yani, aşağıdaki özelliğe sahip bir ortogonal matris bulunur :

$$\boxed{X' X = I} \quad (10)$$

Bu amaç ile ilk önce, A_2 nin $n - r = d$ adet yeni a_j vektörleri, A_1 sisteminin verilmiş, r adet a_k vektörlerine ortogonal olacak, yeni aşağıdaki hipotezi sağlayacak şekilde bulunurlar :

$$\boxed{A_1' a_j = 0} \quad j = r + 1, \dots, n \quad (11)$$

r adet bağımsız denklemden oluşan, homogen denklem sistemi olarak (11) in, bilindiği gibi (bak : 8.1.), tam $d = n - r$ adet lineer bağımsız a_j çözümü vardır. Bunlar A_1 in verilmiş r adet a_k vektöründen bağımsızdır. Zira, a_j bunlara bağlı olsa idi, sıfıra özdeş olmayan sabit vektör $c = (c_k)$ lı

$$a_j = c_1 a_1 + c_2 a_2 + \dots + c_r a_r = A_1 c$$

bağıntısı var olur idi. Bu denklemin A_1 ile çarpılmasından

$$A_1' a_j = 0 = A_1' A_1 c,$$

ve buradan tekil-olmayan $A_1' A_1 = N_1$ matris nedeni ile kabule aykırı olarak $c = 0$ bulunur.

A_2 ek sisteminin bulunması için şöyle hareket edilir; Her seferinde (11) denkleminin çözümü olarak yalnız bir tek $a_j = a_{r+1}$ vektörü bulunur. Yani bu denkleme göre A_1 matrisi şimdiye kadar bilinen bütün a_k satırlarından oluşmaktadır. Bunun sonucunda yeni a_j vektörünün, yalnız başlangıçta verilen r adet a_k vektörü ile değil, kendisinden önce bulunan bütün yeni vektörler ile ortogonal olduğu anlaşılır ve böylece A_2 matrisinin ek bir ortogonalleştirilmesi gerekmez. Buradaki vektörler ayrıca, $a_j = \sqrt{a_j' a_j}$ uzunluğuna bölünerek 1 e normlaştırılmalıdır. Ortogonalleştirme için gerekli Cholesky-parçalanması pratik olarak yalnız birinci kısım için yapılmalıdır :

$$N_1 = A_1' A_1 = C_1' C_1 \quad (12)$$

İkinci kısım için

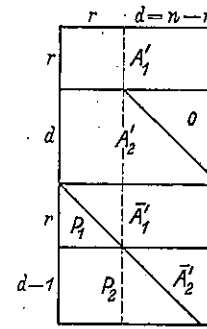
$$N_2 = A_2' A_2 = D_2^2 \quad (13)$$

$a_j^2 = a_j' a_j$ den oluşan bir köşegen matrise eşittir; ve yeni bulunan a_j vektörlerinin bileşenleri bunların kare köklerine bölünür.

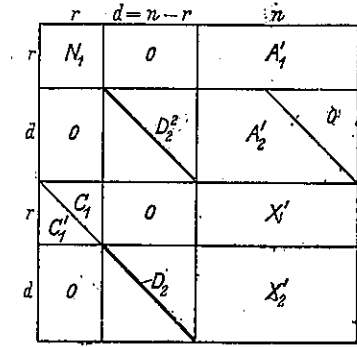
A_1 e ortogonal yeni A_2 matrisinin bulunmasına ait hesap şemasının üst kısmında yalnız A' tüm matrisinin yalnız verilmiş olan A_1 kısmı matrisi vardır Şekil 9.3. Şemanın alt kısmında (11) denkleminin çözümü için üçgenlere ayrılma zincirleme algoritma ile yapılır ve sonuç A_1 olur. Şimdi birinci yeni vektör $a_j = a_{r+1}$ şöyle hesaplanabilir : Bunun $(r + 1)$ -inci bileşeni, örneğin bire eşit, bundan sonrakiler sıfıra eşit alınır ve ilk r bileşen basamaklı sistemden (aşağıda) bulunur. Sonuç doğrudan doğruya

$(r + 1)$ inci sütun a_{r+1} şeklinde şemanın üst kısmına A_2 nin satırı olarak yerleştirilir; ve bundan sonra yine yok etme işlemi uygulanır : Şemanın alt kısmının $(r + 1)$ -inci satırı üçgenlere ayrılır : Buradan yeni vektör a_{r+1} , (11) denkleminin çözümü olarak bulunur; ve aşağıda yok etme işlemi tekrar yapmak için şemanın üst yarısına yerleştirilir. v.s.

Şekil 9.4. de, tüm matris A nın X matrisinin $N = A'A$ Cholesky-parçalanması yardımı ile ortonormlatırılma şeması verilmiştir; Cholesky-parçalanması burada $N_1 = A_1' A_1$ üst kısmına aittir; buna karşılık alt kısım N_2 , a_k lerden oluşan D_2^2 köşegen matrisine dallanır; a_k ve A_2 vektörlerinin bileşenleri ise bunların a_k kare köklerine bölünür.



Şekil 9.3. Tüm ortogonal sistemlerin birisinin bulunuşuna ait hesap şeması 1.



Şekil 9.4. Tüm ortogonal sistemlerin birisinin bulunuşuna ait hesap şeması 2.

Hesabı bir örnek ile açıklayalım. Ortonormlaştırılması ve X tam ortonormal sistemine genişletilmesi istenen başlangıç sistemi.

$$A_1' = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 & 6 & -4 \\ 1 & 2 & -1 & 0 & -2 \end{pmatrix},$$

verilmiş olsun. Şekil 9.3 ve 9.4 deki iki şema tek bir hesap şeması haline sokulur; bunun sağ tarafı, denklem (11) in çözümünü, yani, tam sayılı (bölge olmayan) zincirleme algoritma ile yapılan yok etme adımını kapsar (bak : 6.5); buna karşılık sol taraf Cholesky-parçalanmasını gösterir.

N					A'				
36	6	0	0	0	3	-1	3	1	-4
6	10	0	0	0	1	2	-1	0	-2
0	0	110	0	0	-5	6	7	0	0
0	0	0	3190	0	-10	1	-8	55	0
0	0	0	0	2349	33	17	9	7	29
					3	-1	3	1	-4
					-1	7	-6	-1	-2
					5	-13	110	16	-38
					10	7	0	58	-14
6	1	0	0	0	3	-1	3	1	-4
-1	3	0	0	0	3	13	-9	-1	-8
0	0	$\sqrt{110}$	0	0	-5	6	7	0	0
0	0	0	$\sqrt{3190}$	0	-10	1	-8	55	0
0	0	0	0	$\sqrt{2349}$	33	17	9	7	29

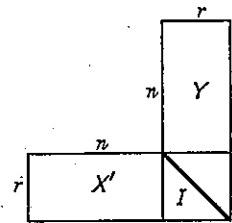
$$X = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,166\ 6667 & -0,476\ 7313 & -0,177\ 0536 & 0,680\ 8830 \\ -0,166\ 6667 & 0,722\ 2222 & 0,572\ 0776 & 0,017\ 7054 & 0,350\ 7579 \\ 0,5 & -0,5 & 0,667\ 4238 & -0,141\ 6428 & 0,185\ 6953 \\ 0,166\ 6667 & -0,055\ 5556 & 0 & 0,973\ 7946 & 0,144\ 4297 \\ -0,666\ 6667 & -0,444\ 4444 & 0 & 0 & 0,598\ 3517 \end{pmatrix},$$

9.3. Biortogonal Sistemler.

Ortogonal sistem kavramı, "biortogonal sistem" halinde bir genelleştirme gösterir. Burada $r \leq n$ olmak üzere, n bileşenli r adet vektörden oluşan bir "sistem çifti" bahis konusudur:

$$\begin{aligned} X &= (x_1, \dots, x_r) \\ Y &= (y_1, \dots, y_r) \end{aligned} \quad (14)$$

Bunlar herhangi bir şekilde, birbiri ile ilgili ve aşağıdaki koşulları sağlayan iki vektör sistemidir: Şekil 9.5.



Şekil 9.5. $X'X=I$ ile $X'Y$ biortogonal sisteme ait.

$$X'Y = I$$

$$x'_i y_k = \delta_{ik} \quad (i, k = 1, 1, \dots, r) \quad (15')$$

Bu koşula göre vektör sistemlerinden her biri lineer bağımsızdır; yani XY matrisleri sütun düzgündür, zira

$$c_1 x'_1 + \dots + c_r x'_r = 0$$

den v_k ile sağdan çarpılarak ve denklem (15') gereğince bulunur. Aynı şekilde,

$$c_k x'_k y_k = c_k = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, r).$$

$$c_1 y_1 + \dots + c_r y_r = 0$$

nin x'_i ile soldan çarpılması halinde denklem (15) nedeni ile,

$$c_i x'_i y_i = c_i = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, r).$$

bulunur. Özellikle $r = n$ ise, biortogonal sisteme yine "Tam" denir. Bu halde X, Y nin invers matrisi Y^{-1} dir ve Y, X in invers matrisi X^{-1} dir.

Teorem 1: Herbiri r -adet lineer bağımsız n -boyutlu a_k, b_k vektörlerinden oluşan, satır düzgün A, B gibi iki sistem, $r \leq n$ ile

$$\begin{aligned} A &= (a_1, \dots, a_r) \\ B &= (b_1, \dots, b_r) \end{aligned} \quad (16)$$

yalnız ve yalnız,

$$N = A'B \quad (17)$$

tekil-olmayan bir matris, yani r ranklı bir matris ise, (15) koşulu uyarınca (normlaştırılmış) X, Y biortogonal sistemine dönüştürülebilir.

7.3 deki teorem 8. gereğince r -ranklı olan nn -matrisleri AB' ve BA' nin tersine, rr -matrisi N , daha küçük ranklıda olabilir; bu durum iki-side $\neq 0$, farklı sıfır olan, a, b , ortogonal vektörleri örneğinden anlaşılır: burada $a'b = 0$ yani sıfır ranklı bir $1,1$ -matrisine eşittir; buna karşılık a ve b nin rankları 1 dir.

Teoremin doğruluğu ve verilmiş A, B matris çiftinin denklem (15) özelliğine sahip X, Y sistem çiftine biortonormlaştırılması, aşağıdaki şekilde gösterilir¹. X, Y nin elde edilmesi için

$$\begin{aligned} A &= XP \\ B &= YQ \end{aligned} \quad (18)$$

¹ Tekrar H. Unger; Sayfa 111. deki dip nota bak.

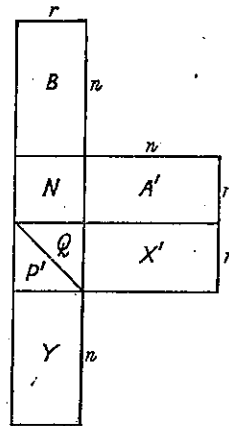
yazalım; burada P, Q bilinmeyen, tekil-olmayan r sıralı dönüşüm matrisleridir ve bunlar yine üst üçgen şeklini alabilirler. Bu durumda $N = A'B = P'X'YQ$ için denklem (15) nedeni ile

$$N = P'Q, \quad (19)$$

ifadesi bulunur. Buna göre, tekil-olmayan P, Q halinde N tekil-olmayan bir matrisdir. Diğer taraftan böyle bir ayrılma, tekil-olmayan N halinde, gerçekten yapılabilir; bunun için, zincirleme algoritmada olduğu gibi P, Q üçgen matrisleri kullanılır. Burada üçgen matrislerinden birinin köşegen elemanları, tarafımızdan seçilen algoritma şekli halinde, özellikle $p_{ii} = 1$ şeklinde serbest seçilebilirler. (18) denklemlerinin daha anlamlı olan

$$\begin{aligned} P'X' &= A' \rightarrow X' \\ YQ &= B \rightarrow Y \end{aligned} \quad (18a)$$

şekli, aranan X, Y matrislerinin oluşumunu gösterir: X', N nin sağına yazılmış A' matrisinden, Q matrisinin sağa doğru devamı olarak bulunur;



Y, N nin altına (veya üstüne) yazılmış B matrisinden P' matrisinin aşağıya doğru devamı olarak bulunur; Bak: Şekil 9.6 daki şema. Burada X, Y matrisleri p_{ii} köşegen elemanlarının seçimine bağlıdır.

Denklem (18) gereğince A, B sistemlerinin ikisinin birden dönüşümü yerine, bunlardan bir tanesi, örneğin B sabit tutulabilir; yani $B = Y$. Bu durumda artık tam kare olan dönüşüm matrisi P, N' ye eşittir; bu yukardaki gibi hesap yapılarak anlaşılır. Bu halde $NX' = A'$ denklem sisteminin çözümü gereklidir. İşlem miktarı aynıdır.

Örnek: X, Y ye biortonormlaştırılması istenen sistem gifti

Şekil9. 6. r ranklı iki A, B sisteminin Biortonormlaştırılmasına ait şema.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -4 & -3 \\ 0 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ -1 & 3 & 0 \\ 2 & -2 & -1 \\ 1 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

verilmiş olsun. Hesap Şekil 9.6 daki şemaya göre yapılır.

$$\begin{aligned} B &= \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ -1 & 3 & 0 \\ 2 & -2 & -1 \\ 1 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ N &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 3 \\ 4 & -3 & 4 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & -4 & 3 & -1 \\ 2 & -2 & -3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = A' \\ &\quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -3 & 1 & -3 \\ 4 & -7 & -25 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 7 & 2 & 3 & -7 \\ -2 & 55 & 19 & 23 & -56 \end{pmatrix} = X' \\ Y &= \begin{pmatrix} 3 & -2 & 14/25 \\ -1 & 4 & -14/25 \\ 2 & -4 & 17/25 \\ 1 & -4 & 12/25 \\ 0 & 1 & -4/25 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

X, Y sistemlerinin yaklaşık olarak eşit mertebeli elemanlara sahip olması için, Y de ortaya çıkan q_{kk} köşegen elemanlarına bölme işlemi ayrıca x_k, y_k vektörlerine dağıtılabilir. 25 paydası 5.5 şeklinde yazılarak, şu sonucu elde ederiz:

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -0,4 \\ -2 & 7 & 11,0 \\ -2 & 2 & 3,0 \\ 0 & 3 & 4,6 \\ 2 & -7 & 11,2 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2,8 \\ -1 & 4 & -2,8 \\ 2 & -4 & 3,4 \\ 1 & -4 & 2,4 \\ 0 & 1 & -0,8 \end{pmatrix}$$

$X'Y = I$ koşulunun sağlandığı kontrol edilmelidir.

9.4. Tam Biortogonal Sistem.

$r < n$ adet bağımsız vektörlerden oluşan tam olmayan bir biortogonal sistem, n adet vektörlerden oluşan bir tam biortogonal sisteme genişletilebilir.

$$\begin{aligned} A_1 &= (a_1, \dots, a_r) \\ B_1 &= (b_1, \dots, b_r) \end{aligned} \quad (20)$$

Tekil-olmayan $N_1 = A'_1 B_1$ halinde, verilmiş ve biortonormlaştırılacak olan sistem çifti olsun. Bu ilk önce

$$\begin{cases} A'_1 b_k = 0 \\ B'_1 a_k = 0 \end{cases} \quad k = r+1, r+2, \dots, n, \quad (21)$$

denklem sistemlerinin çözümleri olarak $d = n - r$ adet lineer bağımsız a_k, b_k vektörleri ile genişletilebilir ve kısaca

$$\begin{aligned} A_2 &= \{a_{r+1}, \dots, a_n\} \\ B_2 &= \{b_{r+1}, \dots, b_n\} \end{aligned} \quad (22)$$

şeklinde yazılabilir; böylece denklem (21)

$$\begin{cases} A'_1 B_2 = 0 \\ B'_1 A_2 = 0 \end{cases} \quad (21')$$

şeklini alır. Şimdi

$$\begin{aligned} A &= (A_1, A_2) \\ B &= (B_1, B_2) \end{aligned} \quad (23)$$

tüm sistemlerinin n adet lineer bağımsız vektörlerden oluştuğu, yani tekil-olmayan matrisler olduğu gösterilebilir. Buradan

$$c_1 a_1 + \dots + c_r a_r + c_{r+1} a_{r+1} + \dots + c_n a_n = 0$$

veya kısaca

$$A_1 c_1 + A_2 c_2 = 0$$

in B'_1 ile çarpılmasından

$$B'_1 A_1 c_1 + B'_1 A_2 c_2 = N'_1 c_1 + 0 = 0,$$

ve böylece tekil-olmayan N_1 nedeni ile

$$c_1 = \{c_1, \dots, c_r\} = 0$$

ve A_2 deki vektörlerin lineer bağımsızlığı nedeni ile

$$c_2 = \{c_{r+1}, \dots, c_n\} = 0.$$

bulunur. Aynı durum B içinde vardır.

Şimdi $N = A'B$ tekil-olmayan matrisdir; ve denklem (21') uyarınca

$$N = A'B = \begin{pmatrix} A'_1 \\ A'_2 \end{pmatrix} (B_1, B_2) = \begin{pmatrix} A'_1 B_1 & A'_1 B_2 \\ A'_2 B_1 & A'_2 B_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N_1 & 0 \\ 0 & N_2 \end{pmatrix}, \quad (24)$$

şeklinde yazılabilir; bu durumda $N_2 = A'_2 B_2$ tekil-olmayan matrisdir; ve A_2, B_2 sistemi biortonormlaştırılabilir.

Genişletme ve biortonormlaştırmanın pratik uygulanması şöyle yapılır; Her seferinde denklem (21) den bir vektör çifti a_k, b_k bulunur; ve bunlar A_1, B_1 sistemlerine eklenir; ve denklemin çözümü için gerekli yok etme işlemi yapılır. Denklem (21) deki A'_1, B'_1 matrisleri bu şekilde anlaşılmalıdır. Böylece N_2 matrisi $a'_k b_k$ elemanları köşegen şekle indirgenir. Şimdi yapılan işlemde, bu skaler çarpım yok olabilir; fakat tüm matris N_2 tekil-olmayan matris olduğundan; yani köşegen şeklinde köşegen elemanlarından hiç biri sıfıra eşit olamayacağından denklem (24) in birincisini çözüm ile bulunan b_k için, denklem (24) ün ikincisinden bir a_k çözümü o şekilde bulunmalıdır ki, $a'_k b_k \neq 0$ olsun; yani işlem uygulanabilsin.

Gene bir örnek ele alalım. Denklem (21) deki sistemlerin çözümü yardımı ile genişletilmesi istenen sistem çifti

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -3 & -2 \\ 2 & -1 \\ 0 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -2 \\ 4 & -1 \\ 1 & 3 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$$

verilmiş olsun. Yok etme işlemi, aşağıdaki şemada tam sayılı (bölümü olmayan) algoritma ile yapılmıştır.

A'					B'				
1	-3	2	0	-1	2	-1	4	1	-3
3	-2	-1	2	2	1	-2	-1	3	-2
-3	-2	1	0	0	1	1	1	0	0
-7	4	3	6	0	-1	7	11	14	0
63	-112	49	22	152	2	5	16	-9	19
1	-3	2	0	-1	2	-1	4	1	-3
3	7	-7	2	5	1	-3	-6	5	-1
-3	-11	-28	22	34	1	3	12	-6	-3
-7	-17	0	76	36	-1	-13	0	-76	11

N zaten üst üçgen şeklinde olduğundan biortonormlaştırma, burada çok basittir. Böylece A sistemi değişmez. En sondaki neticede yine Y de ortaya çıkan paydalar X ve Y dağıtılır.

B					A'				
2	1	1	-1	2	1	-3	2	0	-1
-1	-2	1	7	5	3	-2	-1	2	2
4	-1	1	11	16	-3	-2	1	0	0
1	3	0	14	-9	-7	4	3	6	0
-3	-2	0	0	1	63	-112	49	22	152
16	7	0	0	0					
0	10	0	0	0					
0	0	-4	0	0					
0	0	0	152	0					
0	0	0	0	3040					
2	2	-1	-1	2					
-1	-25	-1	7	5					
4	-44	-1	11	16					
1	41	0	14	-9					
-3	-11	0	0	19					
:16	:160	:4	:152	:3040					
:4	:32	:1	:19	:20					

$$X = \begin{pmatrix} 0,25 & 0,6 & -0,75 & -0,875 & 0,4144737 \\ -0,75 & -0,4 & -0,50 & 0,500 & -0,7368421 \\ 0,50 & -0,2 & 0,25 & 0,375 & 0,3223684 \\ 0 & 0,4 & 0 & 0,750 & 0,1447368 \\ -0,25 & 0,4 & 0 & 0 & 1,0 \end{pmatrix}$$

$$Y = \begin{pmatrix} 0,50 & 0,06250 & -1 & -0,0526316 & 0,10 \\ -0,25 & -0,78125 & -1 & 0,3684211 & 0,25 \\ 1,00 & 1,37500 & -1 & 0,5789474 & 0,80 \\ 0,25 & 1,28125 & 0 & 0,7368421 & -0,45 \\ -0,75 & -0,34375 & 0 & 0 & 0,95 \end{pmatrix}$$

9.5. Dikdörtgen Matrisin Yarı Inversi.

(Tam olmıyan) biortonormal sistem X, Y yi gösteren denklem (15), yeni $X'Y = I$, matris ile, invers matrisi arasındaki bağıntıya benzerdir. Zaten tam sistem halinde bu bağıntıya gelir. Bu durum kare olmayan bir matris içinde, sütunları ve satırlarının — hangisi daha küçük ise — lineer bağımsız yani matrisin sütun düzgün veya satır düzgün olması koşulu altında, "invers" matris fikrini akla getirir. Zira bu koşul, biortonormal sistemin varlığı için (yeterli olmasa bile) gerektir: A, $r < n$ için, sütun düzgün nr-matrisi olsun. Şimdi

$$X'A = I, \quad (25)$$

özelliğine sahip nr-matrisi X, yani X' transpoze matrisi, A'nın bir "sol invers" matrisi olan bir matris aranmaktadır. Bir "sağ invers" matris Y

$$AY' = I$$

$r < n$, halinde var olamaz; zira Y ninde r adet sütunu olması gereklidir; yani en fazla r ranklı olabilir. Bu durumda soldaki çarpım 7.3 deki teorem 8 uyarınca r ranklı, buna karşılık, sağdaki n sıralı birim matris n ranklı olur idi; yani kare olmıyan matrisler için, bir tek "yarı invers" matris, matrisin satır veya sütun düzgün olmasına göre, ya sağ veya sol invers matris vardır. Denklem (25) den transpoze işlemi ile $A'X = I$, yani nr-matrisi A ya ait sol invers X' den, rn-matrisi A' ne ait sağ invers X bulunur. Böylece $r < n$ halinde, nr-matrisleri ve bunların sol inversleri ele alınabilir; zira aksi halde transpoze işlemi ile kolayca bu hale dönmek mümkündür.

Şimdi biortogonal sistemler için söylenenlerden, denklem (25) den bulunan sol invers X' nün tamamen belli olmadığı tahmin edilebilir; bu durum gerçekten de vardır. Denklem (25) den

$$Y'A = I, \quad (25a)$$

şeklinde ikinci bir Y' çözümü alınır ise, (25) ve (25 a) denklemlerinin birbirinden çıkarılması ile, $Z = Y - X$ farkı olarak

$$(Y' - X')A = Z'A = 0, \quad A'Z = 0. \quad (26)$$

bulunuz. Denklem (25) in iki çözüm arasındaki Z farkı için, $r < n$ halin-

de daima triviyal olmıyan gözömlere sdahip, homogen denklem sistemi (26) geçerlidir.

Denklem (25) deki çok anlamlılık ortadan kaldırılmalı ve sütun düzgün nr-matrisi A nın

$$\hat{A} = (\alpha_{ik}) = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1r} \\ \alpha_{21} & \dots & \alpha_{2r} \\ \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \dots & \alpha_{nr} \end{pmatrix} \quad (27)$$

şeklindeki, tamamen belli tanımlı sol inversi $\hat{A}'$ bulunmak istenir ise, aşağıdaki tanım uyarınca, tekil-olmayan $N = A'A$ matrisi kullanılır.

Tanım : $r \leq n$ ranklı sütun düzgün nr-matrisi A için yarı invers (sol invers) matris olarak, satır düzgün rn-matrisi

$$\hat{A}' = N^{-1} A' \quad (28)$$

tanımlanır; burada

$$N = A' A \quad (29)$$

tekil-olmayan rr-matrisidir.

Bu durumda invers için karakteristik

$$\hat{A}' A = A' \hat{A} = I, \quad (30)$$

bağıntısı bulunur; tekil-olmayan kare matris A nın $r = n$ hali için, yarı invers $\hat{A}'$, A^{-1} inversine gelir.

$\hat{A}'$ nın pratik bulunması, denklem (28) uyarınca,

$$N \hat{A}' = A' \quad (31)$$

denklem sisteminin çözümü ile, özellikle zincirleme algoritma ile yapılır; bak : Şekil 9.8. N matrisinin $N = PQ$ uyarınca alt ve üst üçgen matrisler P ve Q ayrılmasından sonra şunlar hesaplanır

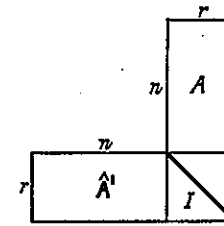
$$P \bar{A}' = A', \rightarrow \bar{A}'$$

$$Q \hat{A}' = \bar{A}', \rightarrow \hat{A}'$$

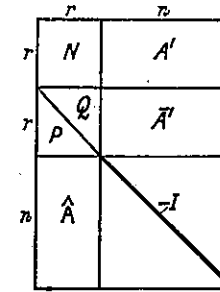
zira bu durumda

$$N \hat{A}' = P Q \hat{A}' = P \bar{A}' = A'.$$

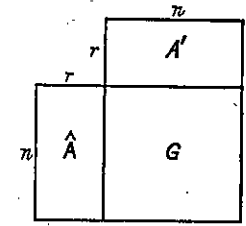
dir.



Şekil 9.7. $A'A=I$ ile bir sütun düzgün nr-matrisi A nın A' sol inversi.



Şekil 9.8. A matrisinden sol invers $\hat{A}'$ nın tayinine alt ge- ma.



Şekil 9.9. $A'A$ mat- risi.

A matrisi için denklem (30) daki ana özellik yanında aşağıdaki ba-ğıntılarda geçerlidir :

$$\hat{A}' \hat{A} = N^{-1} \quad (32)$$

$$\begin{aligned} AA' &= \hat{A} N^2 \hat{A}' \\ \hat{A} \hat{A}' &= A N^{-2} A' \end{aligned} \quad (33)$$

$\hat{A}' A = A' \hat{A} = I$ dan r-sıralı birim matrisin bulunmasına karşılık

$$G = \hat{A} A' = \hat{A} N \hat{A}' = N^{-1} A' \quad (34)$$

matrisi r-ranklı ve aşağıdaki ilginç özelliğe sahip n-sıralı simetrik matrisdir :

$$G^2 = G \quad (35)$$

veya $G^n = G$. Bu doğrudan doğruya

$$G^2 = \widehat{A} A' \widehat{A} A' = \widehat{A} I A' = \widehat{A} A' = G.$$

den çıkar. (35) denklemi ile gösterilen bu özelliğe sahip matrislere "idem-potent" matrisler denir.

Örnek : Aşağıdaki matrisin $\widehat{A}'$ yarı invers matrisini bulunuz.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 1 \\ 2 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{cc|cc} 18 & -9 & 1 & -3 & 2 & -2 \\ -9 & 15 & 2 & 1 & -3 & 1 \\ \hline 18 & -9 & 1 & -3 & 2 & -2 \\ 1 & 21 & 5 & -1 & -2 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & -2 & -2 & 0 \\ \hline & & \frac{11}{63} & -\frac{12}{63} & \frac{1}{63} & -\frac{7}{63} \\ & & \frac{5}{21} & -\frac{1}{21} & -\frac{4}{21} & 0 \end{array}$$

$$\widehat{A}' = \frac{1}{63} \begin{pmatrix} 11 & -12 & 1 & -7 \\ 15 & -3 & -12 & 0 \end{pmatrix}$$

10. Polinom Matrisleri ve Tam Sayılı Matrisler.

10.1. Parametre Matrisleri. Karakteristik Determinantlar ve Rank Düşmesi.

Çok sayıda uygulamada, örneğin titreşim problemlerinde, lineer diferansiyel denklem sistemlerinde ve özellikle, bölüm IV ve V de ayrıntılı olarak incelenecek özdeğer problemlerinde, elemanları skaler λ parametrisine

$$F = F(\lambda) = (f_{ik}(\lambda)), \quad (1)$$

şeklinde bağlı olan ve bu neden ile "parametre matrisleri" adı verilen matrisler ortaya çıkarlar. F matrisi n -sıralı kare matris olsun. Eğer uygulamalarda daima polinomlar kullanılacak ve "polinom matrisleri" bahis konusu olacak ise, $f_{ik}(\lambda)$ fonksiyonları keyfi olabilir. Genellikle parametre matrisleri ve özellikle polinom matrisleri, homogen lineer denklem sistemlerinin

$$F(\lambda) x = 0, \quad (2)$$

katsayılar matrisleri olarak ortaya çıkar ve böylece triviyal olmayan $x \neq 0$ çözümlerinin varlık koşulu olarak

$$\det F = F(\lambda) = 0 \quad (3)$$

denklemi, yani denklem sistemi (2) nin karakteristik denklemi bulunur. $F(\lambda)$, karakteristik determinantıdır. $f_{ik}(\lambda)$ lar, λ nin genel örneğin transendant fonksiyonları iseler, $F(\lambda) = 0$ da bu tip bir denklem olur. Polinom matrisleri halinde $F(\lambda)$ da, bilinmeyen dereceden λ cinsinden bir polinomdur. Genellikle yani denklem (3) ün her λ değeri için sıfıra özdeş değil ise (tekil hal), denklem (3) ün çözümleri olarak tamamen belirli $\lambda_1, \lambda_2 \dots$ kökleri yani problem (2) nin "karakteristik kökleri" veya özdeğerleri bulunur; bu durumda (2), bölüm IV ve V de incelenecek olan daha genel tipde bir "özdeğer problemi" gösterir. (2) sisteminin yalnız ve yalnız bu λ_i değerleri için triviyal olmayan x_i çözümleri vardır ve bunlar, homogen karakterleri nedeni ile, ancak oran şeklinde bulunabilir ve sonra uygun şekilde normlaştırılabilirler. Örneğin reel x çözümleri için $x'x = 1$ ve kompleks x çözümleri için $x^* x = 1$, burada x^* reel halde x ile çakışan, x' in eşlenik tranpoze vektörüdür.

$\lambda = \lambda_\sigma$ bu tip bir kök olsun. İlgili x_σ çözüm vektörlerinin bulunması için $F(\lambda_\sigma)$ matrisinin rank düşmesi, $d = n - r$ defekti esas alınır. Zira $r_\sigma, F(\lambda_\sigma)$ matrisinin rankı olmak üzere (2) nin lineer bağımsız çözüm sistemleri sayısı bu defekte eşittir. Şimdi $F(\lambda)$ determinantı $f_{ik}(\lambda)$ elemanlarının (homogen) bir fonksiyonudur :

$$F(\lambda) = F(f_{11}, f_{12}, \dots, f_{nn}) = F(f_{ik}). \quad (4)$$

Bu fonksiyonun f_{ik} elemanına göre kısmî türev, örneğin satır açılımı

$$F(\lambda) = f_{i1} F_{i1} + f_{i2} F_{i2} + \dots + f_{in} F_{in}$$

şeklindeki determinantların açılımı teoreminden kolayca görüleceği gibi, bu elemanın cebirsel tamam layımına eşittir :

$$\frac{\partial F}{\partial f_{ik}} = F_{ik}(\lambda).$$

Böylece denklem (4) den, $F(\lambda)$ fonksiyonun tam diferansiyeli dF olarak

$$dF(\lambda) = F_{11}(\lambda) df_{11}(\lambda) + F_{12}(\lambda) df_{12}(\lambda) + \dots + F_{nn}(\lambda) df_{nn}(\lambda)$$

veya λ parametresine göre türev için :

$$F'(\lambda) = F_{11}(\lambda) f'_{11}(\lambda) + F_{12}(\lambda) f'_{12}(\lambda) + \dots + F_{nn}(\lambda) f'_{nn}(\lambda) = \sum_{i,k} F_{ik}(\lambda) f'_{ik}(\lambda)$$

elde edilir. $F(\lambda)$ determinantının, λ ya göre birinci türevi $F'(\lambda)$ cebirsel tamamlayanların veya $F(\lambda)$ determinantının ilk minörlerinin (alt determinantlarının) bir lineer fonksiyonu yani homogen lineer bir fonksiyonudur. Türev işlemine devam edilerek ikinci türev için

$$F''(\lambda) = \sum_{i,k} F'_{ik}(\lambda) f'_{ik}(\lambda) + \sum_{i,k} F_{ik}(\lambda) f''_{ik}(\lambda)$$

bulunur.

Türevleri bakımından F_{ik} tamamlayanları (ilk minörleri) için de durum F için olan gibidir bunlar F_{ik} nın ilk minörlerinin yani F nin ikinci minörlerinin ($n-2$) sıralı alt determinantlarının homogen lineer fonksiyonlardır. F_{ik} lar da açınım teoremi uyarınca, F nin ikinci minörlerinin aynı şekilde homogen, lineer fonksiyonlarıdır, yani $F''(\lambda)$ de, bu ikinci minörlerin bu tip bir fonksiyonudur. Bu şekilde devam edilerek, aşağıdaki teorem bulunur :

Teorem 1 : $F(\lambda)$ gibi bir parametre matrisinin $F(\lambda)$ determinantının, parametreye göre p -ninci türevi $F^{(p)}(\lambda)$, $F(\lambda)$ nın p -ninci minörlerinin ($n-p$) sıralı alt determinantlarının homogen lineer fonksiyonu olarak gösterilebilir.

Şimdi λ_σ , $F(\lambda) = 0$ karakteristik denkleminin p -katlı bir kökü ise yani, $\lambda \neq 0$ için $F^{(p)}(\lambda) \neq 0$ olmasına karşılık $F(\lambda)$ ile birlikte ilk $p_\sigma - 1$ adet türev de sıfır oluyor ise, teorem (1) nedeni ile $F(\lambda_\sigma)$ nın her p_σ -nının minörü sıfır olamaz yani $F(\lambda)$ nın d_σ rank düşmesi en fazla p_σ ya eşit olabilir :

$$d_\sigma = n - r_\sigma \leq p_\sigma \quad (5)$$

"Tek katlı" λ_σ ($p_\sigma = 1$) halinde, $F(\lambda) = 0$ nedeni ile, rank düşmesi için $d_\sigma = p_\sigma = 1$ olur. "Çok katlı" $p > 1$ kökleri halinde d genellikle, $d \leq n$ ile genişletilen (5) sınırından başkası bahis konusu olamaz.

10.2. Polinom Matrisleri ve Tam Sayılı Matrisler. Ekvivalent Özelliği.

Aşağıda, parametre matrisinin $f_{ik}(\lambda)$ elemanlarının λ cinsinden polinom olmaları yani $F(\lambda)$ polinom matrisi şeklindeki çok önemli dal incelenecektir. Bu maksatla ilk önce yine kare olmayan matrislere müsaade edilir, örneğin F , bir $m \times n$ -matrisi olsun, $m \cdot n$ adet $f_{ik}(\lambda)$ eleman arasında λ cinsinden rastlanan en büyük derece q ise, F matrisine q dereceli denir. Böylece bu matris

$$F(\lambda) = A_0 + A_1 \lambda + A_2 \lambda^2 + \dots + A_q \lambda^q \quad (6)$$

şeklinde yazılır, burada $m \times n$ -matrisleri A_j , $a_{ik}^{(j)}$ elemanları artık λ parametresine bağlı değilde sabit olan matrislerdir.

Polinom matrisleri de, 7.2 ve 7.4 de adi matrisler için uygulanan şekilde, bir seri elemanter dönüşüm ile köşegen şekline, normal şekle sokulabilir, ancak yukardaki hale göre önemli bir fark vardır. Normal şekilde ortaya çıkan, F başlangıç matrisinin r ranklı sıfır olmayan elemanlardan oluşan r -ranklı köşegen matrisi yukarıdaki gibi artık birim matrise dönüştürülemez; böylece, orada ekivalent matrislerin tek invariantı olan r rankı dışında başka karakteristik doneler de ekivalent invariant olarak normal şekilde belirirler. Bunun sebebi şudur : Polinomlarda, genel hesap işlemi olarak bölme kullanılamaz, zira iki polinomun bölünmesi genellikle yani, ikisi birbirine kalansız bölünemiyor ise, bir diğer polinom yerine kesirli bir rasyonel fonksiyon verir. Burada da tam sayılardaki şartlar vardır; orada bölme genellikle yani sayılar kalansız bölünemiyor ise, tam sayılar bölgesinin dışına çıkar. Yalnız ilk üç temel hesap işleminin — toplama, çıkarma ve çarpmanın — yapılabileceği, ancak bölmenin uygulanmadığı bu tip bölmelere cebirde "halka" adı verilir. Yani reel veya kompleks katsayılı polinomlar ve (pozitif ve negatif) tam sayılar (sıfır dahil) birer halka oluştururlar. Her ikisinde önemli ölçüde aynı davranış gösterirler ve bu neden ile polinom ve tam sayıların beraberce ve polinom matrisleri yanında "tam sayılı" yani elemanları tam sayı olan matrislerin de incelenmesi maksada uygundur. Uygulamalarda polinom matrislerine fazla önem verilse bile, tam sayılı matrislerin de ilginç olabileceği haller de düşünülebilir.

Halkalar yani polinomlar ve tam sayılar ile hesap için "birim" kavramı önemlidir. Bunlar, $1/\epsilon$ elemanını yine halkaya ait yapan elemanlardır. Bunlar, tam sayılar için ± 1 sayıları polinomlar için ise, "her keyfi $c \neq 0$ sabiti" dir.

Bir polinom matrisinin veya tam sayılı bir matrisin "elemanter dönüşümü"nden yukarıda olduğu gibi şu üç işlemten biri anlaşılır :

I. İkiser satır veya sütunun yerlerinin değiştirilmesi,

II. Bir satır veya sütunun her bir elemanının bir birim ile çarpılması; polinom matris halinde $c \neq 0$ sabiti ile, tam sayılı matris halinde ± 1 ile, burada pratik anlamda yalnız -1 ile çarpım esas dönüşüm olarak bahis konusudur.

III. Keyfi bir halka elemanı (bir $p(\lambda)$ polinomu veya bir p tam sayısı) ile çarpılmış bir satırın (sütunun) diğer bir satıra (sütuna) eklenmesi.

Sonlu sayıda elemanter dönüşüm ile birbirlerine geçebilen A, B polinom matrislerine veya tam sayılı matrislere yine ekivalent denir; $A \sim B$. Ekivalentlik bağıntısı yukardaki gibi, refleksif ($A \sim A$), simetrik ($A \sim B, B \sim A$) ve transitiftir. ($A \sim B, B \sim C$ den $A \sim C$) çıkar.

7.4 deki gibi burada da, uygun tekil olmayan matrisler ile çarpım şeklindeki üç dönüşüm uygulanabilir. Aşağıdakiler birbirine karşı gelir :

Dönüşüm I : I birim matrisinden, i ve k satırları değiştirilerek bulunan J_{ik} matrisi.

Dönüşüm II : I birim matrisinden, i ninci köşegen elemanı yerine bir birim, polinom matrisleri halinde $c \neq 0$; tam sayılı matrisler halinde -1 konularak bulunan C_i matrisi.

Dönüşüm III : I den, i, k ($i \neq h$) noktasındaki 0 elemanı yerine $p(\lambda)$ polinomu veya p sayısı konularak bulunan K_{ik} matrisi.

Bütün bu matrisler tekil-olmayan matrislerdir. Ancak burada ek bir özellik daha önemlidir. Bunların determinanı birbirine yani polinom matrisleri halinde bir sabite, tam sayılı matrisler halinde ± 1 e eşittir. Matrisler "uni modular" dır ("m modul" leri = determinant bir birimdir). Yalnız ve yalnız bu halde "halka bölgesinde bulunan bir invers matris" yani yine polinom matris veya tam sayılı matris olan bir matris vardır. Bu nedenle "uni modular ekivalent" likden bahsedilir; bu ise yukarda incelenen gerekli ekivalent özelliğine oranla çok önemli bir sınırlamadır. Böylece 7.4 dekine benzer olarak aşağıdaki teorem bulunur :

Teorem 2 : Polinom matrisi veya tam sayılı matris A ve B yalnız ve yalnız

$$\boxed{B = PAQ} \quad \text{ve} \quad \boxed{A = P^{-1}BQ^{-1}}. \quad (7)$$

olacak şekilde tekil-olmayan, unimodular P ve Q gibi iki matris var ise, (unimodular) ekivalentdir yani sonlu sayıda elemanter dönüşüm ile birbirlerine dönüşebilirler.

"Lineer" polinom matrisleri özel hali için, ilk önce Weierstrass'ın ispat ettiği teorem geçerlidir.¹

Teorem 3 : Tekil-olmayan A_1, B_1 e sahip λ cinsinden birinci dereceden

$$A(\lambda) = A_0 + A_1 \lambda$$

$$B(\lambda) = B_0 + B_1 \lambda$$

kare polinom matrisleri yalnız ve yalnız, denklem (y) yi sağlayan, tekil-olmayan, sabit yeni λ dan bağımsız P, Q matrisleri var ise, ekivalentdirler.

10.3. Smith Normal Formu. Elemanter Polinomlar ve Elemanter Bölenler.

Yukarıda bahsedilen, bir polinom matrisini (veya aşağıda parantez içindeki ifadeler ile belirtilen bir tam sayılı matrisi), ekivalent köşegen şekle dönüştürme problemini ele alalım. Bu maksatla şöyle hareket edelim : Matrisimizde örneğin A da a_{ik} elemanlarının hepsi, λ ya göre aynı dereceden (aynı değerli) değil ise, min. dereceli (değerli) bir eleman vardır. Bunlar birden fazla ise, bir tanesi seçilip alınır. 0 sıfır elemanına bir derece (değer) verilmez, bu derece karşılaştırılmasında (değer karşılaştırılmasında) dikkate alınmaz.

Var dan en küçük derece sıfır (en küçük değer 1 ise), hemen yok etme işlemine başlanabilir. Fakat sıfırdan yüksek (1 den büyük) ise önce s_1 ra kombinasyonu yani III. dönüşümü ile, daha küçük dereceli (daha küçük değerli) bir eleman, var olarak hesaba katılır. Böylece mümkün en küçük dereceli (değerli) bir eleman bulana kadar işleme devam edilir ve bulunan bu eleman, sıralar değiştirilerek sol üst köşeye getirilir. Böylece dönüştürülen matris B , en küçük dereceli (değerli) eleman da $b_{11}(\lambda)$ veya b_{11} olsun.

¹ WEIERSTRASS, K : M. Ber. Preuss. Akad. Wiss. 1968, S. 310 — 388.

Bu durumda b_{11} , birinci satır ve sütunun bütün elemanlarında çarpan olarak vardır.¹ Böyle olmasa idi yani birinci satırda b_{11} in, bölünülmeyen bir b_{1k} elemanı var olsa idi, b_{11} den daha küçük dereceli bir (değerli) bir h kalanı halinde

$$b_{1k} = q b_{11} + h$$

yazılabilir idi. Ancak bu durumda, $-q$ ile çarpılmış birinci sütunun k -nıncı sütuna eklenmesi ile bunun birinci elemanı h yapılabilir, yani hipoteze aykırı olarak b_{11} den daha küçük dereceli (değerli) bir eleman hesaba katılabilirdi. Aynı durum birinci sütun içinde geçerlidir.

Böylece III. dönüşümleri ile $b_{11} \neq 0$ dışında, birinci satır ve sütunun bütün elemanları sıfır yapılabilir ve $A = a_{ik}$ tüm olarak

$$\begin{pmatrix} b_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & c_{m2} & \dots & c_{mn} \end{pmatrix}$$

matrisine dönüşmüş olur.

Burada en küçük dereceli polinom (en küçük değerli sayı) olarak b_{11} , aynı zamanda geri kalan c_{ik} elemanlarının bölenidir. Zira aksi halde sıraların kombinasyonu ile, hipoteze aykırı olarak, b_{11} den daha küçük dereceli (değerli) kalanlar elde edilebilir idi.

Her c_{ik} elemanı sıfıra eşit olabilir (eğer başlangıç matrisi A nın rankı 1 ise); bu durumda işlem burada durur. Ancak her c_{ik} sıfıra eşit değil ise, verilen metod c_{ik} ların geriye kalan $(m-1, n-1)$ matrisinde tekrarlanır, ve şimdi $i, k \geq 2$ için tüm matrisin birinci satır ve sütununda çok sayıda sıfır eleman olduğundan, geri kalan matrisdeki bütün dönüşümler, tüm matrise de aittir. c_{22} için mümkün en küçük dereceli (değerli) eleman kabul edilir ise,

$$\begin{pmatrix} b_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & c_{22} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & d_{33} & \dots & d_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & d_{m3} & \dots & d_{mn} \end{pmatrix},$$

¹ Tam sayılı matrislerde, çarpan veya bölünen anlamı açıktır. Polinom matrisi halinde bölün, birimine yeni sabit çarpanlara kadar kabul edilir; örneğin $3\lambda, 2\lambda$ in veya $\lambda^2 + 2\lambda$ nın bölenidir.

matrisi elde edilir, burada c_{22} yine, kalan matrisin bütün d_{ik} elemanlarını böler.

Böylece, eğer başlangıç matrisi r ranklı ise, yani A nın her r -ranklı alt determinantı λ ya göre sıfıra özdeş olmuyor ise sol alt köşeninde alt matris olarak, sıfırdan farklı r adet elemanlı bir köşegen matris bulunan ve diğer elemanları sıfır olan bir matris elde edilir. II dönüşümleri ile her köşegen elemanındaki en büyük λ kuvvetinin katsayıları 1 (veya tam sayılı matris halinde, her köşegen elemanının işaret pozitif) yapılır ise A polinom matrisinden (tam sayılı matrisden),

$$N = \left(\begin{array}{ccc|c} E_1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & E_r & \\ \hline & 0 & & 0 \end{array} \right), \quad (8)$$

matrisi yani Smith normal formu bulunur. Polinom matrisi halinde, her değeri için $\det A$ nın sıfıra özdeş olmayan yok olmasını gösteren özellikle önemli, tekil-olmayan kare matris A halinde $r = n$ olur ve normal form köşegen matrise dönüşür:

$$G = \left(\begin{array}{ccc} E_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & E_n \end{array} \right) = \text{Diag}(E_v) \quad (9)$$

En büyük λ kuvvetinin katsayılar matrisi tekil- olmayan ise, yani denklem (6) da $\det A_q \neq 0$ ise, polinom matrisi mutlaka tekil olmayan matrisdir. Bu durumda polinom matrisine q nıncı dereceden "esas olan" adı verilir. En küçük dereceli (değerli) birinci eleman b_{11} bir birim, yani polinom matrisi halinde bir sabit, tam sayılı matris halinde de ± 1 olabilir. Bu durumda $E_1 = 1$ olur. Bu işlem 1 den farklı ilk E_i eleman ortaya çıkıncaya kadar tekrarlanabilir.

Elemanter dönüşümler esnasında $\det A$ determinantı en fazla birimler kadar değiştiği için bu, (9) normal şeklinden doğrudan doğruya görüleceği gibi, E_v lerin çarpımına (sabit çarpan veya işaret dışında) eşittir.

$$\det A \cong E_1 E_2 \dots E_n \quad (10)$$

Unimodular ekivalent özelliğine göre invariant olan, matris için karakteristik polinomlar veya E_v sayılarına polinom matrisinin veya tam sayılı matrisin invariant çarpanları denir. Bileşik elemanter bölen kavramı da yaygındır ancak bu, Weierstrass'ın elemanter bölenleri ile karıştırılmaması için, burada kullanılmıyacaktır. Buna karşılık, polinom matris halinde, E_v ise, matrisin elemanter polinom adı verilecektir. Normal şekilden E_1 in E_2 nin bir böleni, E_2 nin E_3 ün böleni v.s. olduğu anlaşılır. Genellikle, ikinci bir 0 sayısının böleni olan bir b tam sayısı için b|a (yani b, a nın bölenidir veya b, a yı böler) yazılır. Böylece

$$[E_1 | E_2 | \dots | E_n], \quad (11)$$

olur, burada E_v lerin bazıları birbirine ve özellikle ilk baştakiler 1'e eşit olabilir. Özet olarak şu yazılabilir :

Teorem 4 : A ve B bilinen matrisleri veya tam sayılı matrisleri yalnız ve yalnız, E_v elemanter polinomları (invariant çarpımları) aynı ise, birbirine unimodular ekivalenttir.

Tekil-olmayan polinom matris $A(\lambda)$ halinde

$$\det A(\lambda) = 0 \quad (12)$$

karakteristik denkleminde (s adet farklı) karakteristik λ_σ kökleri bulunur. Bunlar p_σ -kath iseler, karakteristik determinant

$$\det A(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{p_1} (\lambda - \lambda_2)^{p_2} \dots (\lambda - \lambda_s)^{p_s}. \quad (13)$$

şekline parçalanabilir. E_v ler, $\det A$ nın çarpımları olduğu için, bunlar da

$$E_v(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{e_{v1}} (\lambda - \lambda_2)^{e_{v2}} \dots (\lambda - \lambda_s)^{e_{vs}} \quad (14)$$

şeklinde parçalanabilir, burada $e_{v\sigma}$ kuvvetlerinden bazıları, eğer elemanter polinomda $(\lambda - \lambda_\sigma)$ çarpanı yok ise, sıfır olabilir.

$$(\lambda - \lambda_\sigma)^{e_{v\sigma}} \quad (15)$$

parçalarına, Weierstrass'a göre, matrisin elemanter bölenleri denir¹. Denklem (11) deki bölünebilme özelliği nedeni ile elemanter bölen kuvvetleri için

¹ WEIERSTRASS, K : M. Ber. Preuss. Akad. Wiss. 1868, S. 310 — 338.

$$e_{1\sigma} \leq e_{2\sigma} \leq \dots \leq e_{n\sigma}. \quad (16)$$

bulunur.

Yani bu kuvvetler, en büyüğü olan $e_{n\sigma} \neq 0$ dan başlayarak, azalır veya hiç olmazsa artmayan bir dizi oluşturulur ve bu 0 da kesilebilir. Denklem (10), (13) ve (14) nedeni ile bunun toplamı λ_σ ya ait p_σ çok katlılığına eşittir :

$$e_{1\sigma} + e_{2\sigma} + \dots + e_{n\sigma} = p_\sigma, \quad (17)$$

buradan yine $e_{n\sigma} \neq 0$ çıkar.

Tam sayılı matris A halinde (15) elemanter bölenleri yerine, yine elemanter bölenler adı verilir, "prime sayı kuvvetleri" geçerlidir :

$$\pi_\sigma^{e_{v\sigma}}, \quad (15a)$$

Bu durumda E_v invariant çarpımları

$$E_v = \pi_1^{e_{v1}} \cdot \pi_2^{e_{v2}} \dots \pi_s^{e_{vs}}, \quad (14a)$$

dır ve bütün determinant, π_σ prime sayı çarpımlarının kuvvetlerine göre ayrılmış şekli alır :

$$\det A \equiv \pi_1^{p_1} \cdot \pi_2^{p_2} \dots \pi_s^{p_s}, \quad (13a)$$

burada, birbirine yani işarete kadar eşitlik vardır ($\equiv$). Bunun ve çarpanların sırasının dışında ayrılma tamdır.

Polinom matrisi ile ilgili ifadeler, bir matrisin strüktür ve sınıflandırılması probleminin açıklanacağı bölüm V, 18 de ayrıntılı olarak ele alınacaktır, — Burada, şimdiye kadar yapılanlar bir polinom — ve bir tam sayılı örneklerinde uygulanacaktır.

Örnek 1 : Polinom matrisi

$$A = \begin{pmatrix} \lambda^2 - \lambda & \lambda & 0 \\ \lambda - 2 & \lambda^2 & \lambda + 4 \\ \lambda & 0 & 3\lambda \end{pmatrix}$$

KUVADRATİK FORMLAR VE UYGULAMALARI

11. Kuvadratik Formlar.

11.1. Kuvadratik ve Bilineer Formlar.

n adet reel $x_1, x_2, \dots, x_n$ değişkenlerinden oluşan reel kuvadratik form, a_{ik} reel katsayılı, x_i cinsinden homogen derece aşağıdaki ifadededir :

$$Q = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \dots + 2a_{1n}x_1x_n + a_{22}x_2^2 + \dots + 2a_{2n}x_2x_n + \dots + a_{nn}x_n^2 \quad (1')$$

Ayrıca $a_{ik} = a_{ki}$ konularak şöyle yazılabilir :

$$Q = x_1(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n) + x_2(a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n) + \dots + x_n(a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n) \quad a_{ik} = a_{ki} \text{ ile}$$

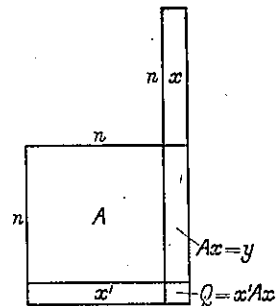
Burada sağ tarafta $x' = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ vektörü ile,

$$y_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n,$$

bileşenli $y = Ax$ dönüşmüş vektörünün skaler çarpımı vardır; ve böylece Q için kısaca şu yazılabilir :

$$Q = x'Ax, \quad A' = A \text{ ile} \quad (1)$$

Simetrik $A = (a_{ik})$ matrisine "Form Matrisi" denir; bu, formu yani n adet x değişkeninin kuvadratik fonksiyonunu belirtir. x_i ler yerine sayısal değerleri konulmuş kabul edersek, Q sayısal olur. Diğer bir deyimle, Q formu da skaler bir büyüklüktür; bu durum, denklem (1) e ait Şekil 11.1. deki çarpım şemasından da anlaşılır.



Şekil 11.1. $Q = x'Ax$ kuvadratik formuna ait çarpım şeması.

Kuvadratik formlar uygulamada, daha ziyade "enerji ifadeleri", örneğin mekanik-elastik sistemlerde kinetik ve potansiyel enerji, yapı statikinde şekil değiştirme işi, elektroteknikte magnetik veya elektrik enerjisi olarak ortaya çıkarlar. Matematikte, $Q = \text{sabit}$ şeklindeki ifadeler ile koni kesitleri ve ikinci dereceden yüzeylerin $n = 2$ ve 3 merkezsiz denklemleri olarak karşılaşırlar; ve n genel boyutu halinde $Q = \text{sabit}$, R_n deki 2-inci dereceden bir yüzeyin denklemleri olur.

Kuvadratiklerin yanında "Bilineer Form" lar da ortaya çıkar; bunlar iki değişken sistemli birbirine bağlı lineer ifadelerdir :

$x = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ ve $y = \{y_1, y_2, \dots, y_m\}$, ler aşağıdaki formun ifadeleri ve

$$P = a_{11}y_1x_1 + a_{12}y_1x_2 + \dots + a_{1n}y_1x_n + a_{21}y_2x_1 + a_{22}y_2x_2 + \dots + a_{2n}y_2x_n + \dots + a_{m1}y_mx_1 + a_{m2}y_mx_2 + \dots + a_{mn}y_mx_n \quad (2')$$

burada, yukardaki gibi, kısaca şunu yazabiliriz :

$$P = y'Ax \quad (2)$$

mn -matrisi $A = (a_{ik})$, simetrik veya kare olması gerekmeyen bir matristir; ve bunun elemanları, gene, reel kabul edilecektir. Şekil 11.1 deki gibi P de bir skalerdir; ve dolayısı ile aşağıdaki transpoze ifadeye eşittir :

$$P = y'Ax = x'A'y \quad (2a)$$

Kare matris A halindedeyse, $P = y'Ax$ ve $P^* = x'Ay = yAx$, genellikle simetrik A matrisi dışında, farklıdır.

Örnek :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}, \quad P = y'Ax = 2y_1x_1 + y_1x_2 - 3y_2x_1 + 4y_2x_2, \quad P^* = x'Ay = 2y_1x_1 - 3y_1x_2 + y_2x_1 + 4y_2x_2.$$

n adet x_i değişkeninin fonksiyonu olarak, kuvadratik Q formu veya $m + n$ adet x_i, y_i değişkeninin fonksiyonu olarak bilinear P formunda değişkenlere göre kısmî türevlerin bulunması gerekir. Bu işlem matris hesabı yardımı ile ve

$$\frac{\partial x}{\partial x_i} = e_i = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \frac{\partial y_i}{\partial y_i} = e_i = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (i\text{-nci birim vektör}).$$

dikkate alınarak kolayca yapılır. $Q = x'Ax$ de, önce sol taraftaki x , sonra sağdaki x çarpanına göre türev alınır ise,

$$\frac{\partial Q}{\partial x_i} = e_i'Ax + x'Ae_i = 2e_i'Ax,$$

elde edilir; burada son ifade $A' = A$ nedeni ile, bilineer form $x'Ae_i = e_i'Ax = e_i'Ax$ in transpozesi alınarak bulunur. $e_i'Ax$ çarpımı, Ax vektörlerinin i -inci bileşenidir. n -adet $\partial Q/\partial x_i$ bileşenleri, $\partial Q/\partial x$ şeklindeki bir vektör ile ifade edilir ise $Q = x'Ax$ kuvadratik formunun "Türetme Kuvadı" olarak

$$\boxed{\frac{\partial Q}{\partial x} = 2Ax} \quad (3)$$

bulunur. Aynı şekilde, $P = y'Ax = x'A'y$ bilineer formunun x_i veya y_i değişkenine göre türevlerinin vektörleri olarak aşağıdaki ifadeler elde edilir.

$$\boxed{\frac{\partial P}{\partial x} = A'y} \quad (4a)$$

$$\boxed{\frac{\partial P}{\partial y} = Ax} \quad (4b)$$

11.2. Pozitif Definit Kuvadratik Formlar.

Fiziksel karakterleri gereğince yalnız pozitif, veya sıfır olabilen, ve bu — reel — değerlerin x_i değişkenleri ile gösterilebildiği kuvadratik formlar, uygulamalarda önemli bir rol oynar :

$$\boxed{Q = x'Ax \geq 0} \quad \text{her } x \text{ için} \quad (5)$$

Bu tip formlara, $x = 0$, yani $x_1 = x_2 = \dots x_n = 0$ için $Q = 0$ olması halinde "Pozitif Definit", hatta "Esas Definit" denir. Buna karşılık $Q = 0$ kulan $x \neq 0$ değerleri var ise, forma "Pozitif yarı Definit" denir; örneğin x_1 hız bileşenlerinin değişkenleri göstermesi halinde, bir maddesel sistemin kinetik enerji ifadesi daima esas pozitif definittir. Yay elemanlarına da sahip bir mekanik sistemin potansiyel enerjisi de, belirli bağların var olmaması, yani sıfır potansiyel enerjili x_i yer değiştirmelerin var olması halinde, yarı definit olabilir. Form yanında buna ait A matrisine de definit adı verilir. Bunun için matrisin, ilerde ele alınacak olan belirli koşulları sağlaması gerekir.

Teorem 1 : Pozitif definit $Q \geq 0$ formunun A matrisi tekil ise, form yarı definittir. Diğer bir deyim ile, Q esas definit ise, A tekil olmayan bir matrisdir.

Tekil A halinde, homogen

$$Ax = a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = 0$$

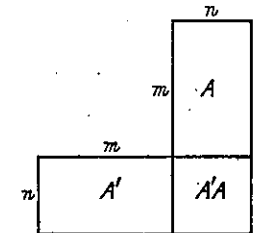
denklem sisteminin, A nın a_k sütunlarının lineer bağıllığına uygun olarak, trivial olmayan x_i çözümleri vardır. Yani $Q = x'Ax = 0$ için $x \neq 0$ değer takımları avrdır. — Biraz ilerde göstereceğimiz gibi, (S. 143) bunun tersi de geçerlidir :

Teorem 2 : Pozitif definit forma ait A matrisi tekil-olmayan ise, form esas definittir; $x \neq 0$ için $Q > 0$.

Bu durumda "pozitif definit A matrisi" halinde x ve $y = Ax$ vektörleri hiç bir zaman ortogonal olamaz.

Keyfi reel mn -matrisi A halinde

$$\boxed{B = A'A} \quad (6)$$



Şekil 11.2. $A'A$ matrisi.

matrisli formların özel bir rolü vardır. B matrisi ilk önce n -sıralı kare matrisdir; Şekil 11.2. ye bakınız. Ayrıca simetriktr :

$$B' = (A'A)' = A'A = B.$$

Son olarak, pozitif (yarı) definittir. Zira $Ax = y$ ile elde edilir;

$$Q = \mathbf{x}' \mathbf{B} \mathbf{x} = \mathbf{x}' \mathbf{A}' \mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{y}' \mathbf{y} = y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_m^2,$$

ve bu da ≥ 0 dir. Eşitlik işareti burada

$$\mathbf{y} = \mathbf{A} \mathbf{x} = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n = 0,$$

halini gösterir; ve bu durum, $\mathbf{A}$ nın a_k sütunları lineer bağımlı olmak üzere yalnız $\mathbf{x} \neq 0$ için mümkündür :

Teorem 3 : Reel $m \times n$ -matrisi $\mathbf{A}$ ile tanımlanan simetrik $\mathbf{B} = \mathbf{A}' \mathbf{A}$ matrisi, $\mathbf{A}$ nın a_k sütunlarının lineer bağımlı olup olmamasına göre pozitif yarı definit veya esas definittir. Eğer $\mathbf{A}$ sütun düzgün ise $\mathbf{B}$ düzgün olur.

Ayrıca şu da yazılabilir :

Teorem 4 : Simetrik, definit, $\mathbf{A}' \mathbf{A}$ ve $\mathbf{A} \mathbf{A}'$ matrisleri; $m \times n$ -matrisi $\mathbf{A}$ ile aynı ranklıdır.

Bu rank m veya n sayılarının küçüğünden daha büyük olamaz. — $\mathbf{A}$ nın rankı r ise, tam r adet lineer bağımsız a_k sütunu vardır; buna karşılık $r + 1$ adet sütun daima bağımlıdır. r adet bağımsız sütunun $\mathbf{A}_1$ alt matrisi ile, geri kalanların $\mathbf{A}_2$ ile gösterildiği düşünülür ise, $\mathbf{A}' \mathbf{A}$ matrisi, tekil-olmayan $\mathbf{A}_1' \mathbf{A}_1$, alt matrisine sahip olur; ve böylece $\mathbf{A}' \mathbf{A}$ nın rankı r den küçük olamaz. Rank, bundan büyükte olamaz; zira $\mathbf{A}' \mathbf{A}$ çarpımı, aralarında r adet lineer bağımsızlar da bulunan $\mathbf{A}$ nın a^i satırlarının lineer bağımsız satırların sayısını yükseltmez.

Aynı şey $\mathbf{A}' \mathbf{A}$ içinde geçerlidir. — Genelleştirme ile şu bulunur :

Teorem 5 : $\mathbf{A}$, r ranklı $n \times p$ -matrisi ve $\mathbf{B}$, simetrik, pozitif definit (tekil-olmayan) $n \times n$ -matrisi ise, $p \times p$ -matrisi $\mathbf{A}' \mathbf{B} \mathbf{A}$, r ranklı pozitif (yarı) definit bir matrisdir.

Pozitif definit $\mathbf{B}$ matrisi, Cholesky metodu uyarınca, tekil-olmayan $\mathbf{R}$ halinde, $\mathbf{B} = \mathbf{R}' \mathbf{R}$ şeklinde parçalanır ise, $\mathbf{R} \mathbf{A} = \mathbf{C}$ olmak üzere $\mathbf{A}' \mathbf{B} \mathbf{A} = \mathbf{A}' \mathbf{R}' \mathbf{R} \mathbf{A} = \mathbf{C}' \mathbf{C}$ bulunur; ise, tekil-olmayan $\mathbf{R}$ nedeni ile, $\mathbf{A}$ ile aynı ranklıdır; buradan teorem 4 deki ifade çıkar.

Simetrik form matrisini yine $\mathbf{A}$ ile gösterelim ve $\mathbf{A}$ nın pozitif, (yarı) definit olma koşullarını araştıralım. Esas definitlik için, aşağıdaki pozitif köşegen elemanları gereklidir, ancak yeterli değildir :

$$\boxed{a_{ii} > 0} \quad \text{bütün } i, \text{ ler için} \quad (7)$$

Zira, $x_1 \neq 0$ dışında, her değişken için $x_k = 0$ konulur ise, $Q = a_{11} x_1^2$ olur; ve bu, $a_{11} > 0$ halinde reel x_1 için yalnız pozitif olabilir. Ancak bu yeterli olmamaktadır; zira $x_1 = 2, x_2 = -1$ için, $Q = 4 - 8 + 3 = -1$ olan negatif değerli karşı örnek aşağıdaki gibi verilebilir.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \text{o zaman } Q = x_1^2 + 4x_1x_2 + 3x_2^2$$

Pozitif definitlik için gerek ve yeter bir kriter $\mathbf{A}$ form matrisinin $\mathbf{A} = \mathbf{C} \mathbf{B}$ üçgen şeklinde parçalanmasından bulunur; ve bu 6.3. de gösterildiği gibi, aşağıdaki simetrik şekle sokulabilir :

$$\mathbf{A} = \mathbf{R}' \mathbf{R}, \quad \mathbf{R} = \mathbf{D}^{-1/2} \mathbf{B} \text{ ile, } \mathbf{D} = \text{Diag}(b_{ii}),$$

bu ise Cholesky parçalama formudur. Böylece $\mathbf{z} = \mathbf{R} \mathbf{x}$ için

$$Q = \mathbf{x}' \mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{x}' \mathbf{R}' \mathbf{R} \mathbf{x} = \mathbf{z}' \mathbf{z} = z_1^2 + z_2^2 + \dots + z_n^2$$

bulunur; ve bu, $\mathbf{z} \neq 0$ ve reel ise, $\mathbf{x} \neq 0$ için $Q > 0$ olur. Üçgen matris $\mathbf{R}$ tekil-olmayan reel matris ise bu hal söz konusudur ve bunun için

$$\boxed{b_{ii} > 0} \quad \text{bütün } i, \text{ ler için} \quad (8)$$

koşulu gereklidir.

Buna göre

Teorem 6 : Reel simetrik $\mathbf{A}$ matrisi, yalnız ve yalnız, $\mathbf{A} = \mathbf{C} \mathbf{B}$ üçgen şeklinde parçalanması ve $c_{11} = 1$ olması halinde birçok pozitif $b_{ii} > 0$ köşegen elemanlarını veriyor ise, esas pozitif definittir. b_{ii} lerin ilk r adedinin — sıraların yer değiştirmesinden sonra — pozitif, geri kalan $r - n = d$ adedinin ise sıfır olması halinde $\mathbf{A}$ matrisi r ranklı yarı definittir. d sayısına kuadratik formun defekti denir.

Üçgenlerde ayrılma işleminden, aynı zamanda, teorem 2 de çıkar; zira tekil-olmayan $\mathbf{A}$ halinde $\mathbf{B}$ ve dolayısı ile $\mathbf{R}$ de tekil-olmayan matrisdir; ve böylece

$$\mathbf{z} = \mathbf{R} \mathbf{x} \neq 0, \quad \mathbf{x} \neq 0 \text{ için, o halde } Q > 0.$$

elde olunur.

b_{ii} lerin çarpımları, B nin bölge determinantlarını verirler; ve bunlar yok etme işlemindeki dönüşümler esnasında değişmediğinden, aynı zamanda A ya ait determinantlardır:

$$b_{11} = a_{11}, b_{11} b_{22} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, b_{11} b_{22} b_{33} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \dots$$

Pozitif definitliğe ait (8) koşulu, o şekilde yazılabilir ki, A nın pozitif ana bölge determinantları, esas definitlik için gerekli ve yeterli olurlar. Buna karşılık, yarı definitlik halinde — sıraların değiştirilmesinden sonra — ilk r adeti pozitif ve geri kalanları sıfır olur. Buna ait pratik kriter, daima $b_{ii} > 0$ dır.

11.3. Kuadratik Formların Dönüşümü. Kongrüent Özelliği.

$Q = x'Ax$ kuvadratik formunda x_i değişkenlerinde tekil-olmayan

$$x = Cy, \quad (9)$$

dönüşümü yapılır ise, Q

$$Q = y' C' A C y = y' B y, \quad (10)$$

şeklini alır ve form matrisi A

$$B = C' A C \quad (11)$$

ye dönüşür. Bu şekilde reel, tekil-olmayan C matrisine bağlı A, B kare matrislerine, 5.6 daki gibi kongrüent denir ve şöyle yazılır:

$$A \sim B \quad (12)$$

kongrüent özelliği, tekil-olmayan P, Q için $B = P A Q$ eşdeğerliliğinin özel halidir. Bunun için A nın sütunları ile C nin sağdan çarpımını gerektiren bütün dönüşümler C ile soldan çarpım yolu ile satırlara da genişletilir; bu bir matrisin simetrisinin değişmediği ve formül olarak denklem (11) den de çıkarılan bir işlemdir: $A = A'$ halinde $B = B'$ dır. Bu neden ile

kongrüent özelliği genellikle yalnız (reel) simetrik matrisler için göz önüne alınır. A, B matrisleri, eğer bir tanesi diğerine sonlu sayıda elemanter dönüşümler yardımı ile ve her dönüşüm aynı şekilde satır ve sütunlarda yapılmak üzere, dönüşebiliyor ise kongrüent adını alırlar.

Ayrıca, 7. de olduğu gibi, bu tip dönüşümler uygulanarak simetrik A matrisi "normal şekle" getirilebilir; burada rank yanında reel simetrik matrise ait diğer bir sayı yani "indis" veya "signanür" de önem kazanır. İlk önce r ranklı matris, satır ve sütunlarda elemanter dönüşümler yapılarak r adet sıfırdan farklı ve genellikle bazıları pozitif diğerleri negatif olan köşegen elemanlı bir köşegen matris şekline getirilebilir. p adet pozitif ve $q = r - p$ adet negatif eleman olsun; bunlar sıra değişmesi ile toplu olarak yazılabilir; diğer taraftan $d = n - r$ adet elemenda sıfır olur. Böylece köşegen matris, reel ve pozitif de olabilen $d_i > 0$ büyüklükleri ile aşağıdaki şekilde yazılabilir:

$$D = \begin{pmatrix} d_1^2 & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & d_p^2 & & \\ & & & -d_{p+1}^2 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & -d_r^2 \\ & & & & & & 0 \\ & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

Bundan sonra

$$C_0 = C'_0 = \begin{pmatrix} 1/d_1 & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & 1/d_r & & \\ & & & 1 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 1 \\ & & & & & & 0 \\ & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

köşegen matrisi ile yapılan kongrüent dönüşümün de D nin sıfırdan farklı elemanlarının değerleri bire eşitlenebilir. Fakat bu şekilde, reel C dönüşümü, köşegen elemanlarının işaretlerini etkilemez. Bunlar, reel bir kongrüent dönüşüme göre "invariant" olurlar. Böylece kuvadratik formun en son "normal formu" olarak

$$Q = y_1^2 + \dots + y_p^2 - y_{p+1}^2 - \dots - y_r^2. \quad (13)$$

bulunur. r rankı yanında, köşegen matristeki pozitif elemanların p sayısı, yani formun "indisi" veya "eylemsizlik indisi", kuvadratik formu karakterize eden, reel değişken dönüşümüne göre invariyan olan bir büyüklüktür. Bu ise Sylvester'in "eylemsizlik kanunu" dur :

Teorem 7 : Eylemsizlik kanunu : r ranklı reel bir kuvadratik form, reel tekil-olmayan bir dönüşüm yolu ile denklem (13) deki normal forma ne şekilde dönüştürülür ise dönüştürülsün, r rankı yanında pozitif terimlerin (forma ait eylemsizlik indisinin) p sayısı ve dolayısı ile negatif terimlerin $q = r - p$ sayısı sabittir.

Bu teorem $n = 2$ için $Q = \text{sabit}$ şeklindeki konik kesitin reel koordinat dönüşümü ile, daima aynı tip bir diğer kesite, bir ellipsin bir ellipse, bir hiperbolün bir hiperbole, bir parabolünde bir parabole dönüşeceğini gösterir.

Teoremin ispatı için şunu göstermemiz gerekir : A matrisinin b_i veya c_i köşegen elemanlarına sahip iki farklı köşegen matrisine dönüşümünde, pozitif köşegen elemanlarının sayısı, iki defasında da aynıdır. Birinci dönüşümün

$$x = B y \text{ veya } y = B x, B = (\beta_{ik}) = B^{-1} \text{ olmak üzere}$$

p_1 adet pozitif ve $q_1 = r - p_1$ adet negatif b_i değerlerine sahip

$$Q = \sum_{i=1}^r b_i y_i^2 = \sum_{i=1}^r b_i (\beta_{i1} x_1 + \dots + \beta_{in} x_n)^2$$

versin. İkinci bir dönüşüm

$$x = C z \text{ veya } z = \Gamma x, \Gamma = (\gamma_{ik}) = C^{-1} \text{ olmak üzere,}$$

p_2 adet pozitif ve $q_2 = r - p_2$ adet negatif c_i değerlerine sahip

$$\sum_{i=1}^r b_i (\beta_{i1} x_1 + \dots + \beta_{in} x_n)^2 = \sum_{i=1}^r c_i (\gamma_{i1} x_1 + \dots + \gamma_{in} x_n)^2$$

versin; böylece

$$Q = \sum_{i=1}^r c_i z_i^2 = \sum_{i=1}^r c_i (\gamma_{i1} x_1 + \dots + \gamma_{in} x_n)^2$$

bulunur. Şimdi $p_1 > p_2$ yani $r - p_1 + p_2 < r$ olsun. Denklemin (14) de $x_2 \dots x_n$ değişkenleri yerine, hepsi sıfır olmayan, ancak negatif b_i değerlerine ait $r - p_1$ parantez içindeki ifadelerini solda, pozitif c_i değerlerine ait p_2 parantez içindeki ifadelerini sağda sıfır yapan, reel sayısal değerler koyalım :

$$\begin{aligned} \beta_{p_1+1,1} x_1 + \dots + \beta_{p_1+1,n} x_n &= 0 \\ \dots &\dots \\ \beta_{r,1} x_1 + \dots + \beta_{r,n} x_n &= 0 \\ \gamma_{11} x_1 + \dots + \gamma_{1n} x_n &= 0 \\ \dots &\dots \\ \gamma_{p_2,1} x_1 + \dots + \gamma_{p_2,n} x_n &= 0 \end{aligned}$$

Bunlar hipotez gereğince $r - p_1 + p_2 < r \leq n$ adet homogen denklem olup n adet x_i bilinmeyenine sahiptir; ve bu denklemlerin, daima hepsi birden sıfır olmayan x_i çözümleri vardır. Böylece denklem (14) de sol taraf ≥ 0 , sağ taraf ≤ 0 olur. Ancak eşitlik nedeni ile, iki tarafta sıfır olmalıdır; bu neden ile hipoteze aykırı olarak $y = z = 0$ yani $x = 0$ bulunur. Böylece $p_1 > p_2$ kabulü bir aykırılık doğurmuş olur; ve $p_1 = p_2 = p$ bulunarak teorem ispatlanmış olur.

p indisi ve $q = r - p$ sayısı yerine, başka iki değer, yani rank olarak toplam yerine "signatür" olarak fark kullanılır :

$$\begin{aligned} r &= p + q \text{ rank} \\ s &= p - q \text{ signatur.} \end{aligned}$$

Bunların ikisi de p ve q gibi kuvadratik formun invariyanlarıdır; ve kolayca ispatlanabilecek aşağıdaki teorem geçerlidir :

Teorem 8 : Reel simetrik A ve B matrisleri yalnız ve yalnız rankları yanında indis yeri veya signatürleri birbirine uyuyor ise, kongrüentdir :

$$B \subseteq A, \text{ yani } B = C' A C$$

burada C reel tekil-olmayan dönüşüm matrisidir. Q formu, $r = s = p$, $q = 0$ için reel x_i halinde, negatif, $r = -s = q$, $p = 0$ için ise pozitif değerler olamaz. Birinci halde form pozitif (yarı) definit; ikinci halde negatif (yarı) definit; ve hatta $r = n$, $d = 0$ için esas definit, diğer taraftan $r < n$ için ise yarı definittir. Negatif definit formlar, pozitif de-

finitlerin işaretleri değiştirilerek bulunduğundan, burada yalnız — kend başına pratik anlamı olan — pozitif definit formlar ile yetinilebilir.

11.4. Hermitsel Formlar.

Kuvadratik formların kompleks genelleştirilmesi

$$H = x^* A x \quad (15)$$

“Hermitsel Form” lar ile olur; burada $A = A^*$ hermitsel matrisi simetrik reel ve yarı simetrik sanal kısımdan oluşur; ve bunun için $\bar{x} = x^*$, $\bar{A} = A^*$ kısaltması yapılır; 4.2 ye bakınız. Bu form, adi reel kuvadratik form gibi, bir “reel sayı” değerini gösterir; zira

$$H^* = (\overline{x^* A x})' = (x' \bar{A} \bar{x})' = \overline{x' A' x} = x' A x = H.$$

dir. Matris ve vektörün reel ve sanal kısımlarından ayrıntılı olarak

$$\begin{aligned} x^* A x &= (u' - i v') (B + i C) (u + i v) \\ &= u' B u + v' B v + v' C u - u' C v \\ &\quad + i (u' B v - v' B u + u' C u + v' C v) \end{aligned}$$

bulunur. Burada

$$B' = B, \quad C' = -C$$

nedeni ile

$$\begin{aligned} u' B v &= v' B u \\ u' C v &= -v' C u \\ u' C u &= v' C v = 0. \end{aligned}$$

dir. Böylece H nin sanal kısmı ortadan kalkar; ve geriye

$$H = x^* A x = u B u + v B v - 2 u' C v \quad (16)$$

kalır. Yarı hermitsel $A = -A^*$ matrisli, yarı hermitsel $K = x^* A x$ formunun, tam sanal olduğu şöyle gösterilebilir :

$$K = x^* A x = i (u' C u + v' C v + 2 u' B v). \quad (17)$$

Tekil-olmayan, fakat genellikle kompleks

$$x = C y \quad (18)$$

dönüşümü ile y_j değişkenine geçilir ise, $H = x^* A x$ formuna ait form matrisi A , $H = y^* C^* A C y = y^* B y$ nedeni ile aşağıdaki hermitsel matrise dönüşür :

$$B = C^* A C \quad (19)$$

Bu şekilde birbirine bağlanmış kare matrislere “hermitsel kongrüent” veya “könjonktiv” matrisler denir ve şöyle gösterilir :

$$A \equiv B \quad (20)$$

burada genellikle A, B hermitsel matrisleri bahis konusudur; Özellikle C “üniter”, yani $C^* C = I$ ise, A ve B “üniter konjonktiv” ve, ortogonal kongrüent reel matrisler gibi, birbirine benzerdir.

Bir hermitsel matris A , yine denklem (19) daki hermitsel kongrüent dönüşüm yolu ile, köşegen matrise çevrilebilir; ve bu hermitsel matrislerin tanım gereğince (simetrik reel kısım) reel dir. Buna göre aşağıdaki teorem geçerli olur :

Teorem 9 : Eylemsizlik kanunu: r ranklı bir hermitsel matris denklem (18) deki tekil-olmayan kompleks dönüşüm yolu ile köşegen matrise ne şekilde getirilir ise getirilsin, pozitif köşegen elemanlarının (eylemsizlik indisinin) p sayısı ve dolayısı ile negatif elemanların $q = r - p$ sayısı daima sabittir. Başka bir deyimle : Hermitsel bir matrisin $r = p + q$ rankı ve $s = p - q$ signatürü, hermitsel kongrüent dönüşüme göre invaryanttır.

Özellikle, $p = (r + s) / 2$ adet $+1$ ve $q = (r - s) / 2$ adet -1 elemanlı, — sıra dışında — tamamen belli “normal form”

$$N = \text{Diag} \{1, \dots, 1, -1, \dots, -1, 0, \dots, 0\} \quad (21)$$

olarak bulunabilir. Buradan şu çıkar :

Teorem 10 : A ve B hermitsel matrisleri, yalnız ve yalnız, r rankları ve s signatürleri aynı ise, hermitsel kongrüenttir : $A \sim^H B$.

Eğer ilgili H formu, keyfi (kompleks) yahut hepsi birden sıfır olmayan x_i değişkenleri için yalnız pozitif veya negatif olmayan değerler olabiliyor ise, bu forma yine "pozitif definit" veya "yarı definit" denir.

Pozitif definit bir hermitsel matris A , bu durumda

$$A = C^* C \quad (22)$$

şeklinde gösterilebilir. Buradaki tekil-olmayan kompleks C matrisi, yalnız burada geçerli olan $N = I$ normal formunu veren kongrüent dönüşüme karşı gelir. r ranklı pozitif yarı definit r n-matrisi A , ilerde gösterileceği gibi, r ranklı bir r n-matrisi C ile, denklem (22) şeklinde yazılabilir. A , reel yani simetrik ise, C de reel olur ve denklem (22) de C^* , C ne döner.

11.5. Geometrik Anlam.

Üç boyutlu uzayda

$$Q = x' A x = \text{sabit.} \quad (23)$$

denklemini bilindiği gibi, ikinci dereceden bir yüzeyin merkezsel denklemini gösterir. Genel n -boyutlu halde, denklem (23) " R_n de ikinci dereceden bir yüzey" gösterir. x yer vektörü yanında A ile dönüşmüş $Ax = y$ vektörün de, önemli bir anlam kazanır. Eğer n adet x_i değişkene ait Q fonksiyonunun diferansiyeli

$$dQ = \frac{\partial Q}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial Q}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial Q}{\partial x_n} dx_n$$

skaler çarpım olarak,

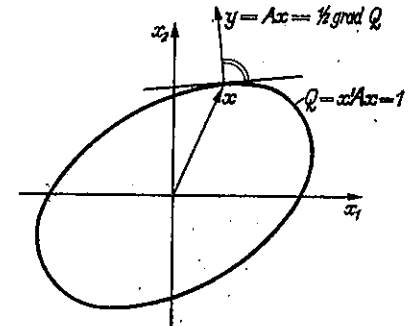
$$dQ = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} \right)' dx \quad (24)$$

matris şeklinde yazılır — burada kısmi türevlerin $\partial Q / \partial x$ vektörüne, Q skaler fonksiyonunun "gradient" i denir ve bunun değeri denklem (3) den

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \text{grad } Q = 2 A x = 2 y \quad (25)$$

olarak bellidir — ve dx yer vektörü diferansiyelinin $Q = \text{sabit}$ yüzeyi üzerinde kalması istenir ise,

$$dQ = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} \right)' dx = 0 \quad (26)$$



Şekil 11.3. $y=Ax$ gradiyent, vektörü ile beraber $Q=x'Ax=\text{sbt}$ ikinci dereceden yüzey.

ile gradiyent vektörünün ve yüzey üzerindeki dx diferansiyelinin ortogonalliği bulunur. Dönüşmüş

$$y = A x = \frac{1}{2} \text{ grad } Q \quad (27)$$

vektörü, böylece yüzey üzerindeki normal vektöre eşit olur. Şekil 11.3.

R_3 deki ikinci dereceden bir yüzeyin, bilindiği gibi birbirine dik, üç asal ekseni vardır; ve bunlar, yalnız ve yalnız kendi üzerlerinde x yer vektörü ile, $y = Ax$ normal vektörünün aynı doğrultuda olması ile bellidirler. Bu hipotezi n boyutlu hale genelleştirelim, yani bilinmeyen λ skaler parametrelili

$$A x = \lambda x \quad (28)$$

problemini kuralım : Dönüşmüş $y = Ax$ vektörünün, uzunluğun λ katına yükselmesi halinde, eski doğrultusunu koruduğu A matrisine ait x doğrultuları aranmaktadır. Simetrik A matrisi ile sınırlı olması gerekmeden bu "özdeğer problemi" ikinci dereceden yüzeylerin asal eksenleri ile ilgili bu örneği aşan bir genel problemdir; ve bu neden ile tüm matris teorisi için büyük önem taşır. Bundan sonraki iki Bölüm bu probleme ayrılmıştır; bu asal eksen probleminin çözümü daha genel bir şekilde, orada ele alınacaktır.

12. Matris Hesabının Bazı Uygulamaları.

12.1. Dengeleme Hesabına Uygulama.

$A'A$ matrisinin klasik kullanılması, gözlemlerin dengelenmesi konusunda Gauss'un ortaya koyduğu dengeleme hesabına dayanır.¹ Doğrudan doğruya gözlenemeyen n adet aranan x_k büyüklükleri için verilmiş a_{ik} katsayılı ve a_i ikinci tarafları ölçen sonucu bulunan lineer denklemler şeklinde bağıntılar vardır. Bu ölçmeler hatalı olduğundan ölçme hatalarının dengelenmesi amacı ile, n adet x_k bilinmeyeni için gerekli olan daha fazla m sayıda a_i gözlemleri yapılır. Yani m adet a_i gözlemlerini ikinci taraf olan, $m > n$, lineer denklemleri bulunur; burada sistem tam n adet bağımsız denklemlere sahip olmalıdır. Ölçme hataları nedeni ile bu m adet denklem artık uyumlu bir sistem oluşturmaz; bu m adet denklemin, n adet bağımsızlarından oluşan farklı sistemler biraz değişik farklı x değerleri verirler. Denklem sistemini yine uyumlu yapmak için, her birine daha sonra bulunacak bir v_i düzeltmesi uygulanır ve bu v_i lerin

$$Q = \sum v_i^2 = v'v = \min \quad (1)$$

hipotezini sağlamaları öngörülür; Böylece metoda "en küçük kareler metodu" adı verilir. Uyumsuz denklem sistemi

$$Ax = a \quad (2)$$

yerine

$$Ax - a = v \quad (3)$$

"hata denklemleri" veya ayrıntılı olarak

$$\left. \begin{aligned} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n - a_1 &= v_1 \\ a_{21}x_1 + \dots + a_{2n}x_n - a_2 &= v_2 \\ \dots \dots \dots \end{aligned} \right\} m > n. \quad (3')$$

sistemi ile çalışılır. n adet lineer bağımsız denklem hipotezine uygun olarak mn -matrisi A nın rankı $r = n$ dir. Yani bu matris sütun düzgündür. (3) ün (1) de yerine konması ile

¹ Praktischen Mathematik (15) S. 290 ff da daha fazla bilgi bulunabilir.

$$\begin{aligned} Q = v'v &= (Ax - a)'(Ax - a) = x'A'Ax - x'A'a - a'A'x + a'a \\ &= x'A'Ax - 2x'A'a + a'a = Q(x) = \min. \end{aligned}$$

bulunur. Buradan, bilinen şekilde, n adet koşul olarak

$$\frac{\partial Q}{\partial x_i} = 2e'_i A'Ax - 2e'_i A'a = 0,$$

çıkar; ve bunlar

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = 2(A'Ax - A'a) = 0$$

şeklinde veya

$$A'Ax = A'a \quad (4)$$

olarak kısaca yazılır; burada $A'A$, n sıralı simetrik, tekil-olmayan, pozitif dafinit katsayılar matrisidir ve $A'a$ da sağ taraftır. x_k bilinmeyenleri için, uyumlu bir denklem sistemi gösteren bu "normal denklemler", dengelenmemiş ve dolayısı ile uyumsuz (2) koşul denklemlerinden, A' matrisi ile soldan çarpılarak bulunur. Bu "Gauss Dönüşümü" adı ile de anılan bir işlemdir. (4) normal denklemlerinin x_i çözümleri, en küçük hata kareleri toplamı Q anlamında, a_i ölçülerine mümkün olduğu kadar iyi uyan, aranan dengelenmiş bilinmeyenlerdir.

Normal denklem matrisi $A'A$, y_i

$$A'A = N \quad (5)$$

şeklinde kısaltılır ve (4) denklemleri x e göre çözülür ise, dengelenmiş x_i bilinmeyenleri ile, hatalı a_k gözlemleri arasında

$$x = N^{-1}A'a = A'a, \quad N^{-1}A' = A', \quad \text{olmak üzere,} \quad (6)$$

şeklinde, ayrıntılı olarak

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= \alpha_{11}a_1 + \alpha_{21}a_2 + \dots + \alpha_{m1}a_m \\ \dots \dots \dots \\ x_n &= \alpha_{1n}a_1 + \alpha_{2n}a_2 + \dots + \alpha_{mn}a_m \end{aligned} \right\} \quad (6')$$

şeklinde bir bağıntı elde edilir : Burada A' matrisi, aşağıdaki özelliğe sahip ve 9.5 de verilen mn-matrisi A nın yarı inversidir :

$$A'A = A'A = I. \quad (7)$$

$A'A$ matrisi ise, N nin invers matrisine eşittir :

$$A'A = N^{-1} A'A N^{-1} = N^{-1}. \quad (8)$$

Örnek : Bir üçgende α, β, γ açıları aynı hassasiyet ile ölçülmüştür. Ölçme değerleri a_1, a_2, a_3 olsun. Üç açı

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ \quad (A)$$

koşulunu sağlayacağından, üç ölçme değerli ölçme işlemi fazla belirli-
dir; a_i lerin toplamı 180° den az farklı olacaktır :

$$a_1 + a_2 + a_3 - 180^\circ = \delta. \quad (B)$$

x_i bilinmeyenleri yalnız 2 açıdır; örneğin $\alpha = x_1, \beta = x_2$, (A) gereğince, böylece $\gamma = 180^\circ - x_1 - x_2$ dir. Hata denklemleri ise şunlardır :

$$\begin{aligned} x_1 - a_1 &= v_1 \\ x_2 - a_2 &= v_2 \\ -x_1 - x_2 + a_1 + a_2 - \delta &= v_3, \end{aligned}$$

buradaki son denklem, $\gamma - a_3 = 180^\circ - x_1 - x_2 - x_3$ ile (B) den bulunur. Böylece

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \delta - a_1 - a_2 \end{pmatrix}$$

$$A'A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad A'a = \begin{pmatrix} 2a_1 + a_2 - \delta \\ a_1 + 2a_2 - \delta \end{pmatrix}.$$

Normal denklemler ve çözüm

$$\begin{array}{r|l} 2x_1 + x_2 = 2a_1 + a_2 - \delta & 2 \\ x_1 + 2x_2 = a_1 + 2a_2 - \delta & -1 \end{array} \quad \begin{array}{l} -1 \\ 2 \end{array}$$

$$\begin{aligned} 3x_1 &= 3a_1 - \delta \\ 3x_2 &= 3a_2 - \delta \end{aligned}$$

Sonuç

$$\begin{aligned} \alpha = x_1 &= a_1 - \delta/3 \\ \beta = x_2 &= a_2 - \delta/3 \\ \gamma &= a_3 - \delta/3. \end{aligned}$$

Bu durumda açı fazlası δ , a_i ölçme değerlerinin her birinden eşit $\delta/3$ kadar çıkartılmalıdır. Burada ölçme değerlerinin aynı hassasiyette olması öngörülmüştür. Yani v_i düzeltmelerin $v_1 = v_2 = v_3 = -\delta/3$ dür.

a_2, a_3 ölçmeleri a_1 in iki katı hassasiyete sahip ise, bu durum, v_i leri iki kat yapmaksızın son iki hata denkleminin iki ile çarpılması sureti ile göz önüne alınır. Böylece

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}, \quad a = \begin{pmatrix} a_1 \\ 2a_2 \\ 2\delta - 2a_1 - 2a_2 \end{pmatrix}$$

ve normal denklemler şöyle olur.

$$\begin{aligned} 5x_1 + 4x_2 &= 5a_1 + 4a_2 - 4\delta \\ 4x_1 + 8x_2 &= 4a_1 + 8a_2 - 4\delta. \end{aligned}$$

Sonuç

$$\begin{aligned} \alpha = x_1 &= a_1 - 4\delta/6 \\ \beta = x_2 &= a_2 - \delta/6 \\ \gamma &= a_3 - \delta/6. \end{aligned}$$

Bu iki daha hassas ölçme değerinde, beklendiği gibi, daha az hassas olan a_1 e oran ile daha küçük bir düzeltme yapılır.

12.2. Kafes Kirişlerin Hesabı.

1.1. de verilen düzlemsel kafes sistem örneğini tekrar ele alalım. Burada S_i çubuk kuvvetli m adet çubuk ve, basitlik için, yine düşey olarak kabul eden n adet P_k düğüm yükü vardır. Keyfi yük doğrultusu halinde, her yük x ve y bileşenlerine ayrılır ve n kuvvet sayısı iki katına çıkar. Aynı durum, her yükün üç bileşene ayrıldığı, uzay kafes sistemi için de geçerlidir. Bizim için önemli olanlar, yukarıdaki en basit halde verilmiştir. Daha önce açıklandığı gibi $-s$ vektörü ile gösterilen $-S_i$ çubuk kuvvetleri ile $-p$ vektörü ile gösterilen $-P_k$ yükleri arasında

$$\left. \begin{aligned} S_1 &= c_{11} P_1 + c_{12} P_2 + \dots + c_{1n} P_n \\ S_2 &= c_{21} P_1 + c_{22} P_2 + \dots + c_{2n} P_n \\ &\vdots \\ S_m &= c_{m1} P_1 + c_{m2} P_2 + \dots + c_{mn} P_n \end{aligned} \right\} \quad (9')$$

lineer bağıntısı veya kısaca

$$s = Cp \quad (9)$$

vardır; buradaki mn-matrisi $C = (c_{ik})$ nın, c_{ik} "etki sayıları" olan elemanları şöyle bulunur: ilk önce kafes kiriş statikçe belirli öngörülen ve $j \neq k$ için $P_k = 1$ ve $P_j = 0$ yükü altında, bu elemanlar S_i çubuk kuvvetleri olarak, statik metodlarının birinin — Crewone plan veya Ritter kesiti — n defa uygulanması ile elde edilir.

Şimdi, biliniyor kabul edilebilen P_k yükleri altındaki r_k gökmeleri (sehimleri) Castigliano teoremine göre, “şekil değiştirme işi” (aşağıda kısaca Ş.D.İ. olarak gösterilmiştir) yardımı ile bulunur. Tek bir çubuk için, bu şekil değiştirme işi, bilindiği gibi,

$$A_i = \frac{1}{2} \frac{S_i^2 l_i}{E F_i} = \frac{1}{2} S_i^2 f_i$$

dir; burada $f_1 = l_1/EF_1$ elastik yer değiştirmedir. Tüm kafes kirişin Ş.D.İ.'si

$$A = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m S_i^2 f_i = \frac{1}{2} \mathbf{s}' \mathbf{F}_0 \mathbf{s} \quad , \quad (10)$$

yani çubuk elastik yer deęistirmeleri f_i den oluşan $F_0 = \text{Diag}(f_i)$ köse-
gen matrisli kuvadratik ve pozitif definit bir formdur. Burada denklem
(9) gereğince s çubuk kuvvetleri yerine p yükleri konulur ise, ř.D.I.
yüklerle göre kuvadratik bir form olarak

$$A = \frac{1}{2} \mathbf{p}' \mathbf{C}' \mathbf{F}_0 \mathbf{C} \mathbf{p} = \frac{1}{2} \mathbf{p}' \mathbf{F} \mathbf{p} \quad (11)$$

elde edilir; burada artık köşegen olmayan fakat pozitif definit “toplam elastik yer değiştirme” matrisi :

$$\boxed{\mathbf{F} = \mathbf{C}' \mathbf{F}_0 \mathbf{C}} \quad (12)$$

vardır. Bunun elemanlarının boyutu uzunluk/kuvvet dir.

Bilindiği gibi, i-ninci düğüm P_i yükü doğrultusundaki r_i çökmeleri Ş.D.İ. nin P_i yüküne göre kısmi türevi (Castigliano teoremi) olarak bulunur, $r_i = \partial A / \partial P_i$. Bu çökmelerin toplam vektörü $\mathbf{r}$, aşağıdaki basit kuraldan bulunur :

$$\mathbf{r} = \frac{\partial A}{\partial \mathbf{p}} = \mathbf{F} \mathbf{p} \quad (13)$$

1.1. de verilen eşit, $l_1 = l$ uzunluklu basit örnekte bütün mesitler eşit, $F_1 = F$ kabul edilir ise, yani $f_1 = f = l/EF$ halinde, $F_0 = f \cdot I$ yardımı ile hesap basitleşir :

$$\mathbf{F} = \mathbf{C}' \mathbf{F}_0 \mathbf{C} + f \mathbf{C}' \mathbf{C} = \frac{f}{24} \begin{pmatrix} 31 & 24 & 13 \\ 24 & 44 & 24 \\ 13 & 24 & 31 \end{pmatrix},$$

ve çökmeler için de şu ifadeler bulunur :

$$\begin{aligned} 24 EF r_1 &= (31 P_1 + 24 P_2 + 13 P_3) l \\ 24 EF r_2 &= (24 P_1 + 44 P_2 + 24 P_3) l \\ 24 EF r_3 &= (13 P_1 + 24 P_2 + 31 P_3) l. \end{aligned}$$

Hesap kolayca “statik belirsiz” kafes kirişlere de uygulanabilir. Burada s adet çubuk fazla olsun; bunlar kesilir ve X_1 statik bilinmeyenleri, yani — önce bilinmeyen — dış kuvvetler olarak hesaba katılır. Bunların şiddetleri daha sonra, kesme noktalarında şekil değiştirmelerin sıfır olması koşulundan bulunur (Statik belirli ana sisteme geçiş). Kesilen bu çubukları s_1 , geri kalanları s_0 ve, X_1 kuvvetlerini x ile göstereyim. Statik belirli ana sistemin s_0 çubukları, yine lineer olarak p yükleri ve, yük kabul edilen x bilinmeyenleri cinsinden ifade edilebilirler ve denklem (9) yerine

$$\begin{bmatrix} \mathbf{s}_0 = \mathbf{C}_0 \mathbf{p} + \mathbf{C}_1 \mathbf{x} \\ \mathbf{s}_1 = \mathbf{x} \end{bmatrix}, \quad (14)$$

bulunur; burada C_0 in c_{ik} elemanları yukardaki gibi, C_1 in elemanları ise bütün yükler ve, $X_k = 1$ dışında, bütün X_j bilinmeyenleri sıfıra eşitlenerek bulunur. Çubuk elastik yer değiştirmelerine ait köşegen matris, ana sistemin çubuklarına ait F_1 kısımlarına ayrılır ise, çift Ş.D.İ. şöyle yazılabilir :

$$2A = s'_1 F_0 s_1 + s'_2 F_1 s_2. \quad (15)$$

Burada denklem (14) in yerine konması ile

$$2A = (p' C'_0 + x' C'_1) F_0 (C_0 p + C_1 x) + x' F_1 x$$

veya son olarak

$$2A = p' F_{00} p + 2p' F_{01} x + x' F_{11} x \quad (16)$$

bulunur; burada elastik yer değiştirme matrisleri şunlardır :

$$\begin{aligned} F_{00} &= C'_0 F_0 C_0 \\ F_{01} &= C'_0 F_0 C_1 \\ F_{10} &= C'_1 F_0 C_0 = F'_{01} \\ F_{11} &= C'_1 F_0 C_1 + F_1. \end{aligned} \quad (17)$$

Böylece x statik bilinmeyenleri ve r çökmeleri Castigliano'ya göre

$$\frac{\partial A}{\partial x} = F_{10} p + F_{11} x = 0 \rightarrow x \quad (18)$$

$$\frac{\partial A}{\partial x} = F_{00} p + F_{01} x = r \rightarrow r. \quad (19)$$

denklem sistemlerinden bulunur. Denklem (18) den X_i bilinmeyenleri çıkar. Bunların denklem (19) da yerine konması ile r_i değerleri bulunur. Birinci denklem x e göre çözülür :

$$x = -F_{11}^{-1} F_{10} p, \quad (20)$$

ve bu ikincide yerine konur, böylece r çökmeleri doğrudan doğruya p yüklerine bağlı olarak

$$r = (F_{00} - F_{01} F_{11}^{-1} F_{10}) p = F p \quad (21)$$

şeklinde bulunur; burada F bütün sisteme ait elastik yer değiştirme matrisidir. — Formel hesabın kolaylığı ve bunun genel geçerli olması ve tek halden bağımsızlığı dikkate değer; 25. deki genel problemlere bakınız.

12.3. Titreşim Problemlerinin İncelenmesi.

Matris hesabının, mühendis için çok önemli bir uygulama alanı titreşim tekniğidir. Burada sonlu sayıda serbestlik dereceli titreşim sistemlerinin incelenmesi doğrudan doğruya matris denklemlerine gider. Sürekli titreşim sistemleri de, parçalara ayrılma ve yaklaşık hesap yolu ile, sonlu sayıda serbestlik derecelere indirgenebildiğinden bunlarda başka bir uygulama alanı ortaya koyarlar. Bütün bu problemler 11.5 de verilen "özdeğer problemlerine" gider. Bu ise ya, oradaki,

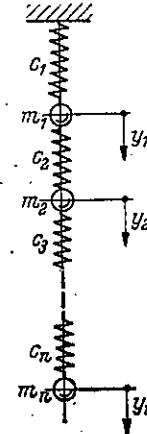
$$Ax = \lambda x, \quad (22)$$

özel şekilde veya "genel özdeğer problemi"

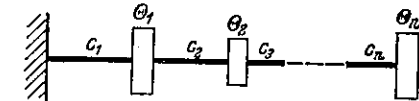
$$Ax = \lambda Bx. \quad (23)$$

şeklinde verilir. Bu özdeğer probleminin tam incelenmesi aşağıdaki bölümlerde yapılacaktır. Burada yalnız titreşim tekniğinin bazı örnekleri ile, özdeğer probleminin nasıl yazılacağı gösterilecektir.

Birinci örnek olarak, ya Şekil 12.1 deki gibi veya burulma titreşimleri halinde Şekil 12.2 deki gibi tertiplenmiş, n adet m_i kütesinden ve n adet c_i yayından oluşan bir titreşim zinciri incelenecektir. Kütlelerin y_i yer değiştirmeleri ile z_i yay uzamaları arasında



Şekil 12.1. n tane m_i kütesinin ve n tane c_i yayının titreşim zinciri.



Şekil 12.2. n tane θ_i kütesinin ve n tane c_i yaylarının burulma titreşim zinciri.

bağıntıları, kısaca

$$\left. \begin{aligned} z_1 &= y_1 \\ z_2 &= y_2 - y_1 \\ z_3 &= y_3 - y_2 \\ &\dots\dots\dots \\ z_n &= y_n - y_{n-1} \end{aligned} \right\}$$

$$z = Ky$$

(24)

vardır; burada

$$K = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ -1 & 1 & & \\ & -1 & 1 & \\ & & \ddots & \ddots \\ 0 & & & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

matrisi tekil-olmayan bir matrisdir. Titreşim denklemleri, pozitif definit $C_0 = \text{Diag}(c_i)$ ve $M = \text{Diag}(m_i)$ köşegen matrislerine sahip potansiyel ve kinetik enerji U ve T yardımı ile bulunur:

$$U = \sum \frac{1}{2} c_i z_i^2 = \frac{1}{2} z' C_0 z \quad (25)$$

$$T = \sum \frac{1}{2} m_i \dot{y}_i^2 = \frac{1}{2} \dot{y}' M \dot{y} \quad (26)$$

Denklem (25) deki z uzamaları yerine (24) uyarınca y yer değiştirmeleri konarak potansiyel enerjiden

$$U = \frac{1}{2} y' K' C_0 K y = \frac{1}{2} y' C y \quad (27)$$

kuadratik formu elde edilir; burada

$$C = K' C_0 K. \quad (28)$$

yine pozitif definit form matrisidir. Böylece enerji teoremi

$$\frac{1}{2} (y' C y + \dot{y}' M \dot{y}) = \text{sabit},$$

şeklinde yazılabilir. Buradan matrislerin simetrik özelliği göz önüne alınarak, zamana göre türevden

$$\dot{y}' (C y + M \ddot{y}) = 0$$

veya, b_y vektörü y keyfi seçilebildiğinden, hareket denklemi olarak

$$\boxed{C y + M \ddot{y} = 0} \quad (29)$$

bulunur. Sinüs ifadesi

$$y = a \sin \omega t$$

$$\ddot{y} = -\omega^2 a \sin \omega t = -\omega^2 y = -\lambda y$$

ile

$$\boxed{C y = \lambda M y}, \quad \lambda = \omega^2 \quad (30)$$

olarak özdeğer problemi elde edilir. Denklem (23) deki genel özdeğer problemi tipinden olan bu problem, M^{-1} ile soldan çarpılarak denklem (22) deki özel hale getirilebilir. Fakat bu esnada matrisin simetrik özelliği yok olur; ve bu durumda, ileride görüleceği gibi, çözüme ait önemli özellikler ortaya çıkar. Simetrinin korunması için

$$M^{1/2} y = x, \text{ yani } x_i = y_i \sqrt{m_i} \quad (31)$$

ile yeni x değişkenine geçilir ve basit bir dönüşüm ile özel özdeğer problemi

$$\boxed{\hat{A} x = \lambda x}, \quad \lambda = \omega^2 \quad (32)$$

bulunur; burada

$$\boxed{A = M^{-1/2} C M^{-1/2}} \quad (33)$$

yine simetrik ve pozitif definit bir matris olur.

Homogen denklem sistemi olarak, denklem (1) veya (1a) nın yalnız, katsayılar determinantı sıfıra eşit olması halinde, triviyal olmayan (sıfıra özdeş olmayan) x çözümleri vardır. Bu "karakteristik determinant"

$$D(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} \quad (3)$$

λ parametresine bağlıdır ve, determinantlarda çarpım tanımından anlaşılacağı gibi, λ ya göre n -inci dereceden bir polinom, yani matrisin "karakteristik polinomu" dur. Problemden sıfırdan farklı x çözümlerinin varlık koşulu şöyle olur:

$$D(\lambda) = \det(A - \lambda I) = 0 \quad (4)$$

A matrisinin bu "karakteristik denklemi", λ ya göre n -inci dereceden cebirsel denklem olarak, çok katlı köklerin uygun şekilde sayılması halinde n adet (reel veya kompleks) $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ köklerine sahiptir. Karakteristik denklemin, yalnız bu λ_i kökleri yani matrisin "özdeğerleri" veya "karakteristik sayıları" (İngilizcede latent roots) için, denklem (1) ile verilen özdeğer probleminin triviyal olmayan

$$x_i = (x_{1i}, x_{2i}, \dots, x_{ni})', \quad (5)$$

çözümleri vardır; bunlara matrisin "öz çözümleri" veya "özvektörleri" (İngilizcede model columns) denir.¹

Bunlar (yalnız ve yalnız bunlar) başlangıçta öngörülen özdeğerler, orantı çarpanı olmak üzere, dönüşmüşler ile orantılı olma koşulunu sağlarlar; yani

¹ Matrislerdeki ve integral denklemlerdeki özdeğer problemi arasında tam bir benzerlikten bahis etmek amacı ile, λ_i karakteristik sayılarının $1/\lambda_i$ invers değerleri için "özdeğer" kelimesini kullanmak teklifi, yeni matris literatüründe benimsenmemiştir? İngiliz ve Fransız literatüründe, yalnız karakteristik sayılar anlamında — diğer kavramlar yanında — proper values, eigenvalues, valeurs propres gibi kelimeleri vardır. İstenilen uluslar arası anlaşma bakımından bu teklif bir şansa sahip değildir.

$$Ax_i = \lambda_i x_i \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (6)$$

Bunları şöyle özetliyebiliriz:

Teorem 1 : n -sıralı kare matris A nın, karakteristik denklem (4) ün kökleri olarak tam n adet (reel veya kompleks) λ_i özdeğerler vardır; λ parametresinin yalnız bu λ_i değerleri için, denklem (1) deki özdeğer problemini triviyal olmayan çözümleri yani matrisin x_i "özçözümleri" veya "özvektörleri" vardır.

$\det A$ determinantı kendiliğinden sıfır olan bir tekil matrisin tanımından şu yazılabilir:

Teorem 2 : Bir matrisin, yalnız ve yalnız, tekil olması halinde, $\det A = 0$, en aşağı bir $\lambda = 0$ özdeğeri vardır.

λ^n pozitif işaretli olmak üzere, karakteristik polinom

$$p(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0, \quad (7)$$

olarak yazılır ise, birinci ve sonuncu polinom katsayıları için:

$$\begin{cases} -a_{n-1} = \text{sp } A \\ (-1)^n a_0 = \det A \end{cases} \quad \begin{matrix} (8a) \\ (8b) \end{matrix}$$

verir. İkinci bağıntı (7) de $\lambda = 0$ konarak bulunur. Birincisi ise, $\det(\lambda I - A)$ nın birinci sisteme göre açılımından bulunur. Burada, yalnız $\lambda - a_{11}$ uç elemanı λ^{n-1} kuvvetinin katsayısı olur. Alt determinantların açılımına devam edilerek (8a) elde edilir (7) polinomunun,

$$p(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \dots (\lambda - \lambda_n)$$

lineer çarpanlarına ayrılmış şekli ile karşılaştırılmasından çıkan Vieta kök teoremlerinden

$$\begin{cases} \text{sp } A = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n \\ \det A = \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n \end{cases} \quad \begin{matrix} (9a) \\ (9b) \end{matrix}$$

bulunur.

$$V = \begin{pmatrix} (\lambda_2 - \lambda_1) & (\lambda_3 - \lambda_1) & (\lambda_4 - \lambda_1) & \dots & (\lambda_s - \lambda_1) \\ & (\lambda_3 - \lambda_2) & (\lambda_4 - \lambda_2) & \dots & (\lambda_s - \lambda_2) \\ & & (\lambda_4 - \lambda_3) & \dots & (\lambda_s - \lambda_3) \\ & & & \dots & \\ & & & & (\lambda_s - \lambda_{s-1}) \end{pmatrix}$$

ifadesi bulunur; ve bu s adet farklı özdeğerin kabulü ile, $\neq 0$ dir. Böylece denklem sisteminin yalnız $c_1 x_{11} = c_2 x_{12} = \dots = c_s x_{1s} = 0$ triviyal çözümü vardır; ve, bu bütün i bileşenleri için geçerli olacağından $c_1 = c_2 = \dots = c_s = 0$ bulunur. Özvektörler lineer bağımsızdır.

λ_σ özdeğerine ait karakteristik matrisi $A - \lambda_\sigma I$ nın rank düşmesi σ 'ya ve buna bağlı olarak lineer bağımsız özvektörlerin sayısına, yani λ_σ ya ait öz uzayın boyutuna gelince, bunun 10.1. de daha genel olarak

$$1 \leq d_\sigma \leq p_\sigma \quad (13)$$

sınırları arasında olduğu gösterilmiş idi; ancak burada $p_\sigma \lambda_\sigma$ özdeğerinin, yani karakteristik denklemin kökünün, çok katlılığını göstermektedir. Böylece yalnız "tek katlı özdeğer" halinde, bu rank düşmesi genellikle, başlangıçtan itibaren 1 e eşit olur :

Teorem 4 : Tek katlı bir özdeğer için, yalnız bir tane lineer bağımsız özvektör, yani bir öz doğrultu vardır. Buna karşılık $p_\sigma > 1$ olan çok katlı bir λ_σ özdeğeri bahis konusu ise, ilgili karakteristik matrisin rank düşmesi hakkında, genellikle (13) sınırları dışında bir şey söylenemez.

Teorem 5 : p_σ -katlı bir özdeğer için, en az bir ve en fazla p_σ adet lineer bağımsız özvektör, yani boyutu en az bir ve en fazla p_σ olan bir öz uzay vardır.

Farklı özdeğerlere ait özvektörler, lineer bağımsız olduklarından s adet farklı λ_σ özdeğerlerinden oluşan n-sıralı bir matrisin bütün özvektörleri

$$d_1 + d_2 + \dots + d_s \leq n \quad (14)$$

boyutlu bir uzayı, yani genellikle R_n in hakiki bir alt uzayını kaplarlar. Bütün özdeğerler için $d_\sigma = p_\sigma$ şeklindeki çok önemli özel halde matrisin, bütün R_n uzayını kaplayan n adet lineer bağımsız özvektörleri vardır.

Bu tip matrisler, "keşögen benzeri matrisler" sınıfını oluştururlar; bu sınıf çok sayıda önemli özellikler ile bellidir; ve 14. de ayrıntılı olarak incelenecektir.

13.3. Örnekler.

1. Örnek : Matris :

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Karakteristik denklem.

$$\begin{vmatrix} 5 - \lambda & 4 \\ 1 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 7\lambda + 6 = 0.$$

Özdeğerler :

$$\lambda_1 = 6, \lambda_2 = 1.$$

Özvektörler :

$$\lambda_1 = 6: \quad \begin{aligned} -x_1 + 4x_2 &= 0 \\ x_1 - 4x_2 &= 0. \end{aligned}$$

Bu iki denklem, beklendiği gibi, bağımlıdır. Bunların her birinden $x_1 / x_2 = 4/1$, yani

$$x_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ vektörü normlaştırılmış olarak } x_1 = \frac{1}{\sqrt{17}} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$\lambda_2 = 1: \quad \begin{aligned} 4x_1 + 4x_2 &= 0 \\ x_1 + x_2 &= 0. \end{aligned}$$

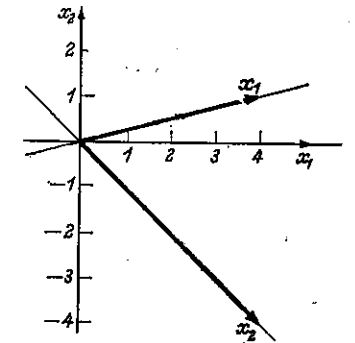
$$x_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ vektörü normlaştırılmış olarak } x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Şekil 13.1. de R_2 deki iki özdoğrultu gösterilmiştir :

2. Örnek : Çok katlı özdeğer, rank değişmesi 1 :

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \lambda - 5 & 4 \\ -1 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 6\lambda + 9 = (\lambda - 3)^2 = 0$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 3.$$



Şekil 3.1. İki-sıralı bir karesel matrisin özdoğrultuları.

Özvektörlerin hesabı ile ilgili denklem sistemi :

$$\begin{aligned} 2x_1 + 4x_2 &= 0 \\ -x_1 - 2x_2 &= 0. \end{aligned}$$

Buradan tek çözüm olarak $x_1/x_2 = 2/-1$ yani tek özvektör :

$$x_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \text{ normlaştırılmış olarak } x_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

bulunur.

3. Örnek : Çok katlı özdeğer, tam rank düşmesi :

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -6 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{vmatrix} -2 & -\lambda & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -\lambda & -6 \\ -1 & -2 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 - \lambda^2 + 21\lambda + 45 = 0$$

$$\begin{aligned} \lambda = -3: \quad \lambda_1 = \lambda_2 = -3, \lambda_3 = 5. \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 - 6x_3 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0 \end{aligned}$$

görüldüğü gibi, yalnız bir tek denklem bağımsızdır. İki katlı özdeğere burada tam rank düşmesi $d = p = 2$ karşı gelir. Özvektörler

$$x_1 = -2x_2 + 3x_3.$$

denklemden bulunur. Serbest x_2, x_3 bilinmeyenleri yerine $(1, 0)$ ve $(0, 1)$ sayı takımları konularak x_1 için -2 ve 3 değerleri yani aşağıdaki lineer bağımsız vektörler elde edilir :

$$x_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ ve } x_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

İki katlı özdeğer için c_1 ve c_2 serbest parametrelili

$$x = c_1 x_1 + c_2 x_2 = c_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

özdüzlemi vardır. Bu şekilde ifade edilebilen, yani özdüzlemde bulunan her vektör, örneğin, kolayca anlaşılacağı gibi,

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

vektörü $Ax = -3x$ bağıntı sağlar;

$$\begin{aligned} \lambda_3 = 5: \quad -7x_1 + 2x_2 - 3x_3 &= 0 \\ 2x_1 - 4x_2 - 6x_3 &= 0 \\ -x_1 - 2x_2 - 5x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Algoritma (sıra değiştirme) ile çözüm :

$$\begin{array}{ccc|c} -1 & -2 & -5 & \\ 2 & -4 & -6 & \\ -7 & 2 & -3 & \\ \hline -1 & -2 & -5 & \\ 2 & -4 & -6 & \\ -7 & 2 & -3 & \\ \hline -1 & -2 & -5 & \\ 2 & -4 & -6 & \\ -7 & 2 & -3 & \\ \hline -1 & -2 & -5 & \end{array} \quad x_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

4. Örnek : İki katlı özdeğer 0, rank değişmesi 1 :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & 3 & 1 \\ -3 & 8 & 1 \end{pmatrix}.$$

matris tekil ve rankı 2 dir. Yani en aşağı bir tane $\lambda = 0$ özdeğeri vardır. Karakteristik denklem

$$\lambda^2 (5 - \lambda) = 0$$

olup $\lambda_1 = \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 5$ bulunur.

$$\begin{aligned} \lambda_{1,2} = 0: \quad \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & \\ -2 & 3 & 1 & \\ -3 & 8 & 1 & \\ \hline 1 & 2 & -1 & \\ 2 & 4 & -2 & \\ 3 & -2 & 0 & \\ \hline 5 & 1 & 7 & \end{array} \quad \lambda_3 = 5: \quad \begin{array}{ccc|c} -4 & 2 & -1 & \\ -2 & -2 & 1 & \\ -3 & 8 & -4 & \\ \hline -4 & 2 & -1 & \\ 2 & 4 & -2 & \\ 3 & -2 & 0 & \\ \hline 0 & 1 & 2 & \end{array} \end{aligned}$$

$x_1:$

$x_3:$

$\lambda_{1,2} = 0$ iki katlı özdeğeri için, $x_1 = (5, 1, 7)'$ özvektörü, $\lambda_3 = 5$ özdeğeri için $x_3 = (0, 1, 2)'$ vektörü vardır. Bu iki özvektör, burada R_3 de yalnız bir düzlemi kaplarlar.

5. Örnek : Kompleks Özdeğerler :

$$A = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}$$

düzlemsel dönme matrisi ile ilgili, Ax dönüşümü halinde, kendilerine paralel vektörlere dönüşen vektörlerin bulunması şeklindeki özdeğer problemi reel olarak çözülemez. Özdeğer ve özvektör kompleks olur :

$$\lambda_{1,2} = \cos \varphi \pm i \sin \varphi = e^{\pm i\varphi}.$$

$$x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}, x_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} = \overline{x_1}.$$

6. Örnek : İki katlı özdeğer, bir veya iki özdeğer :

Özvektörlerin sayısı bakımından iki katlı bir özdeğerde ortaya çıkan farkların anlamı, bir örnek ile ifade edilecektir. Bunun için iki katlı kök, başlangıçta farklı olan değerlerin, birbirine yaklaştırılması yolu ile bulunacaktır. Bu amaç ile ikisi de aynı bir karakteristik denklem

$$(\lambda - a)^2 = 0,$$

a sahip olan

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix} \text{ ve } B = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}.$$

matrisleri ele alınacaktır. Bunlar

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a + \varepsilon \end{pmatrix} \text{ ve } B = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a + \varepsilon \end{pmatrix}$$

$\varepsilon \rightarrow 0$ limiti ile bulunur. Bunlara, başlangıçta farklı olan $\lambda_1 = a$, $\lambda_2 = a + \varepsilon$ özdeğerleri ait olur. Bu değerler, özdeğer denkleminde yerine konur ise, A halinde

$$\lambda_1 = a, \text{ karakteristik Matris } \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & \varepsilon \end{pmatrix}$$

$$x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 = a + \varepsilon, \text{ karakteristik Matris } \begin{pmatrix} -\varepsilon & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$x_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \varepsilon \end{pmatrix}$$

sıfır olan ε halinde, ilk başlangıçta ayrı olan iki vektör, x_1 vektörü şeklini alır. B halinde

$$\lambda_1 = a, \quad B - \lambda_1 I = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon \end{pmatrix}, \quad x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 = a + \varepsilon, \quad B - \lambda_2 I = \begin{pmatrix} -\varepsilon & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad x_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Burada x_1, x_2 vektörlerine $\varepsilon \rightarrow 0$ limiti uygulanmaz; fakat $\varepsilon = 0$ ise karakteristik matris

$$(A - \lambda_1 I) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

ve böylece x_1, x_2 dışında keyfî c_1, c_2 sayılı

$$x = c_1 x_1 + c_2 x_2 = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

lineer kombinasyonunda özvektör olur. x_1, x_2 nin kapladığı düzlem, öz düzlem olmuştur ve buradaki her vektör, bir özvektördür.

Birinci halde birbirine yaklaşan özdeğerler ile birlikte, özvektörler de birbirine yaklaşır; başlangıçta ayrı olan özdoğrultu bir tek olur. İkinci halde iki özdoğrultuya $\lambda_2 \rightarrow \lambda_1$ limiti etki etmez; ancak sınır geçişi yapıldıktan sonra, başlangıçta tanımlanmış iki özdoğrultunun kapladığı "düzlem", "özdüzlem" olur; ve burada özvektörler keyfî olarak seçilebilir.

13.4. Sol Özvektörler. Ortogonalilik.

$$Ax = \lambda x$$

(1)

özdeğer problemi için

$$\boxed{\mathbf{A}'\mathbf{y} = \lambda\mathbf{y}} \quad (15)$$

transpoze matris problemi vardır; ve bu

$$\boxed{\mathbf{y}'\mathbf{A} = \lambda\mathbf{y}'} \quad (15a)$$

şeklinde yazılabilir. Bu neden ile $\mathbf{A}'$ nü $\mathbf{y}$ özvektörlerine $\mathbf{A}$ nın "sol özvektörleri" adı da verilebilir. İki problemde de,

$$\det(\mathbf{A}' - \lambda \mathbf{I}) = \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})$$

nedeni ile, eşit λ_i özdeğerleri ve bunlar için genellikle farklı $\mathbf{x}_i$ veya $\mathbf{y}_i$ sağ veya sol özvektörleri vardır. Yalnız simetrik matris $\mathbf{A}' = \mathbf{A}$ halinde sağ ve sol vektörler aynı olur.

Şimdi $\lambda_i \neq \lambda_k$ gibi iki farklı özdeğere ait özdeğer denklemleri

$$\mathbf{A}\mathbf{x}_i = \lambda_i \mathbf{x}_i$$

$$\mathbf{y}'_k \mathbf{A} = \lambda_k \mathbf{y}'_k$$

den $\mathbf{y}'_k$ veya $\mathbf{x}_i$ ile çarpılarak ve çıkartılarak

$$\mathbf{y}'_k \mathbf{A}\mathbf{x}_i = \lambda_i \mathbf{y}'_k \mathbf{x}_i$$

$$\mathbf{y}'_k \mathbf{A}\mathbf{x}_i = \lambda_k \mathbf{y}'_k \mathbf{x}_i$$

$$0 = (\lambda_i - \lambda_k) \mathbf{y}'_k \mathbf{x}_i$$

ve buradan, ön görülen $\lambda_i \neq \lambda_k$ nedeni ile

$$\boxed{\mathbf{x}'_i \mathbf{y}_k = 0}, \lambda_i + \lambda_k \text{ için} \quad (16)$$

bulunur.

Teorem 6: Bir $\mathbf{A}$ matrisindeki $\lambda_i \neq \lambda_k$ gibi iki farklı özdeğerin $\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_k$ sağ ve sol özvektörleri birbirine ortogondur.

$\mathbf{A}$ matrisinin tam n adet lineer bağımsız $\mathbf{x}_i$ ve dolayısı ile n adet bağımsız $\mathbf{y}_i$ vektörü var ise, yani $\mathbf{A}$ matrisi köşegen benzeri matrisler sınıfına ait ise, sağ ve sol vektörlerin $\mathbf{X}$ ve $\mathbf{Y}$ modal matrisleri tekil-olmayan matrisler olur. Böylece

$$\boxed{\mathbf{X}'\mathbf{Y} = (\mathbf{x}'_i \mathbf{y}_k) = \mathbf{N}} \quad (17)$$

matrisi de tekil-olmayan matrisdir. Farklı özdeğerler halinde $i \neq k$ elemanları, denklem (16) nedeni ile, sıfıra eşittir. Fakat köşegen elemanları sıfıra eşit olamaz.

$$\boxed{\mathbf{x}'_i \mathbf{y}_i \neq 0}, \quad (18)$$

ve özellikle iki vektör sistemi,

$$\boxed{\mathbf{x}'_i \mathbf{y}_i = 1} \quad (19)$$

olacak şekilde normlaştırılabilir. Ancak, denklem (16) nın geçerli olmadığı çok katlı özdeğerlerin ortaya çıkması halinde köşegen dışında da sıfır olmayan elemanlar bulunur. Bunlar ise, tekil-olmayan $\mathbf{C}$ ve $\mathbf{B}$ matrisleri halinde

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{X}' &= \mathbf{C} \tilde{\mathbf{X}}' \\ \mathbf{Y} &= \tilde{\mathbf{Y}} \mathbf{B} \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

şeklindeki lineer dönüşüm ile sıfır yapılabilir. Bu arada ayrıca (18)deki köşegen elemanları da 1 e normlaştırılabilir. Değiştirilmiş $\mathbf{X}, \mathbf{Y}$ sistemi için,

$$\boxed{\tilde{\mathbf{X}}' \tilde{\mathbf{Y}} = \mathbf{I}}, \quad (21)$$

biortonormal özellikleri öngörünümü bir ise, $\mathbf{N}$ için şu bağıntı bulunur :

$$\mathbf{N} = \mathbf{X}' \mathbf{Y} = \mathbf{C} \tilde{\mathbf{X}}' \tilde{\mathbf{Y}} \mathbf{B} = \mathbf{C} \mathbf{B}.$$

Bu ise tekil-olmayan $\mathbf{N}$ matrisinin alt ve üst üçgen matris $\mathbf{C}$ ve $\mathbf{B}$ ye üçgen şeklinde ayrılması sayılabilir. $\mathbf{C}$ ve $\mathbf{B}$ bu şekilde bulunduktan sonra, özvektörlerin değiştirilmiş $\tilde{\mathbf{X}}, \tilde{\mathbf{Y}}$ sistemleri denklem (20) uyarınca şu şekilde elde edilir : Ayrılmaya esas olan işlem, $\mathbf{N}$ in sağına veya üstüne konulacak olan, verilmiş $\mathbf{X}'$ ve $\mathbf{Y}$ matrislerine uygulanır; bu du-

rum 9.3. de biortonormlaştırma olarak tanımlanmış ve bir örnekle gösterilmiştir. Böylece şu teorem yazılabilir :

Teorem 7 : Köşegen benzeri matris A nın x_i veya y_k sağ ve sol özvektörleri o şekilde seçilebilir ki

$$\boxed{x'_i y_k = \delta_{ik}} \quad (22)$$

veya $X'Y = I$ geçerli olsun. Bu vektörler biortonormal sistem oluştururlar. X', Y nin ve Y', X in invers matrisidir.

Reel simetrik matrisler halinde sağ ve sol vektörler aynı olur. ($A' = A$). Ayrıca gösterileceği gibi, bu matrisler, köşegen benzer matrislerdir ve n adet özvektörden oluşan tam sisteme sahiptirler. Bunlar ise teorem 7 uyarınca ortogonaldır; veya — çok katlı özdeğerler halinde — ortogonalleştirilebilir; bunlar, $x'_i x_i = 1$ normlaştırma özelliğinden anlaşılacağı gibi daima reeldir ve dolayısı ile, başka yoldan gösterileceği gibi, özdeğerlerde reel olmak zorundadır.

Genel, köşegen benzeri olmayan matris halinde, yukarda önemli olan (18) bağıntısının geçerli olmayacağı aşağıdaki örnekte gösterilmiştir.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 4-\lambda & 1 \\ -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 6\lambda + 9 = (\lambda - 3)^2 = 0.$$

Karakteristik matrisi

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

olan iki katlı özdeğer $\lambda_1 = \lambda_2 = 3$ için birer tane özvektör, yani $x_1 = (1, -1)'$ $y_1 = (1, 1)'$ vardır; ve burada $x'_1 y_1 = 0$ dır. Köşegen benzeri olmayan, bu genel matrislerdeki özellikler 19.2. de ayrıntılı olarak ele alınabilir.

13.5. Benzerlik Dönüşümü. İnvariantlar.

Bir kare matris A , bilindiği gibi, lineer dönüşüm $y = \sigma(x)$ in belirli bir koordinat sistemindeki sayısal ifadesi

$$y = Ax \quad (23)$$

kabul edilebilir. Bu koordinat sisteminde x, y geometrik vektörleri, cebirsel vektörler yani, bileşenlerinin sütunları olarak ortaya çıkarlar. Tekil-olmayan koordinat dönüşümü

$$x = T\tilde{x}, \quad y = T\tilde{y} \quad (24)$$

yardımı ile, yeni bir sisteme geçişte, (23) ifadesi, $T\tilde{y} = AT\tilde{x}$ nedeni ile

$$\tilde{y} = B\tilde{x} \quad (25)$$

şeklini alır; burada

$$\boxed{B = T^{-1}AT} \quad (26)$$

dönüşüm matrisidir. Matrislerdeki bu tip bir benzerlik dönüşümünde A matrisinin karakteristik denklemi ve, λ_i özdeğerleri olan kökler sabit kalır. 2.2. de determinant 3 uyarınca

$$\begin{aligned} \det(B - \lambda I) &= \det(T^{-1}AT - \lambda I) = \det[T^{-1}(A - \lambda I)T] \\ &= \det T^{-1} \det T \det(A - \lambda I) = \det(A - \lambda I). \end{aligned}$$

dır. Böylece şu teoremi elde ederiz :

Teorem 8 : Denklem (26) şeklindeki bir benzerlik dönüşümü, bir matrisin karakteristik denklemini ve bunun köklerini, yani özdeğerleri değiştirmez.

Bu duruma göre, karakteristik denklem ve özdeğerler, matris yanında, matris ile gösterilen lineer dönüşümün de karakteristik özellikleridir. A matrisi, lineer dönüşümün, vektör bileşenleri ve matris elemanlarının üzerinde gösterildiği (refere edildiği) koordinat sistemindeki ifadesidir, ve burada denklem (23) deki şekli alır. Karakteristik denklem ve özdeğerler, ayrıca lineer dönüşümü koordinat sisteminde bağımsız, "invariant" özellikleridir; böylece denklem (9a, b) uyarınca matrisin "izi" ve

"determinantı", koordinat dönüşümüne göre invariant büyüklükler olur. Denklem (6) ya, denklem (24) deki dönüşüm uygulanır ise aynı sonuç bulunur. T^{-1} ile çarpılarak

$$T^{-1}AT\tilde{x}_i = B\tilde{x}_i = \lambda_i\tilde{x}_i.$$

elde edilir. x_i "özvektörleri" yeni sisteme ait, yeni bileşenler cinsinden ifade edilmiştir.

Örnek : İzi $s = 5 + 2 = 7$ ve determinantı $A = 6$ olan

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

matrisinin karakteristik denklemi

$$\lambda^2 - 7\lambda + 6 = 0$$

olup karakteristik sayılar $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 6$ dir. Sistemde,

$$T = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 3 \end{pmatrix} \text{ ile } T^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -7 & 5 \end{pmatrix},$$

lineer dönüşümü yapılır ise, A matrisi

$$B = T^{-1}AT = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -7 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -7 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 53 & 22 \\ 19 & 8 \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} 121 & 50 \\ -276 & -114 \end{pmatrix}.$$

şeklini alır. Bunun izi yine $s = 121 - 114 = 7$, determinantı $B = 6$ dir.

Aynı karakteristik

$$p(\lambda) = \det(\lambda I - A) = a_0 + a_1\lambda + \dots + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \lambda^n \quad (27)$$

polinomlu bütün matrislerin oluşturduğu gibi "benzerlik sınıfından", a_k polinom katsayılarını, doğrudan doğruya matris elemanı kabul eden bir matris ortaya çıkar. Bu ise polinoma ait "eşlik (refakat) matrisi" veya "Frobenius matrisi" dir¹:

¹ Georg Frobenius, 1849 — 1917, Berlin, matris teorisinin geliştirilmesine önemli katkılarda bulunmuştur.

$$F = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} \end{pmatrix}, \quad (27)$$

Burada karakteristik determinant $\det(\lambda I - F)$ in son sütuna göre açılımdan (7) polinomu bulunur. Örneğin $n = 4$ için şunu elde ederiz.

$$\det(\lambda I - F) = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & -1 \\ a_0 & a_1 & a_2 & a_3 + \lambda \end{vmatrix} \\ = -a_0 \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ \lambda & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \end{vmatrix} + a_1 \begin{vmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} \\ + (a_3 + \lambda) \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{vmatrix} = a_0 + a_1\lambda + a_2\lambda^2 + a_3\lambda^3 + \lambda^4.$$

Karakteristik denklemin kökleri λ_i olmak üzere özvektörler

$$x'_i = (1, \lambda_i, \lambda_i^2, \dots, \lambda_i^{n-1}), \quad (28)$$

dir. Bu durum $(\lambda_i I - F)x_i = 0$ özdeğer denklemin de yerine konarak bulunur. Yani Frobenius matrisinin, $p(\lambda)$ polinomundaki farklı sıfır noktaları sayısına eşit lineer bağımsız özvektörü vardır.

Eşlik matrisi, örneğin cebirsel denklemlerde kök bulunması için matris hesabı metodlarının nümerik uygulanmasında kullanılabilir.

13.6. Rayleigh - Oranı. Bir Matrisin Değer Aralığı.

Rayleigh oranı hem teorik ve hem de pratik bakımdan eşit öneme sahip bir kavramdır. $x \neq 0$ kompleks de olabilen keyfi bir n sıralı vektörü, x^* , x in eşlenik transpoze vektörü ve A reel veya kompleks a_{ik} elemanlı n -sıralı bir matris ise x vektörü için A matrisi ile bulunan Rayleigh oranı şöyle ifade edilir.

$$R[x] = \frac{x^* A x}{x^* x}. \quad (29)$$

Bunun faydası, vektörün norm karesi olarak reel ve pozitifdir; buna karşılık pay genellikle kompleks bir sayı ve dolayısı ile Rayleigh oranında $R[x] = \rho = \sigma + i\tau$ da kompleks olur.

x_i matrisi bir özvektör ve λ_i buna ait özdeğer ise $Ax_i = \lambda_i x_i$ özdeğer denkleminin x_i^* ile çarpımından

$$x_i^* A x_i = \lambda_i x_i^* x_i$$

ve buradan $x_i^* x_i \neq 0$ nedeni ile, özdeğer için

$$\boxed{\lambda_i = R[x_i]} \quad (30)$$

bulunur.

Teorem 9: A matrisinin, x_i özvektörü ile bulunan Rayleigh oranı, ilgili λ_i özdeğerini verir.

Dönüşmüş matris için, $Z_j^{(1)}$ elemanlarına sahip $Ax_i = z_i$ denklemi yazılır ise, bu özdeğer $x_j^{(1)}$ bileşenlerine sahip x_i özvektörü halinde bileşenlerin oranı

$$\lambda_i = q_j = z_j^{(1)} / x_j^{(1)}$$

olarak elde edilir; burada $x_j^{(1)} \neq 0$ (bütün j için) dir. Şimdi x , özvektör yeri bunun yaklaşımı ise, q_j oranları farklı λ_i nin yaklaşımları olur. x ile bulunan $R[x]$ Rayleigh oranı q_j lerin belirli bir ortalamasını gösterir ve λ_i nin yaklaşımı sayılır. İlerde yine ele alınacak belirli şartlar altında bu durumun — özvektör için kaba ilk yaklaşım x halinde bile — dikkate değer iyi bir yaklaşım olduğu görülecektir. Rayleigh oranının büyük pratik anlamı buna dayanır.

Rayleigh - oranı ve bunun özdeğer ile olan bağıntısı yardımı ile matrislerin özel halleri için önemli ifadeler elde edilir. A hermitsel özellikle reel-simetrik $A = A^*$ ise, $x^* A x$ payı bir hermitsel şekil alır; bunun kompleks x vektörü halinde bile daima reel olduğu 11.4. de gösterilmiş idi. Yarı hermitsel matris $A = -A^*$ halinde, pay tamamen sanaldır.

Teorem 10: Hermitsel (reel simetrik) bir matrisin özdeğerleri reel, yarı hermitsel matrislerinkiler ise tamamen sanaldır. Pozitif definit veya yarı definit hermitsel bir matrisin özdeğerleri de pozitifdir veya definit değildir.

Hermitsel matrislerin diğer önemli özellikleri 15 de ayrıntılı olarak incelenecektir.

(29) tanımında, oran bulunmasında ortadan kalkan x 'e ait çarpan önemli olmadığı için, $x, x^* x = 1$, şeklinde normlaştırılabilir. Bu durumda Rayleigh oranı

$$R[x] = x^* A x \quad x^* x = 1, \quad (29a)$$

şeklini alır. Şimdi $x, x^* x = 1$ şeklinde normlaştırılmış, n-boyutlu, kompleks vektörler bölgesinden alınır ise,

$$R[x] = \rho = \sigma + i\tau$$

sayısı kompleks düzlemde belirli, A matrisine ait bir bölgeyi yani "matrisin değer aralığını" kaplar; bunu [A] şeklinde göstereceğiz, Şekil 13.2. Aşağıda görüleceği gibi bu aralık sınırlıdır. İlk önce

$$|R| = |x^* A x| = |\sum a_{ik} \bar{x}_i x_k| \leq \sum |a_{ik}| |x_i| |x_k|.$$

$$a = \max_{i,k} |a_{ik}|. \quad (31)$$

olduğu açıktır. Böylece

$$|R| \leq a \sum_i |x_i| |x_k| = a \sum_i (|x_i| \sum_k |x_k|).$$

bulunur. Şimdi Cauchy - Schwarz eşitliğinden (2.4. e bak) $e' = (1, 1, \dots, 1)$ vektörü ve $\widehat{x} = (|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|)$ şiddet vektörü yardımı ile

$$|e' \widehat{x}| = \sum |x_i| \leq |e| |\widehat{x}| = \sqrt{n} |x|.$$

ve $|x| = 1$ nedeni ile

$$\sum |x_i| \leq \sqrt{n}.$$

bulunur. Böylece $|R|$ için

$$\boxed{|R| \leq n a} \quad (32)$$

bulunur. Bir matrisin değer aralığı n a yarıçaplı bir dairenin içindedir. Burada matris elemanlarının maksimum değeridir. Dairenin çevresindeki noktalar değer aralığına ait olabilir.

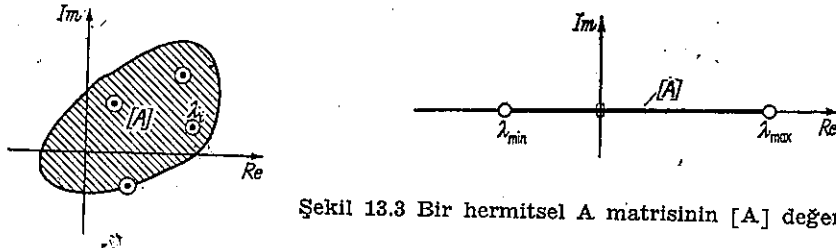
$R[x]$, matrisin özvektörleri için ilgili özdeğerleri aldığından, $R[x_i] = \lambda_i$, bunlar sayı düzleminin noktaları olarak [A] değer aralığının

içersinde veya kenarında bulunabilirler. Şekil 13.2. Böylece (32) yardımı ile bunlar için

$$|\lambda| \leq n a \quad (33)$$

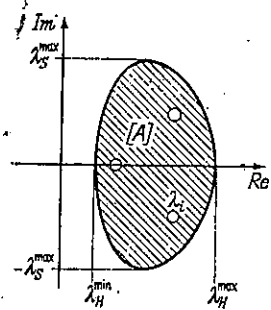
bulunur. Bu durumda, oldukça kaba bile olsa, kompleks sayı düzleminde bir matrisin özdeğerleri konumuna ait basit, kullanılabilir bir ifade elde edilmiş olur.

Hermitsel matris halinde değer aralığı reel eksenin bir parçasıdır, Şekil 13.3. Bu ilerde



Şekil 13.3 Bir hermitsel A matrisinin [A] değer aralığı.

Şekil 13.2 Bir kompleks A matrisinin [A] değer aralığı.



Şekil 13.4 Bir reel A matrisinin [A] değer aralığı.

gösterileceği gibi, maximum minimum özdeğer ile sınırlanır. Rayleigh oranı ilgili özvektörler için ekstrem özellik gösterir. Yarı hermitsel matris A halinde $\lambda_i A$ hermitsel, $i R[x]$ reel yani $R[x]$ tam sanaldır. Buna göre değer aralığı sanal eksene yayılır ve yine ekstrem iki özdeğer ile sınırlanır.

Genel reel matris $A = \bar{A}$ için kompleks λ özdeğerleri ikiye ikiye eşlenik olur; yani değer aralığında reel eksene göre simetriktir Şekil 13.4. Zira

$$\varphi_1 = R[x] = x^* A x$$

$$\varphi_2 = R[x] x' A \bar{x} = x' \bar{A} \bar{x} = \bar{\varphi}_1$$

dır. Yani aralığın her φ sayısı için, bunun eşleniği olan $\bar{\varphi}$ sayısı daima vardır.

13.7. Matris Kuvvetleri. Matris Çarpımları.

Tam sayı m halinde A^m matris kuvvetinin özdeğerleri ve özvektörleri ile A matrisinin karakteristik λ , sayıları ve x_i özvektörleri arasında basit bir bağıntı vardır; yani

Teorem 11 : A matrisinin λ_i özdeğerli, matris kuvveti A^m için, pozitif veya (tekil-olmayan A matrisi halinde) negatif tam sayı m için

$$x_i = \lambda_i^m \quad (34)$$

özdeğerleri vardır. A matrisinin özvektörleri, aynı zamanda A^m in de özvektörleridir.

λ_i^m sayılarının, sabit x_i özvektörleri halinde, A^m nin özdeğerleri oldukları kolayca gösterilebilir.

$$A x_i = \lambda_i x_i$$

nin A ile çarpılmasından

$$A^2 x_i = \lambda_i A x_i = \lambda_i^2 x_i$$

$$A^3 x_i = \lambda_i A^2 x_i = \lambda_i^3 x_i$$

$$\dots \dots \dots$$

çıkar. Aynı şekilde A^{-1} ile çarpılarak ve λ_i ise bölünerek

$$A^{-1} x_i = \frac{1}{\lambda_i} x_i$$

$$A^{-2} x_i = \frac{1}{\lambda_i} A^{-1} x_i = \frac{1}{\lambda_i^2} x_i$$

$$\dots \dots \dots$$

bulunur. A^m matrisinde tam λ_i^m adet özdeğerin bulunması ve başkasının olmaması, genel olarak 20.1. de verilen daha geniş kapsamlı bir ispatı gerektirir. A'nın özvektörleri A^m nin de özvektörleridir. Buna karşılık A^m nin her özvektörü daima A'nın özvektörü olmak zorunda değildir. Örneğin $\lambda = 0$, A'nın çok katlı bir karakteristik sayısı ise ilerde görüleceği gibi (bak : 19.3.) A^m kuvvetinin rank düşmesi A ya oranla daha büyük olabilir ve böylece A^m de, A ya oranla, $\lambda = 0$ için daha fazla sayıda lineer bağımsız özvektör vardır. Bu tip diğer bir örnek, $A^m = I$ halinde, $2\pi/m$ açısı kadar düzlemsel dönme matrisidir.

Örnek : $A = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ nin özdeğerleri $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 6$ dir. İnvers

matris $A^{-1} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$ nin özdeğerleri $x_1 = 1, x_2 = \frac{1}{6}$ dir.

Aynı durum matris kuvvetleri için söylenebilir :

Teorem 12 : A matrisinin özdeğerleri λ_i ise, matris polinomu

$$B = P(A) = a_0 I + a_1 A + \dots + a_m A^m \quad (35)$$

in özdeğerleri

$$x_i = P(\lambda_i) = a_0 + a_1 \lambda_i + \dots + a_m \lambda_i^m \quad (36)$$

dir. A matrisinin x_i özvektörleri, $B = P(A)$ matrisinin de özvektörüdür. A, B kare matrislerinin AB ve BA matris çarpımlarının özdeğerleri ve özvektörleri için de basit bağıntılar vardır. λ , AB çarpım matrisinin bir özdeğeri ve x ilgili bir özvektör olsun :

$$\boxed{A B x = \lambda x} \quad (37a)$$

B ile soldan çarpımdan

$$B A (B x) = \lambda (B x).$$

bulunur. Şimdi $B x = y \neq 0$ ise,

$$\boxed{B A y = \lambda y} \quad (37b)$$

çıkar. Yani $B x = y$ vektörü, eşit λ özdeğeri halinde, BA'nın özvektörüdür. Denklem (37 b) nin A ile soldan çarpımı halinde ise

$$A B (A y) = \lambda (A y)$$

çıkar, yani $A y \neq 0$ halinde, $A y \neq x$, AB'nin özvektörüdür. Eğer $x = 0$ vektörü için $B x = 0$ ise, B ve dolayısı ile AB ve BA tekildir ve iki çarpımın bir $\lambda = 0$ özdeğeri vardır ve $A B x = A \cdot 0 = 0$ nedeni ile x, AB ye ait özvektördür. Aynı durum, $A y = 0$ halinde, y özvektörü için de geçerlidir.

Teorem 13 : A, B kare matrislerinin AB ve BA çarpım matrisleri $\lambda \neq 0$ için

$$\boxed{A y = x} \quad \text{sayet } A y \neq 0 \text{ ise} \quad (38a)$$

$$\boxed{B x = y} \quad \text{sayet } B x \neq 0 \text{ ise} \quad (38b)$$

şeklinde birbirine bağlı, genellikle farklı x ve y özvektörleri halinde aynı λ özdeğerlerine sahiptir.

Burada lineer bağımsız x ve y vektörlerinin aynı sayıda olması gerekmez, zira çok katlı λ halinde, $AB - \lambda I$ ve $BA - \lambda I$ karakteristik matrislerinin rankı farklı olabilir. — A, B tek matrislerinin λ_A ve λ_B özdeğerleri ile AB çarpım matrisinin λ_{AB} değeri arasında, genel halde, basit bir bağıntı yoktur.

A ve B kare değil ise ve iki yönde zincirlenebiliyor ise, teorem 13. aşağıdaki şekle dönüştürülür :

Teorem 14 : A bir mn-matrisi, B bir nm-matrisi ve $m < n$ ise, rn-matrisi BA, nm-matrisi AB ile aynı λ_i özdeğerlerine ve ayrıca $(n-m)$ -katlı $\lambda_0 = 0$ özdeğerine sahiptir. $\lambda_0 = 0$ a ait y_0 özvektörleri, arasında denklem (38 a,b) uyarınca, sol taraflar sıfır olmadıkça, bağıntı vardır.

Örnek :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A B = \begin{pmatrix} 9 & 5 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \lambda^2 - 8\lambda - 9 = (\lambda - 9)(\lambda + 1) = 0$$

$$\lambda_1 = 9: x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad y_1 = B x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 = -1: x_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad y_2 = B x_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$A y_0 = 0 \text{ dan } y_0 = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ bulunur.}$$

$$B A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 7 & 6 & -1 \\ -4 & -4 & 1 \end{pmatrix}, \quad \lambda^3 - 8\lambda^2 - 9\lambda = \lambda(\lambda - 9)(\lambda + 1) = 0$$

$$\lambda_0 = 0, \lambda_1 = 9, \lambda_2 = -1.$$

Özvektörler : y_0, y_1, y_2 .

13.8. Genel Özdeğer Problemi.

Özellikle titreşim tekniğindeki uygulamalarda (bak : 12.3.) uyarınca diferansiyel denklemlerin lineer özdeğerlerinin yaklaşık şekilde incelenmesinde şimdiye kadar kullanılan "özel özdeğer problemi" yanında bir genelleştirme ortaya çıkar ki buna "genel özdeğer problemi" adı verilir, yani

$$\boxed{Ax = \lambda Bx} \quad \text{veya} \quad \boxed{(A - \lambda B)x = 0} \quad (39)$$

burada n -sıralı A, B kare matrisleri ve, $B = I$ özel hali olarak (1) denklemindeki problem vardır. Ayrıca A, B matris çiftinin özdeğer problemi bahis konusudur. Triviyal olmayan x çözümlerinin varlığı koşulu olarak burada genelleştirilmiş karakteristik denklem

$$\boxed{\det(A - \lambda B) = 0} \quad (40)$$

ayrıntılı olarak

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda b_{11} & \dots & a_{1n} - \lambda b_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} - \lambda b_{n1} & \dots & a_{nn} - \lambda b_{nn} \end{vmatrix} = 0 \quad (40')$$

vardır. Bu ise, $\lambda = 0$ veya $\lambda = \infty$ halinde denklem (40) dan anlaşılacağı gibi, mutlak terimi $\det A = A$ ve λ^n in katsayısı $\det B = B$ olan, λ cinsinden bir cebirsel denklemdir. Eğer B "tekil-olmayan" matris yani $B \neq 0$ ise bu, λ cinsinden n -inci dereceden bir denklemdir. Bu halde genel problem, B^{-1} soldan çarpım ile özel probleme irca edilebilir.

$$B^{-1}Ax = Cx = \lambda x. \quad (41)$$

Bu durum $C = B^{-1}A$ matrisinin adi özdeğer problemi ve karakteristik denklem (40) ın veya C matrisinin buna eşdeğer adi karakteristik denklemi $\det(C - \lambda I) = 0$ ın tam n adet λ_i kökü vardır.

Buna karşılık B tekil ise karakteristik denklemde en büyük kuvveti λ^n ve daha küçük kuvvetleri yoktur. Denklem artık n -inci dereceden değildir ve n -adet özdeğer yoktur. Hatta determinant sabit A terimine indirgenebilir ve hiç kökü olmayabilir. Böylece tekil B matrisi

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$$

matris probleminin hiç çözümü yoktur, zira karakteristik determinant

$$\det(A - \lambda B) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda - 4 - 3\lambda & \\ 4 - 2\lambda - 2 - 6\lambda & \end{vmatrix} = 14$$

için, sıfırdan farklı bir sabit bulunur. Ayrıca A da tekil ise, determinant sıfıra özdeğer olabilir ki böylece her keyfi — reel veya kompleks — sayısı, A, B çiftinin özdeğeri sayılabilir. Teorik incelenmesi başka bilgileri gerektiren bu son "tekil hal" burada tamamen ihmal edilecektir.

B tekil, A tekil olmayan ise, $\mu = 1/\lambda$ yardımı ile

$$(\mu A - B)x = 0 \quad (42)$$

a geçilebilir. Burada karakteristik denklem, yine μ cinsinden n -inci derecedendir, fakat (p -katlı) $\mu = 0$ köküne sahiptir. Bu durumda (40) denklemini μ cinsinden, ($n-p$) ninci derecedendir (yani p -katlı $\lambda = \infty$ değeri ortaya çıkar). Yukardaki örnek için λ cinsinden, $\mu_1 = \mu_2 = 0$ iki katlı köküne sahip şu karakteristik denklem vardır :

$$\det(\mu A - B) = 14\mu^2 = 0$$

Denklem (42) ye geçiş imkanı nedeni ile, denklem (39) da parametresinin yanındaki B matrisi lineer olmayan öngörülebilir.

13.9. Kompleks Matrislerde Özdeğer Hesabı.

Bir "kompleks matrisin" in özdeğerleri ve özvektörlerinin hesabı, kompleks denklem sistemlerinde olduğu gibi (bakınız : 4.3.), tam yoldan yapılabilir.

$$\begin{aligned} A &= B + iC \\ x &= u + i v \end{aligned} \quad (43)$$

ile

$$\boxed{Ax = \lambda x} \quad (44)$$

den, reel ve sanal kısımlara ayrılmak sureti ile,

$$\begin{cases} \mathbf{B}\mathbf{u} - \mathbf{C}\mathbf{v} = \lambda \mathbf{u}, \\ \mathbf{C}\mathbf{u} + \mathbf{B}\mathbf{v} = \lambda \mathbf{v}, \end{cases} \quad (45)$$

denklemleri bulunur ve bunlar

$$\begin{pmatrix} \mathbf{B}-\mathbf{C} & \mathbf{C} \\ \mathbf{C} & \mathbf{B} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \end{pmatrix}$$

matris denklemleri ile özetlenebilir. Reel matrisler

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} \mathbf{B}-\mathbf{C} & \mathbf{C} \\ \mathbf{C} & \mathbf{B} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{z} = \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \end{pmatrix} \quad (46)$$

yardımı ile n-sıralı kompleks özdeğer problemi (39) yerine, 2n-sıralı reel Ersatz problemi"

$$\boxed{\mathbf{K}\mathbf{z} = \lambda \mathbf{z}}, \quad (47)$$

geçer; burada hemen anlaşılacak nedenler ile λ parametresi yerine λ konulmuştur. $\mathbf{K}$ Ersatz matrisinin karakteristik polinomu $q(\lambda)$, 2n dereceden polinom olarak, 2n adet köke sahiptir; bunlar, kompleks olmaları halinde, ikiser ikiser eşleniktir ve, görüleceği gibi, reel hâlde de ikiser ikiser yani iki katlı kök olarak ortaya çıkarlar. Bu neden ile bunlar

$$\begin{cases} \lambda_{j1} = \alpha_j + i\gamma_j \\ \lambda_{j2} = \alpha_j - i\gamma_j \end{cases} \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (48)$$

şeklinde yazılabilir. Bu kökler basit şekilde, kompleks matris $\mathbf{A}$ nın oranı λ_i özdeğerlerine bağlıdır, yani

$$\begin{cases} \lambda_i = \alpha_i + i\beta_i \\ \beta_i = +\gamma_i \text{ veya } -\gamma_i \text{ olarak} \end{cases} \quad (49)$$

zira verilen problem (44) dışında, eşlenik problem

$$\overline{\mathbf{A}} \overline{\mathbf{x}} = \overline{\lambda} \overline{\mathbf{x}} \quad (44a)$$

de, reel — ve sanal kısma ayrılmak yolu ile, aynı reel ersatz problem (47) yi verir, burada $\lambda = \overline{\lambda}$ dir. Ersatz probleminin λ_i kökleri, problem

(44) ün λ_i özdeğerleri yanında, eşlenik λ_i değerlerini de verirler.

Ersatz matris $\mathbf{K}$ nın 2n adet özdeğeri bulunduğundan sonra $\mathbf{A}$ nın λ_i özdeğerleri, β_i sanal kısımlarının işareti dışında, bellidir. Bu işaret, aşağıdaki determinant koşulundan bulunur :

$$\Delta(\alpha, \beta) = \det \begin{pmatrix} \mathbf{B} - \alpha \mathbf{I} & -\mathbf{C} + \beta \mathbf{I} \\ \mathbf{C} - \beta \mathbf{I} & \mathbf{B} - \alpha \mathbf{I} \end{pmatrix} = 0. \quad (50)$$

Bu (43) ve (49) denklemleri, (44) de yerine konularak ve ayırma işlemi yapılarak elde edilir ki bundan şu iki denklem çıkar :

$$\begin{cases} \mathbf{B}\mathbf{u} - \mathbf{C}\mathbf{v} = \alpha \mathbf{u} - \beta \mathbf{v} \\ \mathbf{C}\mathbf{u} + \mathbf{B}\mathbf{v} = \beta \mathbf{u} + \alpha \mathbf{v} \end{cases} \quad (51)$$

α, γ nın verilmesi halinde, mümkün $\beta = \pm \gamma$ değerlerinden hangisi için determinantın sıfır olduğu başka bir deyişle hangi değer için, denklem (50) deki matrisin tekil olduğu incelenir. Tekil halde bunun rank düşmesi en aşağı 2 dir, zira (51) sistemine karşılık gelen özvektör $\mathbf{x} = \mathbf{u} + i\mathbf{v}$, kompleks sabit dışında serbesttir ve böylece $\mathbf{z}$ nin en aşağı "iki" sabiti serbest seçilebilir.

Burada verilen metod reel matris $\mathbf{A}$, fakat kompleks λ_j özdeğerleri ve dolayısı ile kompleks $\mathbf{x}_j$ özvektörleri halinde de uygulanabilir. Bu durumda $\mathbf{B} = \mathbf{A}$ ve $\mathbf{C} = 0$ olur.

$\mathbf{A}$ "hermitsel", $\mathbf{B}' = \mathbf{B}$, $\mathbf{C}' = -\mathbf{C}$ ise $\mathbf{K}$ "reel simetrik ve bütün $\mathbf{x}_j$ kökleri reel ve en aşağı iki katlıdır. Böylece, çok basit şekilde anlaşılacağı gibi, λ_j ler de reel olur.

Örnek :

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2+i & 1+2i \\ 4 & -2+5i \end{pmatrix}, \quad \mathbf{K} = \begin{pmatrix} 2 & 1-1-2 \\ 4-2 & 0-6 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 4-2 \end{pmatrix}$$

Karakteristik denklemin, örneğin Krylov'a göre (bak : 14.2.) bulunur :

$$x^4 + 10x^2 + 169 = 0$$

$$x^2 = -5 \pm 12i$$

$$x = \pm (2 \pm 3i).$$

$\Delta(\alpha, \beta)$ determinanı burada

$$\lambda_1 = 2 + 3i, \quad \lambda_2 = -2 + 3i,$$

değerleri için sıfır olur, buna karşılık x in diğer iki değeri için sıfır değildir. Satırların değiştirilmesi sureti ile zincirleme algoritma ile özvektörlerin bulunması :

$\lambda_1 = 2 + 3i$	$\lambda_2 = -2 + 3i$
$\begin{array}{cccc} 2 & 1 & 6 & -7 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 4 & -4 & 0 & -2 \\ -2 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & -4 \end{array}$	$\begin{array}{cccc} 6 & 5 & 10 & -3 \\ 4 & 1 & 2 & -2 \\ 4 & 0 & 0 & -2 \\ -2 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 0 \end{array}$
$\begin{array}{ccc cc} 0 & 1 & 2 & -2 & \\ 4 & -4 & 0 & -2 & \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 & \\ 0 & -2 & 0 & 0 & \\ -1/2 & -3 & 0 & 0 & \\ \hline z_1: & -2 & -2 & 1 & 0 & 0 \end{array}$	$\begin{array}{ccc cc} 4 & 1 & 2 & -2 & \\ -1 & -1 & -2 & 0 & \\ 1/2 & 5/2 & 0 & 0 & \\ 0 & 2 & 0 & 0 & \\ -3/2 & 7/2 & 0 & 0 & \\ \hline z_2: & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{array}$
$x_1 = \begin{pmatrix} 2-i \\ 2 \end{pmatrix}$	$x_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2i \end{pmatrix}$

Bileşenlerden biri tam reel veya sanal seçilebilir.

14. Köşegen Benzeri Matrisler.

14.1. Özksenler Sistemi. Köşegen Şekle Dönüşüm.

n -sınırlı A matrisinde tam n adet lineer bağımsız x_i özvektörüne yani her p_σ katlı λ_σ özdeğeri için karakteristik matris $A - \lambda_\sigma I$ nin tam rank düşmesi

$$\boxed{d_\sigma = p_\sigma} \quad \sigma = 1, 2, \dots, s \quad (1)$$

ye sahip olması halinde özdeğer probleminin hem teorik ve hemde pratik incelenmesi önemli ölçüde sadeleşir, burada yine "farklı" λ_σ özdeğerlerinin sayısıdır. Bu tip matrisler, uygulamalar için de özellikle önemli bir sınıf oluştururlar ki buna, kolayca anlaşılacak nedenler ile, "köşegen benzeri matrisler" sınıfı adı verilecektir.

n adet lineer bağımsız özvektör tüm R_n uzayını kaplarlar. Her tek katlı özvektör için belirli bir "özdoğrultu", her çok katlı özvektör için ise, her vektörün özvektör olduğu ve p adet lineer bağımsız vektörün keyfi seçilebileceği bir p_σ -boyutlu özuzay vardır. Yani matris için adı geçen sınıfa ait olmak üzere, $x_1, x_2, \dots, x_n$ gibi n adet lineer bağımsız özvektörden oluşan ve sistem şeklinde tekil olmayan "özvektör matrisi" ("modal matris")

$$X = (x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (2)$$

ile özetlenebilen bir sistem vardır. Ayrıca vektörler

$$x_i^* x_i = 1 \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (3)$$

şeklinde normlaştırılmış sayılabilir ve böylece bazı bağıntılar sadeleşir. Bu n özvektörden oluşan sistem, A matrisine has genellikle dar açılı bir eksen sistemi yani "özeksenler sistemi" olarak kabul edilebilir ve, bu sistem mükemmel bir koordinat sistemi şeklinde esas alınması halinde, bütün bağıntıların özellikle basit şekilde ortaya çıkması beklenebilir. Bu durum gerçekten vardır.

$$A x_i = \lambda_i x_i \quad (4)$$

özdeğer denklemlerinden

$$A X = (A x_1, A x_2, \dots, A x_n) = (\lambda_1 x_1, \dots, \lambda_n x_n)$$

elde edilir. Burada son parantez modal matris X ile, özdeğerlerin

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}, \quad (5)$$

köşegen matrisinin matris çarpımı kabul edilebilir, böylece

$$\boxed{AX = X\Lambda}$$

(6)

bağıntısı bulunur; bu ise (4) özdeğer denklemlerinin özeti sayılacaktır. Tekil olmayan X nedeni ile, X^{-1} ile soldan çarpım yapılarak,

$$\boxed{X^{-1}AX = \Lambda}$$

(7)

yani özekslenler sistemine bir benzerlik dönüşümü elde edilir.

Teorem 1 : n adet lineer bağımsız x_i özvektörüne sahip her matris, x_i vektörlerinden oluşan özekslenler sistemine geçiş esnasında, özdeğerlerinin $\Lambda = \text{Diag}(\lambda_i)$ köşegen matrisine dönüşür.

Buna karşılık A , benzerlik dönüşümü ile,

$$T^{-1}AT = D = \text{Diag}(d_i),$$

köşegen şekline sokulur ise, $AT = TD$ veya $At_i = d_i t_i$ ($i = 1, 2 \dots n$) bulunur. Böylece T dönüşüm matrisinin t_i sütunları $\lambda_i = d_i$ özdeğerlerine sahip matrisin n adet lineer bağımsız özvektörü olurlar. Yalnız n adet bağımsız özvektörlü matrisler, benzerlik dönüşümü ile, köşegen şekline sokulabilen matrislerdir. Dolayısı ile bu matrisler sınıfına "köşegen benzeri matrisler" denir.

A matrisi ile bulunan lineer dönüşüm

$$Ax = y \quad (8)$$

$$x = X\tilde{x}, y = X\tilde{y}$$

de uzayın basit

$$\boxed{A\tilde{x} = \tilde{y}}$$

(9)

şeklini alır yani bileşenler cinsinden

$$\left. \begin{aligned} \tilde{y}_1 &= \lambda_1 \tilde{x}_1 \\ \tilde{y}_2 &= \lambda_2 \tilde{x}_2 \\ &\dots \\ \tilde{y}_n &= \lambda_n \tilde{x}_n \end{aligned} \right\} \quad (9')$$

(9')

Bunlar hiçolmazsa reel λ_i özdeğerleri halinde, özdoğrultularda λ_i uzama ölçekli "uzamalar" sayılabilir.

14.2. Açınım Teoremi. Krylov Metodu.

Aşağıda basitlik için reel kabul edilecek olan n -sıralı, köşegen benzeri A matrisinin n adet (reel veya kompleks) bağımsız x_i özvektöründen oluşan sistem, görmüş olduğumuz gibi, matrise has ve mükemmel ve, birçok incelemeler için faydalı bir koordinat sistemidir. z , keyfi reel bir vektör olsun ve özvektörler sisteminde gösterilen veya, özvektörlere göre açınım :

$$\boxed{z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n} \quad (10)$$

Bu " c_i açınım katsayıları" yani vektörün, özvektörler sistemine göre olan koordinatları (bunlar ayrıca, reel x_i vektörleri halinde reeldir), homogen olmayan denklem sistemi sayılacak (10) bağıntısının çözümleridir, bunlar kısaca

$$Xc = z \quad (10a)$$

şeklinde yazılabilir; burada $c = (c_1, c_2, \dots, c_n)'$, tekil olmayan X matrisinin vektörü ve ikinci taraftır. Açık olarak c_i ler A matrisinin, x ler ile biortonormlaştırılmış kabul edilebilecek y_i sol vektörleri yardımı ile elde edilirler :

$$y'_i x_k = \delta_{ik}.$$

Denklem (20) ile y_i nin soldan çarpımı

$$\boxed{c_i = y'_i z} \quad (11)$$

verir ki bu, $X^{-1} = Y$ olmak üzere, $C = X^{-1}z$ şeklinde (10 a) denkleminin çözümünden başka bir şey değildir.

Teorem 2 : Açınım teoremi. Keyfi reel 2 vektörü, reel köşegen benzeri A matrisinin x_i özvektörlerine, denklem (11) deki açınım katsayıları ile,

çıkar. $(n-1)$ inci polinom olarak $g(\lambda)$ da yalnız $(n-1)$ sıfır noktası olduğundan ikinci kabul uyarınca $g(\lambda)$ sıfıra özdeş ve tüm γ_i sabitleri sıfır olur yani z_0 'dan, $z_n - 1$ 'e kadar n adet vektör lineer bağımsızdır.

Teorem 4: A matrisinin özdeğerlerinin tümü farklı ise ve z_0 başlangıç vektörü matris n adet özvektörlerinin tümüne katılmış, yani $c_i \neq 0$ ($i = 1, 2 \dots n$) ise, denklem (15) deki z matrisi tekil olmayan matrisdir ve

$$[Za + z_n = 0] \quad (17)$$

denklem sistemi $a = (a_0, \dots, a_{n-1})'$ ne çözülebilir ve $p(\lambda)$ karakteristik polinomunun a_i sayılarını verir.

Böylece — önce iki kabüle göre yeterli genellikte başlangıç vektörü z_0 ve hepsi farklı özdeğerler halinde — matrisin $p(\lambda)$ karakteristik polinomunun bulunması için çok basit bir metod bulunmuştur. Daha büyük sıra sayısı n halinde $p(\lambda)$ nın, karakteristik determinant $\det(\lambda I - A)$ dan hesabı oldukça güçtür. Matrisin tüm özvektörlerine sahip keyfi başlangıç vektörü z_0 yardımı ile, z_1 den z_n 'e kadar, itere edilmiş vektörleri bulunur. Bunların bileşenleri, a_i çözümleri karakteristik polinomun katsayıları olan, homogen olmayan bir denklem sisteminin katsayılarıdır (Krylov metodu).

Şimdi, teorem (4) deki hipotezlerin sağlanması halinde ne olacağını araştıralım. İlk önce ikinci teoremin farklı özdeğerler kabulünü atalım fakat A matrisini köşegen benzeri matris sayalım,

$$\sum p_i = n, \text{ çok katlı } p_1, p_2, \dots, p_s \\ s \text{ adet özdeğer } (s \leq n) \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s$$

olsun, A matrisi köşegen benzeri matris olan yani, $d_i = p_i$ boyutlu s adet bağımsız x_i özuzayına sahip olsun. Özuzaylardan herbirinde uygun seçilmiş s adet özvektör halinde, keyfi z_0 vektörü yine

$$z_0 = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_s x_s$$

şeklinde gösterilebilir. Böylece, $Ax_i = \lambda_i x_i$ gözönüne alınmak üzere, z_0 ve itere edilmiş z_1 den z_n e kadar vektörler için yukardaki gibi bir şema bulunur, sayfa 194, ancak n yerine her yerde s konulacaktır. Matrisin s adet özdeğerini tek sıfır noktası kabul eden s inci dereceden

$$m(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \dots (\lambda - \lambda_s) \quad (18)$$

polinomu hesaba katalım ve

$$m(\lambda) = b_0 + b_1 \lambda + \dots + b_{s-1} \lambda^{s-1} + \lambda^s \quad (19)$$

olsun. Köşegen benzeri matris A halinde bu, matrisin "minimal polinomu" olup, 14.3. de açıklanabilir. Böylece önceden olduğu gibi,

$$m[z_0] = m(A)z_0 = b_0 z_1 + \dots + b_{s-1} z_{s-1} + z_s$$

yazılır ve $m(\lambda_i) = 0$ nedeni ile yine

$$m[z_0] = c_1 m(\lambda_1) x_1 + c_2 m(\lambda_2) x_2 + \dots + c_s m(\lambda_s) x_s = 0.$$

yine

$$[m[z_0] = 0], \quad (20)$$

edilir; bu, $m(\lambda)$ minimal polinomunun b_i katsayılarına sahip $(s+1)$ adet z_0 dan z_s 'e kadar vektörlerin lineer bağımlılığını gösterir.

Eğer z_0 yine özuzayı katılmış ise yani $i = 1, 2, \dots, n$ için $c_i \neq 0$ ise, yukarda olduğu ilk s adet z_0 dan z_{s-1} e kadar vektörün lineer bağımsızlığı bulunur, buna karşılık z_s , bunlara bağlıdır. Böylece, satır düzgün ns-matrisi

$$Z^* = (z_0, z_1, \dots, z_{s-1}) \quad (15,a)$$

olan

$$[Z^*b + z_s = 0] \quad (17a)$$

sistemi, $b = (b_0, \dots, b_{s-1})$ katsayılarına göre çözülebilir. Krylov - metodunun uygulanmasında, $s < n$ halinde, $(n+1)$ den daha az sayıda itere edilmiş vektör lineer bağımlı olur. Bundan sonrakiler göz önüne alınmak üzere metod, yeterli genellikte seçilmiş z_0 halinde, minimal polinomun katsayılarını verir. İlgili denklem $m(\lambda) = 0$ dan matris tüm özdeğerleri, çok katlılıkları dışında, bulunur.

Ancak z_0 tüm özuzaylar yerine yalnız $q < s$ uzayda var ise, genelliği bozmadan bunların, $c_i \neq 0$, ($i = 1, 2, \dots, q$) halinde ilk q adet olduğu kabul edilebilir.

$$z_0 = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_q x_q$$

Eğer $m(\lambda)$ yerine q . nuncu dereceden

$$q(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \dots (\lambda - \lambda_q) \quad (18a)$$

polinomu kullanılır ise, böylece

$$q[z_0] = 0 \quad (20a)$$

yani $(q + 1)$ adet ilk z_0 dan z_q 'e kadar olan vektörlerin lineer bağımsızlığı bulunur — durum yukardaki gibi olur.

Teorem 5 : A ; s adet farklı $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ ($s \leq n$) özdeğerlerine sahip, köşegen benzeri matris ve z_0 , keyfî bir başlangıç vektörü olsun. $z_v = Az_{v-1}$ yardımı ile z_1, z_2 itere edilmiş vektörleri bulunur.

z_0 , her s özüzayında var ise z_0 dan z_{s-1} e kadar vektörler lineer bağımsız, z_s ise bunlara bağlıdır. Krylov - Metodu, denklem (18) , (19) da ki $m(\lambda)$ minimal polinomunun katsayılarını verir. $s = n$ halinde $m(\lambda) = p(\lambda)$ yani karakteristik polinomdur.

Ancak z_0 , özdeğerleri $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_q$ ($q < s$) özüzayında var ise, z_0, z_{q-1} değişkenleri lineer bağımsız, z_0 ise bunlara bağlı olur. Krylov - Metodu ilgili kısmı polinom $q(\lambda)$ ın katsayılarını verir, denklem (18 a).

A artık köşegen benzeri matris değil ise, minimal polinom $m(\lambda)$ ın, ileride görüleceği gibi, çok katlı sıfır noktaları vardır. Herhalde, yeterli genel başlangıç vektörü için, bu metod en fazla minimal polinomu, yani $m(\lambda) = 0$ ın çözülmesi ile, çok katlılık dışında, matrisin tüm özdeğerlerini verir. — Metodun uygulanmasında z_n den evvel lineer bağımlılık ortaya çıkar ise, ya z_0 yeterli genel değildir ki, bu başka bir başlangıç vektörü seçilerek giderilir; veya — her z_0 da görülmesi halinde — özdeğerlerden en aşağı bir tanesi, minimal polinomun gösterdiği gibi daha fazla çok katlıdır, ve bu $p(\lambda)$ ya oranla düşük derecelidir.

Şimdi λ_i özdeğerleri, karakteristik denklem $p(\lambda) = 0$ veya minimum denklem $m(\lambda) = 0$ gözülerek bulunmuş olsun. Geriye ilgili x_i özvektörlerinin bulunması kahr. Bu işlem,

$$(A - \lambda_i I) x_i = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

homogen denklem sistemlerinin, karışık olan çözümü ile yapılabilir. Aşağıdaki yol önemli ölçüde rahattır. İtere edilmiş z_i vektörlerinde tüm özdeğerler vardır ve burada, bir yok etme işlemi ile λ_i özdeğerine ait x_i vektörünün ayrılması bahis konusudur. Bu maksat ile “indirgenmiş polinom”

$$p_i(\lambda) = p(\lambda) : (\lambda - \lambda_i) = (\lambda - \lambda_1) \dots (\lambda - \lambda_{i-1}) (\lambda - \lambda_{i+1}) \dots (\lambda - \lambda_n)$$

[veya çok katlı kökler halinde $m(\lambda) : (\lambda - \lambda_i)$] yazılır ki bu, en basit olarak, λ_i köklerinin bulunmasında $\lambda = \lambda_i$ ile uygulanan Korner şemasından çıkan c_i katsayıları halinde,

$$p_i(\lambda) = c_0^i + c_1^i \lambda + \dots + c_{n-2}^i \lambda^{n-2} + \lambda^{n-1} \quad (21)$$

şeklinde dir. $p_i(\lambda)$ polinomunun c_i^k katsayıları verilmiş sayılacaktır. Bunlardan

$$p_i[z] = c_0^i z_0 + c_1^i z_1 + \dots + c_{n-2}^i z_{n-2} + z_{n-1} \quad (22)$$

vektör kombinasyonu bulunur ve bu, aranan özvektöre eşittir :

$$p_i[z] = x_i \quad (23)$$

Zira açınımda x_k vektörlerinde $p_i(\lambda_k)$ çarpanları vardır ve bunlar, $i \neq k$ için, sıfır olduğundan

$$p_i[z] = p_i(\lambda_i) c_i x_i = \text{sabit} \cdot x_i$$

yani x_i ye eşit olur, bunun sebebi sabit çarpanın önemli olmasıdır. — çok katlı kök λ_i halinde böylece yalnız ikinci “bir” özvektör elde edilir. İşlem yeni z_0 yapılarak ve ortaya çıkan z_k vektörlerinden denklem (22) deki kombinasyon yazılarak, başka lineer bağımsız özvektörler elde edilir. — Metodu iki basit örnek ile açıklayalım.

1. Örnek :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 1 & -4 & 2 \end{pmatrix}$$

1	-6	6	z_0	z_1	z_2	z_3
2	-3	1	1	1	20	101
-2	1	3	1	2	11	43
1	-4	2	0	-2	-3	11
			0	1	12	47
			1	2	11	43
			0	-2	-3	11
			0	1/2	21/2	105/2
			-14	13	-5	1

karakteristik denklem

$$\lambda^3 - 5\lambda^2 + 13\lambda - 14 = 0$$

$$\lambda = 2$$

1	-5	13	-14
$\lambda = 2$:	-	2	-6
			14
			0

$$p_1(\lambda) = \lambda^3 - 3\lambda + 7$$

$$\lambda_{2,3} = \frac{3}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{19}i$$

2. Örnek :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 2 & 2 & -6 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

			z_0	z_1	z_2	z_3	$\tilde{z}_0$	$\tilde{z}_1$
0	2	-8	1	0	12	48	1	2
-1	2	-3	1	-1	8	20	0	2
2	2	-6	0	2	8	56	1	2
-1	-2	1	0	-1	-4	-28	0	-2
			1	-1	8	20		
			0	2	8	56		
			0	1/2	0	0		
			$m(x)$: -12	-4	1	-		

Burada metod zamansız kesildiğinden iki katlı kök beklenebilir.

Minimum denklem

$$\lambda^2 - 4\lambda - 12 = 0$$

$$\lambda_1 = 6, \lambda_2 = -2$$

$$p_1(\lambda) = \lambda + 2$$

$$p_2(\lambda) = \lambda - 6$$

$$x_1 = z_1 + 2z_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad x_2 = z_1 - 6z_0 = \begin{pmatrix} -7 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad x_3 = z_1 - 6z_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

değiştirilmiş $\tilde{z}_0, \tilde{z}_1$ vektörlerinden oluşan $p_2[\tilde{z}]$, x_2 vektöründen bağımsız yani x_3 vektörünü, $p_1[\tilde{z}]$ ise eski x_1 vektörünü verir. Böylece iki katlı kök $\lambda_2 = -2$ dir.

14.3. Cayley-Hamilton Denklemi ve Minimum Denklem :

Denklem (14) de itere edilmiş vektörler için $z_k = A^k z_0$ konulur ise,

$$(a_0 I + a_1 A + \dots + a_{n-1} A^{n-1} + A^n) z_0 = 0$$

bulunur. z_0 keyfi seçilebileceğinden, parantez ifadesi sıfır olur ise bu geçerlidir. Bu, köşegen benzeri matris için ispatlanan, ancak genel geçerli olan aşağıdaki teoremin konusudur.

Teorem 6 : Cayley-Hamilton Teoremi. Keyfi bir kare matris A , kendi karakteristik denklemini sağlıyor ise yani A nın karakteristik polinomu

$$p(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0, \quad (24)$$

ise, A Cayley-Hamilton denklemini sağlar;

$$p(A) = A^n + a_{n-1} A^{n-1} + \dots + a_1 A + a_0 I = 0. \quad (25)$$

Matris polinomu $p(A)$, sıfır matrise eşittir.

Adi sayılar bölgesinde bir paraleli olmayan bu dikkate değer gerçeğin geniş sonuçları vardır. A^n kuvveti ve A daha yüksek tüm kuvvetle-

ri $A^0 = I$, A^{n-1} kuvvetlerinin lineer kombinasyonu olarak ifade edilebilirler. Buna göre keyfi bir matris polinomu daima, derecesi $\leq n-1$ den bir polinom ile gösterilebilir. Denklem (25) in A^{-1} ile çarpılmasından anlaşılacağı gibi invers matris A^{-1} ve A tekil olmayan matris olmak üzere, her negatif tam sayı kuvvet de böyle ifade edilebilir. Yani matrisin kesirli rasyonel fonksiyonları da en fazla $(n-1)$ inci dereceden bir polinoma indirgenebilirler. İlerde 20 de, bu durumun hatta keyfi matris fonksiyonları için geçerli olacağı gösterilecektir.

Şimdi teorem 6 nın genel yani bileşen benzeri olmayan matrislere de uygulanabileceğini gösterelim. Bu maksat ile, $\det C = p(\lambda)$ olan karakteristik matris,

$$C = C(\lambda) = \lambda I - A \quad (26)$$

için eşlenik matris C_{adj} yazılır, bunun için ise şu genel bağıntı vardır :

$$C \cdot C_{adj} = C_{adj} \cdot C = \det C \cdot I = p(\lambda) I \quad (27)$$

[3.2. denklem (16)]. $\lambda I - A$ nın $(n-1)$ sıralı alt determinantları olarak C_{adj} nin elemanları, kolayca anlaşılacağı gibi, $(n-1)$ inci veya daha küçük dereceden, λ cinsinden polinomlardır ve böylece C_{adj} , λ ya göre $(n-1)$ inci dereceden bir polinom şeklinde yazılabilir :

$$C_{adj} = C_0 + C_1 \lambda + C_2 \lambda^2 + \dots + C_{n-1} \lambda^{n-1}$$

burada C_j , λ den bağımsız matrisleri gösterir. Bunlar ve (24), (26) denklemleri, (27) de yerine konulur ve iki tarafın λ -kuvvetleri karşılaştırılır ise,

$$\begin{array}{rcl} -A C_0 & = a_0 I & \cdot I \\ C_0 - A C_1 & = a_1 I & \cdot A \\ C_1 - A C_2 & = a_2 I & \cdot A^2 \\ \dots & & \dots \\ C_{n-2} - A C_{n-1} & = a_{n-1} I & \cdot A^{n-1} \\ C_{n-1} & = I & \cdot A^n \end{array}$$

elde edilir. Burada 2. inci denklem A , 3. üncü denklem A^2 v.s. ile çarpılır ve hepsi toplanır ise sol taraftaki tüm terimler sıfır matris olurlar. Fakat sağda $p(A)$ matris polinomu ortaya çıktığı için denklem (25) ispat edilmiş olur.

İkinci bir kısa ispat şudur : (24) ve (25) denklemlerinden

$$p(\lambda) I - p(A) = (\lambda^n I - A^n) + a_{n-1}(\lambda^{n-1} I - A^{n-1}) + \dots + a_1(\lambda I - A),$$

yazılır, burada a_0 lı son terim sıfır olmuştur. Şimdi parantezlerin herbiri $\lambda I - A$ ya bölünebilir $(\lambda^n - x^n)$ ifadesi daima $(\lambda - x)$ e bölünebilir, yani

$$p(\lambda) I - p(A) = (\lambda I - A) \cdot M(\lambda)$$

yazılabilir, buradaki $M(\lambda)$ matrisi, λ cinsinden $(n-1)$ inci dereceden olup bizi ilgilendirmez. Diğer taraftan, denklem (26) ve (27) nederi ile $p(\lambda) I$, dolayısı ile $p(A)$ da $\lambda I - A$ ya bölünebilir. Fakat $p(A)$ da λ parametresi olmadığı için $p(A)$ nın sıfır matrise eşit olması gerekir.

Başlangıçta (14) denklemlerinden Cayley-Hamilton denklemi (25) e götüren düşünceler çok katlı λ_σ özdeğerleri halinde denklem (20) ye uygulanabilir, bunun sonucunda köşegen benzeri matris, s. inci dereceden

$$m(A) = 0 \quad (28)$$

polinom denklemini sağlar; burada $m(\lambda)$, denklem (18) uyarınca s adet λ_σ özdeğerlerinin tümüne tek katlı sıfır noktası olarak sahiptir. 11.1. de bunun, matris tarafından gerçekleştirilen en küçük dereceden polinom denklemi olduğu gösterilecektir, bu neden ile $m(\lambda)$ ya matris "minimal polinomu" ve (28) denkleminde "minimum denklemi" adı verilmektedir.

Teorem 7 : Çok katlı özdeğerlere sahip köşegen benzeri matris A , Cayley-Hamilton denklemi $p(A) = 0$ dışında, burada tüm λ_σ özdeğerlerini tek katlı sıfır noktası kabul eden $m(\lambda)$ minimum polinomu (28) minimum denklemini de sağlar.

Yine 18.1. de genel, köşegen benzeri olmayan matris halinde minimal polinomun çok katlı özdeğerlere de sahip olacağı gösterilecektir. Ancak bu her zaman, karakteristik polinom $p(\lambda)$ nın bir bölenidir ve, küçük çok katlılık $\gamma \leq p$ halinde sıfır noktaları olarak tüm özdeğerlere sahiptir. Bu durumda, yeterli genel seçilmiş z_0 için Krylov-metodunun minimal polinomu verdiği gösterilebilir.

Örnek :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -3 \\ 2 & 2 & -6 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

matrisinin minimal polinomu $m(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda - 12$ idi. Buna göre

$$m(A) = A^2 - 4A - 12I = \begin{pmatrix} 8 & 8 & -12 \\ 8 & 20 & -24 \\ -4 & -8 & 16 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & -8 & 12 \\ -8 & -8 & 24 \\ 4 & 8 & -4 \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} 12 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

olur. Bundan invers matris şöyle bulunur :

$$A^{-1} = \frac{1}{12} (A - 4I) = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} -5 & 2 & -3 \\ 2 & -2 & -6 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

14.4. Von Mises İterasyon Metodu.

Özdeğer probleminin nümerik incelenmesine ait direkt metodların-karakteristik denklemin konulması, λ_1 köklerinin bulunması ve ilgili özvektörlerin hesabı-karşısına iteratif metodlar çıkar ki bunlar bir veya birkaç özdeğeri ve ilgili özvektörleri doğrudan doğruya yani karakteristik denklemin yardımı olmadan, iteratif yoldan verirler. Özdeğerlerden yalnız birinci veya birkaçının önemli olması halinde (ana titreşimin veya bazı üst titreşimlerin frekansı) bu metodlar özellikle geniş kapsamlı matrisler için direkt metodlardan üstündür. En meşhur iterasyon metodu v. Mises'in ki * olup çok basittir ve bu neden ile özellikle otomatik hesap tesisleri için uygundur. Metod burada prensip olarak verilecek ve daha sonra (21) de, diğer nümerik metodlara bağlı olarak ayrıntıları ile açıklanacaktır. Keyfi reel başlangıç vektörü z_0 dan, burada reel kabul edilen A matrisi yardımı ile yine "itere edilmiş vektörler" bulunur :

$$z_v = A z_{v-1} = A^v z_0 \quad v = 1, 2, \dots \quad (29)$$

* MISES, R. V., ve H. GEIRINGER ; Z. angew Math. Mech. Bd. 9 (1929), s. 53-77, 152-164.

Bu vektörler, açıklanacak belirli koşullar altında x_1 "döminant özvektörüne" yani, döminant = max. değerli λ_1 özdeğerine ait vektöre yakınsalar, buna karşılık iki ardışık z_v vektörlerinin oranı bu özdeğere yakınsar. Bu neden ile A matrisi köşegen benzeri matris, z_0 başlangıç vektörü ise, n adet bağımsız özvektöre göre açınabilir kabul edilir :

$$z_0 = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n.$$

Bu durumda

$$z_v = \lambda_1^v c_1 x_1 + \lambda_2^v c_2 x_2 + \dots + \lambda_n^v c_n x_n.$$

olur. Şimdi özdeğerler, azala miktara göre sınırlanmış sayılır ise ve 1 döminant

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq \dots \geq |\lambda_n|, \quad (30)$$

ise, artan iterasyon basamağı v halinde

$$z_v \rightarrow \lambda_1^v c_1 x_1 \approx x_1 \quad (31)$$

$$z_{v+1} \rightarrow \lambda_1 z_v \quad (32)$$

veya

$$q_i^{(v)} = z_i^{(v)} / z_i^{(v-1)} \rightarrow \lambda_1. \quad (32a)$$

Ardışık, itere edilmiş iki z_v vektörünün karşılıklı z_i bileşenlerinin q_i oranları, ikili azvektörler bileşeni $x_1 \neq 0$ olmak üzere, λ_1 özdeğerine yakınsarlar. Buradaki hipotez $c_1 \neq 0$ dır, z_0 başlangıç vektöründe dominant özvektör x_1 in bileşeni olmasıdır.

$$|\lambda_1| : |\lambda_2|$$

oranı büyüdükçe yani λ_1 deki çabuk dominant oldukça, yakınsaklık hızlanır. Dominant özvektör λ_1 için çok iyi bir yaklaşık değer Λ_1 , z_v cinsinden Rayleigh-oranı şeklinde elde edilir :

$$\Lambda_1 = R[z_v] = \frac{z_v' A z_v}{z_v' z_v} = \frac{z_v' z_{v+1}}{z_v' z_v}. \quad (33)$$

Bu yaklaşımın karakteri ilerde bahis konusu olacaktır (15.2.).

Örnek :

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & -4 \\ -2 & 2 & 2 \\ -4 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

Toplam kontrolleri dahil hesap :

A	z_0	z_1	z_2	z_3	z_4
5 -2 -4	1	5	45	445	4445
-2 2 2	0	-2	-22	-222	-2222
-4 2 5	0	-4	-44	-444	-4444
-1 2 3	1	-1	-21	-221	-2221

Burada, $\lambda_1 = 10$ a doğru çok iyi yakınsaklık vardır ve $x_1 = (2, -1, -2)$ dir. Bu durum büyük şiddetli birinci özdeğerden anlaşılır : Özdeğerler $\lambda = 10$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$ dir. Rayleigh-oranından şu yaklaşım bulunur :

$$\Delta_1 = R[z_3] = \frac{z'_3 z_4}{z'_3 z_3} = \frac{4444445}{444445} = 9,099989.$$

14.5. Köşegen Benzeri Matrislerin Spektral Parçalanması.

Köşegen benzeri matris A için, iterasyon metodu uyarınca özdeğerlerden biri, örneğin λ_1 , ikincisi sağ ve sol x_1 veya y_1 ile birlikte bulunduktan sonra A dan, oranı n sıra sayılı yeni B matrisi elde edilir ki, bu aynı vektörler halinde, sıfır olan λ_1 değeri dışında A ile aynı λ_1 özdeğerlerine sahiptir. Sağ-ve sol vektörler

$$y'_i x_k = \delta_{ik} \quad (34)$$

şeklinde biortonormlaştırılmış sayılar ise B matrisi, $\lambda_1 x_1 y'_1$ diyodik çarpımının yani rankı 1 olan n -sıralı matrisin çıkarılması ile bulunur :

$$B = A - \lambda_1 x_1 y'_1 \quad (35)$$

Zira bu durumda

$$B x_1 = A x_1 - \lambda_1 x_1 y'_1 x_1 = 0$$

$$B x_i = A x_i - \lambda_1 x_1 y'_1 x_i = \lambda_i x_i \quad (i = 2, 3, \dots, n).$$

elde edilir. Yani $\lambda = 0$ özdeğerinin eklenmesi ile B nin rankı, A ninkine oranla, 1 düşer. Buna göre denklem (35) deki dönüşüm için matrisin, "deflasyonu" ortaya çıkar. $\lambda_1 = 0$ özdeğerleri tesirsiz kalacak şekilde metodun uygulanmasına devam edilir ise, r ranklı bir matrisden, tam r adım sonra, sıfır ranklı bir matris elde edilir, bu ise sıfır matrisdir. Böylece dikkate değer şu bağıntı bulunur :

$$A = \lambda_1 x_1 y'_1 + \lambda_2 x_2 y'_2 + \dots + \lambda_n x_n y'_n \quad (36)$$

Teorem 8 : λ_i özdeğerlerine ve denklem (34) uyarınca biortonormlaştırılmış x_i , y_i sağ-ve sol özvektörlerine sahip r ranklı, n -sıralı köşegen benzeri matris A için, denklem (36) daki "Spektral parçalanma" geçerlidir. Matris, r adet diyodik çarpımdan yani 1 ranklı matrislerden oluşmuş gözükür.

Dominant değer λ_1 iterasyon metodu ile bulunduktan sonra, denklem (35) deki deflasyondan daha yüksek özdeğerlerin yani daha küçük miktarda λ değerlerin nümerik hesaplanmasında faydalanılır. Ayrıntılı bilgi için 21.4 e bakınız.

(36) denklemi, sağ-ve sol vektörlerinin ortonormal bağlantısı (34) yani $Y'X = I$ ile birlikte köşegen şekle dönüşüm (7) den başka şey değildir.

$$A = X \Lambda X^{-1} = X \Lambda Y'$$

ayrıntılı halde bu,

$$A = (x_1 \dots, x_n) \Lambda \begin{pmatrix} y'_1 \\ \vdots \\ y'_n \end{pmatrix} = (\lambda_1 x_1, \dots, \lambda_n x_n) \begin{pmatrix} y'_1 \\ \vdots \\ y'_n \end{pmatrix},$$

olup, buradan doğrudan doğruya denklem (36) çıkar.

15. Simetrik ve Hermitsel Matrisler.

15.1. Özdeğerler ve Özvektörler.

Özdeğer problemi için simetrik matrisler, geometri ve mekanikteki çok sayıda uygulamalar için büyük önemleri yanında özdeğer problemi teorisini özellikle basit ve açık şekle soktuklarından, önemli bir rol oy.

narlar. Dolayısı ile bunlar teorik açısından, özdeğer teorisinin hareket noktasını oluşturlar. Reel, simetrik matrisler için karakteristik özelliklerin bir çoğuna kompleks genelleştirmede yani "hermitsel matrislerde" de rastlanır (4'e özellikle 4.2. ye bakınız); bu neden ile, uygulamaların çoğu reel simetrik yani reel hermitsel matrisler ile sınırlanmış olsa bile, incelemelerin bunlara genişletilmesi maksada uygundur. "simetrik" kavramı bu durumda, hermitsel matrisin bir genelleştirilmiş anlamında kullanılır. Kompleks düşünme şekline pek alışmamış bir okuyucu, bundan ürkmemelidir. Kompleks matrislerin de hesaba katılması ile genel geçerli olan ifadelerle varılır.

Hermitsel ve özellikle reel simetrik matrisler, 13.6. da Rayleigh-oranı ile gösterdiğimiz gibi, tüm özdeğerlerinin reel olması ile belirtilirler ki bu durum-reel matris için bile-tabii değildir. Matris ayrıca pozitif definit ise, özdeğerler pozitifdir; matrisin $r < n$ ranklı ve yarı definit ise, $(n - r)$ katlı $\lambda = 0$ özdeğeri ortaya çıkar.

"Reel" hermitsel yani reel simetrik matris halinde, "özvektörler" de reel olur¹, bu durum reel olmayan, hermitsel matrisde mümkün değildir. Yalnız reel simetrik matrisler ve, reel benzerlik dönüşümü ile bunlara dönüşen reel, simetrikleştirilebilen matrisler (16.1 e bakınız), "istisnasız" reel özdeğerlere ve özvektörlere sahiptir, böylece burada tüm şartlarda sadeleşme olur.

Reel simetrik matrislere ait özvektörler için 13.4. teorem 6 ve 7 den vektörlerin önemli "ortogonallık" veya (çok katlı özdeğerler halinde) "ortogonalleştirme" özelliği çıkar. Buna karşılık gelen genelleştirme, önceden olduğu gibi, hermitsel matrislerde uygulanabilir. Matrisin $\lambda_i \neq \lambda_k$ gibi iki farklı özdeğeri için yazılan ve ikincisi λ_k nın reelliği göz önüne alınarak, eşlenik transpoze şekilde gösterilen

$$A x_k = \lambda_k x_k$$

$$x_i^* A^* = \bar{\lambda}_i^* x_i^* = \lambda_i x_i^*,$$

özdeğer denklemlerinden, x_i^* veya x_k ile çarpılma ve, hermitsel matrisin $A^* = A$ özelliği dikkate alınarak, çıkartma yolu ile,

$$(\lambda_i - \lambda_k) x_i^* x_k = 0$$

¹ daha doğrusu: Bunlar daima reel şekilde gösterilebilir; bunlar, keyfi kompleks çarpan ile çarpım veya kompleks sabitli reel vektörlerin lineer kombinasyonu imkanı dışında reeldir.

ve bundan, $\lambda_i \neq \lambda_k$ nedeni ile,

$$x_i^* x_k = 0, \lambda_i \neq \lambda_k \text{ için} \quad (1)$$

bulunur. Yani özvektörler eşlenik ortogonal veya "uniter" dir. (bak : 4.1.), bu ise reel halde adi ortogonalliğe uygundur.

Teorem 1 : Bir hermitsel (veya reel simetrik) matrisin, iki farklı özdeğere ait özvektörleri birbirine göre **uniter (veya reel ortogonal)** dir.

Hermitsel (reel simetrik) matrislerin önemli köşegen benzeri matrisler sınıfına ait olduğu yani daima n adet lineer bağımsız özvektöre sahip olduğu aşağıda gösterilecektir. Böylece 13.4. deki gibi şu ispat edilebilir : Çok katlı özdeğerler halinde bile özvektörler daima uniterleştirilebilirler (veya reel ortogonalleştirilebilir) yani matrise n adet uniter (reel ortogonal) vektörden olan bir sistem "ana eksenler sistemi" verilir : bu ise şimdi, matrisin yine $\Lambda = \text{Diog}(\lambda_i)$ köşegen matris şeklinde ortaya çıktığı fakat burada — özdeğerlerin reelliği nedeni ile — her halde reel olduğu dik bir eksen takımındır; bu, hermitsel ve, benzerlik dönüşümü ile hermitsel şekle giren simetrikleştirilebilen matrislerin bir ilginç özelliğidir.

15.2. Özdeğerlerin Ekstremal Özellikleri.

Hermitsel (reel simetrik) bir A matrisinin Rayleigh-oranı reelliği yanında, özellikle nümerik bakımdan değerli olan bir diğer dikkate değer özellik ile karakterize olur. Önce hesabın kolayca yapıldığı reel simetrik A matrisini alalım, ve buradan genel, hermitsel matrise geçelim. $R[x]$ 'i, şimdi reel kabul edilen x vektörünün reel fonksiyonu yani n adet $x_1, x_2, \dots, x_n$ değişkeninin fonksiyonu sayalım ve bu fonksiyonun "ekstrem değerleri" ni soralım. Bu p ekstrem değerlerin ortaya çıkma koşulları, bilindiği gibi, $\partial R / \partial x_i = 0$ olup bunlar $\partial R / \partial x = 0$ vektör denklemleri ile gösterilir. Rayleigh - oranı

$$R[x] = \frac{x^* A x}{x^* x}$$

yardımları ile, kuadratik formlar için türev kuralları uyarınca,

$$\frac{\partial R}{\partial \mathbf{x}} = \frac{1}{\mathbf{x}'\mathbf{x}} 2\mathbf{A}\mathbf{x} - \frac{\mathbf{x}'\mathbf{A}\mathbf{x}}{(\mathbf{x}'\mathbf{x})^2} 2\mathbf{x} = \frac{2}{\mathbf{x}'\mathbf{x}} (\mathbf{A}\mathbf{x} - R[\mathbf{x}]\mathbf{x}) = 0 \quad (2)$$

veya

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = R[\mathbf{x}]\mathbf{x} \quad (3)$$

elde edilir. Burada $R[\mathbf{x}]$, yerine λ da yazılabilen reel bir sayıdır, böylece denklem (3) dışdan da reel, simetrik matrisli özdeğer problemi şekline girer. Bunun çözümleri yani λ_i özdeğerleri, Rayleigh-oranının, ilgili $\mathbf{x}_i$ özvektörleri için kabul ettiği, aranan ekstrem değerlerdir.

Teorem 2: Reel, simetrik bir $\mathbf{A}$ matrisinin Rayleigh - oranı, tam $\mathbf{x}_i$ özvektörleri için, matris özdeğerleri alınıp, $R[\mathbf{x}_i] = \lambda_i$ ekstrem değerlerine sahip olur. Özdeğerler, büyüklüklerine göre,

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n, \quad (4)$$

şeklinde sıralanmış sayılır ise, özellikle

$$R[\mathbf{x}_1] = \lambda_1 = \text{Max}, \quad R[\mathbf{x}_n] = \lambda_n = \text{Min}. \quad (5)$$

yazılabilir. Rayleigh-oranının bu ekstrem özelliği sayısal hesap için büyük önem taşır. Yani $\mathbf{x}$, bir özvektör için bir "yaklaşım" ise, buradan bulunan $R[\mathbf{x}]$ oranı, vektör hatasına oranla yüksek mertebeli özdeğer hatası küçük olmak üzere, ilgili özdeğer için iyi bir yaklaşım gösterir. Bunun özellikle 14.4. de verilen iterasyon metodu için sonucu şudur: İşlem, özvektör için nisbeten kaba bir yaklaşımda durdurabilir ve bunun yardımı ile özdeğer için oldukça iyi bir yaklaşım elde edilebilir; bu ise herhalde, tek vektör bileşenlerinin $q_i^{(v)} = z_i^{(v)} / z_i^{(v-1)}$ oranlarının verdiğinden daha iyidir. Burada ayrıca en büyük şiddetli dominant özdeğer bahis konusu ise, ekstrem özelliği nedeni ile, Rayleigh-oranının bu şiddete daima aşağıdan yaklaştığı yani, Bu yoldan Rayleigh-oranı ile bulunan, büyük şiddetli her yaklaşımın otomatik olarak daha iyi olduğu bellidir. Ancak bütün bunlar yalnız reel simetrik matris veya bunun genelleştirilmesi olan hermitsel matris için geçerlidir. Genel simetrik olmayan matris halinde Rayleigh-oranın ne özdeğer için çok iyi bir yaklaşım vermesi gerekmez ne de hata işareti hakkında bir bilgi vardır. 14.4. de verilen sayısal örnek halinde, oldukça kaba yaklaşım $\mathbf{z}$, için Rayleigh-oranı, $\lambda_1 = 10$ değerine göre yalnız % 1,11 hata ile

$$R[\mathbf{z}_1] = \frac{445}{45} = 9,888 \dots$$

şeklinde bulunur, buna karşılık ilgili q_1 oranları kuvvet sapan

$$q_1 = 45/5 = 9, \quad q_2 = 22/2 = 11, \quad q_3 = 44/4 = 12$$

değerlerini alırlar, yani 10 ortalamasına göre % 10 hata gösterirler. 3. ve 4. üncü itere edilmiş vektörden dikkate degecek kadar iyi yaklaşım, 9,999,989 bulunur.

Hata durumu ve aynı zamanda, benzer sonuçlara varmak için simetrik olmayan fakat köşegen benzeri matris halinde oranlarının nasıl genelleştirilmesi hakkında bir fikir itere edilmiş vektörlerin açınabilir olması öngörülen aşağıdaki hesaptan edinilir. v . ninci basamaklı $\mathbf{z}_v$ vektörünü, reel simetrik matrisin $\mathbf{x}_i$ özvektörlerine göre

$$\mathbf{z}_v = \mathbf{x}_1 + c_2 \mathbf{x}_2 + \dots + c_n \mathbf{x}_n \quad (6)$$

şeklinde seriye açılış kabul edelim. Burada $\mathbf{x}_i$ özvektörleri ortonormallaştırılmış sayılacaktır :

$$\mathbf{x}_i' \mathbf{x}_k = \delta_{ik}. \quad (7)$$

Birinci özdeğer büyük yani $|\lambda_1| > |\lambda_2|$ ise ve iterasyon yeteri kadar ilerlemiş ise, 1 kabul edilen $c_1 = 1$ katsayılarının oranla yüksek özvektörlerin c_i açınım katsayıları küçük sayılabilir. Denklem (7) nin ortonormlaştırılması sonucunda, Rayleigh-oranlarının pay ve paydaları için

$$\mathbf{z}_v' \mathbf{z}_v = 1 + \lambda_1^2 c_2^2 + \lambda_2^2 c_3^2 + \dots + \lambda_n^2 c_n^2,$$

$$\mathbf{z}_v' \mathbf{z}_v = 1 + c_2^2 + c_3^2 + \dots + c_n^2$$

buradan

$$\begin{aligned} R[\mathbf{z}_v] &= \frac{\lambda_1 (1 + c_2^2 + \dots + c_n^2) - (\lambda_1 - \lambda_2) c_2^2 - (\lambda_1 - \lambda_3) c_3^2 - \dots - (\lambda_1 - \lambda_n) c_n^2}{1 + c_2^2 + c_3^2 + \dots + c_n^2} \\ &= \lambda_1 - \frac{(\lambda_1 - \lambda_2) c_2^2 + \dots + (\lambda_1 - \lambda_n) c_n^2}{1 + c_2^2 + \dots + c_n^2}. \end{aligned} \quad (8)$$

bulunur. Burada, $|\lambda_1| > |\lambda_i|$ kabulü nedeni ile, çıkarılan terim miktarın küçülmesine sebep olur ve R daima, miktarca çok küçük bir yaklaşıma verir. Ancak bu hata terimi, c_i katsayıları cinsinden kuvadratikdir; bunlar ise x_i özvektörlerine göre itere edilmiş z_v vektörünün gösterdiği belirsizliklerdir.

Son formülün çıkarılmasında simetrik matrisin özvektörlerinin ortogonallığı önemli idi. Genel, simetrik olmayan fakat köşegen benzeri matris halinde, benzer sonuçlara ulaşmak için Rayleigh-oranı, matrisin x_i sağ özvektörleri ile y_k sol vektörleri kombine edilecek şekilde, değiştirilmelidir. İtere edilmiş z_v vektörler dışında v_v sol itere edilmiş vektörleri de kullanılmalıdır ki bunlar keyfi başlangıç vektörü v_0 dan,

$$v_v = A' v_{v-1}, v = 1, 2, \dots \quad (9)$$

uyarınca, transpoze matris yardımı ile bulunur. (yeterli yüksek) bir μ basamağının v_μ vektörü, sol vektörlere göre

$$v_\mu = y_1 + d_2 y_2 + \dots + d_n y_n \quad (6a)$$

şeklinde geriye açınır ve sağ - ve sol özvektörlerinin biortonormlaştırılması

$$y_i' x_k = \delta_{ik}, \quad (7a)$$

öngörülür ise, "değişmiş Rayleigh-oranı"

$$R[v_\mu, z_v] = \frac{v_{\mu+1}' z_v}{v_\mu' z_v} = \frac{v_\mu' z_{v+1}}{v_\mu' z_v} \quad (10)$$

için yukarıda olduğu gibi,

$$R = \lambda_1 - \frac{(\lambda_1 - \lambda_2) c_2 d_2 + \dots + (\lambda_1 - \lambda_n) c_n d_n}{1 + c_2 d_2 + \dots + c_n d_n} \quad (8a)$$

elde edilir. Burada da hata yine x_1, y_1 dominant vektörlerinin c_1, d_1 belirsizlikleri cinsinden ikinci derecedendir. Fakat işareti hakkında başka bir şey söylenemez. Pratikde v ve μ itarasyon basamakları birbirine

eşitlenir : yalnız şu bahis konusudur : z_v ve v_μ vektörlerinde, dominantlara oranla yüksek özvektörlerin etkisi yeterli ölçüde azalmıştır yani c_i ve d_i katsayıları yeterli küçüktür.

Özvektörlere dair Rayleigh-oranın ekstrem özelliği, reel simetrik matris halinde, açıklanabilir. Yani,

$$R[x] = \frac{\text{Min}}{\text{Max}} \text{hipotesi, } x'x = 1 \text{ halinde } x'Ax = \frac{\text{Max}}{\text{Min}} \quad (11a)$$

ile veya, aynı şey olan

$$R[x] = \frac{\text{Max}}{\text{Min}} \text{hipotesi, } x'Ax = 1 \text{ halinde } x'x = \frac{\text{Min}}{\text{Max}} \quad (11b)$$

ile aynı anlamlıdır. Şimdi, bilindiği gibi,

$$Q = x'Ax = 1, \quad A = A' \quad (12)$$

"ikinci dereceden bir yüzey" in merkez denklemidir. (11b) hipotesi ekstrem uzunluktaki x vektörlerini gösterir ve bunlar yüzeyin, "asal eksenleri" dir. Simetrik matrisin, Rayleigh-oranını max. yapan, ortogonal x_i özvektörleri ise, $Q = \text{sabit}$ yüzeyinin asal eksenlerini gösterir.

15.3. Ekstremin Özelliği, Devam.

Yukarıda elde edilen açık ifadeler hermitsel A matrisine genelleştirilebilir ve her matrisin n adet üniter ve lineer bağımsız özvektörlerinin varlığı ispatını verebilirler, böylece hermitsel (reel, simetrik) matrisin, köşegen benzeri matrisler sınıfına ait olduğu gösterilmiş olur. Hermit-şekil $Q = x'Ax$ den hareket edilerek,

$$x'x = 1, \quad (14.1)$$

koşullu yani normlaştırılmış n -boyutlu x vektörlü maximum problemi

$$Q[x] = x'Ax = \text{Max}, \quad A = A' \quad (13)$$

in çözümü istenir. Bu problemin Weierstrass'ın bir teoremi — sürekli bir fonksiyon kapalı, sınırlı bir nokta cümlesinde, mutlak maximuma en aşağı bir noktada ulaşır — uyarınca daima bir çözümü vardır. Bu x_1 ve ilgili maximum $Q[x_1] = \lambda_1$ olsun. Bundan sonra, yeni

$$x^* x = 1, \quad x^* x_1 = 0, \quad (14.2)$$

yan koşulları altında denklem (13) deki problemin çözümlerini yani, normlaştırılmış tüm vektörler arasında yalnız bulunan x_1 çözümü ile üniter olanlara geçelim. Bu problemin de aynı teorem uyarınca yine bir çözümü vardır; bu x_2 ve formun ilgili maximum $Q[x_2] = \lambda_2$ olsun. Üç boyutlu uzayda anlamı şudur: Birim Küre $x^* x = 1$ üzerinde, Q nün λ_1 maksimumuna ulaştığı x_1 noktası bulunduktan sonra küre üzerinde x_1 e dik düzlemde noktalar ele alalım ve Q nün maximum olduğu ve burada $\lambda_2, \lambda_1 \geq \lambda_2$ olup, $Q = \text{sabit}$ yüzeyi dönel yüzey ise yani Q nün değeri, x_1, x_2 vektörlerinden oluşan düzlemde sabit ise, eşitlik işareti kullanılır. — Şimdi üçüncü maximum problemine yani

$$x^* x = 1, \quad x^* x_1 = x^* x_2 = 0, \quad (14.3)$$

gibi “üç” yan koşul altında (13) ün bir çözümünün bulunmasına geçelim; bunun için $Q[x_3] = \lambda_3$ maximumlu bir x_3 çözümü vardır ve $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3$ dür. Bu şekilde devam ederek tam n adet üniter vektör bulunur. Kendinden öncekiler ile üniter yani bunlardan lineer bağımsız vektör bulunması halinde metod işlemez olur ve n vektör bulunduktan sonra bu durum bahis konusudur. Bütün bu vektörler denklem (1) deki Rayleigh-oranını extremum yaparlar. 15.2. nin başlangıcında olduğu gibi, fakat şimdi reel — ve sanal — kısma ayrılma sureti ile kompleks vektörler ve matrisler için, ekstre problemine özdeğer probleminin karşılık geldiği gösterilebilir.

Teorem 3 : n -sıralı hermitsel (veya reel simetrik) matris H ,

$$x_i^* x_k = \delta_{ik} \quad (15)$$

uyarınca seçilebilen ve üniter (veya ortogonal) modal matris

$$X^* X = I \quad \text{olmak üzere} \quad X = (x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (16)$$

ile gösterilen, birbiri ile üniter (veya reel ortogonal) n adet bağımsız özvektöre sahiptir. Böylece hermitsel (reel simetrik) matrisler köşegen ben-

zeri matrisler sınıfına ait olurlar ve hatta A , üniter (reel ortogonal) dönüşüm

$$X^* A X = A = \text{Diag}(\lambda_i) \quad (17)$$

yardımları ile özdeğerlerin reel köşegen şeklini alırlar. Sonuncu, 14.1. deki gibi gösterilir, ancak burada denklem (16) daki özdeğer matrisinin üniterliği ve ortogonalılığı kullanılır. Üniter veya ortogonal az doğrultulara matrisin “asal eksenleri” denklem (17) deki dönüşüme, “asal eksen dönüşüm” ü adı verilir.

15.4. Kuvadratik Formlara Uygulama.

Reel kuvedratik bir form veya, hermitsel (reel simetrik) $A = A^*$ matrisli hermitsel form

$$Q = x^* A x = \sum a_{ik} \bar{x}_i x_{ik} \quad (18)$$

için, dönüşüm matrisi üniter (reel ortogonal) modal matrise x den,

$$x = X y \quad (19)$$

asal eksen dönüşümü, reel λ_i katsayılı köşegen şekli verir :

$$Q = y^* X^* A X y = y^* A y = \sum_{i=1}^n \lambda_i \bar{y}_i y_i, \quad (20)$$

buradan formun relligi doğrudan doğruya okunabilir. Yani kuvadratik formun reel olması halinde

$$Q = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \dots + \lambda_n y_n^2 \quad (20a)$$

çıkar. İkinci dereceden $Q = x^* A x = 1$ yüzeyinin merkez denklemi,

$$\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \dots + \lambda_n y_n^2 = 1 \quad (21)$$

asal eksen şeklini alır; buradan (reel veya sanal) a_i yarım eksenli bilinen

$$\frac{y_1^2}{a_1^2} + \frac{y_2^2}{a_2^2} + \dots + \frac{y_n^2}{a_n^2} = 0 \quad (21a)$$

denklemleri ile karşılaştırma süreti ile λ_i özdeğerlerinin, yarı eksenlerin karelerinin inversleri olduğu, $\lambda_i = 1/a_i^2$ anlaşılır. Eğer tüm özdeğerler pozitif ise, veya negatif olmayan ise, yani $\lambda_i > 0$ veya $\lambda_i \geq 0$ ise, ki bu 13.6. teorem 10 da Rayleigh-oranı yardımı ile bulunmuştu, (20) ve (20a) formları pozitifdir veya negatif olmayandır. A matrisinin rankı r ise, d -katlı özdeğer $\lambda = 0$, $d = n - r$ defekti ile ortaya çıkar, zira rank düşmesi d ve özdeğerin çok katlılığı, köşegen benzeri matris halinde, aynıdır. Burada köşegen Şekil (20) veya (20a) r adet y_i değişkenine indirir, buna karşılık geriye kalan d ye bunda rastlanmaz. Yüzey silindire dejenerer olur.

Bilindiği gibi keyfi ancak kare olmayan matris A halinde, burdan epuss dönüşümü ile bulunan A^*A matrisi hermitsel veya, reel A matrisi halinde, reel simetrikdir ve bu, yine bilindiği gibi, A nın rankı r nin n 'e eşit veya küçük olmasına göre, pozitif definit veya yarı definitdir. (11.2. ye bakınız). Şimdi pozitif, (yarı) definit hermitsel matris B verilmiş olsun ve bu matrisin

$$B = A^* A \quad (22)$$

şeklinde gösterilişini arayalım. Dafinit matris olarak B nin, $\lambda_i^2 = x_i^2 \geq 0$ olarak yazılabilen pozitif veya negatif olmayan λ_i özdeğerleri vardır. X, B nin özvektörlerinin üniter matrisi ise,

$$K = \text{Diag}(x_i), \quad x_i = +\sqrt{\lambda_i} \quad (23)$$

halinde,

$$X^* B X = A = K^2$$

asal eksen dönüşümünden B için

$$B = X K^2 X^* = X K (\bar{X} K)' = A^* A.$$

bulunur. Böylece aranan parçalanma elde edilir :

Teorem 4 : Pozitif (semi)-definit hermitsel matris B daima (22) şeklinde gösterilebilir, A

$$A = K X^* \quad (24)$$

den elde edilirse burada X özvektörlerin üniter matrisi ve K, B nin özdeğerlerinin pozitif köklerinin yani $\lambda_i = x_i^2 \geq 0$ m köşegen matrisidir.

B esas definit yani $x_i > 0$ ise A kare, tekil olmayan matrisdir. Buna karşılık B yarı definit ve $r < n$ ranklı ise ve $x_{r+1} = \dots = x_n = 0$ alınır ise, A nın son $d = n - r$ noktası sıfır olur. Bu durumda bunlar tamamen ihmal edilebilir ve A, r ranklı rn -matrisine (r lineer bağımsız satır) indirgenir :

Örnek

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 10 \end{pmatrix}, \quad \lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 11, \quad x_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad x_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$X = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{11} \end{pmatrix}$$

$$A = K X^* = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ \sqrt{11} & 3\sqrt{11} \end{pmatrix} A^* A = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 20 & 30 \\ 30 & 100 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 10 \end{pmatrix} = B.$$

15.5. Genel Özdeğer Problemi.

A, B matris çiftinin 13.8. de verilen genel problemi

$$A x = \lambda B x \quad \text{veya} \quad (A - \lambda B) x = 0 \quad (25)$$

için uygulamalarda, A, B reel simetrik matrisleri hali temel bir rol oynar; bu durum 12.3 de verilen titreşim problemlerinde gösterilmiştir; bu hal ve hermitsel matrislerin kompleks genelleştirilmesi teoriye en kolay girişi sağlar. Fakat iki matrisin simetrik özelliği, burada matris çiftlerinin özdeğerleri ve özvektörleri için, simetrik tek matris problemini karakterize eden özellikleri bulmağa yeterli değildir. Ancak tekil olmayan öngörülen B matrisinin invers matrisi ile soldan çarpım sureti ile özel probleme geçiş esnasında, uygulamalar için önemsiz komutatatif A, B matrisleri hali dışında, simetri genellikle ortadan kalkar. Parametredeki B matrisi için "pozitif definitlik" hipotezi çok daha önemlidir. Denklem (25) ile x^* soldan çarpılarak

$$x^* A x = \lambda x^* B x,$$

bulunur ise, paydanın sıfır olmaması halinde, buradan genel probleme ait Rayleigh-oranı

$$R[x] = \frac{x^* A x}{x^* B x}, \quad R[x_i] = \lambda_i \quad (26)$$

bulunur; bu hal pozitif definit B için bahis konusudur. Ancak bu durumda denklem (26) dan özdeğerlerin reelliği ortaya çıkar. Hermitsel A ve B halinde denklem (26) nın payı ve paydası reeldir. Ancak, payın ve paydanın aynı zamanda sıfır olması halinde özdeğerler için bir bilgi verilemez, bu durum aşağıdaki reel simetrik matrisler örneğinde gösterilmiştir.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

burada karakteristik denklem

$$\begin{vmatrix} 4 - 3\lambda & 1 - 2\lambda \\ 1 - 2\lambda & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^2 - 1 = 0,$$

yani kompleks özdeğerler $\lambda = \pm i$ dir ve B simetrik olmakla beraber definit değildir. Kolayca kontrol edilebileceği ilgili özvektörler için gerçekten $x^* A x$ ve $x^* B x$ formları yok olur.

B pozitif definit ise, denklem (25) hermitsel matrisli özel probleme indirgenebilir. Zira böylece, önceki paragrafta gösterdiğimiz gibi $B = C^* C$ ye ayrılabilir. $C^{-1} = D$ kısaltması ile, D ile çarpım yapılmak ve $DC = I$ hesaba katılarak,

$$(D^* A D) C x = \lambda C x$$

veya $C x = y$ için nihayet, hermitsel matris $H = D^* A D$ ye sahip özel problem :

$$H y = \lambda y$$

elde edilir.

Teorem 5 : Genel özdeğer problemi denklem (25) de n -sıralı A, B matrisleri hermitsel (reel simetrik), B tekil olmayan ve ayrıca ya A ile değiştirilebilir yani $AB = BA$ veya pozitif definit ise, genel problem (25), hermitsel matrisli özel probleme indirgenebilir. Bu durum problemin tüm özdeğerleri reeldir ve, reel matrisler halinde reel olan tam n adet lineer bağımsız

özvektör vardır. Ayrıca A da pozitif definit veya yarı definit ise, tüm özdeğerler pozitifdir veya negatif olmayandır.

Sonuncu cümle denklem (26) daki Rayleigh-oranından çıkar. — Asal eksen dönüşümü de uygulanabilir. Yalnız normlaştırma ve uniterleştirme (ortogonalleştirme) şimdi B matrisine göre yani,

$$x_i^* B x_k = \delta_{ik} \quad (27)$$

şeklinde yapılmalıdır. Böylece uniterleştirilmiş x_i özvektörlerinden oluşan modal matris $X = (x_k)$,

$$X^* B X = I \quad (28)$$

özelliğinde, B ye göre uniter bir matris verir. $A x_i = \lambda_i B x_i$ özdeğer denklemleri, $A = \text{Diag}(\lambda_i)$ olmak üzere,

$$A X = B X A$$

şeklinde özetlenir ise, denklem (28) göz önüne alınarak ve X^* ile soldan çarpılarak, A nın

$$X^* A X = A \quad (29)$$

köşegen şekline asal eksen dönüşümü elde edilir.

Teorem 6 : A keyfi, B pozitif definit olmak üzere bir hermitsel (reel simetrik) matris çifti, ortak hermitsel (veya reel) kongruent dönüşüm $x = X y$ vasıtası ile aynı zamanda aşağıdaki köşegen şekle dönüşebilir :

$$\begin{aligned} X^* A X &= A & (29) \\ X^* B X &= I & (28) \end{aligned}$$

bu esnada A , reel özdeğerlerin A köşegen matrisine, B ise, birim matrise dönüşür. Dönüşüm matrisi X , matris çiftinin B ye göre uniter (reel veya ortogonal) özvektörlerine ait matrisdir.

15.6. Yarı Hermitsel ve Uniter Matrisler.

13.6. teorem 10 da yarı hermitsel matris $A = -A^*$ nın özdeğerlerinin tam sanal olduğu gösterilmiş idi. Şimdi A reel yani yarı hermitsel ise, özdeğerler, karakteristik denklemin reel katsayılı kökleri olarak daima eşlenik kompleks, yani β reel olmak üzere,

$$\lambda = \pm i\beta, \quad \lambda^2 = -\beta^2 \quad (30)$$

şeklinde bulunurlar. Böylece karakteristik denklem şu şekli alır :

$$\left. \begin{array}{l} \text{Çift } n \text{ için } \lambda^n + a_{n-2}\lambda^{n-2} + \dots + a_2\lambda^2 + a_0 = 0 \\ \text{Tek } n \text{ için } \lambda^n + a_{n-2}\lambda^{n-2} + \dots + a_3\lambda^3 + a_1\lambda = 0 \end{array} \right\} \quad (31)$$

Bundan, $\lambda = 0$ kökü nedeni ile, sonuncu hal için aşağıdaki teorem çıkar :

Teorem 7 : n sıra sayılı tek olan reel, yarı simetrik bir matris daima tekildir. $\lambda = 0$ a ait özvektör reeldir. Reel, yarı simetrik matrisin rankı daima çift sayıdır.

$A^*A = I$ olan "uniter" (reel ortogonal) A matrisi için, $Ax = \lambda x$ $x^*A^* = \lambda x^*$ den,

$$x^*A^*Ax = x^*x = \bar{\lambda} \lambda x^*x$$

ve, $x^*x \neq 0$ nedeni ile

$$\bar{\lambda} \lambda = |\lambda|^2 = 1 \quad (32)$$

bulunur.

Teorem 8 : Bir uniter matrisin tüm özdeğerleri, kompleks düzlemin birinci dairesi üzerindedir, yani

$$\lambda_j = e^{i\varphi_j} \quad (33)$$

şeklinde. Bir reel ortogonal matrisin özdeğerleri, ± 1 olmadıkça,

$$\lambda = e^{\pm i\varphi} \quad (34)$$

şeklinde ikiye ikiye eşleniktir.

Yani reel matrisde λ nın yanında $1/\lambda$ da özdeğerdir, dolayısı ile karakteristik denklem "invers" dir, yani aşağıdaki iki şekilden biridir :

$$\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + \dots + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + 1 = 0 \quad (35a)$$

$$\lambda^n - a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} - \dots - a_2\lambda^2 + a_1\lambda - 1 = 0 \quad (35b)$$

burada ikinci şekil en fazla tek sayı n için bahis konusudur. λ yerine $1/\lambda$ konulduğunda denklem kendine dönüşür.

Çok farklı özdeğerlere ait iki özvektörün, hermitsel matrisler için geçerli üniterliği, yarı hermitsel ve uniter matrisler için de kullanılabilir :

Teorem 9 : Çok farklı $\lambda_i \neq \lambda_k$ özdeğerlerine ait özvektörler, hermitsel, yarı-hermitsel ve uniter matris için, birbirine üniterdir :

$$x_i^* x_k = 0, \quad i \neq k \quad (36)$$

Çok farklı bir özdeğere ait olanlar üniterleştirilebildiğinden, 1'e normlaştırma halinde daima

$$x_i^* x_k = \delta_{ik} \quad (37)$$

geçerli olur.

Yarı hermitsel matrise ait ispat, 15.1. teorem 1 de hermitsel matris için verilenin aynıdır. $A^* = A^{-1}$ ve $\bar{\lambda} = 1/\lambda$ halinde uniter matris A ya ait ispat şöyledir :

$$Ax_j = \lambda_j x_j \rightarrow x_i^* Ax_j = \lambda_j x_i^* x_j$$

$$x_i^* A^* = \bar{\lambda}_k x_i^* = x_i^* / \lambda_k$$

$$x_i^* \lambda_k = x_i^* A \rightarrow x_i^* A x_j = \lambda_k x_i^* x_j$$

$$(\lambda_j - \lambda_k) x_i^* x_j = 0 \rightarrow x_i^* x_j = 0, \quad \lambda_j \neq \lambda_k \text{ için}$$

16. Normal ve Normelleştirilebilen Matrisler. Matris Normları.

Şimdiye kadar uygulamalar için çok önemli simetrik matrislerin ve bunların kompleks genelleştirilmeleri olan hermitsel matrislerin ayrıca yarı hermitsel ve uniter matrislerin, köşegen benzeri matrisler sınıfına

ait olduğu ve bunlar için basit vasıtalar ile kapalı bir teori kurulabileceği gösterilmiş olup (§ 14), şimdi bu sınıf, simetrikleştirilebilen, normal ve normalleştirilebilen matrisler ile genişletilecektir. Bunlara ek olarak verilen matris normu kavramı, özdeğer sınırlanması ve tahmininde hem tercih ve hem de sayısal problemler için artan ölçüde önem kazanmaktadır. Paragraf 16.6 ve 16.7 yalnız bunlara ayrılmıştır.

16.1. Simetrikleştirilebilen Matrisler.

Hermitse matrislerin genelleştirilmesi olarak bunlar, benzerlik dönüşümü ile hermitse matris ve dolayısı ile "reel" köşegen formuna dönüşen matrislerdir. Bunlar çarpım şeklinde,

$$\boxed{A = BC} \quad (1)$$

olarak gösterilir; buradaki B ve C çarpımlarının "ikisi birden hermitse" (yani reel halde simetrik) dir ve bir tanesi ayrıca (esas olan) "pozitif definit" dir.

$$\boxed{B \text{ ve } C \text{ hermitse}, \\ B \text{ veya } C \text{ pozitif definit}}$$

Örneğin (pozitif) $x_i^2 > 0$ özdeğerleri halinde C pozitif definit ise $C, x_i^2 = \text{Diag}(x_i^2)$ reel köşegen şekline uniter (reel orfogonal) olarak dönüşür, yani, uniter matris $U, U^*U = I$ halinde,

$$C = U^* K^2 U \quad (2)$$

yazılabilir. Böylece denklem (1) den

$$A = BU^* K^2 U = U^* K^{-1} (KUBU^* K) KU$$

bulunur, burada $K = \text{Diag}(x_i), x_i > 0$ dir. Parantez içinde $B = B^*$ a göre hermitse matris

$$H = KUBU^* K = VB V^*, H = H^*, \quad (3)$$

vardır ve tekil olmayan $V = KU$ dan benzerlik dönüşümü elde edilir :

$$\boxed{A = V^{-1} H V} \quad (4)$$

yani denklem (1) deki matris hermitse matris H nın benzeridir ve bu reel köşegen matris $\Lambda = \text{Diag}(\lambda_i)$ ye benzediğinden — buradaki H nın λ_i özdeğerleri aynı zamanda A ya aittir (13.5., teorem 8'e bakınız) — aynı zamanda A nın da benzeridir. Ayrıca B pozitif definit ise, denklem (3) ve 11.2., teorem 5 uyarınca, H da pozitif definitdir.

Teorem 1 : Bir kare matris A , bir tanesi esas pozitif definit iki hermitse matrisin çarpımı olarak gösterilebiliyor ise, **simetrikleştirilebilir**, yani benzerlik dönüşümü ile özdeğerlerinin reel köşegen şekli 'ne $\Lambda = \text{Diag}(\lambda_i)$ ye sokulabilir ve, bu neden ile, hermitse matrise benzerdir. Diğer çarpım da definit veya yarı definit ise, tüm λ_i özdeğerleri pozitiftir veya negatif olmayandır.

Reel simetrik A, B ve pozitif definit B halinde genel özdeğer problemi $Ax = \lambda Bx$ den çıkan $B^{-1}A$ matrisinin özel problemi de buraya aittir. Özdeğerlerin tümü reel ve, pozitif definit A halinde, pozitiftir ve $B^{-1}A$ matrisi köşegen benzeri matrisdir.

Denklem (1) deki simetrikleştirilebilen matris için x_i ve y_i sağ — ve sol özvektörleri arasında oldukça basit bir bağıntı vardır. Yine C , esas definit olur. Bu durumda, $A^* = CB$ den özdeğerlerin reelliği nedeni ile,

$$\begin{aligned} Ax_i &= BCx_i = \lambda_i x_i, \\ A^* y_i &= CB y_i = \lambda_i y_i. \end{aligned}$$

elde edilir. Birinci denklem C ile çarpılır

$$CB(Cx_i) = \lambda_i (Cx_i)$$

ve ikinci ile karşılaştırılır ise,

$$\boxed{Cx_i = y_i} \quad (5)$$

nin, A^* nın özvektörü olduğu görülür. C tekil olmayan matris kabul edildiğinden $x_i \neq 0$ için $y_i \neq 0$ bulunur. Ayrıca, pozitif definit C nedeni ile, denklem (5) den

$$\boxed{x_i^* y_i = x_i^* C x_i > 0} \quad (6)$$

elde edilir, ancak bunun için çok katlı özdeğerler halinde, x_i, y_i vektörleri, denklem (5) uyarınca verilmiş olmalıdır.

16.2. Normal ve Normalleştirilebilen Matrisler.

Köşegen benzeri matrislerin sınıfı normal ve normalleştirilebilen matrisler ile tamamlanır. "Normal matrisler",

$$\boxed{A^*A = AA^*} \quad (7)$$

koşulunu gerçekleyen matrislerdir. Reel matris A halinde $A^* = A'$ olur. Normal matris kare olmalıdır, zira aksi halde (7) geçerli değildir. Normal matrislerin özel halleri şunlardır :

$A^* = A$	Hermitsel (reel simetrik)
$A^* = -A$	yarı hermitsel (reel yarı simetrik),
$A^*A = AA^* = I$	üniter (reel ortogonal) matrisler.

Teorem 2 : Bir A matrisi yalnız ve yalnız, matris **normu** ise, özdeğerlerinden oluşan $\Lambda = \text{Diag}(\lambda_i)$ köşegen şekline **üniter** olarak dönüştürülebilir.

$$\boxed{U^*AU = \Lambda}, U^*U = I \text{ olmak üzere} \quad (8)$$

İspat için önce I. Schur¹ a dayanan bir teorem verelim :

Teorem 3 : Keyfi, kare matris A , köşegen elemanları A nın λ_i özdeğerleri olan bir L üçgen matrisine daima üniter olarak dönüştürülebilir :

$$U^*AU = L = \begin{pmatrix} \lambda_1 & l_{12} & \dots & l_{1n} \\ 0 & \lambda_2 & \dots & l_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}. \quad (9)$$

λ_1 , A nın bir özdeğeri ve x_1 , ilgili normlaştırılmış özvektör, yani $x_1^*x_1 = 1$ olsun. Bu durumda diğer lineer bağımsız $y_2, \dots, y_n$ vektörleri, tüm matris $X_1 = (x_1, y_2, \dots, y_n)$ üniter yani $X_1X_1^* = I$ olacak şekilde bulunurlar. Bu, $Ax_1 = \lambda_1x_1$ ve $x_1^*y_k = 0$ nedeni ile, A yı

$$X_1^*AX_1 = \begin{pmatrix} x_1^* \\ y_2^* \\ \vdots \\ y_n^* \end{pmatrix} (Ax_1, Ay_2, \dots, Ay_n) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & \dots & * \\ 0 & & & \\ \vdots & & A_1 & \\ 0 & & & \end{pmatrix},$$

¹ SCHUR, I. : Math. Ann. Bd. 66(1909). Sayfa 488-510.

şekline dönüştürür, burada birinci sütunda λ_1 dışında yalnız sıfırlar i buna karşılık birinci sütunda genellikle sıfırdan farklı, bizi ilgilendirmeyen* elemanları vardır. λ_1 dışında A nın λ_i özdeğerlerine sahip $(n-1)$ sıralı alt matris A_1 de aynı şekilde ele alınır : λ_2 özdeğeri için $(n-1)$ bileşenli, $x_2^*x_2 = 1$ şeklinde normlaştırılmış bir x_2 özvektörü vardır. Bu $x_2, z_3, \dots, z_n$ üniter sistemine genişletilir ve böylece, birinci satır ve sütunu birim matrisinin ki olan, n -sıralı üniter matris X_2 elde edilir. Böylece

$$X_2^*X_1^*AX_1X_2 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & * & \dots & * \\ 0 & \lambda_2 & * & \dots & * \\ 0 & 0 & & & \\ \vdots & \vdots & & A_2 & \\ 0 & 0 & & & \end{pmatrix}.$$

bulunur. Bu şekilde hareket edilerek ve X_1 üniter matrislerinin çarpımı U üniter matrisi ile gösterilecek nihayet (9) dönüşümü elde edilir.

Şimdi A normal olsun. Bu durumda L de normaldir, zira normal özelliği, üniter dönüşümde ortadan kalkmaz :

$$\left. \begin{aligned} L^*L &= U^*A^*AU \\ LL^* &= U^*AA^*U \end{aligned} \right\} L^*L = LL^*.$$

Ancak denklem (9) daki üçgen matris halinde L^*L üzerindeki 1.1 elemanı $\lambda_1\lambda_1$ e eşittir, LL^* ın buna karşılık gelen elemanı ise $\lambda_1\lambda_1 + l_{12}l_{12} + \dots + l_{1n}l_{1n}$ dir; bundan, $L^*L = LL^*$ nedeni ile $l_{12} = l_{13} = \dots = l_{1n} = 0$ bulunur. 2.2. elemanlarının karşılaştırılmasından da $l_{23} = \dots = l_{2n} = 0$ v.s. elde edilir. Böylece normal matris A halinde L için $A = \text{Diag}(\lambda_i)$ çıkar. Diğer taraftan bir köşegen matris ile eşleniği daima komutatif olduğundan, bunun ile üniter kongruent her matris yine normaldir ve böylece teorem 2 ispatlanmış olur.

Buna göre, önceki paragrafta ayrıntılı olarak tarif edilen reel simetrik ve hermitsel matrisler yanında yarı hermitsel ve üniter (reel halde, yarı simetrik ve ortogonal) matrisler de bu sınıfa ait olurlar. Şimdiye kadar incelenen tiplerin, özel hal olarak kapsadığı "normalleştirilebilen matrisler" ile sınıf tamamlanır. Bir tanesi, örneğin C hermitsel ve pozitif definit

$$\boxed{C^* = C, \text{ C pozitif definit}} \quad (11)$$

diğeri B ise

$$\boxed{B^*CB = BCB^*} \quad (12)$$

koşulunu gerçekleyen — bu, genelleştirilmiş normallik sayılabilir yani; B, C ye göre normal olsun — B, C matrislerinin çarpımı

$$\boxed{A = BC} \text{ veya } \boxed{A = CB} \quad (10)$$

şeklinde gösterilebilen bir A matrisine “normalleştirilebilir” adı verilir. $C = I$ için $A = B$ normaldir. $C \neq I$ fakat $B^* = B$ için A simetrikleştirilebilen matrisdir. Ayrıca $C = I$ ise, $A = B$ hermitsel matris olur. Normal metrislerin “uniter” olarak köşegen şekle dönüştürülebilmelerine karşılık bu durum normalleştirilebilir matrislerde, aşağıda gösterileceği gibi, yalnız genel “benzerlik dönüşümü” ile mümkündür. Her normal matris ve her köşegen matris normalleştirilebilir olduğundan (terfi mümkün değildir) köşegen — benzeri matrisler sınıfı tamamen dolmuş olur.

Teorem 4 : Bir A matrisi yalnız ve yalnız, **normalleştirilebilir** ise, yani pozitif definit hermitsel matris C ile, C ye göre normal matris B nin çarpımı olarak yazılabilir ise, denklem (12), **benzerlik dönüşümü** ile özdeğerlerinin $\Lambda = \text{Diag}(\lambda_i)$ köşegen şekline sokulabilir.

İspat 16.1 de, simetrikleştirilebilen matrisler için yapının benzeridir. Pozitif definit matris

$$C = U^* K^2 U$$

ile

$$A = BU^* K^2 U = U^* K^{-2} (KUBU^* K) KU,$$

bulunur. Parantez içindeki matris

$$G = KUBU^* K,$$

B ye ait (12) koşulu nedeni ile, normaldir:

$$\left. \begin{aligned} G^*G &= KU(B^*CB)U^*K \\ GG^* &= KU(BCB^*)U^*K \end{aligned} \right\} G^*G = GG^*.$$

Böylece A matrisi,

$$\boxed{A = V^{-1}GV} \quad (13)$$

uyarınca normal matris G nin benzeridir, yani aynı λ_i özdeğerlerine sahiptir ve, teorem 2 uyarınca G uniter kongruent yani $\Lambda = \text{Diag}(\lambda_i)$ nin benzeri olduğundan A benzerlik dönüşümü yapılarak, Λ ya dönüşür ve böylece teorem 4 ispatlanmış olur. Hepsini bir araya toplayalım :

A matrisi	Λ ya dönüşüm	$\Lambda = \text{Diag}(\lambda_i)$	Dönüşüm denklemi
Reel simetrik	Ortogonal Kongruent	Reel	$X^*AX = \Lambda$
Hermitsel	Uniter	Reel	$U^*AU = \Lambda$
Simetrikleştirilebilen	Benzer	Reel	$V^{-1}AV = \Lambda$
Normal	Uniter Kongruent	Kompleks	$U^*AU = \Lambda$
Normalleştirilebilen	Benzer	Kompleks	$V^{-1}AV = \Lambda$

16.3. Matris Normları ve Özdeğer Sınırları.

Bir matrisin özdeğerlerinin sayısal hesabında kompleks sayı düzleminde özdeğerlerin konumu hakkında belirli geçici tahminler yaparak özellikle max. özdeğer için matris elemanlarından sınırlar elde etmek çok değerlidir, bu tahminler ilerde özdeğerlerin tanı bulunması için değerlendirilirler. Özdeğerlerin, matris elemanlarının mertebesine bağlı oldukları şuradan anlaşılır : k-katlı matris kA ya, yine k-katlı k λ özdeğerleri ait olurlar. $|\lambda|$ için kolayca bulunan bir sınır 13.6. da $|\lambda| \leq na$, $a = \text{Max}(a_{ik})$ olarak verilmiş idi. Burada tek bir eleman, max. değerli eleman vardır. Diğer matris elemanlarının da hiç olmazsa miktarca ve imkan var ise, sıracı göz önüne alındığı, yani matrisdeki bilgiye tamamen hakim olunduğu daha iyi sınırlar da konulabilir. Ancak yapılacak hesabın kapsamı, imkan oranında, uygun sınırlar içinde kalmalıdır.

Yukarda $|\lambda|$ nın tahmini için kullanılan na, mümkün “matris normları”ndan yalnız biridir. Norm deyince belirli bir büyüklük ölçüsü anlaşılır. Bir x vektörü için şimdiye kadar, 2.4. de verilen ve 4.1. de kompleks vektörlere uygulanan “Euklid normu” yani

$$|x| = \sqrt{x^* x} = \sqrt{\sum_i |x_i|^2} \quad (14)$$

kullanılmıştır. Buna karşılık gelen Euklid matris normu

$$N(A) = \sqrt{sp A^* A} = \sqrt{\sum_{i,k} |a_{ik}|^2} \quad (15)$$

dur. 2.7. ye bakınız, ancak burada kompleks matrise uygulanmıştır. Görüldüğü gibi, yalnız belirli genel hipotezleri sağlamak üzere, başka normlar da mantıklı ve faydalıdır. Normlar için ortak işaret olarak çift çizgi kullanılmıştır: bir $|x|$, vektörünün normu için $\|x\|$ ve A matrisinin normu için $\|A\|$ yazılır. Her iki tip norm içinde aşağıdaki hipotezler bulunur.¹

Hipotezler	$\ x\ $ Vektör normu	$\ A\ $ Matris normu
a) $\ x\ < \infty$ ve $= 0$ yalnız $x=0$ için	a) $\ A\ > 0$ ve $= 0$ $A=0$ için	
b) $\ cx\ = c \ x\ $ keyfi skaler çarpım c için	b) $\ cA\ = c \ A\ $ keyfi skaler çarpım c için	
c) $\ x + y\ \leq \ x\ + \ y\ $ Üçgen-Eşitsizliği	c) $\ A + B\ \leq \ A\ + \ B\ $ d) $\ AB\ \leq \ A\ \cdot \ B\ $	

Matris normlarında, vektör normu fazla olarak, a) hipotezi ortaya çıkmıştır. "Çarpılabilir" bir norm bahis konusudur.¹

Buradaki hipotezleri gerçekleyen, işe yarar normlar şunlardır:

Vektör normları:

1. $\|x\| = \text{Max } |x_i|$
2. $\|x\| = \sum |x_i|$
3. $\|x\| = |x| = \sqrt{x^* x}$, Euklid Normu

Matris normları:

1. $\|A\| = M(A) = na$ mit $a = \text{Max } |a_{ik}|$ Toplam normu
2. $\|A\| = Z(A) = \text{Max } \sum_k |a_{ik}|$ Satır normu

¹ Bakınız A. Ostrowski: Über Normen von Matrizen. Math. Z. Bd. 63 (1955).

3. $\|A\| = S(A) = \text{Max}_k \sum_i |a_{ik}|$ sütun normu
4. $\|A\| = N(A) = \sqrt{sp A^* A}$ Euklid Normu
5. $\|A\| = H(A) = \kappa_{\max}$ mit $\kappa^2 = \lambda_{A^* A}$ HILBERT-normu
Spektral norm

Bu beş matris normu², büyüyen hesap işlemine göre sıralanmıştır. 5 ile gösterilen Spental-veya Hilbert-normu ayrıca özdeğer probleminin çözümünü yani hiç olmazsa, pozitif (yarı)-definit $A^* A$ matrisinin $\kappa_i^2 \geq 0$ reel özdeğerlerinden en büyüğünün bulunmasını öngörür. Bunun pozitif alınan κ_i kare köklerine A matrisinin "tekil değerleri" de denir.

$|a_{ik}|$ elemanları yerine bunların maksimumu a konulur ise toplam matris $M(A)$ nın — özel haller dışında —, kendisini oluşturan $Z(A)$, $S(A)$ ve $N(A)$ normlarından büyük olduğu görülür:

$$Z(A) \leq M(A) \quad (16a)$$

$$S(A) \leq M(A) \quad (16b)$$

$$N(A) \leq M(A) \quad (16c)$$

İlerde görüleceği gibi ayrıca

$$H(A) \leq N(A) \leq M(A) \quad (17)$$

geçerlidir.

Kolayca anlaşılacağı gibi burada verilen matris normlarının her biri, üç vektör normundan her biri ile kombine edilemez. Bu anlamda iki hipotez aşağıdaki tanıımı verir:

Tanım 1: Eğer tüm A matrisleri ve tüm x vektörleri için

$$\|Ax\| \leq \|A\| \cdot \|x\| \quad (18)$$

¹ d) hipotezinin olmaması halinde $\|A\|$ nın yanında, keyfi pozitif c sabitli $c\|A\|$ da bir normdur. Yani bu, burada ıkmal edilecek olan izafi, mutlak olmayan bir büyüklük ölçüsünü gösterir.

² Buradaki kökler birim olarak kullanılmaktadır.

eşitsizliği var ise $\|A\|$ matris normu, belirli $\|x\|$ vektör normuna uygun yani, onun ile uyumlu dur.

Dönüştürmüş vektör $y = Ax$ in normu, başlangıç vektörü x in normuna göre, vektör normuna uygun matris normu ile sınırlanmalıdır. Aşağıdaki tabloda, işe yarar üç vektör normuna uyan matris normları gösterilmiştir. Lub (A) işareti daha sonra açıklanacaktır.

Vektör normu	Buna uygun Matris normu
1. $\ x\ = \max x_i $	$\ A\ = M(A)$ Toplam norm $\ A\ = Z(A) = \text{lub}(A)$ Satır normu
2. $\ x\ = \sum x_i $	$\ A\ = M(A)$ Toplam norm $\ A\ = S(A) = \text{lub}(A)$ Satır normu
3. $\ x\ = x $ Euklid	$\ A\ = M(A)$ Toplam norm $\ A\ = N(A)$ Euklid normu $\ A\ = H(A) = \text{lub}(A)$ Spektral norm

Tanım eşitsizliği (18) den, her matris normu halinde, λ için istenen sınır çıkar :

$$|\lambda| \leq \|A\| \quad \text{Her matrisin normu için} \quad (19)$$

Teorem 5 : Bir A matrisinin özdeğerleri, keyfi çarpılabilir matris normu $\|A\|$ halinde, kompleks sayı düzlemindeki $\|A\|$ yarı çaplı, sıfır noktasını merkez kabul eden dairenin içinde veya çevresinde bulunurlar.

(18) göz önüne alınmak üzere, normlara geçiş sureti ile $Ax = \lambda x$ den

$$\|Ax\| = |\lambda| \|x\| \leq \|A\| \cdot \|x\|$$

ve buradan, $\|x\| \neq 0$ nedeni ile, vektör normunun artık bulunmadığı (19) sınırı elde edilir. (19) da ayrıca özel hal olarak, 13.6. da verilen denklem (19) tahmini de vardır. Bu, (16) nedeni ile, işlem bakımından eşdeğerli $Z(A)$, $S(A)$ veya $N(A)$ normlarından biri ile kolayca düzeltilir, ancak sayısal verilmiş matris halinde bunların en küçüğü alınır.

Belirli bir vektör normu için, buna uyan matris normları arasında en küçüğü yani (18) eşitsizliğinde eşitlik işaretinin konulmasını müm-

kün kılan yani kendisinin altına inilemeyen norm en değerlisidir. Buna "sınır normu" A nın "en küçük üst sınırı = larst upper bound" u denir ve İngilizce yazılışına uygun olarak $\text{lub}(A)$ ile gösterilir :

Tanım 2 : Bir A matrisinin, $\|x\|$ vektör normuna ait sınır normu veya lub-normu $\text{lub}(A)$ denince

$$\|Ax\| \leq \alpha \|x\| \quad (20a)$$

yapan en küçük α sayısı anlaşılır ki bu tüm vektörler için

$$\text{lub}(A) = \min_x \alpha. \quad (20b)$$

şeklinde yazılabilir. Başka bir değişle

$$\text{lub}(A) = \max_x \frac{\|Ax\|}{\|x\|}. \quad (21)$$

S. 230 daki tabloda üç vektör normunun her biri için ilgili sınır normu, $\text{lub}(A)$ verilmiştir. Bunun teyidi için, genel matris $A = (a_{ik})$ halinde bir x vektörü, (18) eşitsizliğinde eşitlik işareti kabul edilecek şekilde, verilmelidir. Aynı zamanda vektör normu ile, buna uygun alınmış matris normlarının uygunluğu tesid edilir.

$y = Ax$ yani $y_i = \sum a_{ik} x_k$ dan hareket ile aşağıdaki eşitsizlikler elde edilir.

$$1. \|x\| = \max |x_i|: |y_i| \leq \sum_k |a_{ik}| |x_k| \leq |x_k|_{\max} \sum_k |a_{ik}|$$

$$|y_i|_{\max} = \|y\| \leq |x_k|_{\max} \max_i \sum_k |a_{ik}| \leq Z(A) \|x\|$$

$Z(A) \leq M(A)$ nedeni ile $M(A)$ dan, $\|x\|$ 'e uygundur. Örneğin reel matris halinde vektör olarak $x' = (\pm 1, \pm 1, \dots, \pm 1)$ seçilir ve işaret sırası, $y_i = \sum a_{ik} x_k$ da max. toplam değerli matris satırında, çok sayıda toplama işlemi ortaya çıkacak şekilde alınır, $\|y\| = Z(A) \|x\|$ bulunur ve böylece $Z(A)$ nın, lub-normu olduğu anlaşılır.

$$2. \quad \|x\| = \sum_i |x_i| : \sum_i |y_i| \leq \sum_i \left(\sum_k |a_{ik}| |x_k| \right) = \sum_k \left(|x_k| \sum_i |a_{ik}| \right)$$

$$\|y\| \leq \max_k \sum_i |a_{ik}| \cdot \sum_k |x_k| = S(A) \|x\|.$$

yine, $S(A) \leq M(A)$ nedeni ile, $M(A)$, $\|x\|$ e uygundur. Vektör olarak A da max. sütun-toplam değeri bulunan k noktasında 1 alınmak üzere, $x' = (0, \dots, 1, \dots, 0)$ seçilir ise, $\|y\| = S(A) \|x\|$ olur ve böylece $S(A)$, lub-normu olarak bulunur.

3. $\|x\| = |x|$: Skaler çarpım $y_i = a^i x$ için Cauchy-Schwarz eşitsizliği $|y_i| \leq |a^i| |x|$ geçerlidir (2.4.).

Kare alınarak ve sonra toplama yapılarak

$$|y_i|^2 \leq |a^i|^2 |x|^2 = (a^i a^{i*}) |x|^2$$

$$|y|^2 \leq \text{sp } B A^* |x|^2 = \text{sp } A^* A |x|^2$$

$$|y| \leq N(A) |x|.$$

bulunur. Buna göre $N(A)$, lub-norm'u değildir. Zira, eğer tüm a^i satır vektörleri x e paralel olsa idi, Schwarz eşitsizliklerinde eşitlik işareti olurdu, bu ise genellikle bahis konusu değildir.

$|x|$ vektör normuna ait sınır normu $\text{lub}(A)$ aşağıdaki gibi, $y = Ax$ den elde edilir :

$$|y|^2 = y^* y = x^* A^* A x = \frac{x^* A^* A x}{x^* x} |x|^2 = \widehat{R}[x] |x|^2.$$

Burada çarpan olarak, pozitif (yarı)-definit hermitsel matris $A^* A$ nın Rayleigh-oranı $R[x]$ vardır. Bu, bir matrisin değer aralığında, pozitif reel eksen üzerindedir. Maksimumu ise, $A^* A$ matrisinin max. özdeğerleri $\kappa_{\max}^2$ dir :

$$|y|^2 \leq \max_z \widehat{R} |z| |x|^2 = \kappa_{\max}^2 |x|^2,$$

yani,

$$|y| = |Ax| \leq \kappa_{\max} |x| = H(A) |x|.$$

Şimdi x vektörü olarak $A^* A$ matrisinin, $\kappa_{\max}^2$ özdeğerine ait u özvektörü seçilir ise, eşitlik işareti kabul edilir ve böylece $H(A)$ nın, $|x|$ Euklid vektör normuna ait sınır normu $\text{lub}(A)$ olduğu anlaşılır.

Sınır normu $H(A) = \text{lub}(A)$ için üst sınır $N(A)$ yanında ekseri-ya faydalı olan bir alt sınır da verilebilir. Yani,

$$N^2(AB) / \sqrt{n} \leq H(A) \leq N(A) \quad (22)$$

yazılabilir. İki sınır örneğin, $N = \sqrt{n} a$, $H = a$ halinde $A = aI$ için alt ve $N = n a = H$ halinde $A = (a_{ik})$, $(a_{ik}) = a$ için sınır kabul edilebilir. İspat için, keyfi B matrisi halinde, AB esas alınır. Bunun için

$$N^2(AB) = \sum |Ab_i|^2 \leq H^2(A) \sum |b_i|^2 = H^2(A) N^2(B).$$

Burada $B = I$ alınır ise, $N(I) = \sqrt{n}$ nedeni ile, (22) bulunur.

Euklid vektörü formu $|x|$ e uygun $N(A)$ ve $H(A)$ matris normları önemli bir özellik ile karakterize olurlar : bunlar "uniter-invaryant" dir. A matrisi, olarak,

$$B = U^* A U \text{ mit } U^* U = U U^* = I,$$

ya dönüştürülür ise,

$$N(U^* A U) = N(A) \quad (23a)$$

$$H(U^* A U) = H(A) \quad (23b)$$

geçerli olur.

Bu durum,

$$\text{sp}(AB) = \text{sp}(BA), \text{ bakınız } \S 2.2, \text{ Denklem (12),}$$

$$\lambda(AB) = \lambda(BA), \text{ bakınız } \S 13.7, \text{ teorem 13}$$

$$\text{uygun } B^* B = U^* A^* A U = C^* C, \text{ } C = AU \text{ olarak, sonra}$$

$$\text{sp}(B^* B) = \text{sp}(C^* C) = \text{sp}(C C^*) = \text{sp}(A A^*) = \text{sp}(A^* A)$$

genel bağıntıları yardımı ile,

uyarınca ve aynı şekilde $\lambda(B^* B) = \lambda(A^* A)$ için de bulunur. Reel halde üniter dönüşüm ortogonal olur, bu ise geometride dönme anlamındadır.

Bu durum teorem 2 ve 3 e uygulanarak

$$\text{normal } A \text{ için, } N^2(A) = \sum |\lambda_i|^2 \quad (24a)$$

$$\text{normal olmayan } A \text{ için } N^2(A) > \sum |\lambda_i|^2 \quad (24b)$$

elde edilir. $|\lambda|_{\max}^2 \leq \sum |\lambda_i|^2$ den, $N(A)$ vasıtası ile λ nın ne kadar tahmin edildiği ortaya çıkar; bu tahmin diğer azdeğerlere göre $|\lambda|_{\max}$ in az kaldırılması oranında, kuvvet kazanır.

Matrisin κ_i tekil değerleri arasında üst sınır $\kappa_{\max}$ yanında bir $\kappa_{\min}$ alt özdeğer sınırı elde edilir:

$$\boxed{\kappa_{\min} \leq |\lambda| \leq \kappa_{\max}}. \quad (25)$$

yani kompleks sayı düzleminde özdeğer, çevreleri dahil, $\kappa_{\min}$ ve $\kappa_{\max}$ yarı çapları ile sınırlı daire halkası bölgesindedirler. Zira $Ax = \lambda x$ yani $x^*Ax = \lambda x^*x$ halinde

$$x^*Ax = \lambda \bar{\lambda} x^*x.$$

elde edilir. Yani $\bar{\lambda}\lambda = |\lambda|^2$, yukarda $\kappa_{\max}^2$ ve aşağıda $\kappa_{\min}^2$ ile sınırlanan A^*A matrisinin değer aralığına aittir.

$$\kappa_{\min}^2 \leq |\lambda|^2 \leq \kappa_{\max}^2.$$

$\kappa_{\min}$ un invers değeri ise, invers matris A^{-1} in spektral normu = sınır normudur:

$$\boxed{H(A^{-1}) = \|A^{-1}\| = 1/\kappa_{\min}}. \quad (26)$$

Zira $A^{-1}A^{*-1} = (A^*A)^{-1}$ e ait olan $1/\kappa_i^2$ özdeğerleri $A^{*-1}A^{-1}$ de de vardır, böylece $H(A^{-1}) = \text{Max.}(1/\kappa_i) = 1/\kappa_{\min}$ bulunur.

$H(A)$ yarı çaplı daire nihayet, $x^*x = 1$ halinde $R[x] = x^*Ax$ ile tanımlanan, matrisin $[A]$ değer aralığını da kapsar, 13.6. ya bakınız. Zira Schwarz eşitsizliği ve bunu takip eden normu tahmin ile

$$|x^*Ax| \leq |x| |Ax| \leq |x|^2 H(A) = H(A),$$

yani

$$\boxed{|R| \leq H(A)}, \quad (27)$$

bulunur, böylece 13.6., denklem (32) de verilen tahmin kesinleştirilmiştir.

Aşağıda ilgili tam özdeğerler ile birlikte bazı özel matrislere ait farklı norm değerleri verilmiştir:

Matrix A	M(A)	Z(A)	S(A)	N(A)	H(A)	λ
$A = I$	n	1	1	$\sqrt{n}$	1	$\lambda = 1$ n-defa
$A = aI$	na	a	a	$\sqrt{na}$	a	$\lambda = a$ n-defa
$A = \text{Diag}(d_i)$ $d = \text{Max } d_i $	nd	d	d	$\sqrt{\sum d_i ^2}$	d	$\lambda_i = d_i$
$A = \begin{pmatrix} a & \dots & a \\ \vdots & & \vdots \\ a & \dots & a \end{pmatrix}$	na	na	na	na	na	$\lambda = na$ 1-defa $\lambda = 0$ (n-1)-defa

16.4. Özdeğer ile İlgili Diğer Tahminler.

Şimdiye kadar yapılan, matris normuna dayalı özdeğer tahminleri, kompleks düzlemde özdeğerleri kapsayan bölgesi $|\lambda| \leq \|A\|$ uyarınca, sıfır noktasını merkez kabul eden bir daire ile sınırlarlar. Dolayısı ile bunlar, özellikle azdeğerlerin sıfır noktası etrafına gruplanmak yerine bir yönde dikkate geçecek kadar yer değiştirmeleri halinde, oldukça kabaca neticeler verirler. Bu ve diğer özellikleri hesaba katan — çok fazla çalışma gerektirmeyen — tahminler yapılabilir; bunun için, matris normunda olduğu gibi tek bir sayı verilmesi yerine, matris elemanlarında saklı bilgiden geniş olarak faydalanılır.

Bu yöndeki ilk aşama köşegen elemanlarının, yalnız değerce katılmadığı “matris izi” şeklinde göz önüne alınmasıdır. Bilindiği gibi

$$\text{sp } A = S = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n.$$

Bu durumda

$$s = \frac{1}{n} \text{sp } A = \frac{1}{n} \sum \lambda_i \quad (28)$$

büyüklüğü, kompleks düzlemde özdeğer noktalarının ağırlık merkezi koordinatını gösterir. Reel matris halinde bu, beklendiği gibi, reeldir. Sıfır noktasının s noktasına kaydırılması ile norm basit şekilde ve hatta etkin olarak küçültülebilir.

Önce keyfi kompleks olan bir sayı z ile ve A matrisinin özdeğerleri λ_A ile gösterilir ise, $a_{ik} - z\delta_{ik}$ elemanlı

$$B = A - zI$$

matrisinin λ_B özdeğerleri, λ_A ya oranla z kadar yer değiştirir:

$$\lambda_B = \lambda_A - z$$

bu durum, kolayca anlaşıldığı gibi, sabit özvektörler için bahis konusudur. Karşımıza faydalı bir yardımcı olarak çıkacak olan bu "spektral ayrılma" sayesinde matris normu değişir. Bu Euklid normu için şu şekilde izlenebilir :

$$\begin{aligned} N^2(B) &= \text{sp } B^* B = \text{sp } (A^* A - A^* - A \bar{z} + z \bar{z} I) \\ &= N^2(A) - \bar{S} z - S \bar{z} + n z \bar{z}. \end{aligned}$$

Şimdi, $N(B)$ yi minimum yapan z yer değiştirmesi sorulur ise, elemanter extreman hesabından $z = s$ bulunur. Bunun için

$$\min_z N(B) = \boxed{N(A - sI) = \sqrt{N^2(A) - n|s|^2}}. \quad (31)$$

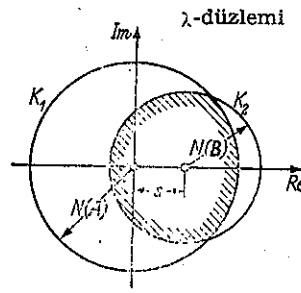
elde edilir.

0 merkezli, $N(A)$ yarı çaplı K , değerinin içinde veya çevresinde bulunan özdeğerler de s merkezli, $N(A - sI)$ yarı çaplı K daresi tarafından sınırlanır. Yani özdeğerler kesişen dairelerin "ortalasında" bulunurlar; bu ise, iki dairenin ortak bölgesidir, Şek. 16.1..

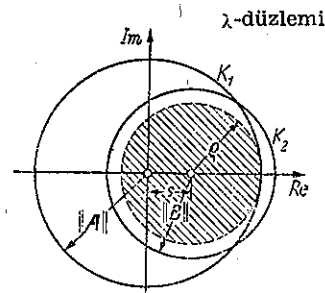
Bu durum bir diğer bölge darılmasına yol açar. z merkezli, $N(B)$ yarı çaplı "tüm" dairenin ortalaması sorulur ise, H. Heinrich'in gösterdiği gibi, küçültülmüş

$$\rho = \sqrt{\frac{n-2}{n} N(A - sI)}. \quad (32)$$

yarıçaplı bir daire elde edilir. Özdeğerlerin tümü bu dairenin içinde veya çevresindedir.



Şekil 16.1



Şekil 16.2

Örnek :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 \\ -2 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \quad \begin{aligned} Z(A) &= 8 & \lambda_1 &= 0,435 \\ S(A) &= 9 & \lambda_{2,3} &= 4,383 \pm 2,637 i \\ N(A) &= 8 & |\lambda| &= 5,11 \\ H(A) &= 6,49 \end{aligned}$$

$$A = 9, \quad s = 3$$

$$B = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 5 \\ -2 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{aligned} Z(B) &= 7 & \lambda_1 &= -2,565 \\ S(B) &= 6 & \lambda_{2,3} &= 1,283 \pm 2,637 i \\ N(B) &= 6,08 & |\lambda| &= 2,93 \\ H(B) &= 5,29 \\ \rho &= 4,97 \end{aligned}$$

$H(A)$ ve $H(B)$ spektral normları göz önüne alınmaz ise, özdeğerler 0 merkezli $R = 8$ yarı çaplı ve $s = 3$ merkezli $R = 6$ yarıçaplı dairelerin ortalamasıdır. $s = 3$ merkezli yarı çaplı daire ise, ilk iki dairenin ortalaması içindedir.

Özdeğerler için başka sınırlamalar, basit ve açık şekilde özdeğerler bölgesini daraltan ve kısmi bölgelere ayıran, S. Gerschgorin'in¹ teoreminde verilmiştir. Burada matrisin köşegen elemanları tam — genellikle kompleks — sayısal değeri ile birlikte hesaba katılacaktır. Geri kalan elemanlardan satır-veya sütun şeklinde toplam değerler bulunacaktır.

Bu teoremler şunlardır :

Teorem 6 : Genel kompleks matris $A = (a_{ik})$ nın özdeğerleri kompleks λ -düzleminin, a_{ii} merkezli ve

$$r_i = \sum_{k \neq i} |a_{ik}|, \quad (33a)$$

yani köşegen üzerinde olmayan elemanların değerlerinin satır toplamlarına eşit yarı çaplı n adet K_i' dairesinden oluşan G bölgesinin içinde veya kenarındadır. Aynı durum, yani a_{ii} merkezli ve

$$r' = \sum_{k \neq 1} |a_{ki}|, \quad (33b)$$

¹ Bakınız! Über die Abgrenzung der Eigenwerte einer Matrix. Bull. Acad. Sc. Leningrad 1931 s. 749-754. - İspatlara ait olarak bakınız. E. Bodewig. : Matrix calculus. [2]

yani, köşegen üzerinde olmayan elemanların değerlerinin sütun toplam-larına eşit yarı çaplı n adet K_i dairesinden oluşan G' bölgesi içinde de geçerlidir. Böylece özdeğerler G ve G' bölgelerinin ortalamasında yani iki bölgenin ortak kısmı bölgesindedirler.

Teorem 7 : Dairenin m adet ve, diğer daireler dışında bırakan bir H kıs-mî bölgesi oluştururlar ise, tam m adet özdeğer H da bulunur.

Köşegen matris halinde tüm yarı çaplar ve özdeğerler tamamen bel-dirir : $\lambda_i = \alpha_{ii}$. Köşegen dışındaki elemanların artması ile daireler de büyürler ve birbirlerini gittikçe örterler. Karşılıklı ayrıldıkları sürece herbirinde tam bir adet özdeğer bulunur, — Bu iki teorem Jacobi 'nin reel simetrik matrislere ait bilinen bir iterasyon metodu ile birlikte pay-dalıdır, bu metodda sürekli ortogonal dönüşüm (düzlemsel dönme) ile köşegen üzerinde olmayan elemanlar gittikçe küçülür, buna karşılık kö-şegen elemanları özdeğerlere yakınsarlar, 21.8. 'e bakınız.

16.5. Kondüsyon Sayıları.

Lineer denklem sistemi $Ax = a$, bilindiği tekil matris yani $\det A = 0$ halinde genellikle, keyfî sağ taraf a için çözülemez. Eğer, sayısal ola-rak sık rastlandığı gibi, determinant tam sıfır değil ancak değerce çok küçük ise, $D = |\det A|$ nın küçülmesi oramında sayısal çözümün güve-nirliği azalır. Yok etme işleminde büyük sayıların küçük farkları ortaya çıkar ve, hesabın sonucunu tamamen yanlış yapacak "hane kaybı" or-taya çıkar. Bu durumda "ill Conditioned" bir sistemden daha doğrusu "iU Conditioned" bir matrisden bahsedilir. Aynı güçlükler, matrisin öz-değer hesabında da belirir.

Sistemin yani matrisin bu bakımdan tutumunu belirtebilmek için bir "kondisyon ölçüsü" aranır ki bu, kondisyon hakkında bir fikir veren ve yok etme hesabından kolayca bulunan bir sayıdır. Bunun, izafi de-terminant değeri şeklinde alınması uygundur. Hadamard¹ a göre, bili-nen bir determinant tahminine dayanan bir kondisyon sayısı K^2 :

$$K_H = \frac{D}{V} \quad (34)$$

¹ Bakınız. E. Bodewig : Matrix Calculus [2]. s. 78.

² K yerine $1/K$ değerleride kondisyon sayısı kabul edilir.

olup burada

$$D = |\det A|, \quad (35)$$

$$V = a_1 a_2 \dots a_n, \quad (36)$$

$$a_i = |a^i| = \sqrt{\sum_k |a_{ik}|^2}$$

dır.

Burada V , a_i satır vektör değerlerinden oluşan şeklin hacmidir. Bu determinant tahmini uyarınca K_H aşağıdaki hipotezleri sağlar.

$$1 : 0 \leq K \leq 1 \quad (37)$$

$$\det A = 0 \text{ için } K = 0$$

$$\text{Uniter (reel ortogonal) matris için } K = 1$$

$$2 : a) \text{ Satır değişmesine göre } K \text{ invariant}$$

$$b) \text{ Satırların } p_i \neq 0 \text{ ile çarpılmasına göre } K \text{ invariant.}$$

$$K(PA) = K(A) \text{ mit } P = \text{Diag}(p_i), p_i \neq 0. \quad (38)$$

Bu durumda $K_H = 1$, ortogonal matris dışında tekil olmayan her köşegen matris ve ortogonal (ancak normlaştırılmış olması gereksiz) satır vektörlerine sahip matrisler için de geçerlidir. Lineer denklem sis-temlerinin yok etme yolu ile sayısal incelenmesi halinde, 2. hipotez de mantıkidir.

İkinci bir kondisyon sayısı, N indisi ile gösterilen Euklid matris normu $N(A) = N$ ya dayanır :

$$K_N = \frac{D}{(N\sqrt{n})^n} \quad (39)$$

Burada $N/\sqrt{n} = \bar{a}$, o_i satır vektörü uzunluklarının karesel ortala-ması yani payda ortalama hacim $V = \bar{a}^n$ dir. Bu sayı, K_H gibi 1 ve 2 a. hipotezini sağlar, ancak satır çarpanlarına göre invariantlık hipotezi 2 b yi sağlamaz. Geometrik ve aritmetik ortalama arasındaki bilinen eşit-sizlik nedeni ile

$$\sqrt[n]{V^2} \leq N^2/n,$$

$$V \leq (N/\sqrt{n})^n$$

ve dolayısı ile

$$K_N \leq K_H \quad (40)$$

Şimdi satır çarpanları olarak, keyfi $c > 0$ sabitli

$$p_i = c/a_i \quad (41)$$

seçilir yani tüm a_i satır vektörleri aynı c uzunlukda yapılır ise,

$$K_N(PA) = K_H(PA) = K_H(A) = K_H,$$

olur yani, (40) nedeni ile, bu satır normlaştırılmasında K_N kondisyon sayısı, mümkün tüm p_i satır çarpanlarına göre maksimum K_H değerini alır. — virgül kaydırma hesabında — p_i satır çarpanları hane kaybına etkili olmadığından, satır çarpanlarına göre invaryant Hadamard kondisyon sayısı K_H , kondisyon ölçeği olarak, özel bir anlam kazanır.

Üçüncü bir kondisyon sayısı, matrisin max. ve min. tekil değerlerinden faydalanır ve hesabı için,

$$K_0 = \kappa_1 / \kappa_n \quad (42)$$

özdeğer probleminin çözümünü gerektirir, burada

$$\begin{aligned} \kappa_1 &= \text{Min } \kappa_i & \kappa_n^2 &= \lambda_{A^*A} \\ \kappa_n &= \text{Max } \kappa_i \end{aligned} \quad (43)$$

Bu, 1 hipotezini sağlar, ancak 2 a, b için geçerli değildir.

K_0 yardımı ile lineer denklem sistemi

$$Ax = a \quad (44)$$

nin x çözümü için doğrudan doğruya bir hata tahmini yapılabilir. Sistemin sayısal çözümü, tam x çözümleri yerine, bilinmeyen z hata vektörü

$$\bar{x} = x + z \quad (45)$$

yaklaşık değerlerini verir. Bu yaklaşımların denklem sisteminde yerine konulması ile, sıfırlar yerine $r = (r_i)$ bulunur :

$$A\bar{x} - a = r. \quad (46)$$

x için (45) ve ayrıca (44) kullanılarak buradan z hatası için

$$Az = r, \quad (47)$$

sistemi çıkarkı bu ilerde (23.5), düzeltme için esas alınacaktır. Burada,

$$z = A^{-1}r$$

den normlara geçiş ile bulunan

$$|z| \leq \|A^{-1}\| |r| = \frac{1}{\kappa_1} |r| = \frac{1}{K_0} |r| \quad (48)$$

hata tahmini önemlidir ve burada invers matris için (26) normu vardır. Ayrıca

$$N/\sqrt{n} \leq \kappa_n \leq N \quad (22)$$

yardımla ile, şu kaba tahmin bulunur :

$$|z| \leq \frac{\sqrt{n} |r|}{K_0 N} \quad (49)$$

Eğer sistem iyi kondisyonlu ise, yani katsayılar determinantı fazla küçük değil ise küçük r kalanlarından küçük z hataları bulunur.

Kondisyon sayısı K_0 sayısal olarak büyük örnek ile ve ayrıca, kötü kondisyon halinde, oldukça kaba olarak elde edilebilir. J. Focke, K_0 yerine K_N konulan bir diğer tahmin vermiştir. Burada yalnız bir — küçük K değerleri için oldukça iyi — üst sınır verilmiştir :

$$|z| \leq \frac{\sqrt{3n} |r|}{K_N N} \quad (50)$$

16.6. Genel Bir Matrisde Asal Eksen Sistem Çifti.

Şimdi A yine keyfi kare, genellikle köşegen benzeri olmayan bir matris olsun. Bunun için Gauss dönüşümü

$$A^*A \text{ ve } AA^*$$

vasıtası ile iki hermitsel pozitif (yarı) —definit matris ve böylece A^*A nın u_i ve AA^* nın v_i özvektörlerinin iki üniter asal eksen sistemi verilmiştir. Bu vektörler, belirli şekilde birbirine bağlanabilir böylece A matrisine ait, “asal eksen sistem çifti” bulunmuş olur ki, bu ancak, reel halde (reel A) net bir anlam kazanır. Genellik için, incelemeler yine kompleks olarak yapılacaktır; reel A için $A^* = A'$ dür.

Hermitsel A^*A ve AA^* matrislerinin reel özdeğerleri 13.5. teorem 9 uyarınca birbirine eşittir ve bunlar, pozitif (yarı-definitlik nedeni ile, pozitif veya (tekil A halinde) sıfır da olurlar; dolayısı ile bunlar yine, $x_i^2 \geq 0$ şeklinde yazılacaktır. Bu durumda özdeğer denklemleri şöyledir :

$$A^*A u_i = x_i^2 u_i \quad (51a)$$

$$A A^* v_i = x_i^2 v_i \quad (51b)$$

Şimdi belirli, çok katlı özdeğerler halinde belirli oranda keyfi seçilen ve A^*A ya ait u_i üniter özvektörlerinden oluşan asal eksen sistemin-den hareket edelim ve, ilgili vektörler yanında, $x_i^2 \neq 0$ özdeğerlerini aşağıdaki gibi numaralanmış kabul edelim :

$$x_1^2 \geq x_2^2 \geq \dots \geq x_r^2 > 0, \quad x_{r+1}^2 = \dots = x_n^2 = 0;$$

yani A matrisinin rankı $r \leq n$ olsun. Şimdi, $x_i = +\sqrt{x_i^2}$ halinde,

$$A u_i = x_i v_i \quad i = 1, 2, \dots, r \quad (52a)$$

uyarınca, $x_i^2 \neq 0$ a ait u_i özvektörleri için yani v_i vektörlerini bulalım. (51 a) ya bağlı olarak, A^* ile çarpım halinde buradan

$$A^*A u_i = x_i^2 u_i = x_i A^* v_i$$

ve dolayısı ile, $x_i^2 > 0$ nedeni ile,

$$A^* v_i = x_i u_i \quad i = 1, 2, \dots, r. \quad (52b)$$

çıkar. Ayrıca $AA^* v_i = x_i A u_i = x_i^2 v_i$ elde edilirki böylece denklem (52a) uyarınca tanımlanan r adet v_i vektörleri gerçekten AA^* nın özvektör-

leridir. Bunlar da yine üniterdir; zira denklem (52 a) dan x_i, x_k sayıları için

$$x_i x_k v_i v_k = u_i A^* A u_k = x_k^2 u_i u_k$$

ve, $u_i^* u_k = \delta_{ik}$ nedeni ile,

$$v_i v_k = \delta_{ik}, \quad i, k = 1, 2, \dots, r. \quad (53)$$

bulunur. Şimdi üniter v_i lerden oluşan sistemi,

$$A^* v_s = 0 \quad (s = r + 1, r + 2, \dots, n), \quad (54)$$

nin çözümleri olarak, $(n - r)$ adet yine üniter v_s ile genişletelim ki böylece (52 a), (52 b) genel geçerli olur. $v_j (j = 1, 2, \dots, n)$ lerden oluşan tüm vektör sistemi de yine üniterdir; zira denklem (52 a) nın v_s^* ile çarpılması ve denklem (54) ün göz önüne alınması ile

$$v_s^* A u_i = x_i v_s^* v_i = 0, \quad s \neq i \text{ için}$$

bulunur. Böylece, $U^*U = V^*V = I$ halinde,

$$\left. \begin{aligned} U &= (u_1, \dots, u_n) \\ V &= (v_1, \dots, v_n) \end{aligned} \right\} \quad (55)$$

iki üniter matris olur. Bunlar ve köşegen matris $K = \text{Diag}(x_i)$ yardımı ile (52 a), (52 b) matris şeklinde yazılır.

$$AU = VK \quad (56a)$$

$$A^*V = UK \quad (56b)$$

Buradan “asal eksen dönüşümünün genelleştirilmesi” olarak şu çıkar :

Teorem 8 : Keyfi, kare matris A için, A yı

$$V^* A U = K \quad (57)$$

uyarınca reel “köşegen şekle” dönüştüren U, V üniter matrisleri vardır. Köşegen matris $K = \text{Diag}(x_i)$ de, A^*A ve AA^* nın özdeğerlerin po-

zitif kesilen $\lambda_i^2 \geq 0$ kare kökleri vardır ve U_i, V_i üniter matrislerinin u_i, v_i sütunları A^*A veya AA^* nın özvektörleridir.

16.7. Dönme Uzaması Olarak Çarpım. Matrislerin Kare Kökünün Alınması.

(51) veya (56) denklemleri reel halde, başka bağıntıları götüren doğrudan doğruya bir geometrik anlam taşırlar. Matrislerin önce reel sayalım ve bundan sonra kompleks şekle sokalım. Simetrik matris A^*A nın reel ortonormlaştırılmış u_i özvektörlerinden oluşan U ortogonal sisteme uygulanan, reel A matrisli bir lineer dönüşüm, (51a) ve (56a) uyarınca bu sistemi yine ortogonal fakat reel uzama ölçeği $\lambda_i \geq 0$ kadar uzamış $\lambda_i v_i$ vektörlerinden oluşan yeni bir sisteme götürür. Yani A dönüşüm bir dönme uzaması yani u_i lerin $\lambda_i u_i$ ye uzamasını ve bundan sonra $\lambda_i v_i$ ye dönmeyi veya, önce u_i lerin v_i ye dönmelerini ve sonra $\lambda_i v_i$ uzamayı gösterir. Buna göre A ,

$$\boxed{A = D S_1} \quad \text{ve} \quad \boxed{A = S_2 D} \quad (58)$$

çarpım şekillerinde gösterilebilir; burada S_1 veya S_2 , hermitsel (reel simetrik) pozitif (yarı)-definit "uzama matrisi" ve D , üniter (reel ortogonal) "dönme matrisi" dir. S_1 matrisi u_i leri, $\lambda_i u_i$ ye uzatır yani u_i asal eksen sisteminde $K = \text{Diag}(\lambda_i)$ köşegen şeklini alır. S_2 matrisi aynı işi v_i sisteminde yapar. Böylece S_1 ve S_2 ,

$$\boxed{S_1 = U K U^*}, \quad \boxed{S_2 = V K V^*} \quad (59)$$

asal eksen dönüşümlerine uyarlar. D matrisi ise u_i leri v_i lere döndürür, yani

$$\boxed{\begin{matrix} D U = V \\ D = V U^* \end{matrix}} \quad (60)$$

bağıntısını sağlar. (59) ve (60) denklemleri yardımı ile, denklem (58) den gerçekte

$$A = D S_1 = V U^* U L U^* = V K U^*$$

$$A = S_2 D = V K V^* V U^* = V K U^*,$$

yani iki defasında da denklem (57) deki dönüşümün tersi bulunur.

Teorem 9 : Keyfi kare matris A , bir üniter matris D ile bir hermitsel pozitif (yarı)-definit matris S_1 veya S_2 nin (58) şeklinde çarpımı olarak gösterilebilir. Üniter matris D , A^*A matrisinin u_i üniter özvektörlerinden oluşan U sistemini, AA^* nın v_i üniter özvektörlerinden oluşan V sistemine, denklem (60), dönüştürür. A^*A ve AA^* nın $\lambda_i^2 \geq 0$ özdeğerlerinin köşegen matrisi $K^2 = \text{Diag}(\lambda_i^2)$ ye sahip denklem (59) ile tanımlanan hermitsel S_1 ve S_2 matrisleri, bu iki matrisin kare kökleridir, yani

$$\boxed{S_1^2 = A^* A} \quad \text{ve} \quad \boxed{S_2^2 = A A^*} \quad (61)$$

bağıntısını sağlarlar.

Kolayca ispat edilebilen bu son bağıntı, yalnız pozitif (yarı)-definitlik istenen hermitsel bir matrisin genel kare kökünün alınmasını gerektirir. Gerçekten şu bulunur :

Teorem 10 : Pozitif (yarı)-definit, hermitsel matris H için, keyfi pozitif tam sayı R_m halinde,

$$\boxed{R_m^m = H} \quad (62)$$

olacak şekilde bir pozitif (yarı)-definit matris R_m vardır. Bu durumda R_m için

$$\boxed{R_m = {}^m\sqrt{H}} \quad (63)$$

yazılır. H , $\lambda_i \geq 0$ özdeğerlerine sahip ise, H nın özvektörlerinden oluşan üniter matris X halinde,

$$X^* H X = \Lambda = \text{Diag}(\lambda_i).$$

asal eksen dönüşümü geçerlidir. Şimdi pozitif kabul edilen λ_i lerin m -inci kökleri

$$\boxed{\omega_{mi} = {}^m\sqrt{\lambda_i}} \geq 0$$

ile gösterilir ve bunlar,

$$\Omega_m = \text{Diag}(\omega_{mi}) = {}^m\sqrt{\Lambda}, \quad \Omega_m^m = V \quad \text{olmak üzere}$$

köşegen matrisinde toplanır ise, aranan matris olarak

$$R_m = X \Omega_m X^* \quad (64)$$

bulunur. Zira böylece

$$\begin{aligned} R_m &= (X \Omega_m X^*) (X \Omega_m X^*) \dots (X \Omega_m X^*) \quad (m \text{ Klammer}) \\ &= X \Omega_m^m X^* = X \Lambda X^* = H. \end{aligned}$$

olur.

17. Özel Matrislerin Özdeğerleri.

Bugün uygulamalarda önemli rol oynayan çok sayıda özel matrislerden küçük bir kısmı bu — fazla gerekli olmayan — bölümde verilecektir.

17.1. Negatif Olmayan Matrisler. Kapsam Teoremleri.

Bir çok uygulamalarda, elemanları pozitif veya negatif olmayan $a_{ik} > 0$ veya ≥ 0 matrisleri ortaya çıkar. Böyle bir matrise pozitif veya negatif olmayan matris denir, $A > 0$ veya ≥ 0 . Bu matrislerin özellikleri Frobenius ve Wielandt¹ tarafından incelenmiştir. Bunların en önemlisi kısmen, ispatsız özetlenecektir.

A matrisi için belirli bir hipotez daha yapılacaktır: Bu matris "parçalanmaz" olsun yani bu matris ve A_{11} , A_{22} kare alt matrisli

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix}$$

şeklini alabilir, ne de satırların ve sütunların değiştirilmesi ile bu şekle sokulabilir.

Teorem 1: Parçalanmayan, negatif olmayan A matrisinin özdeğerleri arasında tek katlı bir reel, pozitif $\lambda = \kappa$ değeri yani "maksimum kök" vardır ki, bunu, miktar bakımından matrisin başka hiç bir özdeğeri aşamaz:

$$|\lambda_i| \leq \kappa \quad (1)$$

¹ Bakınız Frobenius G.: Über Matrizen aus positiven bzw. nicht negativen Elementen. S. B. preuß. Akad. Wiss. (1908) S. 471 - 476, (1909). S. 514 - 518, (1912). S. 456 dan 477 ye — WIGLANT, H.: Unserlegbare, nicht negative Matrizen. Bd. 52 (1950), S. 642 - 648.

$\lambda = \kappa$ için pozitif özvektör $x > 0$ vardır ve bu, yalnız $\kappa_i > 0$ pozitif bileşenlerine sahiptir. Negatif olmayan özvektörün var olmadığı tek özdeğer maksimum kökdür.

Teorem 2: Keyfi pozitif $u_i > 0$ bileşenli u vektörü için, parçalanamayan, negatif olmayan A matrisi yardımı ile, $v_i > 0$ bileşenli dönüşmüş $v = Au$ vektörü ve dolayısı ile

$$q_i = v_i/u_i, \quad (2)$$

oranları yazılır ise A'nın maksimal kökü κ min. ve max. q_i oranları tarafından kapsanır:

$$q_{\min} \leq \kappa \leq q_{\max} \quad (3)$$

Köşegen matris $Q = \text{Diag}(q_i)$ için, denklem (2) nedeni ile

$$v = Au = Qu. \quad (4)$$

geçerlidir.

$$A'y = \kappa y$$

uyarınca, transpoze edilmiş matris A' için, negatif olmayan y özvektörlü maksimal kök κ vardır. Denklem (4) den

$$\begin{aligned} u' Q' y - u' A' y &= 0 = u' Q y - u' \kappa y \\ u' (Q - \kappa I) y &= 0 \end{aligned} \quad (5)$$

veya, ayrıntılı olarak,

$$u_1 y_1 (q_1 - \kappa) + u_2 y_2 (q_2 - \kappa) + \dots + u_n y_n (q_n - \kappa) = 0. \quad (5')$$

bulunur. $u_i > 0$, $y_i > 0$ olduğundan bu denklem ancak $(q_i - \kappa)$ çarpanlarının hepsinin pozitif veya negatif olmaması halinde geçerlidir. Yani

$$q_{\min} - \kappa \geq 0, \quad (3a)$$

$$q_{\max} - \kappa \leq 0, \quad (3b)$$

olmalıdır; burada eşitlik işareti olarak u nun, $\lambda = \kappa$ e ait özdeğer olması halinde, ortaya çıkabilir. Böylece denklem (3) deki tahmin ispat edilmiş olur.

Teorem, negatif olmayan bir matrisin maksimal kökünü gittikçe darlaşan sınırlara sokmak için kullanılır; bu maksad ile ilk önce keyfi kabul edilen pozitif vektör u o şekilde değiştirilmelidir ki $q_{\min}$ ve $q_{\max}$ sınırları gittikçe yaklaşsınlar. Bu, 14.4. de tanımlanan iterasyon metodu ile kombine edilebilir, yani v vektörü, hesabın tekrarlandığı bir düzeltilmiş u vektörü sayılabilir.

Uygulamalarda, pozitif köşegen elemanları halinde elemanların işaretleri "satranç tahtası şeklinde" yayıldığı matrislere de çok sık rastlanır :

$$\begin{array}{cccc} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \end{array}$$

Her ikinci satır ve sütunda işaret değiştirilmesi ile matris, negatif olmayan matrise dönüşür. Genel olarak bir A matrisinden "satranç tahtası - dönüşümü"nden bulunan matris A^+ ve bir x vektöründen, 2, 4, ... bileşende işaret değişiminden bulunan vektör x^+ ile gösterilir ise, kolayca görüleceği gibi, şu geçerlidir : Aynı λ özdeğerleri halinde,

$$Ax = \lambda x \quad (6a)$$

özdeğer problemine

$$A^+x^+ = \lambda x^+ \quad (6b)$$

problemi aittir. Yani Satranç tahtası şeklinde dağılmış işaretli, parçalanmayan bir matris için, $+ - + \dots$ gibi değişen işaretli bileşenlere sahip bir özvektörlü özdeğer olarak yine pozitif bir maksimum kök vardır.

Kapsam teoremi 2 ye benzer bir teorem, "hermitsel matris" A ve, pozitif $D = \text{Diag}(d_i)$, $d_i > 0$ köşegen matrisli genel özdeğer problemi yani "ara basamak problemi" (özel problem $Ax = \lambda x$ ile genel problem $Ax = \lambda Bx$ in ortası) için Collatz¹ tarafından verilmiştir :

$$Ax = \lambda D x \quad (7)$$

1. Bakınız; Collatz, L.: Eigenwertaufzaben [3], S. 304 - 309.

Teorem 3 : A , hermitsel bir matris ve D , $d_i > 0$ elemanlı reel, pozitif bir köşegen matris ise, sıfır olmayan $u_i \neq 0$ bileşenli keyfi u vektöründen, v_i bileşenli, dönüşmüş $v = Au$ vektörü ve dolayısı ile

$$q_i = \frac{v_i}{d_i u_i} \quad (8)$$

oranları oluştururlar ise, min. ve max. oranlar, denklem (7) deki reel λ_i özdeğerlerinden en aşağı bir tanesini kapsar :

$$q_{\min} \leq \lambda_i \leq q_{\max} \quad (9)$$

Denklem (9) un kapsadığı özdeğerin numarası hakkında burada bir şey söylenemez. Bu teoremde, u nun uygun seçimi ile, bu defa keyfi λ_j özdeğerinin sınırlandırılmasında kinetik olarak kullanılır, Ek 1'e bakınız.

17.2. Sütun Toplamı Sabiti ve Stokastik Matrisler.

İhtimaller hesabında,

$$\sigma_k = a_{1k} + a_{2k} + \dots + a_{nk}$$

sütun toplamı her sütun için aynı, $\sigma_k = \sigma$ olan A matrislerine de rastlanır. Bu tip matrisler için şu geçerlidir :

Teorem 4 : Sütun toplamı σ olan, sütun toplamı sabit, kare matris A , σ özdeğerine sahiptir. Pozitif tam sayı m kuvvetli A^m matrisi yine sütun toplamı sabittir ve sütun toplamı ile özdeğeri σ^m dir. A , tekil olmayan matris ise A^{-1} de, sütun toplamı sabittir ve sütun toplamı ve özdeğeri $1/\sigma$ dir.

Sütun toplamı sabit, kare A ve B matrislerinin toplamı ve çarpımı yine sütun toplamı sabit tipinde olup matrislerin sütun toplamı için

$$\sigma_{A+B} = \sigma_A + \sigma_B \quad (10a)$$

$$\sigma_{AB} = \sigma_{BA} = \sigma_A \cdot \sigma_B \quad (10b)$$

geçerlidir.

Birinci ifade, σ özdeğeri halinde A 'nın özvektörü olan bir $s' = (1, 1, \dots, 1)$ vektöründen çıkar :

$$A' s = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & \dots & a_{n2} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} + \dots + a_{n1} \\ a_{12} + \dots + a_{n2} \\ \dots \\ a_{1n} + \dots + a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma \\ \sigma \\ \vdots \\ \sigma \end{pmatrix} = \sigma \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \sigma s$$

yani σ , A nın ve dolayısı ile A' nın özdeğeridir. Bu durumda aynı özvektör halinde, A^2 için özdeğer ve sütun toplamı olarak σ^2 bulunur. Aynı şekilde $A's = \sigma s$ den, $1/\sigma s = A^{-1'} s$ çıkar. — Denklem (10a) doğrudan doğruya görülebilir. Denklem (10b) ise şöyle bulunur: A nın a^i satır vektörleri ve B nin b_k sütunlarından $AB = (a^i b_k)$ ve dolayısı ile AB nın k nıncı sütun toplamı bulunur:

$$\begin{aligned} \sigma_{AB} &= a^1 b_k + \dots + a^n b_k \\ &= a_{11} b_{1k} + \dots + a_{1n} b_{nk} \\ &\quad + \dots \\ &\quad + a_{n1} b_{1k} + \dots + a_{nn} b_{nk} \\ &= a_A (b_{1k} + \dots + b_{nk}) = \sigma_A \cdot \sigma_B \end{aligned}$$

İhtimaller hesabında¹ ortaya çıkan sütun toplamı sabit matrisler reeldir ve negatif olmayandır ve sütun toplamı 1 dir: her sütunun elemanları, toplamı 1 olan $a_{ik} \geq 0$ ihtimallerini gösterirler. Teorem 1, 2 ve 4 den anlaşılacağı gibi matris, tek katlı özdeğer olarak, $\lambda_1 = \sigma = 1$ maksimal köküne sahiptir. Burada şu hal önemlidir: Artan ν halinde A^ν matris kuvvetleri, çok sayıda eşit sütunlara sahip bir A^∞ matrisine yakınsarlar.

Teorem 5: A , sabit $\sigma=1$ sütun toplamı negatif olmayan, parçalanmayan bir matris ise ve maksimum kök $\lambda_1 = 1$ dışında A nın tüm λ_i özdeğerlerinin değeri 1 den küçük yani

$$|\lambda_1| = 1, |\lambda_i| < 1, \quad i = 2, 3, \dots, n \quad \text{icin} \quad (11)$$

ise, artan ν halinde A^ν matris kuvvetleri diğisi, sütunların tümü birbirine uyan, yine sütun toplamı sabit bir matrise yakınsar:

1. Bakınız; SCHULZ, G.: Grenzwertsätze für die Wahrscheinlichkeiten verketteter Ereignisse. Deutsche Math. Bd. 1 (1936) s. 665-699.

$$A^\nu \rightarrow A^\infty, \quad \nu \rightarrow \infty \quad \text{icin} \quad (12)$$

$$A^\infty = (a, a, \dots, a) \quad (13)$$

Bu sınır matrisinin a sütunu, A nın $\lambda_1 = 1$ e ait ve 1 sütun toplamı normlaştırılmış özvektörüne eşittir.

$$Aa = a \quad (14)$$

Son denklem, (13) nedeni ile,

$$AA^\infty = A^\infty \quad (15)$$

ile aynı anlamlıdır. 1 ranklı matris olarak A^∞ matrisinin, $\lambda_1 = \sigma = 1$ özdeğeri dışında, $(n-1)$ katlı $\lambda = 0$ özdeğeri vardır. — Şimdi, denklem (14) ile tanımlanan bu A^∞ matrisinden,

$$B = A - A^\infty, \quad (16)$$

matrisi bulunur ki bunun için, denklem (15) nedeni ile,

$$\left. \begin{aligned} B^2 &= A^2 - A^\infty \\ B^3 &= A^3 - A^\infty \\ &\dots \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

geçerlidir. Buna göre B nin

$$0, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n, \quad (18)$$

özdeğerlerine yani, $\lambda_1 = 1$ dışında A nın özdeğerlerine yani değeri < 1 olan çok sayıda özdeğerle sahip olduğu gösterilebilir. Transpoze edilmiş A' , A^∞ ve B' matrislerinin özvektörleri aynıdır. Önce, $s' = (1, 1, \dots, 1)$ vektörü için

$$\begin{aligned} s'A &= s' & \lambda_A &= 1 \\ s'A^\infty &= s' & \lambda_{A^\infty} &= 1 \\ s'(A - A^\infty) &= s'B = 0, & \lambda_B &= 0. \end{aligned}$$

bulunur. Şimdi $\lambda \neq \lambda_1$, A nın bir özdeğeri ve y , A' nın ilgili özvektörü yani $y'A = \lambda y'$ ise, (15) nedeni ile, A^∞ ile sağdan çarpımdan

$$y' A A^\infty = y' A^\infty = \lambda y' A^\infty$$

ve buradan, $\lambda \neq 1$ nedeni ile, $y' A^\infty = 0$ çıkar. Yani y 0 özdeğerli A^∞ un özvektörüdür. Ancak bu durumda

$$\begin{aligned} y' A &= \lambda y' \\ y' A^\infty &= 0 \\ \hline y' (A - A^\infty) &= y' B = \lambda y' \end{aligned}$$

bulunur. Yani B matrisi, değerleri < 1 olan (18) özdeğerlerine sahiptir. Ancak bu tip bir matris için, (20.3.) de görüleceği gibi, geometrik matris serisi

$$B + B^2 + B^3 + \dots,$$

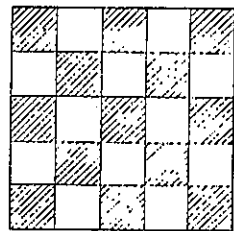
yakınsaktır, yani

$$B^v = A^v - A^\infty \rightarrow 0, \quad v \rightarrow \infty \text{ için}$$

olur, böylece teorem ispatlanır.

17.3. Satranç Tahtası Matrisleri.

Bunlar kareleri, satranç tahtası şeklinde, sıfır elemanlar ve genellikle sıfır olmayan elemanlar tarafından doldurulan matrislerdir. Burada köşegen elemanlarının, sıfırdan farklı veya sıfır elemanlar olmasına göre iki hal ayırıldı.



Şekil: 17.1
Satranç tahtası
matris, 1. durum

I. köşegen elemanları sıfır değildir, Şek. 17.1. Özdeğer özellikleri saklı kalmak üzere, satırların ve sütunların değiştirilmesi halinde n -sıralı başlangıç matrisi A ,

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix} \quad (19)$$

şekline girer, burada A_1 , s -sıralı, kare alt matris ve A_2 , $(n-s)$ sıralı alt matrisdir. Buna göre

$$s = n - s = \frac{n}{2}$$

çift n ler için

$$s = \frac{n+1}{2}, \quad n-s = \frac{n-1}{2} = s-1 \quad \text{Tek } n \text{ ler için}$$

Karakteristik matris ve karakteristik determinant şu şekilde "dejenere" olur :

$$\begin{aligned} |A - \lambda I| &= |A_1 - \lambda I_1| \cdot |A_2 - \lambda I_2| = p_1(\lambda) p_2(\lambda) = 0 \\ p_1(\lambda) &= 0 \rightarrow \lambda = \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s \\ p_2(\lambda) &= 0 \rightarrow \lambda = \lambda_{s+1}, \lambda_{s+2}, \dots, \lambda_n \end{aligned}$$

A_1 de, s -sıralı $y_1, y_2, \dots, y_s$.

A_2 de, $(n-s) -$ sıralı $z_{s+1}, z_{s+2}, \dots, z_n$ özvektörleri vardır ve bunların tümünün lineer bağımsız olması gerekmez. $\widehat{A}$ toplam matrisinin y_i ve z_i halinde, lineer bağımsız olan n -sıralı özvektörleri vardır :

$$\widehat{x}_i = \begin{pmatrix} y_i \\ 0 \end{pmatrix}, \quad i = [1, 2, \dots, s], \quad \widehat{x}_i = \begin{pmatrix} 0 \\ z_i \end{pmatrix}, \quad i = [s+1, \dots, n], \quad (20)$$

A başlangıç matrisine ait x_i vektörleri x_i den, bileşenlerin yerleri değiştirilerek bulunur ve böylece, A_1 ve A_2 ne ait λ_i özdeğerlerinde aynı değerler olmadığı sürece, bu özvektörler değişen sıfır bileşenlere sahiptirler; bu durumda, tüm kutuları dolu olan, A_1 ve A_2 ye ait özvektörlerin lineer kombinasyonu mümkün olur.

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & 0 & 4 & 0 \\ 8 & 0 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ -6 & 0 & 2 & 0 & 6 \end{pmatrix}, \quad \widehat{A} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 8 & 0 & -5 & 0 & 0 \\ -6 & 2 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \\ |A_1 - \lambda I| &= (\lambda - 1)(\lambda - 2)^2 = 0, \quad \lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = \lambda_3 = 2 \\ y_1 &= \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad y_{2,3} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

İki katlı kök $\lambda = 2$ için yalnız bir lineer bağımsız y özvektörü vardır.

$$|A_2 - \lambda I| = (\lambda - 1)(\lambda - 6) = 0, \quad \lambda_4 = 1, \quad \lambda_5 = 6$$

$$\begin{aligned} z_4 &= \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad z_5 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} \\ x_1 &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad x_{2,3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad x_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Burada $x = ax_1 + bx_4$, ortak $\lambda = 1$ kökünün özvektörleridir ve bunun için ayrıca, serbest a, b sabitli, iki boyutlu lineer vektör sistemi vardır.

$$x = \begin{pmatrix} -b \\ a \\ b \\ -2a \\ 2a \end{pmatrix}$$

Kontrol :

					x_1	$x_{2,3}$	x_4	x_5	x
					1	1	0	0	a
					0	0	1	4	b
					-2	-1	0	0	$-2a$
					0	0	-1	1	$-b$
					2	2	0	0	$2a$
-1	0	1	0	2	1	2	0	0	a
0	5	0	4	0	0	0	1	24	b
8	0	0	0	-5	-2	-2	0	0	$-2a$
0	1	0	2	0	0	0	-1	6	$-b$
-6	0	2	0	6	2	4	0	0	$2a$
					$\lambda =$	1	2	1	6

II. Köşegen elemanları sıfırdır, Şek. 17.2.

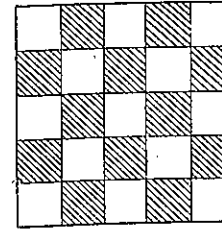
Satır ve sütun değişimi ile A , iki kare, s - ve $(n-s)$ - sıralı sıfır matrisine sahip

$$A = \begin{pmatrix} O & A_1 \\ A_2 & O \end{pmatrix} \quad (21)$$

şekline dönüşür. Karakteristik denklem dejenere olmaz, ancak aynı x_i özvektörleri halinde $x_i = \lambda_i^2$ özdeğerlerine sahip ve A nın benzeri alınarak bulunan matris

$$B = \widehat{A}^2 = \begin{pmatrix} A_1 A_2 & O \\ O & A_2 A_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_1 & O \\ O & B_2 \end{pmatrix} \quad (22)$$

için bu durum bahis konusudur. Bu matris de yine denklem (19) şeklindedir. Yalnız şu özellik vardır :



Şekil : 17.2
Satranç tahtası
matris, 2. durum.

$$\begin{cases} B_1 = A_1 A_2 \\ B_2 = A_2 A_1 \end{cases} \quad (23)$$

I. deki s - ve $(n-s)$ - sıralı olanlar gibi B_1 s -sıralı, B_2 $(n-s)$ - sıralı olan bu iki matris, 13.7. teorem 13 ve 14 uyarınca, tek sayı n halinde, B_1 in ek özdeğeri olarak $x_0 = 0$ dışında aynı x_i özdeğerlerine sahiptir. Bu durumda

$$B_2 z = x z \rightarrow x_i, z_i \quad (24)$$

ve, $A_1 z \neq 0$ halinde

$$A_1 z_i = y_i \rightarrow y_i, \quad (25)$$

bulunur; bunun için tek sayı n halinde ayrıca

$$A_2 y_0 = 0 \rightarrow y_0, \quad x_0 = 0 \text{ ile birlikte} \quad (26)$$

çıkar.

Şimdi $x \neq 0$ yani $A_2 A_1$ tekil olmayan matris olsun ve $A_1 z = y \neq 0$ dir. Böylece

$$A_2 y = A_2 A_1 z = x z \quad (27)$$

bulunur. $\widehat{A}$ nın x özvektörü için

$$x = \begin{pmatrix} a & y \\ b & z \end{pmatrix}$$

yazılır ve

$$\widehat{A} x = \begin{pmatrix} O & A_1 \\ A_2 & O \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & y \\ b & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b A_1 z \\ a A_2 y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b y \\ x a z \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} a & y \\ b & z \end{pmatrix}$$

özdeğer denkleminde yerine konulur ise, a, b sabitleri için

$$\lambda a = b$$

$$\lambda b = x a,$$

koşulu, buradan da keyfi a halinde

$$\lambda^2 = \kappa, \quad \lambda = \pm \sqrt{\kappa} \quad (28)$$

çıkar. $a = 1$ konulur ise, $\kappa_1 \neq 0$ a ait iki özvektör olarak

$$\widehat{\mathbf{x}}_{i1} = \begin{pmatrix} \mathbf{y}_i \\ \lambda_i \mathbf{z}_i \end{pmatrix}, \quad \widehat{\mathbf{x}}_{i2} = \begin{pmatrix} \mathbf{y}_i \\ -\lambda_i \mathbf{z}_i \end{pmatrix} \quad (29)$$

bulunur, burada $\lambda_i = +\sqrt{\kappa_i}$ dir; ayrıca, tek sayı n halinde

$$\widehat{\mathbf{x}}_0 = \begin{pmatrix} \mathbf{y}_0 \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \quad (29a)$$

olur. $\mathbf{x}$ ve $\mathbf{A}$ vektörleri $\mathbf{x}$ den, yer değiştirme yolu ile bulunur. Örneğin $n = 5$ için

$$\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} y_1 \\ \lambda z_1 \\ y_2 \\ z_2 \\ y_3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} y_1 \\ -\lambda z_1 \\ y_2 \\ -\lambda z_2 \\ y_3 \end{pmatrix}.$$

Ancak özdeğerlerden biri $\kappa_1 = 0$ ise $\mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2$ ve $\mathbf{A}_2 \mathbf{A}_1$ tekil olur. Bu halde, yukardaki gibi $\widehat{\mathbf{x}}$ ifadesinden anlaşılacağı gibi, yalnız,

$$\begin{cases} \mathbf{A}_1 \mathbf{z} = \mathbf{0} \\ \mathbf{A}_2 \mathbf{y} = \mathbf{0} \end{cases} \quad (30)$$

homojen denklemlerini sağlayan $\mathbf{y}, \mathbf{z}$ vektörleri mümkündür ve denklemlerden hiç olmazsa biri, sıfırdan farklı bir çözüm vektörüne sahip olmalıdır. Böylece, keyfî a, b sabitleri halinde,

$$\widehat{\mathbf{x}} = a \begin{pmatrix} \mathbf{y} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \mathbf{y} \\ b \mathbf{z} \end{pmatrix} \quad (31)$$

olur. Ancak $\mathbf{y}, \mathbf{z}$ vektörlerinden bir tanesi sıfırdan farklı ise $\mathbf{x}$, yalnız bu vektörü kapsar ve a veya $b = 1$ alınabilir.

Örnek :

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \widehat{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{B}_1 = \mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 7 & 6 & -1 \\ -4 & -4 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}_2 = \mathbf{A}_2 \mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} 9 & 5 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\kappa^2 - 8\kappa - 9 = (\kappa - 9)(\kappa + 1) = 0$$

$$\kappa_1 = 9, \kappa_2 = -1, \quad \kappa_0 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \pm 3, \quad \lambda_{3,4} = \pm i, \quad \lambda_5 = 0$$

$$\mathbf{z}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{z}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{y}_1 = \mathbf{A}_1 \mathbf{z}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y}_2 = \mathbf{A}_1 \mathbf{z}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y}_0 = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Böylece $\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ kontrolü ile birlikte, $\mathbf{A}$ nın 5 özvektörü şöyle bulunur.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
	1	1	1	1	-2
	3	-3	i	-i	0
	3	3	-1	-1	3
	0	0	-2i	2i	0
	-2	-2	0	0	4
0	1	0	0	0	0
1	0	2	0	-1	0
0	3	0	2	0	0
2	0	0	0	1	0
0	-2	0	-1	0	0
$\lambda =$	3	-3	i	-i	0

17.4. Diferans Matrisler.

Diferansiyel denklemlerin lineer sınır- ve özdeğer problemleri için, diferans metoduna (türevler yerine diferans oranları konulması) bağlı olarak

$$A = \begin{pmatrix} a & -1 & & & \\ -1 & a & -1 & & \\ & -1 & a & -1 & \\ & & -1 & a & -1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ & & & -1 & a & -1 \\ & & & & -1 & a \end{pmatrix} \quad (32)$$

tipinde matrisler ortaya çıkar, burada boş yerlerde sıfırlar vardır. Bu tip "diferans matrisler", yalnız a yı ve n sayısına bağlı özdeğerlerin ve özvektörlerin sayısal hesabını mümkün kılarlar. Yeterki k .nıncı özdeğer denklemi

$$-x_{k-1} + (a - \lambda) x_k - x_{k+1} = 0 \quad (33)$$

bir (homojen, lineer) "diferans denklemi" dir ve bu, bilinmeyen r halinde,

$$x_k = r^k \quad (34)$$

yazılarak sağlanır; bu arada r için şu karakteristik denklem bulunur :

$$r^2 - (a - \lambda) r + 1 = 0. \quad (35)$$

Şimdi

$$a - \lambda = 2 \cos \varphi \quad (36)$$

alınır ise r çözümleri

$$r = \cos \varphi \pm i \sin \varphi = e^{\pm i\varphi}$$

şeklinde ve x_k için :

$$x_k = A \cos k\varphi + B \sin k\varphi \quad (37)$$

bulunur; buradaki serbest A, B sabitlerinin bulunması için, problemin "sınır koşullarından" faydalanılır, bunlar denklem (33) şeklinde olmayan birinci ve sonuncu özdeğer problemleridir :

$$\begin{aligned} 1. \text{ denklem: } (a - \lambda) x_1 - x_2 &= 0, \\ n. \text{ denklem: } -x_{n-1} + (a - \lambda) x_n &= 0. \end{aligned}$$

(36) ve (37) yerine konularak

$$\begin{aligned} 1. \text{ Denklem: } 2 \cos \varphi (A \cos \varphi + B \sin \varphi) - A \cos 2\varphi - B \sin 2\varphi &= 0 \\ \text{veya dönüşüm sonucunda} \end{aligned}$$

$$A \cdot 1 + B \cdot 0 = 0,$$

buradan da, keyfi B halinde $A = 0$ çıkar. Yani

$$x_k = \sin k\varphi. \quad (38)$$

olur. Böylece n .ninci denklemden :

$$\begin{aligned} -\sin(n-1)\varphi + 2 \cos \varphi \sin n\varphi &= 0 \quad \text{veya} \\ \sin(n+1)\varphi &= 0, \end{aligned} \quad (39)$$

buradan da sınır değer probleminin özdeğerleri olarak

$$\varphi_j = \frac{j\pi}{n+1} \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (40)$$

açıları ve denklem (36) uyarınca, A nın λ_j özdeğerleri olarak

$$\lambda_j = a - 2 \cos \varphi_j \quad (41)$$

çıkar. Yani x_j özvektörünün bileşenleri

$$x_{kj} = \sin \frac{k j \pi}{n+1} \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (42)$$

olur. Böylece tam n adet farklı λ_j özdeğeri ve n adet lineer bağımsız özdeğer elde edilir. Reel a halinde çözümler reel dir. a yalnız, λ özdeğerlerinde vardır; özvektörler buna bağlı değildir. Bunlar açık olarak şöyle yazılabilir :

$$x_j = \begin{pmatrix} \sin \frac{1}{n+1} j\pi \\ \sin \frac{2}{n+1} j\pi \\ \dots \\ \sin \frac{n}{n+1} j\pi \end{pmatrix}$$

Sabit j için, süreklilik üzerine kaydedilen x_{kj} bileşenleri bir sinüs eğrisinin noktalarını verirler ki bu — ilgili olmayan — $k = 0$ ve $k = n+1$

değerleri için sıfırdan geçen ve bu değerler arasında $j/2$ adet periyoda sahiptir.

Örnek :

$$a = 2, \quad n = 5$$

$$\varphi_j = j \frac{\pi}{6} = j 30^\circ \quad \lambda_j = 2 (1 - \cos j 30^\circ)$$

$$x_{kj} = \sin k \varphi_j = \sin k j 30^\circ$$

k	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
1	0,5	0,866	1	0,866	0,5
2	0,866	0,866	0	-0,866	-0,866
3	1	0	-1	0	1
4	0,866	-0,866	0	0,866	-0,866
5	0,5	-0,866	1	-0,866	0,5
$\varphi_j =$	30°	60°	90°	120°	150°
$\lambda_j =$	$2 - \sqrt{3}$	1	2	3	$2 + \sqrt{3}$

17.5. Dairesel Tipde Matrisler.

Diferans matrislerine benzer bu matrisler sütunları, birinciden dairesel değişme ile bulunan matrisler n-sıralı matrisin, n adet a_k elemanlarına sahip birinci satırı

$$a^1 = (a_0 \ a_1 \ a_2 \ \dots \ a_{n-1}) \quad (43)$$

ise, matris şu şekli alır :

$$A = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & a_1 & \dots & a_{n-2} \\ a_{n-2} & a_{n-1} & a_0 & \dots & a_{n-3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_0 \end{pmatrix} \quad (44)$$

n.inci birim kökler

$$\varepsilon_k = e^{i k \frac{2\pi}{n}} \quad k = 0, 1, \dots, n-1 \quad (45)$$

halinde ve özdeğerler

$$x_k = \begin{pmatrix} 1 \\ \varepsilon_k \\ \varepsilon_k^2 \\ \vdots \\ \varepsilon_k^{n-1} \end{pmatrix} \quad (k = 0, 1, \dots, n-1) \quad (46)$$

veya kısaca

$$\lambda_k = a_0 + a_1 \varepsilon_k + a_2 \varepsilon_k^2 + \dots + a_{n-1} \varepsilon_k^{n-1} \quad (47a)$$

$$\lambda_k = a^1 x_k \quad (k = 0, 1, \dots, n-1) \quad (47)$$

şeklinde bulunurlar Bu ifadelerin, özvektörler ve özdeğerler olduğu yani $A x_k = \lambda_k x_k$ denklemini sağladığı, $\varepsilon_k^n = 1$ ile kolayca değiştirilebilir. n adet x_k vektörünün lineer bağımsızlığı $X = (x_k)$ özvektör matrisinden anlaşılır ki, bunun determinanı, n adet farklı ε_k sayısından oluşan "Vandermond" determinanı olarak, sıfırdan farklıdır (13.2 ye bakınız).

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \varepsilon_0 = 1 \\ \varepsilon_1 = i \\ \varepsilon_2 = -1 \\ \varepsilon_3 = -i \end{matrix}$$

$$x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ -1 \\ -i \end{pmatrix}, \quad x_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad x_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ -1 \\ i \end{pmatrix}$$

$$\lambda_0 = 4, \quad \lambda_1 = 2 - 4i, \quad \lambda_2 = 0, \quad \lambda_3 = 2 + 4i.$$

Özdeğerler ve özvektörler reel de olabilir. Örneğin dairesel yapıdaki reel simetrik matris

$$A = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$$

de,

$$\lambda_1 = a + 2b, \quad \lambda_2 = \lambda_3 = a - b$$

$$x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad x_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

olup, burada (46) dan hesaplanan kompleks x_2, x_3 vektörleri, lineer dönüşüm ile, reel şekle sokulabilir.

MATRİSİN İÇ YAPISI (STRÜKTÜRÜ)

Şimdiye kadar köşegen benzeri matrisler ele alınmış idi. Bunlar, çok katlı özdeğerler halinde bile, n adet lineer bağımsız vektörün var olduğu n -sıralı matrislerdir. Bunlar, matrise has genellikle dar açılı bir eksen sistemi yani, özeksenler sistemini oluştururlar ki burada matris, özdeğerlerinin $A = \text{Diag}(\lambda_i)$ köşegen matrisinin özellikle basit şeklini alır. n adet bağımsız özdeğerin varlığından, özdeğer probleminin hem teorik ve hem de pratik incelenmesi için eşit önemli bir seri özellik bulunmuştur. Ayrıca çok katlılığı p_σ olan bir λ_σ çok katlı özdeğeri için karakteristik matrisi $A - \lambda_\sigma I$ nin $d_\sigma < p_\sigma$ rank düşmesi gösterdiği ve böylece bütün özvektörlerin var olmadığı matrisler de görülmüş idi. Bu tip matrislerin benzerlik dönüşümleri ile köşegen şekilde getirilemeyeceği de belirtilmiş idi. 16.2 de gösterildiği gibi, normalleştirilebilen matrislere özdeş köşegen benzeri matrisler sınıfının karşısına başka matris sınıfları çıkarlar. Bunlar için matrisin, A köşegen şekline dönüşmüş "normal şekil" problemi ortaya çıkar, bu köşegen benzeri matris halinde, özdeğerlerin köşegen matrisi özel haline dönüşür, genel olmayan halde matrisin A sayısal özellikleri olarak özdeğerler yanında iç yapısını "strüktürünü de belirtir. Bu aynı zamanda, çok katlı özdeğerler halinde özvektörlerin beklenen sayısı yani karakteristik matrisin rank düşmesi hakkında da bilgi verir. Tüm düşünceler yalnız çok katlı özdeğerlere sahip matrislere aittir. Zira farklı karakteristik λ_i katsayılı olan bunlar kendiliğinden köşegen benzeri matrisler sınıfına aittirler. Ayrıca şu soru ortaya çıkar: $d_\sigma < p_\sigma$ halinde tam olmayan özvektörler sistemi n bağımsız vektörden oluşan tam sisteme, vektörlerin matrisi yine X modal matrisinin yani, normal şekle benzerlik dönüşümünde dönüşüm matrisinin rolünü oynamak üzere, ne şekilde dönüşür? Özvektörler için "ana vektörlerin" ortaya çıktığı ileride görülecektir, bunların bir özel halidir.

18. Minimum Denklemi, Karakteristik ve Sınıflandırma.

18.1. Minimum Denklemi.

Burada, matris strüktürü ile ilgili sorular için, matrisin 14.3 de verilen minimum denklemi

$$m(A) = 0, \quad (1)$$

yani, yine orada ele alınan Cayley - Hamilton denklemi

$$p(A) = 0 \quad (2)$$

dışında, A matrisinin sağladığı en küçük dereceli polirum denklemi ile fikri verir. Burada

$$p(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0 \quad (3)$$

karakteristik polirum, buna karşılık

$$m(\lambda) = \lambda^m + b_{m-1}\lambda^{m-1} + \dots + b_1\lambda + b_0 \quad (4)$$

matrisin, daha ayrıntılı karakterise edilecek olan "minimal polinomu" dur. Bu minimal polirumun m derecesi için, köşegen benzeri matris halinde farklı λ_σ özdeğerlerinin s sayısı bulunmuş idi, bu değerler $m(\lambda)$ nin sıfır noktaları olduğundan, bu sıfır noktaları burada tek katlıdır. Bu duruma köşegen — benzeri matrislerde artık rastlanmayacaktır. Minimal polinomun sıfır noktaları yine S adet özdeğerdir ancak, bunlar, η_σ çok katlılığına sahiptirler ve artık 1 e eşit değildir,

$$1 \leq \mu_\sigma \leq p_\sigma \quad (5)$$

sınırları arasında bulunurlar, böylece minimal polinomun y derecesi için genel olarak

$$s \leq m \leq n \quad (6)$$

sınırları çıkar. Yalnız köşegen benzeri matrisler halinde $s = m$, aksi halde $s < m$ geçerlidir.

Önce minimal polinom için aşağıdaki iki teorem verilecektir.

Teorem 1: $f(\lambda)$, $f(A) = 0$ yapan bir polinom ise $f(\lambda)$, A matrisinin $m(\lambda)$ minimal polinomunun çok katıdır yani $m(\lambda)$, $f(\lambda)$ nın bir bölenidir: $f(\lambda)$ polinomu, $m(\lambda)$ ya faktör olarak sahiptir.

$f(\lambda) : m(\lambda)$ bölümünde bir kalan olsun yani, $m(\lambda)$ dan daha küçük dereceli $r(\lambda)$ kalanlı

$$f(\lambda) = q(\lambda) m(\lambda) + r(\lambda)$$

geçerli olsun. Burada λ yerine A konulur ise, $f(A) = 0$ ve $m(A) = 0$ nedeni ile, $r(A) = 0$ elde edilir. Fakat hipotez gereğince $m(\lambda)$, A ile sıfır olan en küçük dereceli polinomu olduğu için $r(\lambda) = 0$ olmalıdır. — Böylece karakteristik polinom $p(\lambda)$ için şu bulunur:

Teorem 2: Minimal polinom $m(\lambda)$, karakteristik polinom $p(\lambda)$ nın bir bölenidir.

İkisi arasındaki bağıntıyı ve ayrıca, karakteristik polinom ile minimal polinomun ne zaman farklı olduğu, ne zaman $m < n$ olduğu yani A matrisinin ne zaman küçüldüğü sorusuna cevabı aşağıdaki teorem verir:

Teorem 3: n -sıralı bir A matrisinin $C = C(\lambda) = \lambda I - A$ karakteristik matrisinin bütün $(n-1)$ -sıralı alt determinantları ortak bir bölene sahip ve en büyük ortak bölen $q(\lambda)$ ise, minimal polinom

$$m(\lambda) = \frac{p(\lambda)}{q(\lambda)} \quad (7)$$

dır.

İspat şöyle verilecektir.¹ $q(\lambda)$, C nin $(n-1)$ sıralı alt determinantlarının yeni C_{adj} nin elemanlarının ortak böleni olsun böylece

$$C_{adj} = q(\lambda) M(\lambda) \quad (7)$$

bulunur, buradaki $M(\lambda)$ polinom matrisinin elemanları ortak çarpanlı değildir. Bu durumda $p(\lambda) = \det C$ de $q(\lambda)$ ya bölünebilir zira $p(\lambda)$, C nin bir satırına (sütununa) göre açılmaktadır yani bu satırın (sütunun) alt determinantlarının çarpımları toplamıdır:

¹ W. Gröbner: Matrizenrechnung [8], S. 135-136 dan alınmış ispat.

$$p(\lambda) = q(\lambda) \bar{m}(\lambda). \quad (9)$$

Böylece: $C \cdot C_{adj} = q(\lambda) C M = p(\lambda) I = q(\lambda) \bar{m}(\lambda) I$

veya

$$C M = (\lambda I - A) M = \bar{m}(\lambda) I.$$

$$\bar{m}(A) = 0,$$

olur. Burada λ yerine A konulur ise,

$$\bar{m}(A) = 0,$$

çıkar yani $\bar{m}(\lambda)$, minimal polinom $m(\lambda)$ nın bir çok katıdır.

Diğer taraftan, teorem 2 uyarınca

$$p(\lambda) = \bar{q}(\lambda) m(\lambda). \quad (10)$$

(4) denklemlerinden

$$m(\lambda) I - m(A) = m(\lambda) I = (\lambda^m I - A^m) + b_{m-1}(\lambda^{m-1} I - A^{m-1}) + \dots + b_1(\lambda I - A),$$

yazılır ise $m(\lambda)$ nın, $\lambda I - A$ ya bölünebildiği anlaşılır.

$$m(\lambda) I = (\lambda I - A) N(\lambda). \quad (11)$$

$\bar{q}(\lambda)$ ile çarpılarak

$$p(\lambda) I = \bar{q}(\lambda) (\lambda I - A) N(\lambda)$$

bulunur.

$$p(\lambda) I = C \cdot C_{adj} = (\lambda I - A) C_{adj}$$

çıkarılarak

$$0 = (\lambda I - A) [\bar{q}(\lambda) N(\lambda) - C_{adj}].$$

elde edilir. Şimdi keyfi parametre λ halinde $(\lambda I - A)$ tekil olmayan matrisdir (yalnız λ_i kökleri için tekindir.) Buna göre köşeli parantez sıfır matrisine eşit olmalıdır.

$$\bar{q}(\lambda) N(\lambda) = C_{ad},$$

yani $\bar{q}(\lambda)$, C_{ad} nin elemanlarının bir bölenidir :

$\bar{q}(\lambda)$, en büyük bölen olmasa idi, derecesi $q(\lambda)$ den küçük olurdu. Fakat bu durumda, denklem (9) ve (10) nedeni ile $m(\lambda)$ polinomunun derecesi, $m(\lambda)$ nın çok katı olan, $m(\lambda)$ nınkinden büyük olurdu. Yani denklem (10) daki $\bar{q}(\lambda)$ çarpanı gerçekten C nin $v(n-1)$ -sıralı alt determinantlarının ortak çarpanı $q(\lambda)$ dir yani teorem 3 ispatlanmış olur.

Nihayet matris denklemi (11) de determinantlara geçilir ise,

$$(m(\lambda))^n = p(\lambda) \det N(\lambda),$$

çıkar ve buradan şu anlaşılır : $p(\lambda)$ nın her sıfır noktası λ_i , $m(\lambda)$ minimal polinomunun sıfır noktası da olmak zorundadır. Bunun tersi $m(\lambda)$ nın her sıfır noktasının $p(\lambda)$ nın da sıfır noktası olacağı (7) den anlaşılır ve aşağıdaki teoremler elde edilir :

Teorem 4 : İmkan oranında farklı çok katlılık halinde karakteristik polinom $p(\lambda)$ ve minimal polinom $m(\lambda)$ aynı sıfır noktalarına sahiptirler.

Teorem 5 : Matrisin çok sayıda farklı λ_i özdeğerleri var ise, minimal polinom ile karakteristik polinom çakışır, $m(\lambda) = p(\lambda)$

Buna karşılık karakteristik denklemin çok katlı kökleri var ise minimal denklem karakteristik denklemden daha küçük dereceli olabilir ancak bu gerekli değildir. Matris $p_\sigma \geq 1$ çok katlı S adet farklı λ_σ özdeğerine sahip olsun. Aynı özdeğerler ve yalnız bunlar minimum denklemin de kökleridir. Çok katlılık burada $\mu_\sigma \leq p_\sigma$ olsun. Bu durumda iki polinom da lineer çarpanları cinsinden

$$p(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{p_1} (\lambda - \lambda_2)^{p_2} \dots (\lambda - \lambda_s)^{p_s} \quad (12)$$

$$m(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{\mu_1} (\lambda - \lambda_2)^{\mu_2} \dots (\lambda - \lambda_s)^{\mu_s} \quad (13)$$

olarak yazılırlar ve

$$p_1 + p_2 + \dots + p_s = n \quad (14)$$

$$\mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_s = m \quad (15)$$

bulunur.

$m < n$ halinde $m(\lambda)$ da var olmayan lineer çarpan kuvvetleri, karakteristik matrisin $(n-1)$ - sıralı alt determinantlarının $q(\lambda)$ ortak böleninde bulunurlar :

$$q(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{p_1 - \mu_1} (\lambda - \lambda_2)^{p_2 - \mu_2} \dots (\lambda - \lambda_s)^{p_s - \mu_s} \quad (16)$$

burada çarpanların bazıları, örneğin $p_\sigma = \mu_\sigma$ lı olanlar 1 e eşit olabilirler.

Fakat 1 den farklı bir $q(\lambda)$ böleni var ise, bu en aşağı bir tane $\neq 1$ çarpana sahiptir. Bu $\lambda = \lambda_\sigma$ kökü için karakteristik determinantın yanında, bütün $(n-1)$ - sıralı alt determinantları da sıfır olur yani bunların rank düşmesi d_σ 1 den büyüktür ve ilgili çok katlı kök için yalnız bir bağımsız özvektör yoktur. Yani şunu söyleyebiliriz :

Teorem 6 : Bir matrisin minimal polinomu $m(\lambda)$ ancak ve ancak, s adet farklı λ_σ özdeğerden herbiri için bir tek lineer bağımsız özvektör var ise, karakteristik polinomu $p(\lambda)$ ile çakışır ancak bu durumda matris küçülen matris değildir. Matris küçülen matris, yani $m < n$ ise, çok katlı özdeğerlerden en aşağı bir tanesi için, birden fazla lineer bağımsız özvektör vardır. Ancak özvektörlerin tam sayısı için şu anda bir şey söyleyemeyiz.

18.2 Determinant Böleni, Elemanter Polinom ve Elemanter Bölen.

Bu sorunun cevaplandırılması için karakteristik matrisin $(n-1)$ sıralı alt determinantlarının, minimal polinoma götüren, max. ortak çarpanı $q(\lambda)$ yanında diğer alt determinantların max. ortak çarpanları yani, bu tip bölenlere sahip oldukları sürece, $C(\lambda) = \lambda I - A$ karakteristik matrisinin T_i determinant bölenleri de bilinmelidir. Yani

$T_1, C(\lambda)$ nın bütün elemanlarının max. ortak böleni

T_2, C nin iki sıralı bütün alt determinantlarının max. ortak böleni

$T_{n-1} = q(\lambda)$, C nin $(n-1)$ sıralı bütün alt determinantlarının max. ortak böleni

$T_n = p(\lambda) \det C(\lambda) = \det (\lambda I - A)$ olsun.

$C(\lambda)$ matrisinin özvektörlerin sayısını veren rank düşmesi $\lambda = \lambda_\sigma$ özdeğeri için d_σ ya eşit ise, $C(\lambda_\sigma)$ nın $(n - d_\sigma + 1)$ sıralı bütün alt determinantları sıfır, buna karşılık $n - d_\sigma = r_\sigma$ sıralı bölenlerden en aşağı bir tanesi $\neq 0$ olmalıdır. Yani $T_{n-d_\sigma+1}$ determinant böleni, $(\lambda - \lambda_\sigma)$ çarpanına sahip olmalıdır.

Şimdi bütün iki sıralı determinantlar, max. ortak bölen T_1 li elemanlara sahip olduğundan T_1 de T_2 nin bir bölenidir. Aynı şekilde T_2 de T_3 ün bir bölenidir. Zira açınım teoremi gereğince üç sıralı alt determinantları, lineer olarak iki sıralılardan oluşurlar vs. b nin a nın böleni olduğuna işaret eden $b|a$ sembolü kullanılarak,

$$T_1 | T_2 | \dots | T_n \quad (17)$$

yazılabilir.

Bu determinant bölenleri, 10.3 de verilen Smith normal formunun E_v elemanter polinomlarına (invariant çarpanlarına) sıkı sıkıya bağlıdır. T_v nin bölünebilme özelliği nedeni ile determinant bölenlerinin oranları yine λ cinsinden polinomlar ve bunlarda E_v elemanter polinomlarıdır :

$$\frac{T_v}{T_{v-1}} = E_v \quad v = 1, 2, \dots, n, \quad (18)$$

bu bağıntı, $T_0 = 1$ konulması halinde, $v = 1$ için de geçerlidir. Böylece T_v -ler aşağıdaki gibi bulunurlar :

$$\begin{aligned} T_1 &= E_1 \\ T_2 &= E_1 E_2 \\ T_3 &= E_1 E_2 E_3 \\ &\dots \\ T_n &= E_1 E_2 \dots E_n \end{aligned} \quad (19)$$

Determinant bölenleri. 10.3 de normal formun bulunması için yapılan polinom matrisinin elemanter dönüşümleri halinde kolayca görüleceği gibi, değişmezler¹. Bunlar, normal formdan da okunabilirler. Örneğin, üç sıralı sıfır olmayan determinantlara sahip

$$N = \begin{pmatrix} E_1 & & 0 \\ & E_2 & \\ 0 & & E_3 \\ & & & E_4 \end{pmatrix}$$

¹. Bakınız; M. BOCHER : Höhere Algebra [1], S. 283 - 284.

normal şekilli bir matrisde

$$E_1 E_2 E_3, E_1 E_2 E_4, E_1 E_3 E_4, E_2 E_3 E_4$$

bulunur. Bu dört determinantın max. ortak çarpanı, 10.3 denklem (11) ile verilen

$$E_1 | E_2 | \dots | E_n \quad (20)$$

bölünebilme özelliği nedeni ile, $T_3 = E_1 E_2 E_3$ dür. — Genellikle, sıfır olmayan v -sıralı alt determinantlar olarak

$$E_{i1} E_{i2} \dots E_{iv}$$

çarpımları ortaya çıkar ki, burada en büyük ortak bölen $E_1 E_2 \dots E_v = T_v$ dür.

E_v elemanter polinomları için yukarıda (10.3) şeklindeki

$$E_v = (\lambda - \lambda_2)^{e_{v1}} (\lambda - \lambda_2)^{e_{v2}} \dots + (\lambda - \lambda_s)^{e_{vs}} \quad (21)$$

elemanter bölenlerine sahip çarpanlara ayrılma gösterilmişdi, burada

$$(\lambda - \lambda_\sigma)^{e_{v\sigma}} \quad (22)$$

elemanter bölen kuvvetleri için, denklem (20) nedeni ile,

$$e_{1\sigma} \leq e_{2\sigma} \leq \dots \leq e_{n\sigma} \quad (23)$$

bağıntısı geçerlidir. $e_{n\sigma} \geq 1$ den aşağıya doğru, azalan v sayılı kuvvetler en fazla azalabilirler, bu esnada seri zamansız olarak 0 ile kesilebilir. Her σ için kuvvetler toplamı, ilgili λ_σ özdeğerinin p_σ katlılığına eşittir :

$$e_{1\sigma} + e_{2\sigma} + \dots + e_{n\sigma} = p_\sigma \quad (24)$$

18.3. Minimal Polinom Rank Düşmesi.

Buradan $p(\lambda) = T_n$, $q(\lambda) = T_{n-1}$ nedeni ile teorem 3 gereğince aşağıdaki teorem yazılabilir :

Teorem 7 : Bir matrisin minimal polinomu, karakteristik matrisin Smith normal formunun n-inci elemanter polinomuna eşittir :

$$m(\lambda) = E_n(\lambda) \quad (25)$$

$m(\lambda)$ daki bir λ_σ sıfır noktasının çok katlılığı μ_σ , λ_σ ya ait en büyük elemanter bölen kuvvetine eşittir :

$$\mu_\sigma = e_{n\sigma} \quad (26)$$

Böylece

Teorem 8 : Bir matrisin karakteristik ve minimal polinomları, $E_n = m(\lambda) = p(\lambda)$ dışında bütün elemanter polinomlar $E_\nu = 1$ ise, çakışmalar, $E_n = m(\lambda) = p(\lambda)$. Bu durumda karakteristik matrisin normal formu şöyledir :

$$N = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & E_n(\lambda) \end{pmatrix} \quad (27)$$

Rank düşmesi d_σ ile ilgili olarak

Teorem 9 : $\lambda = \lambda_\sigma$ özdeğeri için karakteristik matris $C(\lambda)$ nın rank düşmesi d_σ bahis konusu σ için, sıfırdan farklı $e_{\nu\sigma}$ elemanter üstel bölen kuvvetlerinin sayısına eşittir.

Burada, denklem (24) nedeni şu önemli teoremler çıkar :

Teorem 10 : Karakteristik matrisin rank düşmesi d_σ , λ_σ ya ait tüm elemanter bölenler lineer yani $e_{n\sigma} = e_{n-1,\sigma} = \dots = e_{(n-d_\sigma+1),\sigma}$ ise, λ_σ özdeğeri için p_σ çok katlılığına eşittir. Ancak bu durumda p_σ -katlı özdeğer için, lineer bağımsız özvektörlerinin tam p_σ sayısı vardır.

Teorem 11 : n-sıralı bir matrisin, karakteristik matrisin de yalnız, "lineer elemanter bölenler" olması halinde, n adet lineer bağımsız özvektörü vardır.

Böylece bu yalnız lineer elemanter bölenler hali özel bir anlam kazanır. 14-16 da ayrılan, "köşegen benzeri = normalleştirilebilir mat-

risler" sınıflı bu özelliğe sahiptir zira bunlar için daima n-adet lineer bağımsız özvektör vardır. Yani şu yazılabilir :

Teorem 12 : Bir A matrisi, karakteristik matrisinin yalnız lineer elemanter bölenlere sahip olması halinde, benzerlik dönüşümü ile özdeğerlerinin köşegen şekline getirilebilir.

$$A = \text{Diag}(\lambda_i)$$

18.4. Bir Matrisin Karakteristiği ve Sıfırlanması.

Farklı λ_σ özdeğerlerine ayrılmış $e_{\nu\sigma}$ elemanter bölen kuvvetleri aşağıdaki sema ile gösterilebilir.

	λ_1	λ_2	...	λ_s	
n	e_{n1}	e_{n2}	...	e_{ns}	m
n-1	$e_{n-1,1}$	$e_{n-1,2}$	...	$e_{n-1,s}$	—
...	...	...	...	...	...
	p_1	p_2	...	p_s	n

İlk satırların, aynı zamanda minimal polinomdaki sıfır noktalarının μ_σ çok katlılıklarının da gösteren toplamı bu polinomun n derecesi-ne, her sütunun toplamı ilerici özdeğerin p_σ çok katlılığına, nihayet p_σ ların toplamı n ye eşittir. Her σ sütununda ortaya çıkan, sıfırdan farklı e_ν kuvvetlerinin sayısı ise, $\lambda_\sigma I - A$ karakteristik matrisinin d_σ rank düşmesini gösterir.

Bu şemaya "matrisin (Segre) karakteristiği" ¹ adı verilir. ve kısaca şu şekilde gösterilir :

$$[(e_{n1} e_{n-1,1} \dots) (e_{n2} e_{n-1,2} \dots) \dots (e_{ns} e_{n-1,s} \dots)], \quad (28)$$

Yani aynı λ_σ özdeğerinin kuvvetleri, azalan sırada, ortadan yazılır ve yuvarlak parantez ile belirtilir. Bir λ_σ için bir tek özdeğer olması halinde parantez ortadan kalkar. Bütün bu parantez içindeki veya basit sayılar köşeli bir parantez çifti içine alınır.

¹ SEGRE, C. : Atti Accad. naz. Lincei. Mem. III., H., 19 (1884), S. 127 - 148.

Örneğin $[(221) (31) 21]$, $p_1 = 5$, $p_2 = 4$, $p_3 = 2$, $p_4 = 1$ çok katlı $\lambda_1 - \lambda_4$ özdeğerlerine sahip $n = 12$ sıralı bir matrisin karakteristiğidir, bunun için toplam 7 adet lineer bağımsız özvektör vardır. Ayrıntılı üslerin şeması şöyledir :

	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	
$\nu = 12$	2	3	2	1	$m = 8$
11	2	1			
10	1				
p_σ	5	4	2	1	$n = 12$
d_σ	3	2	1	1	7

Minimal - ve karakteristik polinomlar şu şekildedir.

$$m(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^2 (\lambda - \lambda_2)^3 (\lambda - \lambda_3)^2 (\lambda - \lambda_4)$$

$$p(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^5 (\lambda - \lambda_2)^4 (\lambda - \lambda_3)^2 (\lambda - \lambda_4)$$

Elemanter polinomlar şunlardır :

$$E_{12} = (\lambda - \lambda_1)^2 (\lambda - \lambda_2)^3 (\lambda - \lambda_3)^2 (\lambda - \lambda_4) = m(\lambda)$$

$$E_{11} = (\lambda - \lambda_1)^2 (\lambda - \lambda_2)$$

$$E_{10} = (\lambda - \lambda_1)$$

$$E_8 = E_8 = \dots = E_1 = 1.$$

Elemanter bölen kuvvetleri şeması olan karakteristik, hemen görüleceği gibi, bir matrisin iç yapısı, strüktürü hakkında tüm bir fikir verir. Aynı karakteristiğe sahip matrisler "aynı sınıfa ait" kabul edilir : Karakteristik, "matrisleri sınıflandırma" aracıdır. 14 de verilen ve teorem 11 ve 12 uyarınca yalnız lineer elemanter bölenlere sahip olan köşegen benzeri = normlaştırılabilen matrisler sınıfı çoğu 1 olan karakteristikler gösterir : ancak bu durumda $e_{\nu\sigma}$ ların sayısı ve toplamı birbirine eşit olur : matrisin n adet bağımsız özvektörü vardır.

İki matrisde, karakteristik matrislerinin elemanter bölen kuvvetleri yanında elemanter bölenleri yani λ_σ özdeğerleri birbirine eşit ise, bunlar, aynı sınıflı matrislerdeki yalnız eşit strüktürden daha sıkı bir bağılılık gösterirler. Bunlar göstereceğimiz gibi, birbirine "benzer" dir. Yani iki farklı koordinat sistemine göre, bir ve aynı lineer dönüşümü temsil ederler. Lineer dönüşüm, matris strüktürü yanında dönüşümü matrisi-

nin özdeğerleri ile bellidir. Bunlar yalnız dönüşümünün ölçü sayılarını örneğin dönme açılarını ve deformasyon ölçeklerini gösterirler, buna karşılık strüktür matrisin karakteristiği ile bellidir. Bu neden ile strüktür için λ_σ karakteristik sayılarının tesadüfi sayısal değerleri önemli değildir. Bu esnada ortaya çıkan dönüşüm dalların nedeni ile, $\lambda = 0$ özel değeri her halde önemlidir. Bu durumda karakteristikde ilgili kuvvet üzerindeki küçük bir sıfır ile belirtilir. Örneğimizde $\lambda_2 = 0$ ise, karakteristik

$$[(2 \ 2 \ 1) (\overset{\circ}{3} \ \overset{\circ}{1}) \ 2 \ 1].$$

şeklini alır.

Başka bir gösteriliş bir "nokta şeması" da faydalıdır. Belirli bir λ_σ özdeğeri halinde, her ν basamağına ait $e_{\nu\sigma}$ elemanter bölen kuvvetleri, sayıları $e_{\nu\sigma}$ olan yanyana konulmuş noktalar ile gösterilir. Bu nokta sıraları, $e_{n\sigma}$ ya ait en üst sıradan başlayarak, tek ν basamakları için aralarda sıralanır. Örneğimizdeki dört özdeğer için aşağıdaki şemalar elde edilir :

Özdeğer	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4
Karakteristik	(2 2 1)	(3 1)	2	1
Nokta şema	$\begin{smallmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} \cdot \\ \cdot \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} \cdot \end{smallmatrix}$

Burada birinci "nokta satırı" minimal polinomdaki her kökün çok katlılığını, her nokta satırı E_ν elemanter polinomundaki çok katlılığı, toplam nokta sayısı karakteristik polinomdaki p_σ çok katlılığını gösterir. Birinci "nokta sütunu" ise karakteristik matrisin d_σ rank düşmesi'ni yani λ_σ özdeğeri için var olan lineer bağımsız özvektör sayısını gösterir. Diğer nokta sütunlarının anlamı 19 da ele alınacaktır.

18.5. Matris Çiftleri, Simültane Ekvivalentlik ve Benzerlik.

Elemanter polinomlar ve bunların elemanter bölenleri, 10 daki genel düşüncelerden anlaşılacağı gibi, bir A matrisinin $A - \lambda I$ karakteristik matrisi ile sınırlı olmayıp keyfi polinom matrislerine uygulanabilir : bunlar, elemanları parametresinin polinomları olan matrislerdir. Bu nedenle, buradaki gözlemler "genel özdeğer problemi"

$$(A - \lambda B)x = 0, \quad (29)$$

a yani A, B matris çiftlerine uygulanabilirler, burada, yukarıda olduğu gibi, parametredeki B matrisi tekil olmayan olarak öngörülür: Özel

$$\det B \neq 0. \quad (30)$$

problemin karakteristik matrisi $A - \lambda I$ yerine daha genel olan

$$C = A - \lambda B \quad (31)$$

geçer.

Bu matris, başka bir deyimle A, B matris çifti için, yukarıda olduğu gibi, karakteristik polinom $p(\lambda) = \det C, E_n$ elemanter polinomları ve elemanter bölenleri ayrıca $e_{\nu\sigma}$ elemanter bölen kuvvetlerinin sayısı yani matris çiftinin "karakteristiği" bulunabilir. Bu durumda, yukarıdaki teoremlere karşılık gelen şu ifadeler geçerlidir:

Teorem 13: Tekil olmayan B matrisli bir matris çiftin karakteristik matrisi $A - \lambda B$ nin, $\lambda = \lambda_\sigma$ özdeğeri için d_σ rank düşmesi, sıfırdan farklı $e_{\nu\sigma}$ elemanter bölen kuvvetleri sayısına eşittir. λ_σ ya ait elemanter bölenlerin hepsi lineer ise, bu, özdeğerin p_σ çok katlılığına eşittir.

Teorem 14: n -sıralı A, B ve tekil olmayan B matrisli genel özdeğer problemi (29) için, karakteristik matris $A - \lambda B$ nin yalnız "lineer elemanter bölenler" e sahip olması halinde, n adet lineer bağımsız özvektör vardır. Eğer, aynı zamanda

$$\begin{aligned} A_2 &= P A_1 Q \\ B_2 &= P B_1 Q \end{aligned} \quad (32)$$

geçerli olmak üzere sabit, tekil - olmayan P, Q matrisleri var ise, A_1, B_1 ve A_2, B_2 matris çiftlerine simultane ekivalent" denir. Bu simultane ekivalent özelliği, iki tek matrisin adı ekivalent özelliğinden çok daha geniş bir pipatezdir. Sonuncu için iki matrisin rankının eşit olması öngörülürken burada daha geniş bir koşulun sağlanması gerekir. Burada şu teorem geçerlidir:

Teorem 15: Tekil olmayan B_1, B_2 matrisli A_1, B_1 ve A_2, B_2 matris çiftleri denklem (32) anlamında yalnız ve yalnız $\widehat{P}$ ve $\widehat{Q}$ unimoduler polinom

matrisleri olmak üzere $C_1 = A_1 - \lambda B_1$ ve $C_2 = A_2 - \lambda B_2$ karakteristik matrislerin unimodüler eşdeğer

$$C_2 = \widehat{P} C_1 \widehat{Q} \quad (33)$$

olması yani C_1, C_2 karakteristik matrislerini aynı elemanter polinomlara sahip olması halinde simultane eşdeğerdir.

Verilen koşulun gerekliliği yani denklem (32) den (33) bağıntısının çıkması, hemen görülür; bu maksad ile, λ ile çarpılan (31) denklemlerinin ikincisi birinciden çıkarılır ve

$$C_2 = P C_1 Q$$

bulunur. Sabit P, Q matrisleri, sıfır dereceli, unimodular polinom matrisleri sayılır. Fakat (33) koşulunun yeterli olmadığı yani (33) bağıntısının varlığından gerçek $\widehat{P}, \widehat{Q}$ polinom matrisleri halinde sabit P, Q ya sahip denklem (32) nin ortaya çıktığı, burada verilmeyecek olan, Weierstrass'a¹ kadar dayanan bir ispatı gerektirir. $B_1 = B_2 = I$ olan özel özdeğer problemi halinde $PQ = I$ olur böylece denklem (32) nin birincisi bir "benzerlik bağıntısı" na dönüşür. $Q = T$ yani $P = T^{-1}$ ve ayrıca $A_1 = A, A_2 = B$ yazılır ise şu teorem bulunur.

Teorem 16: A, B gibi iki matris ancak ve ancak, karakteristik $A - \lambda I$ ve $B - \lambda I$ matrislerinin aynı elemanter polinomlara (aynı λ_σ özdeğerleri halinde aynı karakteristiğe) sahip olmaları halinde, birbirine, "benzer" dir:

$$B = T^{-1} A T. \quad (34)$$

yani simultane ekivalentlik, tek matrislerin benzerlik bağıntısının, matris çiftleri için geçerli genelleştirilmesidir.

Nihayet

Teorem 17: Tekil olmayan B matrisli A, B matris çifti, karakteristik matris $A - \lambda B$ de yalnız lineer elemanter bölenler bulunması halinde, simultane ekivalent özelliği yardımı ile $A = \text{Diag} (\lambda_i)$ köşegen matrislerine ve I birim matrisine dönüştürülebilir.

¹ Vgl. Fußnote S. 119; aber auch W. GRÖBNER: Matrizenrechnung [8], S. 179 bis 181.

$$\begin{cases} \mathbf{P} \mathbf{A} \mathbf{Q} = \mathbf{A} \\ \mathbf{P} \mathbf{B} \mathbf{Q} = \mathbf{I} \end{cases} \quad (35)$$

Zira yalnız bu halde genel özdeğer problemi (29) un, n adet lineer bağımsız x_i özvektörü vardır. Özdeğerlerin tekil olmayan $\mathbf{X} = (x_i)$ matrisi ile $\mathbf{A} \mathbf{X} = \mathbf{B} \mathbf{X} \mathbf{A}$ özdeğer bağıntısından

$$\mathbf{X}^{-1} \mathbf{B}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{X} = \mathbf{A},$$

dönüşümü elde edilir ve $\mathbf{Q} = \mathbf{X}$, $\mathbf{P} = \mathbf{X}^{-1} \mathbf{B}^{-1}$ halinde, denklem (35) e karşılık gelir.

Çifti oluşturan matrislerden birinin tekil olmayan matris olması hipotezinden şöyle kurtulunur. Karakteristik matris $\mathbf{A} - \lambda \mathbf{B}$ yerine κ ve λ belirsiz parametrelili ve elemanter polinom ve elemanter bölenler teorisinin aynı şekilde kurulabileceği, daha genel $\kappa \mathbf{A} + \lambda \mathbf{B}$ konulur. Esas düşünceler, Weierstrass uyarınca $\det (\kappa \mathbf{A} + \lambda \mathbf{B}) \neq 0$ şeklindeki tekil olmayan hal sınır alınır ise, aynı kalır. $\det (\kappa \mathbf{A} + \lambda \mathbf{B}) \equiv 0$ tekil halinin incelenmesi Kronecher'e gider ve burada, alınmamış olan yeni kavramlar gerektirir.¹

19. Normal Form Ana Vektörler ve Ana Vektör Zincirleri.

19.1. Jordan Normal Formu.

Köşegen benzeri = normalize edilebilir matrisleri için, bilindiği gibi, bütün uzaya kaplayan özvektörler sisteminde mükemmel bir eksen sistemi - reel simetrik halinde asal eksenlerin ortağanal sistemi - vardır, burada matris özellikle basit $\mathbf{A} = \text{Diag} (\lambda_i)$ şeklini alır. Şimdi n adet lineer bağımsız özvektörün tümüne sahip olmayan daha genel, köşegen benzeri olmayan matrisler halinde özvektörlerin lineer vektörel sistemini yani $k < n$ boyutlu bir alt uzayı dolduran bir sistem aranmaktadır. Şunları soralım :

1—) Köşegen benzeri olmayan matrisler ve bunlarda bulunan lineer dönüşümler için, matrisin $\mathbf{A}$ köşegen şekline karşılık gelen özellikle basit bir şekil yani "normal form"u veya "kanonik form"u aldığı belirli mükemmel bir esas sistem var mıdır ve bunun ifadesi nedir?

1 P. Muth : Theorie und Anwendung der Elementarteiler. Leipzig 1899'a bakınız.

2—) Bu durumda $\mathbf{A}$ matrisini, $\mathbf{T}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{T}$ benzerlik dönüşümü yardımı ile normal şekle sokan bir dönüşüm matrisi $\mathbf{T}$ var mıdır. Başka bir deyişle x_i özvektörlerinin tam olmayan sistemi yerine, matris normal formu almak üzere, t_i lineer vektörlerinden oluşan hangi sistem geçer?

Birinci soru halinde kolayca görülür ki normal form, genel köşegen benzeri olmayan matris için artık basitköşegen matris $\mathbf{A} = \text{Diag} (\lambda_i)$ olamaz. Zira bu durumda aynı özdeğerli fakat farklı yapıma matrisler, normal formlarında ayırdedilemezler. Yani normal formda, özdeğerler ile verilen "sayısal özellikler" yanında matrisin karakteristik ile belli" iç yapı özellikleri" de tek anlamlı olarak ifade edilmelidir. İkisi de yani bir matrisin özdeğerleri ve karakteristiği, son bölümdeki teorem 16 uyarınca, benzer invaryantdır. Özdeğerler "nümerik invaryantlar" a karakteristik şeması ise daha az önemli olmayan matris" iç yapı invaryantları" nı yani, matrise karşılık gelen lineer dönüşümü tamamen belirten, özellikleri gösterir. - Özdeğerleri ve matris iç yapısını gösteren ve köşegen benzeri matris halinde, kendiliğinden köşegen şekle girer böyle bir formu "Jordan normal form"u denir¹ $\mathbf{A}$ matrisinde p , çok katlılık s adet farklı λ özdeğeri var ise, Jordan matrisi şöyle olur :

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \mathbf{J}_1 & & 0 \\ & \mathbf{J}_2 & \\ 0 & & \mathbf{J}_s \end{pmatrix} \quad (1)$$

Buradaki $\mathbf{J}_\sigma$ alt matrisleri p_σ -sıralıdır ve kare alt matrislerden oluşurlar. $\mathbf{A} - \lambda_\sigma \mathbf{I}$ karakteristik matrisinin r_σ rankına sahip $d_\sigma = n - r_\sigma$ adet sıfırdan farklı $e_{n\sigma}, e_{n-1,\sigma}, \dots, e_{r_\sigma+1,\sigma}$ elemanter bölen üstleri λ_σ ya ait ise, $\mathbf{J}_\sigma$ şu şekli alır :

$$\mathbf{J}_\sigma = \begin{pmatrix} \mathbf{J}_{n\sigma} & & 0 \\ & \mathbf{J}_{n-1,\sigma} & \\ 0 & & \mathbf{J}_{r_\sigma+1,\sigma} \end{pmatrix} \quad (2)$$

nihayet $e_{v\sigma}$ sıralı $\mathbf{J}_{v\sigma}$ alt matrisleri şöyledir :

1 Jordan, C. : Traité des substitutions et des équations algébriques. Livre 2 S : 88 - 249 Paris 1876.

$$J_{v\sigma} = \begin{pmatrix} \lambda_\sigma & 1 & & 0 \\ & \lambda_\sigma & 1 & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_\sigma \end{pmatrix} \quad (3)$$

Toplam matris J , bu "elemanter kısımların" (3), köşegen şeklinde yan yana getirilmesi ile oluşur, bunların köşegenlerinde λ_σ özdeğerleri, ayrıca üst yan köşegeninde $e_{v\sigma} - 1$ er kere 1 vardır. Lineer elemanter bölen $e_{v\sigma} = 1$ hali için, (3) elemanter parçası tek λ_σ elemanına indirgenir ve tamamen lineer elemanter bölenler halinde Jordan matrisi J , köşegen matris $\Lambda = \text{Diag}(\lambda_i)$ şeklini alır.

Farklı $\lambda_1 \dots \lambda_s$ özdeğerleri yerine kısaca a, b, c, d yazılır ise, § 18.4 de verilen karakteristik örneği [(221) (31) 21] için şu Jordan- matrisi elde edilir.

$$J = \begin{pmatrix} \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline a & 1 & & \\ \hline 0 & a & & \\ \hline & & a & 1 \\ \hline & & 0 & a \\ \hline \end{array} & & & 0 \\ & \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & & a & \\ \hline & b & 1 & 0 \\ \hline & 0 & b & 1 \\ \hline & 0 & 0 & b \\ \hline \end{array} & & \\ & & \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & & & b \\ \hline & & c & 1 \\ \hline & & 0 & c \\ \hline \end{array} & \\ 0 & & & \begin{array}{|c|c|} \hline & d \\ \hline \end{array} \end{pmatrix}$$

Teorem 1 : Keyfi kare matris A

$$J = T^{-1} A T \quad (4)$$

benzerlik dönüşümü yapılarak, (2) nin basamakları ile $\lambda I - A$ karakteristik matrisinin elemanter böleninin $e_{v\sigma}$ sıralı (3) elemanter parçalarından oluşan, (1) Jordan normal formuna sokulabilir.

İspat için şunu göstermeliyiz: Normal formun karakteristik matrisi $\lambda I - J$ ile başlangıç matrisi A ya ait $\lambda I - A$ aynı E elemanter po-

linomlarına sahiptir. Satır -ve uygun sütun değiştirmesi ile önce, v -nün-
cü $E_v(\lambda)$ elemanter polinomuna ait $J_{v\sigma}$ kısmi matrisleri

$$J_v^* = \begin{pmatrix} J_{v1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_{vs} \end{pmatrix},$$

matrisinden toplanır, bunun karakteristik determinanı, görüleceği gibi,

$$\det(\lambda I - J_v^*) = (\lambda - \lambda_1)^{e_{v1}} (\lambda - \lambda_2)^{e_{v2}} \dots (\lambda - \lambda_s)^{e_{vs}} = E_v(\lambda)$$

dir. Bu aynı zamanda J_v^* nün minimal polinomudur. Zira $\lambda = \lambda_\sigma$ halinde, $\lambda I - J_{v\sigma}$ elemanter parçalarından birinin birinci bir alt detirminanı elde edilir. Bir sıra daha az olan bütün bu alt determinantların en büyük ortak böleni 1 dir. Ve böylece, 18.1 teorem (3) uyarınca J_v^* nün minimal polinomu ile karakteristik polinomu çakışır. Böylece $\lambda I - J_v^*$ nün Smith normal formu

$$N_v = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ & & 1 \\ & & & E_v(\lambda) \end{pmatrix}.$$

olur. Satır- ve sütunların değiştirilmesi ile $\lambda I - J$ toplam matrisinin Smith- normal formu bulunur, bu ise $\lambda I - A$ deki aynı $E_v(\lambda)$ elemanter polinomlarına sahiptir. Buradan, 18.5 teorem 16 uyarınca ileri sürülen teorem 1 çıkar.

Böylece bir matrisin hem sayısal ve hem de iç yapısı ile ilgili özelliklerini gösteren ve köşegen benzeri matrisler de $\Lambda = \text{Diag}(\lambda_i)$ köşegen matrisinin genelleştirilmesi sayılacak olan normal forma ait ilk soru tamamen cevaplandırılmış olur. Bir matrisin özdeğerleri ve karakteristiği-
gi- elemanter parçalarının sırası dışında Jordan matrisini tek anlamlı olarak belirtir.

19.2. Sağ - Sol Özvektörlerin Ortogonalliği.

J Jordan formülünü veren T dönüşüm matrisinin oluşturulması için, ilk defa 13.4 de verilen, bir matrisin sağ - ve sol özvektörlerinin ortogonalliği yani bunlara ait

$$\begin{cases} \mathbf{A} \mathbf{x} = \lambda \mathbf{x} \\ \mathbf{y}' \mathbf{A} = \lambda \mathbf{y}' \end{cases} \quad (5)$$

özdeğer problemlerinin çözümleri önem taşır. Orada, $\lambda_i \neq \lambda_k$ gibi farklı özdeğerler için daima $\mathbf{y}'_i \mathbf{x}_k = 0$ olacağı bulunmuş idi. Köşegen benzeri matrisler halinde ayrıca şu bulunmuş idi : - çok katlı özdeğerler için de - $\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_i$ vektörleri,

$$\mathbf{y}'_i \mathbf{x}_k = \delta_{ik}, \quad (6)$$

yani özellikle

$$\mathbf{y}'_i \mathbf{x}_i \neq 0 \quad (6a)$$

olacak şekilde seçilebilirler. Burda incelenecek olan ve karakteristik matrisleri lineer olmayan elemanter bölenler gösteren, köşegen benzeri olmayan matrislerin genel hali için, gösterileceği üzere, daima $\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_i$ vektör çiftleri vardır ve bunlar için denklem (6-a) yerine,

$$\mathbf{y}'_i \mathbf{x}_i = 0 \quad (7)$$

geçerli olur. Eşit özdeğer halindeki bu ortogonalite, burada tam olmayan özvektörler sisteminin tamamlanması için önemlidir.

Şartların anlaşılması için, bilhassa açık olan matris normal şeklinden faydalanılır. $\mathbf{x}$ ve $\mathbf{y}$ vektörlerine, "kontragradyent dönüşüm" (bakınız : 5.5)

$$\mathbf{x} = \mathbf{T} \bar{\mathbf{x}}, \quad \mathbf{T}' \mathbf{y} = \bar{\mathbf{y}}, \quad (8)$$

uygulanır ise - ki bu skalar çarpımları invaryant yapar :

$$\mathbf{y}' \mathbf{x} = \bar{\mathbf{y}}' \mathbf{T}^{-1} \mathbf{T} \bar{\mathbf{x}} = \bar{\mathbf{y}}' \bar{\mathbf{x}}, \quad (9)$$

-bir taraftan ortogonalite şartı korunur. Diğer taraftan denklem (8) in, denklem (5) de yerine konulması ile

$$\mathbf{T}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{T} \bar{\mathbf{x}} = \lambda \bar{\mathbf{x}},$$

$$\bar{\mathbf{y}}' \mathbf{T}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{T} = \lambda \bar{\mathbf{y}}'.$$

elde edilir. $\mathbf{A}, \mathbf{J}$ ye dönüşecek yani $\mathbf{T}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{T} = \mathbf{J}$ olacak şekilde $\mathbf{T}$ seçilmesi ve $\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{y}}$ yerine $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ yazılması halinde, (5) denklemlerine karşılık gelen bağıntıların normal şekli elde edilir :

$$\begin{cases} \mathbf{J} \mathbf{x} = \lambda \mathbf{x} \\ \mathbf{J}' \mathbf{y} = \lambda \mathbf{y} \end{cases} \quad (10)$$

Burada denklemlerin ikincisi transpoze edilmiş şekilde yazılmıştır. Böylece aşağıdaki incelemeler için matrisin $\mathbf{J}$ normal şekli esas alınabilir.

Önce basitlik için, verilen elemanter bölen üstleri $e_{01} = e_0$ halinde matrisin $p = n$ çok katlı tek bir λ_1 özdeğerine sahip olduğunu kabul edelim. Bu durumda $\lambda = \lambda_1$ e ait karakteristik matris $\mathbf{C} = \mathbf{J} - \lambda_1 \mathbf{I}$ nin ana köşegeninin elemanları sıfırdır ve, lineer olmayan elemanter bölenler $e_0 > 1$ ortaya çıktığı müddetçe, sağda sıfırın ($e_0 - 1$) adet 1 vardır, buna karşılık geri kalan elemanların hepsi sıfırdır. Örneğin ((321)) için.

$$\mathbf{J} - \lambda_1 \mathbf{I} = \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & 0 & & \\ & & & 0 & 1 \\ & & & & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{C}' = \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ 1 & 0 & & & \\ & 1 & 0 & & \\ & & & 0 & 1 \\ & & & & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Bu durum $\mathbf{C} \mathbf{x} = 0, \mathbf{C}' \mathbf{y} = 0$ özdeğer denklemlerinden, $\mathbf{C}$ veya $\mathbf{C}'$ deki $e_0 + 1$ veya e_0 sütununda 1 bulunan her x_{e_0+1} veya y_{e_0} bileşeni için $x_{e_0+1} = 0, y_{e_0} = 0$ bulunur, buna karşılık $\mathbf{C}$ veya $\mathbf{C}'$ nin sütunlarında sıfır elemanlarına sahip diğer bileşenler keyfi değerler olabilirler. Yalnız lineer olmayan elemanter bölenler var ise, sıfıra eşit olmayan her $x_i \neq 0$ bileşenine bir $y_j = 0$ bileşeni karşılık gelir ve tersi de geçerlidir. Yani bu halde, $i = k$ de dahil, her i, k için $\mathbf{y}'_i \mathbf{x}_k = 0$ ortogonalitesi geçerlidir. Yalnız lineer elemanter bölenler var ise yani $\mathbf{C}$ ve $\mathbf{C}'$ matrislerinde aynı "sütunda sıfır doğuran 1 yok ise aynı j numaralı, sıfırdan farklı x_j, y_j bileşenleri ve, $\mathbf{y}'_i \mathbf{x}_i \neq 0$ olmak üzere, x_i, y_i çiftleri ortaya çıkabilir. - Sonuç kolayca, λ_1 dışında λ_2 özdeğerleri de bulunan daha genel hale genişletilebilir.

Teorem 2 : Yalnız ve yalnız bir λ_σ özdeğer için $e_{\sigma\sigma}=1$ vektör çiftleri vardır ve

$$y'_i x_i \neq 0.$$

dır.

Yukarıda verilen örnek için özvektörler olarak

C	$\begin{array}{ccccc} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & 0 & & \\ & & & 0 & 1 \\ & & & & 0 \end{array}$					C'
	$\begin{array}{ccccc} 0 & & & & \\ 1 & 0 & & & \\ & 1 & 0 & & \\ & & 0 & 1 & \\ & & & 1 & 0 \end{array}$					
x_i	$\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}$					y_i
	$\begin{array}{cccccc} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}$					
	$\begin{array}{cccccc} * & 0 & 0 & * & 0 & * \end{array}$					
x	$\begin{array}{cccccc} 0 & 0 & * & 0 & * & * \end{array}$					y

elde edilir.

19.3. Weyr Karakteristikleri.

Tam olmayan özvektör sistemi halinde T dönüşüm matrisinin oluşturulması için şu tahmin yapılabilir : Var olan özvektörler bir şekilde dönüşüm matrisine girerler yani tam olmayan özvektör sistemini uygun şekilde tamamlamak bahis konusudur. Soru şudur : $d < p$ halinde p -katlı özdeğer λ için A matrisine ait ve eksik özvektörlerin yerine geçebilen ve böylece dönüşüm matrisinin boş yerlerini doldurabilen başka vektörler var mıdır? Bu durum gerçekten bahis konusudur. Özvektörlerin genişletilmesi "ana vektörler" şeklinde olur Bunlar ilk önce E. Weyr tarafından incelenmiş olan¹ ve kendi adı ile tanınan ikinci bir stürüktür invaryantı teoremine, Weyr karakteristiğinin bulmasına yarayan bir işleme dayanırlar. Karakteristik matris $A - \lambda_\sigma I$ nin rank düşmesi d_σ , $d_\sigma < p_\sigma$ halinde, bu $e_{\nu\sigma}$ her bölen üstleri ile belli basamaklarına göre devam eder.

1 Weyre, E.; Mh. Math. Phys. Bd 1. (1890) s. 163-236.

Bu olayın incelenmesi için yeni A matrisinin en basit şekli olarak, Jordan matrisin J kullanılır. p_σ çok katlı verilmiş $e_{\nu\sigma}$ elemanter bölen üslü belirli bir λ_σ özdeğerini göz önüne alalım. Bu durumda karakteristik matris $J - \lambda_\sigma I$ da, σ indisli $J_{\nu\sigma}$ katlarında λ_σ köşegen elemanları, eksiktir ve geriye $e_{\nu\sigma}$ -sıralı kutular kalır :

$$K_{\nu\sigma} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}. \quad (11)$$

Herbir kutunun rankı $e_{\nu\sigma}-1$, yani rank düşmesi 1 dir. Karakteristik matris $J - \lambda_\sigma I$ nin tüm rank düşmesi, $K_{\nu\sigma}$ kutularının sayısına yani, λ_σ ya ait $e_{\nu\sigma}$ elemanter bölen üslerinin sayısına eşittir. λ_σ ya ait tüm kuvvetler $e_{\nu\sigma}=1$ olması halinde bunların sayısı, p_σ toplamına eşittir ve dolayısı ile $d_\sigma = p_\sigma$ dir, 18.3 de belirtildiği gibi.

Karakteristik matris $J - \lambda_\sigma I$ nin ve dolayısı ile kendine benzer $A - \lambda_\sigma I$ matrisinin rank düşmesi, $d_\sigma < p_\sigma$ için yani lineer olmayan elemanter bölenler halinde karakteristik matrisin kuvveti alınarak, büyütülür (iki matrisin kuvvetleri de birbirine benzerdir!)

Bu arada, $J - \lambda_\sigma I$ yi oluşturan kutuların ve, λ_σ değerine ait $K_{\nu\sigma}$ kutularında kuvveti alınır. $K_{\nu\sigma}^2, K_{\nu\sigma}^3, \dots$, kuvvetleri, $K_{\nu\sigma}$ dan şöyle bulunur : 1- sıraları sağa doğru bir yer kadar itilir; bu esnada her kutuda 1- elemanlarının sayısı ve dolayısı ile rank, bir azalır ve, $K_{\nu\sigma}^{e_{\nu\sigma}}$ kuvveti için kutu sıfır matrisi olana kadar işleme devam edilir : ancak bu $e_{\nu\sigma}=1$ halinde tek bir 0 elemanlı olmamalıdır. Yani her kuvvet alınmasında $J - \lambda_\sigma I$ toplam matrisinde, sıfırdan farklı kutuların sayısına eşit bir rank düşmesi ortaya çıkar şartlar en basit olarak, 18.4 de verilen elemanter bölen kuvvetlerinin "nokta şeması" ile açıklanır. Örneğin incelenen λ sayısı için $e_{\nu\sigma} = 5, 4, 2, 2$ kuvvetleri yani $[(5422) \dots]$ şeklinde bir karakteristik var ise, şema şöyle olur :

.....
.....
.....
.....
.....

Matrisde önce, var olan $e_{\nu\sigma}$ sayısına yani birinci nokta sütunundaki nokta sayısına eşit bir rank düşmesi vardır, örneğimizde bu 4 dür. $(J - \lambda_\sigma)^2$

nin bulunmasında sıfırdan farklı her kutunun rankı bir küçülür, rank düşmesi ikinci nokta sütunundaki nokta sayısı kadar artar; örneğimizde 4 den 8 e çıkar. Örneğimizde şimdi son iki (iki sıralı) kutu sıfır olmuştur ve $(J - \lambda_\sigma I)^3$ ün bulunmasında, 1- elemanlarına sahip ilk iki kutu daha fazla rank düşmesine sebep olurlar böylece rank düşmesi üçüncü sütundaki nokta sayısı kadar yeni 2 artarak toplam 10 olur vs; yeni karakteristik matrisin kuvveti alınarak, rank düşmesi yükselmesi şöyle bulunur: satırların nokta sayısı e_ν kuvvetlerine eşit yapılmak üzere, belirli bir karakteristik sayısının e_ν elemanter bölen kuvvetlerinden nokta şeması uyarınca, soldan doğruluğu, "sütunların nokta sayısı" olarak elde edilir.

$(A - \lambda_\sigma I)^{\tau-1}$ den $(A - \lambda_\sigma I)^\tau$ ya geçişde rank düşmesi artışı genel olarak $\alpha_{\sigma\tau}$ ile gösterilir ise, aşağıdaki ardışık rank düşmeleri bulunur:

$$\begin{aligned} A - \lambda_\sigma I \text{ nin rank düşmesi } \alpha_{\sigma 1} &= d_\sigma \\ (A - \lambda_\sigma I)^2 \text{ nin rank düşmesi } \alpha_{\sigma 1} + \alpha_{\sigma 2} \\ (A - \lambda_\sigma I)^3 \text{ nin rank düşmesi } \alpha_{\sigma 1} + \alpha_{\sigma 2} + \alpha_{\sigma 3} \\ \dots \dots \dots \end{aligned}$$

$$(A - \lambda_\sigma I)^{\mu_\sigma} \text{ nin rank düşmesi } \alpha_{\sigma 1} + \alpha_{\sigma 2} + \dots + \alpha_{\sigma \mu_\sigma} = p_\sigma,$$

Nokta şemasındaki sütunların nokta sayısına eşit olan, Weyr'in, verdiği bu $\alpha_{\sigma\tau}$ sayıları A matrisi için "Weierstrass" elemanter bölen üstleri kadar karakteristiktir. Bunlara "Weyr karakteristikleri" denir ve bunlar, tanımlanan basit şekilde bağlı oldukları e_{ν_j} kuvvetleri gibi, matrisin strüktür invaryantları için ikinci bir teorem verirler. - Örneğimizde bunların değerleri 4, 4, 2, 2, 1 dir. Bunların toplamı - kuvvetlerinki gibi - p_σ çok katlılığına eşittir.

$$\alpha_{\sigma 1} + \alpha_{\sigma 2} + \dots + \alpha_{\sigma \mu_\sigma} = p_\sigma. \quad (12)$$

$\alpha_{\sigma\tau}$ sayıları da, yükselen merteye halinde, en fazla azalabilirler:

$$d_\sigma = \alpha_{\sigma 1} \geq \alpha_{\sigma 2} \geq \dots \geq \alpha_{\sigma \mu_\sigma} \geq 1. \quad (13)$$

bu durum, e_ν ların uygun özelliği halinde, nokta şemasından anlaşılır. - Nokta şemasının tek bir sütun olduğu tamamen "lineer" elemanter bölenler özel hali için $\alpha_{\sigma 1} = d_\sigma = p_\sigma$ geçerlidir: buna karşılık başka $\alpha_{\sigma\tau}$ yoktur. Buradan şu teorem bulunur:

Teorem 3: A matrisinin $A - \lambda I$ karakteristik matrisinin bir λ_σ özdeğeri için yalnız, ikinci derece matrisi $(A - \lambda_\sigma I)^2$ nin rankı $A - \lambda_\sigma I$ matrisinin rankına eşit ise, lineer elemanter bölenlere sahiptir.

Bu sorunun pratik cevabı, biraz sonra görüleceği gibi, biraz değişik bir yoldan daha rahat verilebilir. (s. 290).

19.4. Ana Vektörler.

$d_\sigma < p_\sigma$ halinde karakteristik matrisin kuvveti alınarak rank düşmesinin yükseltilmesi, p_σ - katlı özdeğerin eksik özvektörleri yerine

$$(A - \lambda_\sigma I)^\tau x = 0 \quad \tau = 1, 2, \dots, \mu_\sigma, \quad (14)$$

denklem sistemlerinin - ki bunlar

$$(A - \lambda_\sigma I) x = 0$$

özdeğer denkleminin yerine geçerler - çözümlerinin konulmasını akla getirir. $\tau = \mu_\sigma$ için denklem (14) deki katsayılar matrisi p_σ rank düşmesine sebep olmuştur. Böylece bu en yüksek kuvvet için tam p_σ adet lineer bağımsız x çözümleri bulunur. (14) denklemlerinin çözümlerine A matrisinin "ana vektörleri" hatta, x^τ ile gösterilen τ basamaklı ana vektörler" denir:

$$\begin{aligned} (A - \lambda_\sigma I)^\tau x^\tau &= 0, \\ (A - \lambda_\sigma I)^{\tau-1} x^\tau &\neq 0. \end{aligned} \quad (15)$$

Bu anlamda özvektörler, 1 basamaklı ana vektörler olur.

Bir τ basamağının ana vektörleri aynı zamanda bir "yüksek" basamağın ve özellikle en yüksek μ_σ basamağının çözümleridir. Zira denklem (14) den

$$(A - \lambda_\sigma I)^{\mu_\sigma} x^\tau = (A - \lambda_\sigma I)^{\mu_\sigma - \tau} [(A - \lambda_\sigma I)^\tau x^\tau] = 0.$$

çıkar. Denklem (14) deki tek sistemlerin tüm çözümleri böylece en yüksek kuvveti ($\tau = \mu_\sigma$) denkleminin genel çözümünde vardır.

$$(A - \lambda_\sigma I)^\tau x^\tau = (A - \lambda_\sigma I)^{\tau-\varrho} [(A - \lambda_\sigma I)^\varrho x^\tau] = 0$$

den $\rho < \tau$ için köşeli parantez içindeki ifadenin $\tau - \rho$ basamaklı bir ana vektör gösterdiği bulunur :

$$(A - \lambda_\sigma I)^\varrho x^\tau = x^{\tau-\varrho}, \varrho < \tau. \quad (16)$$

özellikle buradan $\rho = 1$ halinde, ardışık basamaklı ana vektörler için şu önemli "formül" çıkar :

$$(A - \lambda_\sigma I) x^\tau = x^{\tau-1} \quad x = 1, 2, \dots, \mu_\sigma, \quad (17)$$

bu, $x^0 = 0$ halinde, $\tau = 1$ yeni özvektörler için de geçerlidir. Yani ardışık basamaklı ana vektörler oradada şu formül takımından bulunurlar :

$$(A - \lambda_\sigma I) x^1 = 0 \quad (17.1)$$

$$(A - \lambda_\sigma I) x^2 = x^1 \quad (17.2)$$

$$(A - \lambda_\sigma I) x^3 = x^2 \quad (17.3)$$

$$\dots \dots \dots$$

Şimdi, birincisi dışında, (17) denklemleri, tekil $(A - \lambda_\sigma I)$ katsayılar matrisli homogen olmayan denklem sistemi oluşturanlar. Ancak bu denklemler, 8.2 teorem 8 den bilindiği gibi, yalnız ve yalnız aşağıdaki halde birbirine uyumludur : Sağ tarafın $x^{\tau-1}$ vektörü, transpoze homogen sistem

$$(A' - \lambda_\sigma I) y = 0, \quad (18)$$

in bütün y çözümlerine yani A matrisinin, λ_σ ya ait tüm y "sol vektörlerine" ortogonal olmalıdır. (17) sistemlerinin uyum koşulları

$$y' x^{\tau-1} = 0 \quad \tau = 2, 3, \dots, \quad (19)$$

dir. Burada y , (18) in genel çözümüdür.

λ_σ da lineer olmayan elemanter bölenler var ise yani rank düşmesi ve böylece özvektör sayısı, p_σ çok katlılığından küçük ise, 19.2 de görüldüğü,

$$y' x^1 = 0, \quad (19.1)$$

şeklinde x^1 özvektörleri vardır. Ayrıca lineer elemanter bölenler ortaya çıkar ise yani Weyr karakteristiği $\alpha_2 < \alpha_1$ ise bütün x^1 özvektörlerinin bu koşulu sağlanması mümkündür. Fakat $\alpha_2 > 0$ ise, (17.2) nin çözümleri olarak ikinci basamaklı α_2 adet x^2 ana vektörü vardır ve bunlar. α_1 adet x^1 özvektörü ile birlikte, rank düşmesi $\alpha_1 + \alpha_2$ matrisi $(A - \lambda_\sigma I)^2$ olan homogen sistemin çözümleri olduğundan bu x^1 ve x^2 vektörlerinin tümü lineer bağımsızdır. - Ayrıca $\alpha_1 + \alpha_2 < p_\sigma$ ise, x^2 vektörleri arasında, yeni uyumluluk koşulu

$$y' x^2 = 0 \quad (19.2)$$

nın sağlandığı α_3 adet vektör vardır ve bunlardan itibaren denklem (17.3) uyarınca üçüncü basamakdan α_3 adet x^3 vektörlerine yükselme mümkündür. Yine, yukarıda olduğu gibi, $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$ adet x^1, x^2, x^3 vektörleri lineer bağımsızdır.

λ_σ ya ait nokta şeması

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \end{array}$$

olan karakterisitik örneğin $v[\dots\dots\dots (5422)\dots]$ için λ_σ ya ait aşağıdaki vektör sistemi elde edilir :

$$\begin{array}{l} x_1^1 \rightarrow x_1^2 \rightarrow x_1^3 \rightarrow x_1^4 \rightarrow x_1^5 \\ x_2^1 \rightarrow x_2^2 \rightarrow x_2^3 \rightarrow x_2^4 \\ x_3^1 \rightarrow x_3^2 \\ x_4^1 \rightarrow x_4^2 \end{array}$$

burada aynı i satırındaki x_i^r vektörleri, denklem (17) uyarınca, birbirine bağlıdır. Bu tip birbirine bağlı ana vektörlere "ana vektör zinciri" adını vereceğiz. i . ninci zincirin uzunluğu, v indisi ile i satırı arasında $i = n + 1 - v$, $v = n + 1 - i$ bağıntısı olan $e_{v\sigma} = e_v$ kuvvetine eşittir. e_σ basamağına kadar yükselmeyi mümkün kılan i . ninci satırdaki bir $x_{i+1}^{\tau} e_v$ vektörünü de $x_i^{\tau} e_v$ ile göstereceğiz.

$$\boxed{x_i^{1e} \rightarrow x_i^{2e} \rightarrow x_i^{3e} \rightarrow \dots \rightarrow x_i^{e \cdot e} \rightarrow x_i^{e \cdot e} \rightarrow \dots} \quad (i = n + 1 - v). \quad (20)$$

A matrisine ait "zincir şeklinde düzenlenmiş ana vektörlerin" bu topluluğu, aranan dönüşüm matrisi **T** nin t_i sütunlarını verir ki bu dönüşüm matrisimizi Jordan - şekline sokar. İlk önce, e uzunluğundaki, λ_σ ya ait zincirlerden herbirini kısmi matris $T_{v\sigma}$ da toplayalım :

$$T_{v\sigma} = (x_i^{1e}, x_i^{2e}, \dots, x_i^{e \cdot e})_\sigma \quad (21)$$

burada σ indisi, yalnız bir kere parantezin arkasına konulmuştur. Bu $T_{v\sigma}$ matrislerini

$$T_\sigma = (T_{n\sigma}, T_{n-1,\sigma}, T_{n-2,\sigma}, \dots) \quad (22)$$

ve bunları da nihayet toplam matrisi

$$T = (T_1, T_2, \dots, T_s) \quad (23)$$

$$\begin{aligned} T_{n\sigma} &= (x_1^{15} x_1^{25} x_1^{35} x_1^{45} x_1^{55}) \\ T_{n-1,\sigma} &= (x_2^{14} x_2^{24} x_2^{34} x_2^{44}) \\ T_{n-2,\sigma} &= (x_3^{12} x_3^{22}) \\ T_{n-3,\sigma} &= (x_4^{12} x_4^{22}) \end{aligned}$$

ile gösterelim. Örneğimizde

$$A T_{v\sigma} = (\lambda x_i^{1e}, x_i^{1e} + \lambda x_i^{2e}, x_i^{2e} + \lambda x_i^{3e}, \dots, x_i^{e-1,e} + \lambda x_i^{e \cdot e}).$$

dir. Ancak sağ tarafda $T_{v\sigma}$ matrisi ile Jordan - kısmi matrisi $J_{v\sigma}$ nın çarpımı vardır :

$$A T_{v\sigma} = T_{v\sigma} J_{v\sigma}. \quad (24)$$

Örnek için yaklaşık olarak

$$\begin{aligned} A T_{n-1,\sigma} &= (\lambda_\sigma x_2^{14}, x_2^{14} + \lambda_\sigma x_2^{24}, x_2^{24} + \lambda_\sigma x_2^{34}, x_2^{34} + \lambda_\sigma x_2^{44}) \\ &= (x_2^{14} x_2^{24} x_2^{34} x_2^{44}) \begin{pmatrix} \lambda_\sigma & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_\sigma & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_\sigma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_\sigma \end{pmatrix} = T_{n-1,\sigma} J_{n-1,\sigma}. \end{aligned}$$

Böylece $A T = T J$ veya

$$\boxed{T^{-1} A T = J} \quad (25)$$

bulunur. Ana vektör zincirleri ve dolayısı ile **T** bulunduktan sonra invers matris T^{-1} in oluşturulması gerekli değildir. Çünkü bu zincirler ile matrisin strüktürü ve dolayısı ile - bilinen λ_σ özdeğerleri halinde - Jordan matrisi de tamamen bellidir ve bu **J** matrisi doğrudan doğruya yazılabilir.

$$\boxed{(A - \lambda B) x = 0}, \quad (26)$$

Ana vektörler ve ana vektör zincirleri, genel özdeğer problemi yani, tekil olmayan **B** halinde, **A**, **B** matris çiftleri içinde oluşturabilir. (17) denklemlerinin yerine

$$\boxed{(A - \lambda_\sigma B) x^\tau = B x^{\tau-1}} \quad \tau = 1, 2, 3, \dots \quad (27)$$

formülleri geçerler. Bunlar, yukarıda olduğu gibi, ana vektör zincirlerine ve **T** dönüşüm matrisini verirler : bunun için, denklem (27) uyarınca,

$$A T = B T J$$

veya

$$\boxed{T^{-1} B^{-1} A T = J} \quad (28)$$

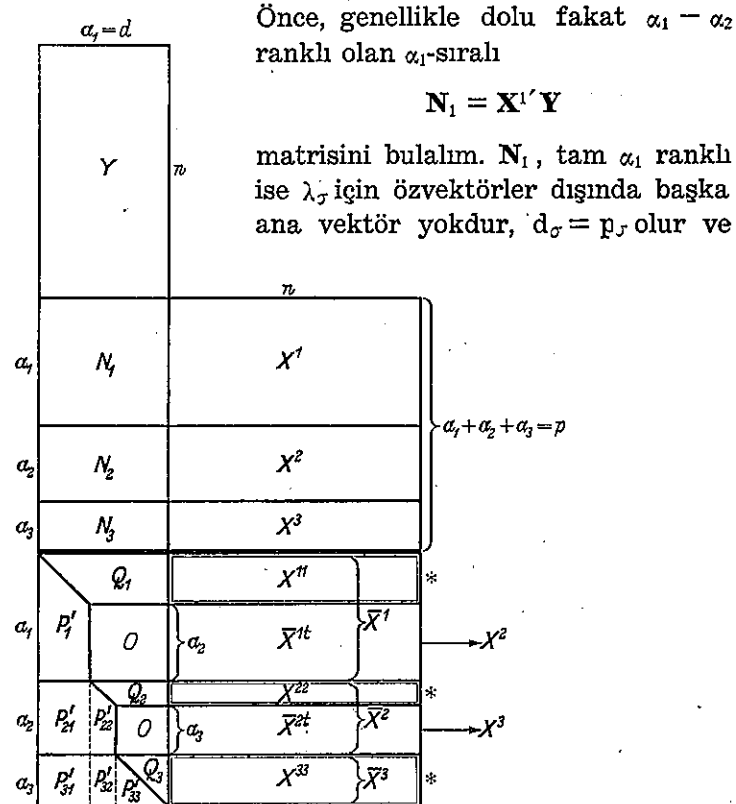
bağıntısı geçerlidir. Yani denklem (26) daki genel probleminin B^{-1} ile soldan çarpılmış halinde özel özdeğer problemine dönüşmesi gibi **J** matrisi de, $B^{-1} A$ matrisinin Jordan - şeklidir.

19.5. Ana Vektör Zincirlerinin Kurulması.

Ana vektör zincirlerinin kurulması özel bir hesap tekniğini gerektirir. Bunun sebebi şudur. $A - \lambda_\sigma I$ tekil matrisli homojen sistemin çözümleri olarak özvektörlerin hesaplanmasında genellikle, yani $\alpha_2 = \alpha_1$ değil ise, bütün x^1 vektörlerinde x^{11} vektörlerinin yani zincir uzunluğu 1 olan ve ikinci basamak x^2 vektörlerine çıkışı mümkün kılınmayan vektörlerin bileşenleri vardır. Dolayısı ile bir X^1 matrisinde toplanacak olan α_1 adet x^1 ham vektörlerine önce "bir temizleme işlemi" uygulanır; bu suretle bir taraftan, x^{11} ile toplam halinde gösterilen X^{11} matrisleri, diğer taraftan, X^{11} , α_2 adet x^{11} ($t \geq 2$) vektörleri ayrılır burada yalnız X^{11} den x^2 vektörlerine yükselme mümkündür. y sol vektörleri de bir **Y** matrisinde toplanır ise, $X^{11} Y = 0$, geçerli olur, buna karşılık $X^{11} Y \neq 0$, $\alpha_1 - \alpha_2$ ranklı bir matrisdir. x^2 ile gösterilen ve, X^{11} ikinci tarafı denk-

lem (17.2) den hesaplanan α_2 adet, ikinci basamakdan x^2 vektörleri de tüm vektörlerdir ve bunlarda genellikle, 3 basamak x^3 e yükselmeyi mümkün kılmayan x^{11} , x^{12} ve x^{22} vektörleri vardır. X^2 ham matrisinde bir temizleme işlemi uygulanmalıdır : böylece x^{22} vektörlerine sahip X^{22} matrisi ve, zincir uzunlukları $t \geq 3$ olan, x_3 adet x^{2t} vektörlerine sahip X^{2t} ortaya çıkar. Yine $X^{22} Y \neq 0$, buna karşılık $X^{2t} Y = 0$ böylece X^{2t} sağ taraflı (17.2) denklemleri uyarınca olurlar ve 3 basamaktan α_3 adet ve, X^3 ile gösterilen, x^3 vektörlerini verirler. Bu şekilde hareketle, denklem (17) yardımı ile her yeni yükselişden önce, daha önceden bulunan ham vektörlere temizleme uygulanır ve buna, metod kendiliğinden durana kadar devam edilir. Örneğin 3 basamakla metod burada $X^{33} Y \neq 0$ da tam α_3 satır vardır yani $\alpha_4 = 0$ olur.

Ham vektörlerin temizlemesi yani daha sonraki yükseliş için uygun olmayan vektörlerin ayrılması basit şekilde 9.3 deki gibi, zincirleme Gauss Algoritması¹ ile yapılır. Hesap şeması Şek. 19.1 de gösterilmiştir.



Şekil 19.1. Ana vektör zincirlerinin kurulmasına ait vektör temizleme şeması.

¹ Nach H. Unger: Zur Praxis der Biorthonormierung von Eigen- und Hauptvektoren Z. angew. Math. Bd. 33 (1953) S. 319 - 331.

başka hesap gerekmez. Tekil N_1 , $\alpha_2 > 0$ için N_1 zincirleme algoritma aşağıdaki şekilde parçalanır :

$$N_1 + P'_1 Q_1 = 0 \rightarrow P_1, Q_1$$

burada P_1, Q_1, α_2 adet sıfır satırlı üst üçgen matrislerdir.

$$X^{1'} + P'_1 \bar{X}^{1'} = 0 \rightarrow \bar{X}^1$$

uyarınca algoritması sağdaki $X^{1'}$ matrisine genişletilmesi yeni $\bar{X}^1 = (\bar{X}^{11}, \bar{X}^{12})$ matrisini verir : burada $\bar{X}^1, Q_1$ in sıfır satırlarına aittir ve Y ile ortogonaldir : $\bar{X}^{1t} Y = 0$. Böylece

$$(A - \lambda_{\sigma} I) X^2 = \bar{X}^{1t}$$

uyarınca X^2 ye yükseliş ve

$$N_2 = X^{2'} Y,$$

nin yazılması ve, α_2 satır ve α_1 sütundan oluşan bu matrisin

$$N_2 + P'_{21} Q_1 + P'_{22} Q_2 = 0 \rightarrow P_{21}, P_{22}, Q_2,$$

uyarınca, parçalanması mümkün olur; burada P_{22}, Q_2 üçgen matrisleri şimdi α_3 adet sıfır satıra sahiptir. Algoritmanın

$$X^{2'} + P'_{21} \bar{X}^{11'} + P'_{22} \bar{X}^{2'} = 0 \rightarrow \bar{X}^2$$

uyarınca $x^{2'}$ ne genişletilmesi ile, $\bar{X}^2 = (\bar{X}^{22}, \bar{X}^{2t})$ bulunur; burada $\bar{X}^{2t}, Q_2$ nin sıfır satırlarına aittir ve Y ile ortogonaldir. $\bar{X}^{2t} Y = 0$ ve böylece

$$(A - \lambda_{\sigma} I) X^3 = \bar{X}^{2t}$$

uyarınca X^3 e yükselme mümkündür. Dolayısı ile

$$N_3 = X^{3'} Y$$

yazılabilir ve

$$N_3 + P'_{31} Q_1 + P'_{32} Q_2 + P'_{33} Q_3 = 0 \rightarrow P_{31}, P_{32}, P_{33}, Q_3$$

e ayrılabilir ve,

$$\mathbf{X}^{3'} + \mathbf{P}'_{31} \bar{\mathbf{X}}^{11'} + \mathbf{P}'_{32} \bar{\mathbf{X}}^{22'} + \mathbf{P}'_{33} \bar{\mathbf{X}}^{33'} = \mathbf{O} \rightarrow \bar{\mathbf{X}}^3.$$

uyarınca, algoritma $\mathbf{X}^3$ e genişletilebilir. Şimdi örneğin $\alpha_4 = 0$ yani N_3 ün rankı α_3 ise, metod durur ve $\bar{\mathbf{X}}^3 = \bar{\mathbf{X}}^{33}$ bulunur.

Bu durumda, uzunluğu t olan her zincirin en yüksek $\mathbf{X}^{tt}$ zincir basamakları, $t = e_{n\sigma} = \mu_\sigma$ olan en uzun zincire kadar hazırdır. Bu hazır zincirler şimdi $\mathbf{X}^{tt}$ ile göstereceğiz.

Ancak temizleme işlemi ile, $\bar{\mathbf{X}}^{1t}$ den $\mathbf{X}^2$ ye, $\bar{\mathbf{X}}^{2t}$ den $\mathbf{X}^3$ e vs. götüren zincir bağıntısı yine bozulmuştur. Şimdi bu, ek olarak "inme" ile, yani karakteristik matris ile çarpılarak yeniden oluşturulur :

$$(\mathbf{A} - \lambda_\sigma \mathbf{I}) \mathbf{X}^{22} = \mathbf{X}^{12}$$

$$(\mathbf{A} - \lambda_\sigma \mathbf{I}) \mathbf{X}^{33} = \mathbf{X}^{23}, (\mathbf{A} - \lambda_\sigma \mathbf{I}) \mathbf{X}^{23} = \mathbf{X}^{13}$$

$$(\mathbf{A} - \lambda_\sigma \mathbf{I}) \mathbf{X}^{44} = \mathbf{X}^{34}, (\mathbf{A} - \lambda_\sigma \mathbf{I}) \mathbf{X}^{34} = \mathbf{X}^{24}, (\mathbf{A} - \lambda_\sigma \mathbf{I}) \mathbf{X}^{24} = \mathbf{X}^{14}$$

.....

buradan aşağıdaki alt zincir terimleri bulunur.

$$\mathbf{X}^{12}; \mathbf{X}^{23}; \mathbf{X}^{13}; \mathbf{X}^{34}; \mathbf{X}^{24}; \mathbf{X}^{14}; \dots$$

uzunluğu t olan zincir birden fazla sıradan oluşmuş ise yani zincirini uç matrisi $\mathbf{X}^{tt}$ de

$$\mathbf{X}^{tt} = (\mathbf{x}_1'', \mathbf{x}_2'', \mathbf{x}_3'', \dots),$$

vektörleri var ise, her sıra için zincir bağıntısı göz önüne alınmalıdır. Bu durumda λ_σ özdeğerine ait kısmi matris $\mathbf{T}_\sigma$ t uzunluğundaki bu kısmı için şöyle bulunur :

$$\mathbf{T}_\sigma = (\dots; \mathbf{x}_1^{1t} \mathbf{x}_1^{2t} \dots \mathbf{x}_1^{tt}; \mathbf{x}_2^{1t} \mathbf{x}_2^{2t} \dots \mathbf{x}_2^{tt}; \dots).$$

Söylediklerimizi bir örnek ile açıklayalım : Altı sıralı

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & -4 & 0 & -5 & -4 & 3 \\ 2 & -3 & -1 & -3 & -4 & 2 \\ 10 & -7 & 0 & -11 & -7 & 6 \\ 4 & -2 & 1 & -4 & -1 & 2 \\ -8 & 8 & 1 & 10 & 9 & -6 \\ -6 & 9 & 2 & 9 & 11 & -6 \end{pmatrix}$$

matrisinde altı katlı $\lambda_1 = 0$, özdeğeri vardır : böylece matris, karakteristik matrisi ile çakışır ($\lambda_1 = a$ özdeğeri halinde yalnız köşegen elemanları a kadar büyür). Böylece $\mathbf{x}^1$ ve $\mathbf{y}$ özvektörlerinin ve ilerde ana vektörlerin hesabına ait algoritma şöyle bulunur.

							$\bar{\mathbf{X}}^{1t}$			$\bar{\mathbf{X}}^{2t}$		
6	1	3	-4	4	1	11	5	1	-5			
4	-4	0	-5	-4	3	-6	3	-1	1			
2	-3	-1	-3	-4	2	-7	-2	-2	-2			
10	-7	0	-11	-7	6	-9	0	-4	-8			
4	-2	1	-4	-1	2	0	4	0	0			
-8	8	1	10	9	-6	14	0	4	4			
-6	9	2	9	11	-6	19	0	4	0			
							y_1	y_2	y_3			
-2	2	2	1	4	-1	8	2	0	2	7	3	5
2	-3	-1	-3	-4	2	-7	3	2	3	-2	-2	-2
-5	-4	3	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
-2	-2	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
4	2	1	0	1	0	2	1	1	3	6	2	6
3	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
-3	-5	4	0	0	0					0	0	0
3	-2	0	4	0	0							
0	1	1	0	-1	0							
-1	2	0	0	0	4							
$-7/4$	$-5/2$	6	0	0	0					-1		
$-3/4$	$-1/2$	2	0	0	0					-1		
$-13/4$	$-7/2$	6	0	0	0						-1	

$\mathbf{y}$ sol vektörleri de $\mathbf{x}$ sağ vektörleri gibi hesaplanır ancak $\mathbf{x}$ daki üst matris yerine, basamaklı sistemin matrisi olarak alt üçgen matris kullanılır. Bundan sonra temizleme (ortogonallaştırma) şeması bulunur.

Y	2	0	2										
	3	2	3										
	0	0	1										
	0	1	0										
	1	1	3										
	1	0	0										
N ₁	0	0	0	3	-2	0	4	0	0	5	} X ¹		
	2	1	1	0	1	1	0	-1	0	1			
	8	4	4	-1	2	0	0	0	4	5			
N ₂	-11	-5	-5	-7/4	-5/2	6	0	0	0	7/4	} X ²		
	-3	-1	-1	-3/4	-1/2	2	0	0	0	3/4			
	-17	-7	-11	-13/4	-7/2	6	0	0	0	-3/4			
N ₃	0	0	0	3	-2	0	4	0	0	5	} X ³		
	2	1	1	0	1	1	0	-1	0	1			
	-4	0	0	-1	-2	-4	0	4	4	1			
	11/2	1/2	-1/2	-7/4	3	23/2	0	-11/2	0	23/4	} X ²²		
	3/2	-1	0	1	-2	-8	0	4	0	-5	} X ²		
	17/2	-3	-4	2	-4	-20	0	8	0	-14	} X ³³		

Böylece, alt basamaklara inışı mümkün kılan, son-basamak vektörleri x^{11} , x^{22} , x^{33} bulunmuş olur.

$A - \lambda_1 I$							x^{33}	x^{23}	x^{13}	x^{22}	x^{12}	x^{11}
4	-4	0	-5	-4	3	1/2	-2	-1	-7/2	6	0	0
2	-3	-1	-3	-4	2	-1	1	0	6	-4	1	1
10	-7	0	-11	-7	6	-5	-2	-1	23	0	1	1
4	-2	1	-4	-1	2	0	-3	-1	0	8	0	0
-8	8	1	10	9	-6	2	1	1	-11	0	-1	-1
-6	9	2	9	11	-6	0	0	1	0	0	0	0

Böylece dönüşüm matrisi

$$T = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1/2 & 6 & -7/2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -4 & 6 & 1 \\ -1 & -2 & -5 & 0 & 23 & 1 \\ -1 & -3 & 0 & 8 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & -11 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

olur. Nokta seması

yani Jordan-matrisi

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & 0 & & \\ & & & 0 & 1 \\ & & & & 0 \end{pmatrix}$$

dır.

20. Matris Fonksiyonları ve Matris Denklemleri.

20.1. Bir Matris Fonksiyonunun Özdeğerleri.

Matrislere ait dört temel hesap işleminin tanımından, adi (reel veya kompleks) sayılarda olduğu gibi, ilk önce tam rasyonel fonksiyonun en basit şekli "Matris polinomu" olarak, "matris fonksiyonu" kavramı ortaya çıkar (bakınız : § 2.6, 13.7) ve bunun aynı matrisin tekil olmayan ikinci bir polinomunun invers matrisi ile çarpımından kesirli ve dolaşımı ile genel rasyonel matris fonksiyonu bulunur. Matris polinomunun sonsuz "matris kuvvet serisi" ne transondan ve önemi aşağıda belirtilen, "Analitik matris fonksiyonları" kavramını verir.

Matris fonksiyonları ile çalışma, matrislere has "minimum denklem" (bak. 18) özelliği ile özel bir önem ve önemli sadeleştirme sağlar; bu denklem yardımı ile A ve $m \leq n$ kuvvetleri, minimum denkleminin en yüksek katsayısı olarak lineer şekilde A^{m-1} ve daha düşük kuvvetler cinsinden ifade edilir. Ancak böylece, $q \geq m$ halinde, q -nüncü dereceden bir $f(A)$ matris polinomu daha düşük yeni $(m-1)$ inci dereceden $\varphi(A)$ ersatz-polinomuna indirgenebilir : bunun katsayıları ise, $f(A)$ polinomundakinin dışında A matrisine de önemli ölçüde bağlıdır. İndirgenme işlemi, görüleceği gibi kuvvet serileri cinsinden ifade edilebilmeleri halinde, genel matris fonksiyonlarına da uygulanabilir. Böylece bütün bu fonksiyonlar en basit fonksiyon şekline, "polinom" a indirgenebilirler. İlk olarak bir $f(A)$ matris fonksiyonu halinde, örneğin

$$B = f(A) = a_0 I + a_1 A + a_2 A^2 + \dots + a_q A^q \quad (1)$$

şeklinde bir polinom kabul edilsin. Yani $\mathbf{B}$ matrisi $\mathbf{A}$ matrisi ile “değiştirilebilir” yani kormütatif çarpım

$$\mathbf{A} \mathbf{B} = \mathbf{B} \mathbf{A} \quad (2)$$

geçerli olup bu, ersatz-polinom prensibi nedeni ile, bir **A** matrisinin kuvvet serileri cinsinden gösterilebilen **B** fonksiyonlarına has bir özelliktir. **B** fonksiyonu için, 13.7 teorem 11 de matris kuvvetleri için belirtilen karakteristik sayıların özelliği aşağıdaki şekilde genelleştirilebilir :

Teorem 1 : Bir matris polinomunun veya bir polinom ile gösterilebilen $\mathbf{B} = f(\mathbf{A})$ matris fonksiyonunun λ_i özdeğerleri, $\mathbf{A}$ matrisinin α_i özdeğerlerine aşağıdaki denklem ile bağlıdır :

$$x_i = f(\lambda_i) \quad (3)$$

Teoremi önce $f(\mathbf{A})$ nın polinom olması hali için gözelim. Bu maksadla belirsiz x parametrelili, q -nuncu dereceden $f(x) = x$ polinomunu alalım ve bunu q lineer çarpanlarına ayıralım :

$$f(x) - \kappa = a(x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_q). \quad (4)$$

Buna $\mathbf{B}$ nin karakteristik matrisine ait matris denklemi

$$\mathbf{B} - \kappa \mathbf{I} \equiv f(\mathbf{A}) - \kappa \mathbf{I} = \alpha(\mathbf{A} - x_1 \mathbf{I})(\mathbf{A} - x_2 \mathbf{I}) \cdots (\mathbf{A} - x_q \mathbf{I}).$$

karşılık gelir. Böylece $\mathbf{B}$ nin karakteristik determinanı olarak § 2.2, determinant teoremi 3 uyarınca,

$$|\mathbf{B} - \kappa \mathbf{I}| = a^n |\mathbf{A} - x_1 \mathbf{I}| |\mathbf{A} - x_2 \mathbf{I}| \cdots |\mathbf{A} - x_q \mathbf{I}|.$$

elde edilir. Burada sağdaki çarpımlar, A nin karakteristik determinanı

$$|\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}| = (\lambda_1 - \lambda)(\lambda_2 - \lambda) \cdots (\lambda_n - \lambda),$$

şeklinde olduğundan,

$$\begin{aligned} |\mathbf{B} - x \mathbf{I}| &= a(\lambda_1 - x)(\lambda_1 - x) \cdots (\lambda_1 - x_q) \\ &\quad a(\lambda_2 - x)(\lambda_2 - x) \cdots (\lambda_2 - x_q) \\ &\quad \\ &\quad a(\lambda_n - x)(\lambda_n - x) \cdots (\lambda_n - x_q). \end{aligned}$$

bulunur. Ancak burada sağ taraftaki satırlar (4) şeklinde olduğu için B nin karakteristik denklemi olarak

$$|\mathbf{B} - \kappa \mathbf{I}| = (f(\lambda_1) - \kappa)(f(\lambda_2) - \kappa) \cdots (f(\lambda_n) - \kappa) = 0. \quad (5)$$

çıkar. Böylece 1 teoremi, $f(\mathbf{A})$ polinomu için ispatlanmış olur. İspat kolayca genel, rasyonel fonksiyonlara genişletilebilir. Keyfi, kuvvet serileri ile ifade edilebilen fonksiyonları uygulama aşağıda gösterilecektir.

20.2. Matris Fonksiyonunun Ersatz Polinom'a İndirgenmesi.

$q \geq m$ dereceli $f(A)$ matris polinomunun, yukarıda bahsedilen, $(m-1)$ ci veya daha düşük bir dereceden polinoma,

$$m(\mathbf{A}) = \mathbf{A}^m + b_{m-1}\mathbf{A}^{m-1} + \cdots + b_1\mathbf{A} + b_0\mathbf{I} = \mathbf{0} \quad (6)$$

yardımlı ile indirgenmesi en basit şekilde $f(\lambda)$ nın, $m(\lambda)$ ye bölünmesi ile yapılabilir. Bu durumda Ersatz polinom $\varphi(\mathbf{A})$, bölme kalanı $\varphi(\lambda)$ olarak ortaya çıkar. Zira keyfi $g(\lambda)$ polinom çarpanlı

$$f(\lambda) = m(\lambda)g(\lambda) + \varphi(\lambda) \quad (7)$$

den, $m(\mathbf{A}) = \mathbf{0}$ nedeni ile, $\mathbf{A}$ nın λ yerine konulması ile,

$$\mathbf{B} = f(\mathbf{A}) = \varphi(\mathbf{A}) \quad (8)$$

bulunur.

$$\boxed{f(\lambda_\sigma) \equiv f_\sigma = \varphi(\lambda_\sigma)} \quad , \quad (9)$$

Denklem (7) den önce, $m(\lambda_\sigma) = 0$ nedeni ile A nın λ_σ özdeğeri çikarki bu genel olarak denklem (8) den, teorem (1) yardımı ile bulunan bir özelliktir.

Zira denklem (8) keyfi (veya kuvvet serileri ile ifade edilebilen) $f(\mathbf{A})$ fonksiyonları için geçerli olacaktır: $f(\mathbf{A})$ ve $\varphi(\mathbf{A})$ fonksiyonları aynı $\mathbf{B}$ matrisini oluştururlar ve dolayısı ile aynı $\kappa_\sigma = f(\lambda_\sigma)$ özdeğerlerine sahiptirler.

Denklem (7) uyarınca bölüm kalanı olarak $\varphi(\lambda)$ ersatz-polinomunun bulunması, yalnız $m(\lambda)$ ya bölmenin mümkün olduğu $f(\lambda)$ polinomları ile sınırlıdır. Ancak $\varphi(\lambda)$ nın genel $f(\lambda)$ fonksiyonları için verilebilmesi başka bir ifade şeklini gerektirir. Bu tip bir şekil, elemanter bölenlerin lineerliği nedeni ile çok sayıda tek katlı sıfır noktalarına sahip $m(\lambda)$ minimal polinomlu, normlaştırılabilir = köşegen benzeri matrisler basit olarak bulunur :

$$m(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \cdots (\lambda - \lambda_m).$$

Bu durumda, denklem (9) nedeni ile ersatz polinomun oluşturulması şu interpolasyon probleminin çözümüne götürür : m adet $\lambda = \lambda_\sigma$ noktalarında, verilmiş $f(\lambda_\sigma) = f_\sigma$ fonksiyon değerlerini alan $(m-1)$ inci dereceden polinomu bulunur. m adet $(m-1)$ inci dereceden

$$m_\sigma(\lambda) = \frac{m(\lambda)}{\lambda - \lambda_\sigma}, \quad (10)$$

polinomlarından yani, her defasında $\lambda - \lambda_\sigma$ lineer çarpanı eksik olan Lagrange Interpolasyon polinomlarından :

$$F_\sigma = \frac{f_\sigma}{m_\sigma}, \quad m_\sigma = m_\sigma(\lambda_\sigma) \text{ olarak} \quad (11)$$

kısaltması halinde,

$$\varphi(\lambda) = \sum_{\sigma=1}^m F_\sigma m_\sigma(\lambda) = \sum_{\sigma=1}^m f_\sigma \frac{m_\sigma(\lambda)}{m_\sigma} \quad (12)$$

ifadesi elde edilir. Burada denklem (9) daki interpolasyon hipotezleri gerçekleşir. Böylece $\varphi(\lambda)$ Ersatz polinomu bulunduğundan sonra $B = f(A)$ matris fonksiyonu, denklem (8) uyarınca, ilgili polinomu $\varphi(A)$ yardımı ile çıkar. Yani bunlar yalnız A matrisinin λ_σ özdeğerlerine ait f_σ fonksiyon değerleridirler ve matrise has minimal polinom vasıtası ile, $f(A)$ matris fonksiyonunun verirler. $f(A)$ nın bu tanımı, görüleceği gibi, polinomlar dışında, kuvvet serileri vasıtası ile, matrisin keyfi, üstel fonksiyonlarına da uygulanabilir.

Lineer olmayan elemanter bölenler yani minimal polinomda çok katlı sıfır noktaların olması halinde durum biraz daha karışır. Burada polinom, A matrisinin s adet farklı λ_σ özdeğerine sahip olan şu şekle girer :

$$m(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{\mu_1} (\lambda - \lambda_2)^{\mu_2} \cdots (\lambda - \lambda_s)^{\mu_s}$$

$m(\lambda_\sigma) = 0$ dışında,

$$m^{(v)}(\lambda) = 0, \quad \lambda = \lambda_\sigma, v = 0, 1, 2, \dots, \mu_\sigma - 1 \text{ için}$$

türevleri de sıfır olduğundan, denklem (7) nin türetilmesi ile

$$f^{(v)}(\lambda_\sigma) = f_\sigma^{(v)} = \varphi^{(v)}(\lambda_\sigma), \quad v = 0, 1, 2, \dots, \mu_\sigma - 1 \quad (13)$$

bulunur. Yani interpolasyon problemi genelleştirilmiş olur, böylece f_σ değerleri dışında $f_\sigma^{(v)}$ türevleri de, ersatz polinomun karşılık gelen türevlerinden alınır ve bir hermitsel interpolasyon ortaya çıkar. Şimdi değişmiş Lagrange polinomları

$$m_\sigma(\lambda) = \frac{m(\lambda)}{(\lambda - \lambda_\sigma)^{\mu_\sigma}} \quad (14)$$

ve bunların $m_\sigma(\lambda_\sigma) = m_\sigma$ değerleri hesabı katılarak,

$$F_\sigma(\lambda) = \frac{f(\lambda)}{m_\sigma(\lambda)} \quad (15)$$

fonksiyonları bulunur. Böylece (12) denklemini yerine aşağıdaki polinom geçer :

$$\varphi(\lambda) = \sum_{\sigma=1}^s \left\{ F_\sigma + F'_\sigma(\lambda - \lambda_\sigma) + \frac{1}{2!} F''_\sigma(\lambda - \lambda_\sigma)^2 + \cdots + \frac{1}{(\mu_\sigma - 1)!} F^{(\mu_\sigma - 1)}_\sigma(\lambda - \lambda_\sigma)^{\mu_\sigma - 1} \right\} m_\sigma(\lambda) \quad (16)$$

burada

$$F^{(v)}_\sigma = F^{(v)}_\sigma(\lambda), \quad \lambda = \lambda_\sigma \text{ için}$$

kısaltmaları yapılmıştır. Zira ancak bu durumda genel interpolasyon hipotezi denklem (13) gerçekleşir :

$$\varphi(\lambda_\sigma) = F_\sigma m_\sigma = f_\sigma$$

$$\varphi'(\lambda_\sigma) = F'_\sigma m_\sigma + F_\sigma m'_\sigma = f'_\sigma$$

$$\varphi''(\lambda_\sigma) = F''_\sigma m_\sigma + F'_\sigma m'_\sigma + F_\sigma m''_\sigma = f''_\sigma$$

.....

bu ise, (16) denkleminin türetilmesi ile anlaşılır. Bu $\varphi(\lambda)$ polinomundan aranan matris fonksiyonu $B = f(A) = \varphi(A)$ bulunur. yine matrisin λ_σ özdeğerlerine ait $f(\lambda_\sigma)$ türevleri yanında f_σ fonksiyon değerleridir ve minimal polinom yardımı ile, matris fonksiyonunu belirtirler; özdeğerler burada kelimenin tam anlamı ile, matrisin karakteristik sayılarıdır.

u, v polinomları, kesirli rasyonel fonksiyon $f(\lambda) = u(\lambda)/v(\lambda)$ halinde (7) denkleminin yerine, $g(\lambda)$ polinom çarpanlı

$$u(\lambda) = m(\lambda)g(\lambda) + v(\lambda)\varphi(\lambda) \quad (7a)$$

geçer ve böylece hesap yukarıdaki gibi olduğundan denklem (12) ve (16) kesirli, rasyonel matris fonksiyonu $f(A)$ içinde kullanılabilir.

Açık olarak bilinmeyen minimal polinom $m(\lambda)$ yerine karakteristik polinom $p(\lambda)$ nın kullanılması halinde de formüller geçerlidir. burada μ_σ çok katlılıklarının yerini p_σ değerleri alırlar. Ancak ifadelerin kapsamı genişler ve hesap zorlaşır.

Teorem 2: $f(\lambda)$ bir sayısal veya kuvvet serisine açılabilen tek değerli bir fonksiyon ve A , m dereceli $m(\lambda)$ minimal polinomuna sahip, n -sıralı bir matris ise, $f(\lambda)$ fonksiyonuna ait matris fonksiyonu $B = f(A)$, derecesi $\leq m - 1$ olan $\varphi(A)$ matris polinom cinsinden yazılabilir, burada denklem (16) uyarınca $\varphi(\lambda)$ nın katsayıları matrise veya matrisin minimal polinomuna bağlıdır:

$$B = f(A) = \varphi(A) \quad (8)$$

$\varphi(\lambda)$ ya, $f(\lambda)$ fonksiyonunun A matrizen göre ersatz polinomu denir.

20.3. Matris Kuvvet Serileri ve Bunlar Cinsinden Yazılabilen Matris Fonksiyonları.

Matris polinomlarından (reel veya kompleks) a_ν sayısal katsayılı aşağıdaki matris kuvvet serilerine geçilebilir.

$$B = P(A) = a_0 I + a_1 A + a_2 A^2 + \dots \quad (17)$$

Bu seriler ya doğrudan doğruya, örneğin iteratif matris işlemlerine bağlı olarak ortaya çıkarlar veya,

$$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots \quad (18)$$

şeklindeki uygun, adi kuvvet serileri ile ifade edilen ve matris fonksiyonlarına taşınması istenen transandant fonksiyonlar ile ilgilidir. Her halde ilk önce serinin yakınsaklığı problemi ortaya çıkar. Kısmi toplamın her elemanı artan terim sayısı ile yakınsıyor ise matris kuvveti serisine (ve genellikle keyfi bir matris serisine) yakınsak denir. Bu n^2 adet matris elemanının yakınsaklığının teker teker kontrolünün gerekmesi yine karakteristik bir özelliktir. A matrisine ait λ_σ özdeğerine karşılık $P(\lambda_\sigma)$ adi kuvvet serilerinin yakınsaklığı yeterlidir. Bu maksadla denklem (18) deki serinin

$$P_q(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_q x^q,$$

kısmi toplamı ele alınır ki bu, yakınsaklık halinde,

$$P(x) = \lim_{q \rightarrow \infty} P_q(x) \quad (19)$$

seri toplamına dönüşür. $P_q(x)$ polinomu için, A matrisine göre bulunan $\varphi_q(x)$ ersatz polinomu yazılabilir, yani lineer elemanter bölenler halinde, denklem (12) uyarınca,

$$P_q(A) = \varphi_q(A) = \sum_{\sigma=1}^s \frac{1}{m_\sigma} P_q(\lambda_\sigma) m_\sigma(A).$$

Burada denklem (19) daki limit alınır ise ersatz polinomda yalnız $P_q(\lambda_\sigma)$ fonksiyonları buradan etkilenir ve bunlar, matrisin tüm λ_σ özdeğerlerinin denklem (18) deki kuvvet serisi yakınsaklık dairesi içinde olmaları halinde, $P(\lambda_\sigma)$ seri toplamalarını yakınsatlar ve böylece lineer elemanter bölenler için,

$$P(A) = \varphi(A) = \sum_{\sigma=1}^s \frac{1}{m_\sigma} P(\lambda_\sigma) m_\sigma(A) \quad (20)$$

elde edilir. Minimal polinomda çok katlı kökler (lineer olmayan elemanter bölenler) halinde denklem (16) uyarınca $P(\mu_\sigma - 1)(\lambda_\sigma)$ ya kadar $P(\nu)(\lambda)$ türevleri de ortaya çıkarlar. Yakınsaklık dairesi içinde, $P(\lambda)$ ile birlikte tüm türevler de yakınsaktır. Dairenin kenarında, en büyük türevin yakınsaklık durumu esastır.

Teorem 3 : λ_σ özdeğerleri için, minimal polinomda n katlı olan A matrisinin $p(A)$ kuvvet serisi yalnız, adi kuvvet serileri $p(\mu_\sigma - 1)(\lambda)$ nın matrisin her özdeğeri için yakınsamaları halinde, yakınsaklar.

Böylece e^x , $\cos x$, $\sin x$ fonksiyonlarının bilenen sürekli (yani her sonlu x -değeri için) yakınsak serileri her keyfi A matrisi için yakınsaklar ve aşağıdaki transandant matris fonksiyonları tanımlanır.

$$\left. \begin{aligned} e^A &= I + A + \frac{1}{2!} A^2 + \frac{1}{3!} A^3 + \dots \\ \cos A &= I - \frac{1}{2!} A^2 + \frac{1}{4!} A^4 - \dots \\ \sin A &= A - \frac{1}{3!} A^3 + \frac{1}{5!} A^5 - \dots \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

Bunların pratik hesabı, ilgili ersatz polinom yardımı ile örneğin lineer elemanter bölen halinde,

$$e^A = \sum_{\sigma=1}^s \frac{1}{m_\sigma} e^{\lambda_\sigma} m_\sigma(A).$$

uyarınca yapılır. Sürekli olmayan yani sonlu R yakınsaklık yarıçapı için yakınsak $P(x)$ serileri halinde $P(A)$ matris kuvveti serileri yalnız, λ_σ özdeğerlerinin tümü $P(x)$ serisinin yakınsaklık dairesi içinde (veya kenarında) bulunan matrisler için yakınsaklar; buna karşılık, $|\lambda_\sigma| > R$ olan matrisler için problem artık yoktur. Böylece, yalnız $|x| < 1$ için soldaki $1/1 - x$ toplamına yakınsayan, bilinen geometrik seri

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots,$$

$$(I - A)^{-1} = I + A + A^2 + \dots,$$

matris serisi karşılık gelir ki bu, yalnız $|\lambda_\sigma| < 1$ olan matrisler için, $(I - A)^{-1}$ e yakınsar. Böyle bir $P(x)$ serisine karşılık gelen, yakınsaklık dairesinde $P(x)$ toplamı cinsinden yazılır $f(x)$ fonksiyonu genellikle, yakınsaklık yarı çapı dışında da vardır. Yeni $x \neq 1$ değerler için $1/1 - x$ fonksiyonu vardır. Aynı durum matris fonksiyonu için de geçerli olduğundan bu, seriden bağımsız olarak, $f(x)$ fonksiyonuna ait A ya göre bulunan $\varphi(A)$ ersatz polinomu ile tanımlanır. Örneğin, lineer elemanter bölenler halinde,

$$f(A) = (I - A)^{-1} = \sum_{\sigma=1}^s \frac{1}{m_\sigma} \frac{1}{1 - \lambda_\sigma} m_\sigma(A),$$

dir ve bu fonksiyon, $\lambda_\sigma \neq 1$ olan her matris için geçerlidir.

$$P(A) = A - \frac{1}{2} A^2 + \frac{1}{3} A^3 - \dots$$

matris serisi, $|\lambda_\sigma| < 1$ olan matrisler için yakınsar, $|\lambda_\sigma| > 1$ halinde ıraksar. Buna karşılık, ersatz polinom ile tanımlanan matris fonksiyonu

$$f(A) = \ln(I + A) = \sum_{\sigma=1}^s \frac{1}{m_\sigma} \ln(1 + \lambda_\sigma) m_\sigma(A)$$

lineer elemanter bölen halinde (ve, lineer olmayan elemanter bölenler halinde, denklem (16) da bulunan fonksiyon) özdeğeri $\lambda_\sigma \neq 1$ olan her matris için, yeni $(\lambda_\sigma) > 1$ için bile vardır.

20.4. Örnekler

ÖRNEK 1 : A

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

matrisine ait $B = e^A$ matrisi ve bunun özdeğerleri isteniyor. Karakteristik = Minimal polinom $m(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda - 6)$

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= 1: m_1(\lambda) = \lambda - 6, \quad m_1 = -5 \\ \lambda_2 &= 6: m_2(\lambda) = \lambda - 1, \quad m_2 = 5 \\ \varphi(\lambda) &= \frac{1}{5} [-e(\lambda - 6) + e^6(\lambda - 1)] = \frac{1}{5} [(e^6 - e)\lambda - (e^6 - 6e)] \\ B = e^{A-1} &= \varphi(A) = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} e + 4e^6 & -4e + 4e^6 \\ -e + e^6 & 4e + e^6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 323,2867 & 320,6584 \\ 80,1421 & 82,8604 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

B nin özdeğerleri $\lambda^2 - (e + e^6)\lambda + e^7 = 0$ dan, $\lambda_1 = e$, $\lambda_2 = e^6$ yani $\lambda_i = e^{\lambda_i}$ olarak bulunur.

ÖRNEK 2 : Keyfi bir matrisin kare kökünün alınması

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

veriliyor. $B^2 = A$ probleminin B yani $B = A^{1/2} = \sqrt{A}$ çözümü isteniyor. Minimal polinom $m(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda - 4)$

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= 1: m_1(\lambda) = \lambda - 4, \quad m_1 = -3, \quad f(\lambda_1) = \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} = \pm 1 \\ \lambda_2 &= 4: m_2(\lambda) = \lambda - 1, \quad m_2 = 3, \quad f(\lambda_2) = \frac{1}{\sqrt{\lambda_2}} = \pm 2 \\ \varphi(\lambda) &= \frac{1}{3} [\mp(\lambda - 4) \pm 2(\lambda - 1)], \quad \varphi_{12}(\lambda) = \pm \frac{1}{3}(\lambda + 2) \\ &\quad \varphi_{34}(\lambda) = \pm(\lambda - 2).\end{aligned}$$

Böylece dört çözüm

$$B_{1,2} = \pm \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad B_{3,4} = \pm \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

bulunur.

Her halde $B^2 = A$ çıkar.

ÖRNEK 3 : İki katlı kök. Aranan

$$\begin{aligned}B &= \ln A, \quad A = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \text{ olarak} \\ p(\lambda) &= m(\lambda) = (\lambda - 4)^2 \\ \lambda_1 &= \lambda_2 = 4: m_1(\lambda) = 1, \quad f(\lambda) = \ln \lambda, \quad F(\lambda) = \ln \lambda, \quad F'(\lambda) = \frac{1}{\lambda} \\ \varphi(\lambda) &= \ln \lambda_1 + \frac{1}{\lambda_1}(\lambda - \lambda_1) = \ln 4 + \frac{1}{4}(\lambda - 4) = \frac{1}{4}\lambda + \ln 4 - 1 \\ B &= \ln A = \frac{1}{4}A + (\ln 4 - 1)I = \begin{pmatrix} \ln 4 + 1/4 & 1/4 \\ -1/4 & \ln 4 - 1/4 \end{pmatrix} \\ \lambda^2 - 2(\ln 4)\lambda + (\ln 4)^2 &= 0, \quad \lambda_1 = \lambda_2 = \ln 4 = \ln \lambda_{1,2}.\end{aligned}$$

Burada da hesaplanan B matrisi, logaritma fonksiyonunun sonsuz anlamlı karakteristiğine uygun olarak, $e^x = A$ matris denkleminin sonsuz sayıda çözümlerinden biridir.

20.5. Matris Fonksiyonunun Daha Genel Tanımı.

Adi (kompleks) sayılar için analitik ve kuvvet serileri cinsinden ifade edilebilen fonksiyon kavramları çakışır. Buna karşılık matrisler için, bu analitik matris fonksiyonu tanımı fazla dardır. Zira burada, ortak matris kuvvet serileri veya bunların ersatz polinomları cinsinden yazılamayan analitik fonksiyonlar vardır. A matrisi olarak birim matris yani $A = I$ seçilmek üzere, $B = A^{1/2} = \sqrt{A}$ fonksiyonu buna örnek verilebilir. Böylece

$$B = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}, \quad B^2 = I,$$

olur. Buna karşılık I cinsinden bir polinom daima yalnız bir skalar matris verebilir. Yukarıda tanımlanan metod denklem (12) gerçekten matris fonksiyonunun değerleri olarak yalnız $B_{1,2} = \pm I$ matrislerini verir; örnek ise $X^2 = I$ matris denkleminin çözümlerinin daha tükenmediğini açıkça gösterir; § 20.7 ye de bakınız.

Matris fonksiyonu kavramının yeterli bir genelleştirilmesi "Jordan normal şekli" yardımı ile elde edilir. Bunun için aşağıdaki gerçekten faydalanılır: Eğer A matrisi bir C matrisine benzer yani $A = T^{-1}CT$ ise, $f(A)$ da $f(C)$ ye benzer yani $f(A) = T^{-1}f(C)T$ dir, bu durum matris kuvvetleri ve polinomlar ayrıca kuvvet serileri için kolayca anlaşılır. Normal şekilde, matrisin yanında matris fonksiyonu da özellikle basit bir şekil alır. Bu durum önce,

$$J = A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}, \quad f(A) = \begin{pmatrix} f(\lambda_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & f(\lambda_n) \end{pmatrix} \quad (22)$$

bağıntısına sahip köşegen - benzeri matrisler için görülebilir, bu ve bundan § 16.7 nin sonunda, hermitsel pozitif definit matrisin genel kare kökünün alınması probleminde faydalanılmış idi.

Jordan - matrisi için, buna karşılık gelen bir bağıntı elde etmek maksadı ile bu

$$J = \begin{pmatrix} J_1 & & \\ & \ddots & \\ & & J_k \end{pmatrix} \quad (23)$$

şeklinde yazılır, burada

$$J_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & & \\ & \lambda_i & 1 & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_i & 1 \\ & & & & \lambda_i \end{pmatrix} = \lambda_i I + K_{e_i}, \quad (24)$$

e_i - sıralı kısmi matrisler olup K_{e_i} , § 19.3 de verilen e_i - sıralı kutulardır.

$$K_{e_i} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & 1 & \\ & & \ddots & \\ & & & 0 & 1 \\ & & & & 0 \end{pmatrix} \quad (25)$$

ve bunların kuvvetleri, e_i kuvvetdeki kutu sıfır matrisi oluncaya kadar, 1- sırasının sağa kaydırılması ile bulunurlar.

$$K_{e_i}^{e_i} = O. \quad (26)$$

J nin kuvvetinin alınmasında J_i kısmi matrislerinin kuvvetleri alınır :

$$J^\alpha = \text{Diag}(J_i^\alpha),$$

ve bunların kuvvetleri için denklem (24) Binom açılımından

$$J_i^\alpha = (\lambda_i I + K_{e_i})^\alpha = \lambda_i^\alpha I + \binom{\alpha}{1} \lambda_i^{\alpha-1} K_{e_i} + \binom{\alpha}{2} \lambda_i^{\alpha-2} K_{e_i}^2 + \dots + \binom{\alpha}{e_i-1} \lambda_i^{\alpha-e_i+1} K_{e_i}^{e_i-1} \quad (27)$$

bulunur. Şimdi $f(\lambda) = \lambda^\alpha$ için

$$\binom{\alpha}{k} \lambda^{\alpha-k} = \frac{1}{k!} f^{(k)}(\lambda),$$

dir ve benzer bir bağıntı $f(\lambda)$, polinomu içinde geçerlidir. Böylece denklem (27) yardımı ile, keyfi kuvvet fonksiyonu veya polinom veya $f(\lambda)$ kuvvet serisi için

$$f(J) = \text{Diag}(f(J_i)), \quad (28)$$

bulunur, buradaki

$$f(J_i) = \begin{pmatrix} f_i & f_i' & \frac{1}{2!} f_i'' & \dots \\ 0 & f_i & f_i' & \dots \\ 0 & 0 & f_i & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \quad (29)$$

kısmi matrislerinde, kısaltma maksadı ile yine $\lambda = \lambda_i$ için $f_i^{(v)} = f^{(v)}(\lambda)$ yazılmıştır.

Böylece $B = f(A)$ matris fonksiyonu

$$\boxed{A = T^{-1} J T} \\ f(A) = T^{-1} f(J) T, \quad (30)$$

uyarınca tanımlanır, burada istenen genelleştirme şöyle sağlanır :

1. f_i fonksiyonu değerleri alınarak, çok anlamlı fonksiyonlar halinde, Jordan - matrisi $f(J)$ nin tek $f(J_i)$ kutuları için mümkün tüm değer bağıntılarına, kutulardan herbiri için ise tek bir bağıntıya müsaade edilir.

2. Dönüşüm matrisi T olarak, (30) denklemlerinden birincisini gerçekleyen bütün matrisler alınabilir.

$A = I$ nin karekökü örneğinde minimal denklem $m(\lambda) = \lambda - 1 = 0$ olup tek kökü $\lambda_1 = 1$ dir. İlgili fonksiyon değerleri $f_1 = \sqrt{1} = \pm 1$ dir. $f(J) = f(A)$ normal şekli olarak dört ifade mümkündür :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$A = I = J$ halinde (30) denklemlerinin birincisi $I = T^{-1} Z T$ dir; yani T için, tekil olmayan, iki sıralı matrislerin tümü alınabilir. İlk iki halde böylece

$$B_1 = I, \quad B_2 = -I.$$

fonksiyon değerleri bulunur. Üçüncüsü ve dördüncüsü halde,

$$B_{3,4} = \pm T^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} T$$

şeklinde çözümler vardır ve burada T keyfi, tekil olmayan matrisdir. Bu sonsuz sayıda çözümler arasında, yukarıda verilen dönüşüm matrisli örnek de vardır.

$$T = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

20.6. Lineer Matris Denklemleri.

"Matris denklemi" denince, bilinmeyen X matrisinin bilinen skaler veya matrislere bağlı olarak ortaya çıktığı matris ifadeleri anlaşılır. Aşağıda tüm matrisler kare matris kabul edilecektir. Bilinmeyen matris yalnız birinci kuvvet de ise, matris denklemine "lineer" denir. Bunların en basit aşağıdaki homojen denklemdir.

$$AX = 0 \quad (31)$$

Bunun, aranan X matrisinin x_k sütun vektörlerine ait $Ax_k = 0$ denklem sistemlerinden oluşan bir sistem sayılması halinde doğrudan doğruya çözüm bulunur. Homojen, lineer denklemler ile ilgili genel teoremler (bak. § 18.1) uyarınca sonuç aşağıdaki gibi kısaca özetlenebilir:

a) $A \neq 0$, A , tekil olmayan matrisdir. Bu halde sıfır matris $X = 0$ tek çözümdür.

b) $A = 0$, A matrisi tekidir. Bunun rank düşmesi $d = n - r$ olsun. Bu durumda, bilindiği gibi, $Ax = 0$ için d adet lineer bağımsız $x_1, x_2, \dots, x_d$ çözüm vektörü vardır. Denklem (31) in X gibi bir çözüm matrisi en fazla d adet lineer bağımsız sütun vektörüne sahiptir, yani max. rankı $d = n - r$ dir. X_1 herhangi bir çözüm ise, keyfi C matrisi

halinde $X = X_1 C$ de bir çözümdür; zira $AX_1 = 0$ için $AX_1 C = 0$ olur. X_1 in rankı d ise, $X_1 C$ denklem (31) in "genel çözümü" nü verir.

$$XA = 0 \quad (31a)$$

matris denklemi, $A'X' = 0$ uyarınca transpoze matrislere geçiş sureti ile, (31) haline dönüştürülür. $d = n - r$ ranklı X_1 çözümü halinde genel çözüm $X = CX_1$ dir.

Homojen olmayan

$$AX = B \quad \text{veya} \quad XA = B \quad (32)$$

denklemlerinin, tekil olmayan matris A , $A \neq 0$ halinde

$$X = A^{-1}B \quad \text{veya} \quad X = BA^{-1}. \quad (33)$$

çözümü vardır. Buna karşılık $A = 0$ ise, § 8.2 deki teoremler uyarınca bir çözüm yalnız ve yalnız "genişletilmiş matris" (A, B) nin rankının A matrisinin rankına eşit olması halinde, çözüm vardır. Burada (A, B) , $2n$ sütunlu ve n satırlı, A ve B matrislerinin yanyana sıralanması ile bulunmuştur. Bunun için § 3.3, 6,2 ve 8,2 ye bakınız.

Şimdiye kadar ele alınan denklemlere oranla, yine homojen lineer matris denklemi

$$AX = XB \quad (34)$$

daha fazla zorluk arzeder. "Tekil olmayan" çözüm matrisi X halinde denklem (34), A ve B matrislerinin $B = X^{-1}AX$ şeklindeki benzerlik bağıntısında başka bir anlam göstermez. A ve B matrislerinin birbirine benzer olması yani karakteristik matrislerinin aynı elemanter polinomları sahip olması halinde, tekil olmayan bir X çözümü vardır. (§ 18.5, teorem 16 ya bakınız). Çözüm, iki matrisin de ortak J normal şekline dönüştürülmesi ile bulunur. $Y^{-1}AY = Z^{-1}BZ = J$. Buradan $X = YZ^{-1}$ elde edilir.

Buna karşılık "tekil" X çözümlerinin varlığı, için A ve B matrislerinin ortak bir karakteristik sayıya sahip olmaları gerek ve yeterdir ve X in rankı, A ve B nin karakteristik fonksiyonlarının en büyük ortak

böleninin derecesinden büyük değildir. A ve B nin ortak bir karakteristik sayısı yok ise, $X = O$ denklem (34) ün tek çözümüdür. X çözümünün gerçek ifadesi için aşağıya bakınız.

"Genel Lineer Matris denklemi"

$$A_1 X B_1 + A_2 X B_2 + \dots + A_h X B_h = C \quad (35)$$

olup A_j, B_j ve C verilmiş n - sıralı matrisler ve X , aranan n -sıralı matrisdir. Denklem, $C = O$ için homojen aksi halde homojen değildir. Bu aranan X matrisinin n^2 adet x_{rs} elemanı için n^2 lineer denklemden oluşan bir denklem sistemi olarak ele alınabilir. Soldaki

$$A X B = P = (p_{ik})$$

elemanlarından herbiri,

$$p_{ik} = a^i X b_k = \sum_{r,s=1}^n a_{ir} x_{rs} b_{sk}$$

şeklinde, n^2 adet p_{ik} elemanından oluşur. A_j ve B_j matrislerinin elemanları $a_{ik}^{(j)}$ ve $b_{ik}^{(j)}$ ile gösterilir ve Gauss tipinde toplam, kısaca,

$$a_{ir}^{(1)} b_{sk}^{(1)} + a_{ir}^{(2)} b_{sk}^{(2)} + \dots + a_{ir}^{(h)} b_{sk}^{(h)} = [a_{ir} b_{sk}],$$

uyarınca köşeli parantezler ile gösterilir ise, x_{rs} elemanlarına ait n^2 adet denklem olarak

$$\sum_{r,s=1}^n [a_{ir} b_{sk}] x_{rs} = c_{ik} \quad (i, k = 1, 2, \dots, n). \quad (36)$$

bulunur.

İki sıralı matrisler halinde dört denklem örneğin aşağıdaki gibidir :

$$\left. \begin{aligned} [a_{11} b_{11}] x_{11} + [a_{11} b_{21}] x_{12} + [a_{12} b_{11}] x_{21} + [a_{12} b_{21}] x_{22} &= c_{11} \\ [a_{11} b_{12}] x_{11} + [a_{11} b_{22}] x_{12} + [a_{12} b_{12}] x_{21} + [a_{12} b_{22}] x_{22} &= c_{12} \\ [a_{21} b_{11}] x_{11} + [a_{21} b_{21}] x_{12} + [a_{22} b_{11}] x_{21} + [a_{22} b_{21}] x_{22} &= c_{21} \\ [a_{21} b_{12}] x_{11} + [a_{21} b_{22}] x_{12} + [a_{22} b_{12}] x_{21} + [a_{22} b_{22}] x_{22} &= c_{22} \end{aligned} \right\} \quad (36')$$

Denklem sistemi (36) nın § 8.2 uyarınca, katsayılar matrisinin ρ rankını c_{ik} sağ tarafları kadar genişletilmiş matrisin rankına eşit olması halinde, çözümleri vardır. Homojen olmayan denklem sisteminin bir çözümü X_0 ise, genel çözüm

$$X = X_0 + c_1 X_1 + c_2 X_2 + \dots + c_{n^2-\rho} X_{n^2-\rho}. \quad (37)$$

şeklinde olup $X_1, X_2, \dots, X_{n^2-\rho}$ ilgili homojen denklemlerden oluşan bir temel sistem ve $c_1, c_2, \dots, c_{n^2-\rho}$ serbest parametrelerdir.

20.7. $X^m = O$ ve $X^m = I$ Denklemleri.

Bir X matrisi

$$X^m = O, \quad (38)$$

denklemini gerçekleştiriyor ise, § 18.1, teorem 1 uyarınca, matrisin minimal polinomu $m(\lambda)$, $f(\lambda) = \lambda^m$ in bir böleni yani λ nın bir kuvvetidir. Böylece, $m(\lambda)$ ile aynı sıfır noktalarına sahip karakteristik polinom da bu şekli alır ve, diğer taraftan n - inci dereceden olduğu için, λ^n olarak yazılır.

Teorem 4 : n -sıralı bir X matrisi yalnız ve yalnız, karakteristik denklemi $\lambda^n = 0$ ise yani matris tekil ve tüm özdeğerleri sıfıra eşit ise, pozitif m sayılı $X^m = O$ denklemini gerçekleştirir.

ÖRNEK :

$$\begin{pmatrix} 6 & 9 \\ -4 & -6 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = O.$$

Bir X matrisine,

$$X^m = I \quad (39)$$

halinde, " m . inci dereceden dairesel" denir.

Teorem 5 : X , m .inci dereceden bir dairesel matris ise, keyfi tekil olmayan P halinde her benzer matris $Y = P^{-1} X P$, m -inci dereceden daireseldir.

Ayrıca

Teorem 6 : Bir X matrisi yalnız ve yalnız, tüm özdeğerlerinin, birimin m -inci kökü

$$\lambda_i = \sqrt[m]{1} \quad (40)$$

olması ve karakteristik matrisin lineer elemanter bölenlere sahip olması halinde, m -inci dereceden daireseldir.

X in, $m(\lambda)$ minimal polinomu yine § 18.1, teorem 1 uyarınca, $f(\lambda) = \lambda^m - 1$ in bir bölenidir. $\lambda^m - 1 = 0$ denkleminin çok sayıda farklı kökü olduğundan - ki bunlar birimin m . inci kökü m adet farklı köküdür - minimal denklem $m(\lambda) = 0$ in da çok sayıda farklı kökü vardır; ve X 'in karakteristik matrisi yalnız lineer elemanter bölenlere sahiptir. Minimal denklemin bu köklerinden biri a ise, § 20.1, teorem 1 uyarınca a^m ,

$$[X^m - aI] = [I - aI] = (1 - a)^n = 0,$$

karakteristik denkleminin bir köküdür yani $a = a^m = 1$, $a = \sqrt[m]{1}$ dir. - Buna karşılık X in tüm karakteristik sayıları, birimin m -inci kökleri yani $\lambda_i^m = 1$ ise ve karakteristik matrisin tüm elemanter bölenleri lineer ise X köşegen formdadır :

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}. \quad (41)$$

Bu ise,

$$A^m = \begin{pmatrix} \lambda_1^m & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n^m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} = I.$$

uyarınca, m -inci dereceden daireseldir. Bu durumda teorem 5 e göre X de, m -inci dereceden bir dairesel matrisdir. Karakteristik λ_i sayılarından en aşağı biri 1 in m -inci "ilkel" kökü yani, $\lambda_i^m = 1$ yapan bir kök ise, m kuvveti X in bir kuvvetini I yapan en düşük kuvvettir. (39) n çözümlerinin tümü. § 20.5 de verilen $X^2 = I$ özel halindeki gibi bulunur.

$A \neq I$ halinde $X^m = A$ matris denkleminin çözümü, § 20.4 de $X^2 = A$ örneğinde olduğu gibi yapılır.

20.8. Genel Cebirsel Matris Denklemi.

Bilinmeyen X matrisi cinsinden genel bir cebirsel denklem için denklem katsayılarının skalar veya matris olmasına göre iki hal ayırılabilir. Birinci hal olan

$$f(X) = a_0 X^m + a_1 X^{m-1} + \dots + a_{n-1} X + a_n I = 0 \quad (42)$$

da yine § 18.1, teorem 1 uyarınca X in minimal polinomu $m(\lambda)$, $f(\lambda) = a_0 \lambda^m + a_1 \lambda^{m-1} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n$ polinomunun bir bölenidir. Bu neden ile $f(\lambda)$, lineer çarpımlarına ayrılır ise, minimal polinomu $f(\lambda)$ fonksiyonu bölen, sonlu sayıda $X_1, X_2, \dots, X_k$ matrisleri normal şekilde bulunur. (42) denkleminin tüm çözümleri yine, benzer matrislerin tümüne eşittir.

ÖRNEK :

$$X^2 - 2X + I = 0$$

kare matris denkleminin iki sıralı çözümleri isteniyor. İlgili λ -fonksiyonu $f(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2$ dir. Buna göre, ilgili normal şekiller yanında, en fazla ikinci dereceden, $f(\lambda)$ nın bölenleri olarak aşağıdaki minimal polinomlar vardır.

$$1) \quad m(\lambda) = \lambda - 1 \quad X_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I,$$

$$2) \quad m(\lambda) = (\lambda - 1)^2 \quad X_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$X_1 = I$ e benzerlik dönüşümü uygulanarak yine birim matris bulunur. X_2 den ise, benzer matrislerin tümü çıkar; Örneğin, yerine koyma işleminden anlaşılacağı gibi,

$$X = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

bu tip bir çözümdür.

Matrisleri katsayı kabul eden denklem

$$F(X) = A_0 X^m + A_1 X^{m-1} + \dots + A_{m-1} X + A_m = 0 \quad (43)$$

halinde, denkleme ait, m - inci dereceden polinom matrisi yazılır :

$$F(\lambda) = A_0 \lambda^m + A_1 \lambda^{m-1} + \dots + A_{m-1} \lambda + A_m. \quad (44)$$

Bu durumda X matrisi, bu polinom matrisinin "λ-denklemini" sağlar :

$$F(\lambda) = \det(F(\lambda)) = 0, \quad (45)$$

yani

$$F(X) = 0, \quad (46)$$

geçerlidir; bu, § 14.3 deki $F(A) = \lambda I - A$ özel halinde (Cayley - Hamilton teoremi) olduğu gibi ispatlanabilir.

Bu ise derecesi $\leq m \times n$ olan (42) tipinde bir denklemdir. Bunun yukarıda gösterilen şekilde bulunan çözümlerinin normal şekilleri $Y_1, Y_2, \dots, Y_k$ olsun. Bu durumda (43) ün her çözümü $X_i = P_i Y_i P_i^{-1}$ şeklinde olup P_i , bilinmeyen dönüşüm matrisidir. Tekil olmayan P nedeni ile bunun, denklem (43) de yerine konulması halinde,

$$A_0 P_i Y_i^m + A_1 P_i Y_i^{m-1} + \dots + A_{m-1} P_i Y_i + A_m P_i = 0, \quad (47)$$

yani P_i dönüşüm matrisi için, denklem (35) tipinde genel, lineer bir matris elde edilir, § 20.8 e bakınız.

SAYISAL METODLAR

21. Özdeğer Problemi : İteratif Metodlar.

Özdeğer probleminin sayısal incelenmesi yani bir matrisin özdeğer ve özvektörlerinin bulunması az sıralı matrislerde bile geniş kapsamlı bir sayısal işlem olup bunun için pratik matematikde, ancak bazıları burada verilebilecek olan çok sayıda sayısal metodlar geliştirilmiştir. İlk önce, § 14.2 ve 14.4 de birer örneği verilmiş olan direkt ve iteratif metodlar ayırılır. Direkt metodlar, problemi, karakteristik denklemin kurulması sureti ile çözerler; bu denklemin kökleri tüm özdeğerleri verir. Özvektörler ayrıca bulunur. Çalışma miktarı, geniş kapsamlı matrislerde artar. Buna karşılık iteratif metodlar özdeğerleri ve özvektörleri doğrudan doğruya, karakteristik polinoma ihtiyaç kalmaksızın verirler ve bunların arasında bir grup olan ve Von Mises-Metoduna dayanan vektör iterasyonlarında her defasında, özvektör yanında bir özdeğer bulunur. Geniş kapsamlı matrislerde matrisin tüm özdeğerleri çok nadiren olduğundan, vektör iterasyonu ayrı bir özellik taşır. Bu nedenle özdeğer probleminin sayısal incelenmesine bununla başlanacaktır.

21.1. Von Mises Vektör İterasyonu.

§ 14.4 de verilen metodun prensibini kısaca tekrarlıyalım. Reel¹ ve ayrıca köşegen benzeri² sayılacak olan n-sıralı A matrisinden, keyfi n-sıralı reel vektör z_0 dan -örneğin $z_0 = (1, 0, \dots, 0)'$ hareketi ile sırası ile "itere edilmiş" vektörler bulunur.

$$z_v = A z_{v-1}, \quad v = 1, 2, \dots \quad (1)$$

z_0 m, matrisin x_i özvektörlerine göre

¹ Kompleks bir matris, §13.9 uyarınca reel çift sıralı bir matrise indirgenebilir.

² Veya, dominant özdeğere göre lineer elemanter bölünli. Bu bahis konusu değil ise, metoda bir diğer, daha kötü yakınsaklık ile devam edilir.

$$z_0 = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n, \quad (2)$$

şeklinde matrisin x_i özvektörlerine seriye açıldığı düşünülerek itere edilmiş vektörler için

$$z_v = c_1 \lambda_1^v x_1 + c_2 \lambda_2^v x_2 + \dots + c_n \lambda_n^v x_n \quad (3)$$

elde edilir. λ_1 ,

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq |\lambda_3| \geq \dots, \quad (4)$$

ise ve $x_i, c_i \neq 0$ ile birlikte z_0 başlangıç vektöründe var ise, artan iterasyon basamağı v ile (3) deki ilk terim gittikçe tekrarlanır. $v \rightarrow \infty$ için

$$z_v \rightarrow \lambda_1^v c_1 x_1 \equiv x_1, \quad (5)$$

$$z_v \rightarrow \lambda_1 z_{v-1} \quad (6)$$

olur. Ardışık iki itere edilmiş vektörün oranı dominant = en büyük özdeğere yakınsar, kendileri ise dominant (max) özvektöre yakınsarlar.

Vektör bileşenlerinin ($|\lambda| > 1$ veya < 1 uyarınca) çok büyük veya küçük sayılara gitmesini önlemek için z_v vektörü, her iterasyondan sonra uygun şekilde normlaştırılır. Bu durumda (1),

$$w_v = A z_{v-1} \quad (1a)$$

$$z_v = w_v / k_v \quad (1b)$$

ye ayrılır, buradaki normlaştırma çarpanı k_v , artan v halinde λ_1 e yakınsar. El hesabında en büyük bileşen 1'e normlaştırma yapılır, ve k_v , w_v 'nin uygun bileşenine eşit olur. Makina ile hesabda, $k_v^2 = w_v' w_v$ için, $z_v' z_v = 1$ normu bulunur.

Sınırdan ortaya çıkan z_v ve $z_{v+1} = A z_v$ nün $z_{v+1} \rightarrow \lambda_1 z_v$ orantısı x_1 özvektörünün sınır olmayan x_{ij} bileşenlerinin tümü için,

$$q_j^{(v)} = z_j^{(v+1)} / z_j^{(v)} \rightarrow \lambda_1 \quad (7)$$

şeklinde. Max. bileşen $z_i^{(v)} = 1$ e normlaştırılmada, normlaştırma çarpanı $k_v = q_i^{(v)}$ dir. İtere edilmiş z_v vektörlerinin, dominant olmayan $x_i (i \geq 2)$ özvektörlerinin kurumlarına sahip olduğu sürece $q_j^{(v)}$ oranları bileşen şeklinde farklı olurlar. Bu tip farkların karşılaştırılması için, dominant

özdeğer λ_1 için yaklaşım olarak, ortalama anlamında "Rayleigh -oranı" kullanılır :

$$\Delta_1 = R[z_v] = \frac{z_v' A z_v}{z_v' z_v} \quad (8)$$

Reel simetrik matris $A = A'$ hali için bu değer, § 15.2 de gördüğümüz gibi, $\lambda_1 = \text{Max } R[z]$ şeklindeki ekstremel özellik ile bellidir. Buna göre ilk önce

$$\Delta_1 \leq \lambda_1, \quad A = A' \quad \text{ için} \quad (9)$$

olup burada eşitlik işareti $z = x_1$ için alınır. İkinci olarak z_v vektörünün yüksek dereceli $x_i (i \geq 2)$ özvektörlerinde önemli güçlükler göstermesi halinde Δ_1 iyi bir yaklaşım olur. Δ_1 in hatası vektör hatalarına yani z_v vektörünün $c_i (i \geq 2)$ açılım katsayılarına göre ikinci mertebeden küçüktür.

Bu son özelliği, simetrik olmayan, genel A matrisinde de elde etmek için, § 15.2 de gösterildiği gibi, (8) oranı yerine "değişim oranı"

$$\Delta_1 = R[v_\mu, z_v] = \frac{v_\mu' A z_v}{v_\mu' z_v} \quad (10)$$

kullanılır; burada itere edilmiş z_v vektörleri yanında, keyfi başlangıç vektörü v_0 halinde,

$$v_\mu = A' v_{\mu-1} \quad (11)$$

uyarınca tranpoze matris A' den bulunan soldan itere edilmiş v_μ vektörlerinden de faydalanılmıştır. İtere edilmiş z_μ veya v , vektörleri x_1 dominant özvektörlerine veya y_1 sol vektörüne göre önemli güçlükler gösterebilir, bu (10) oranı λ_1 için iyi bir yaklaşımdır. Örnek :

$$A = \begin{pmatrix} 16,059 & 2,268 & 0,244 & -0,396 \\ 5,061 & 0,855 & 0,080 & -0,133 \\ 9,072 & 1,344 & 0,147 & -0,231 \\ 11,928 & 1,428 & 0,168 & -0,273 \end{pmatrix}$$

Tablo 21.1 dominant özdeğer için sağ-ve sol vektörlü vektör iterasyonu.

	k_v			
A :	16,059	2,268	0,244	-0,396
	5,061	0,855	0,080	-0,133
	9,072	1,344	0,147	-0,231
	11,928	1,428	0,168	-0,273
	42,120	5,895	0,639	-1,033
z_0 :	1	0	0	0
z_1 :	1	0,31515038	0,56491687	0,74276107
z_2 :	1	0,31754897	0,56609271	0,73838971
z_3 :	1	0,31757050	0,56610380	0,73834816
$A z_3$:	16,6249934	5,2796108	9,4114736	12,2750271
v_0 :	1	0	0	0
v_1 :	1	0,14122922	0,01519397	-0,02465907
v_2 :	1	0,14285923	0,01524836	-0,02476679
v_3 :	1	0,14287411	0,01524875	-0,02476771

$$v_3' A z_3 = 17,218803 \quad \left| \frac{A_1}{v_3' z_3} = 1,0357178 \right| \quad A_1 = 16,624994$$

Sağ- ve sol vektörler için maximum bileşen 1 e normlaştırmada yapılan, toplam kontrollü iterasyon Tablo 21,1 de gösterilmiştir. $\lambda_1 : \lambda_2 \approx 110$ nedeni ile yakınsaklık, çok iyidir. Değişmiş Rayleigh - oranı (10) uyarınca yaklaşım değer Λ_1 , verilen tüm haneler için doğrudur. Buna karşılık vektörler 5 hanede uygundur. Ayrıca 21.4 deki hesabın devamına bakınız.

Dominant özdeğer çok katlı ise, p-katlı özdeğer λ_1 için p adet özvektörün var olması halinde, metod düzgün olur. Aksi halde yani λ_1 için lineer olmayan elemanter bölenler var ise, ortadan kaldırılmaları özel tedbirleri gerektiren yakınsaklık güçlükleri ortaya çıkar. Düzgün hal için, p-katlı özdeğer λ_1 ve $(\lambda_1) > |\lambda_{p+1}|$ halinde, $v \rightarrow \infty$ yazılarak (5) den

$$z_v \rightarrow \lambda_1^v (c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_p x_p) = x_1^{(1)}, \quad (12)$$

bulunur; (3) ise değişmez. Yani itere edilmiş vektörler yine λ_1 e ait bir özvektöre, yani λ_1 e ait p-boyutlu özuzayın bir vektörüne yakınsarlar. p adet $z_0^{(1)}, \dots, z_0^{(p)}$ başlangıç vektörünün uygun seçimi ile, özayın bazı olarak p adet lineer bağımsız özvektör $x_1^{(1)} \dots x_p^{(p)}$ elde edilir.

21.2. Aynı Değerli, Özellikle Kompleks Özdeğerler.

Çok sayıda, aynı değerli dominant özdeğerin ortaya çıkması halinde metoda değişiklik gerekir. Bu durum, eşit iki değer için şöyledir :

$$|\lambda_1| = |\lambda_2| > |\lambda_i|, \quad i \geq 3. \quad (13)$$

Burada ya iki reel, ters işaretli eşit değer vardır ve böylece $\lambda_1 \approx -\lambda_2$ bulunur veya $\lambda_2 = \lambda_1$ gibi eşlenik kompleks bir değer çifti vardır. $\lambda_1 = -\lambda_2$ halinde, artan iterasyon basamağı için açılım teoreminden,

$$z_v \rightarrow \lambda_1^v [c_1 x_1 + (-1)^v c_2 x_2] \quad (14)$$

bulunur.

Çift ve tek v sayılı vektörler farklı yakınsar. Bu durumda

$$z_{v+2} \rightarrow \lambda_{1,2}^2 z_v \quad (15)$$

olur. Ancak dominant özdeğer λ_1 kompleks ve reel matris için eşlenik $\lambda_2 = \bar{\lambda}_1$ değerleri özdeğer ise, ilgili özvektörler de eşlenik kompleksdir. $x_{1,2} = u \pm i v$. Reel başlangıç vektörü z_0 halinde c_1, c_2 açılım katsayılarında eşlenik kompleksdir :

$$z_0 = c_1 x_1 + \bar{c}_1 \bar{x}_1 + c_3 x_3 + \dots + c_n x_n,$$

zira yalnız, eşlenik kompleks değerlerin toplamı genellikle yine reel olabilir. Böylece, $c_1 \neq 0$ için

$$z_v \rightarrow \lambda_1 c_1 x_1 + \bar{\lambda}_1 \bar{c}_1 \bar{x}_1 \quad (16)$$

veya, iki eşlenik sayının toplamı reel ve reel kısmın iki katı olduğundan,

$$z_v \rightarrow 2 \cdot \text{Re } \lambda_1^v c_1 x_1.$$

Kompleks vektör $c_1 x_1$ in, kompleks λ_1 sayısı ile sürekli çarpımı dönme uzamasına eşit olduğundan itere edilmiş z_v vektörlerinin bileşenleri, bu sayıların reel kısımları olarak tamamen düzgümsüz bir değişim gösterir ve şimdiye kadar ki anlamda bu vektörlerin yakınsaklığı bahis konusu olmaz. Kompleks dominant özdeğerler, itere edilmiş vektör bileşenlerinin bu tip tamamen düzgümsüz bir tutumu halinde ortaya çıkarlar. Buna rağmen burada, başlangıçta gizli olan yakınsaklık vardır ve bu aşağıdaki şekilde anlaşılır. Yine (16) da sayı çarpanları, özvektörlere dahil edilir ise, yeterli büyük v basamağı halinde üç ardışık vektör için

$$\left. \begin{aligned} z_v &= x_1 + x_2 \\ z_{v+1} &= \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \\ z_{v+2} &= \lambda_1^2 x_1 + \lambda_2^2 x_2 \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

bulunur; burada yine genel olarak λ_1, x_1 yerine $\bar{\lambda}_2, \bar{x}_2$ yazılmıştır. Geometrik anlamda, denklem (17) deki üç vektör, x_1, x_2 nin kapladığı düzlem de bulunurlar; yani lineer bağımsızdırlar ve şu bağıntı vardır.

$$z_{v+2} + a_1 z_{v+1} + a_0 z_v = 0 \quad (18)$$

a_k katsayılarının hesaplanması için, sütun- veya satır şekline sokulmuş üç z_v vektörüne zincirleme algoritma uygulanır; burada lineer bağımlılık, üçüncü ve daha sonraki satırların sıfır olmasından anlaşılır.

(18) de, (17) nin sağ tarafları yerine konulur ise,

$$(\lambda_1^2 + a_1 \lambda_1 + a_0) x_1 + (\lambda_2^2 + a_1 \lambda_2 + a_0) x_2 = 0$$

çıkar. Ancak x_1 ve x_2 lineer bağımsız olduğundan λ_1 ve λ_2 için ikinci derece denklemi

$$\boxed{\lambda^2 + a_1 \lambda + a_0 = 0}, \quad (19)$$

ve bunun gözülmesi ile, kompleks halde

$$\boxed{\begin{aligned} \lambda_1 &= \alpha + i\beta \\ \lambda_2 &= \alpha - i\beta \end{aligned}} \quad (20)$$

şeklinde gösterilen iki özdeğer elde edilir. Öz vektörler - bir çarpan ikmal edilerek - denklem (17) den

$$\boxed{\begin{aligned} x_1 &= z_{v+1} - \lambda_2 z_v \\ x_2 &= z_{v+1} - \lambda_1 z_v \end{aligned}}, \quad (21)$$

kompleks halde ise,

$$x_{1,2} = (z_{v+1} - \alpha z_v) \pm i\beta z_v \quad (22)$$

olarak elde edilirler.

Metod yine belirli, Rayleigh oranına benzer ortalamalar bulunarak kısaltılabilir: böylece yüksek dereceli özdeğerlerin güçlük çıkardığı, itere edilmiş z_v vektörleri halinde bile, özdeğerler için iyi yaklaşımlar sağlanır. Bu güçlükler nedeni ile, 0,1 ve 2 indisi ile gösterilen üç ardışık itere edilmiş vektörün lineer bağımlılığı (18) yalnız yaklaşık şekilde geçerli olur. Şimdi a_0, a_1 katsayılarına bağlı

$$s = a_0 z_0 + a_1 z_1 + z_2 \quad (23)$$

kalan vektörünü hesaba katalım ve a_0 ve a_1 katsayılarını, en küçük hata kareleri toplamından bulalım :

$$Q = Q(a_0, a_1) = s^T s = \text{Min}. \quad (24)$$

Böylece $\partial Q/\partial a_i$ ($i = 0, 1$) koşulları a_0, a_1 cinsinden lineer iki "normal denkleme" götürür :

$$\begin{cases} k_{00} a_0 + k_{01} a_1 + k_{02} = 0 \\ k_{10} a_0 + k_{11} a_1 + k_{12} = 0 \end{cases} \quad (25)$$

bunların katsayıları

$$k_{ij} = k_{ji} = \mathbf{z}'_i \mathbf{z}_j \quad (26)$$

($i = 0, 1, j = 0, 1, 2$) dir. (25) den bulunan a_0, a_1 değerlerini denklem (19) yerine koyalım :

$$\Delta^2 + a_1 \Delta + a_0 = 0 \quad (27)$$

Bu durumda Δ_1, Δ_2 kökleri için önce reel simetrik matris $\mathbf{A}$ için şu gösterilebilir¹: bu, yüksek dereceli c_i açılım katsayıları cinsinden karesel ifadeler kadar hatalıdır yani Rayleigh- oranı için karakteristik tutuma sahiptir.

Simetrik olmayan matris $\mathbf{A}$ halinde metotta, sol itere edilmiş v. vektörleri kullanarak, değişiklik yapılır. Böylece normal denklemler :

$$\begin{cases} k_0 a_0 + k_1 a_1 + k_2 = 0 \\ k_1 a_0 + k_2 a_1 + k_3 = 0 \end{cases} \quad (25a)$$

şeklini alır; buradaki katsayılar indis toplamına bağlıdır :

$$k_{i+1} = \mathbf{v}'_i \mathbf{z}_j \quad (26a)$$

Bunlar, son uç itere edilmiş $\mathbf{z}$ vektörü ve iki soldan itere edilmiş $\mathbf{v}$ vektöründen bulunur. Denklem (27) sabit kalır. El ile hesaba a_0, a_1 bilinmeyenleri, kolayca görülebilen

$$D_0 = \begin{vmatrix} k_1 & k_2 \\ k_2 & k_3 \end{vmatrix}, \quad D_1 = - \begin{vmatrix} k_0 & k_2 \\ k_1 & k_3 \end{vmatrix}, \quad D = \begin{vmatrix} k_0 & k_1 \\ k_1 & k_2 \end{vmatrix}$$

1 Z. angew. Math-Meck. Bd. 42 (1962), s. 210-213.

determinantları kullanılarak, aşağıdaki şemadan rahatça bulunur.

$$\begin{array}{ccc|c} k_0 & k_1 & k_2 & \\ k_1 & k_2 & k_3 & \\ \hline D_0 & D_1 & D & : D \\ a_0 & a_1 & 1 & \end{array}$$

Böylece hesaplanan $a_0 = D_0/D$, $a_1 = D_1/D$ değerleri için

$$\left. \begin{aligned} a_0 &= \Delta_1 \Delta_2 = \lambda_1 \lambda_2 + \Delta_0/D^* \\ a_1 &= -(\Delta_1 + \Delta_2) = -(\lambda_1 + \lambda_2) + \Delta_1/D^* \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

olduğu gösterilebilir; burada $D^* = (\lambda_1 - \lambda_2)^2 + \Delta$ olup Δ_0, Δ_1 ve Δ büyüklükleri bilinenler olarak,

$$\begin{aligned} \mathbf{z}_0 &= c_1 \mathbf{x}_1 + c_2 \mathbf{x}_1 + \dots + c_n \mathbf{x}_n \\ \mathbf{v}_0 &= d_1 \mathbf{y}_1 + d_2 \mathbf{y}_2 + \dots + d_n \mathbf{y}_n \end{aligned}$$

açınımlarının c_i, d_i ($i \geq 3$) açılım katsayılarından bulunur. D^* nın da küçük olduğu $\lambda_1 \approx \lambda_2$ hali dışında (28) de Δ_0/D^* ve Δ_1/D^* hata terimleri ikinci dereceden küçüktür ve böylece Δ_1, Δ_2 yaklaşımları, simetrik matrisdeki Rayleigh- oranı veya genel matrisde bunun genelleştirilmesi gibi, aynı hata şekli ile karakterize olurlar.

(27) deki genelleştirilmiş Δ_1, Δ_2 Rayleigh- oranlarında ilgili özvektörler için :

$$\begin{cases} \mathbf{x}_1 = \mathbf{z}_2 - \Delta_2 \mathbf{z}_1 \\ \mathbf{x}_2 = \mathbf{z}_2 - \Delta_1 \mathbf{z}_1 \end{cases} \quad (29)$$

yaklaşımları bulunur ki bunlar, itere edilmiş vektörlerdeki güçlük nedeni ile, Δ -yaklaşımları kadar iyi değildir. Bunların düzeltilmesi ileride (§ 21.4) ele alınacaktır.

Tüm işlem ikiden fazla özdeğerin simultane iterasyonunun örneğin eşit veya hemen hemen eşit üç özdeğer haline genişletilebilir, ve buradan genel hal ortaya çıkar :

$$|\lambda_1| = |\lambda_2| = |\lambda_3| > |\lambda_4|. \quad (30)$$

Burada, belirli bir v basamağından itibaren, yeterli doğrulukta

$$\begin{cases} z_v = x_1 + x_2 + x_3 \\ z_{v+1} = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3 \\ z_{v+2} = \lambda_1^2 x_1 + \lambda_2^2 x_2 + \lambda_3^2 x_3 \\ z_{v+3} = \lambda_1^3 x_1 + \lambda_2^3 x_2 + \lambda_3^3 x_3 \end{cases} \quad (31)$$

bulunur. Üç özvektörün kombinasyonları olarak bu dört vektör yine lineer bağımlıdır yani,

$$z_{v+3} + a_2 z_{v+2} + a_1 z_{v+1} + a_0 z_v = 0 \quad (32)$$

şeklinde bir bağıntı vardır.

Burada da iterasyona, lineerlik bağıntısı (23) tamamen sağlanana kadar devam edilmeyecektir. Daha ziyade a_i katsayıları, v indisi yerine 0 konulan, aşağıdaki en küçük kalan vektör hipotezinden bulunur :

$$s = a_0 z_0 + a_1 z_1 + a_2 z_2 + z_3, \quad (33)$$

Böylece, yukarıda olduğu gibi, (26) veya (26-a) dakilere benzer k_i veya k_{i+1} katsayılı, (25) veya (25-a) dakilere benzer a_i cinsinden üç normal denklemden oluşan bir sistem ortaya çıkar. Bu durumda özdeğerlere ait Λ_i Rayleigh-oranları, üçüncü derece denklemi,

$$f(\Lambda) = \Lambda^3 + a_2 \Lambda^2 + a_1 \Lambda + a_0 = 0 \quad (34)$$

in kökleridir. x_i özvektörlerinin (ve y_i sol vektörlerinin) bulunması için § 14.2 deki gibi hareket edilir. Horner şeması yardımı ile indirgenmiş polinomlar

$$f_i(\Lambda) = f(\Lambda) : (\Lambda - \Lambda_i) = \Lambda^2 + b_i^{(1)} \Lambda + b_i^{(0)}, \quad (35)$$

bulunur; bunların $b_i^{(1)}, b_i^{(0)}$ katsayıları, (34) ün çözümünde kullanılan Horner-şemasında ortaya çıkarlar. Böylece $i = 1, 2, 3$ için

$$f_i[z_v] = z_2 + b_i^{(1)} z_1 + b_i^{(0)} z_0 = x_i \quad (36)$$

bulunur. Aynı şekilde $f_i(v_v) = y_i$ olur. - (19) denklemleri, ikinci derece polinomu $f(\Lambda)$ için, bu (36) denklemlerinin karşıtlarıdır.

İki özdeğerde simultane-iterasyon için iki örnek verilecektir; bunlardan biri reel ve diğeri kompleks özdeğerlere aittir. Her ikisinde de vektörler normlaştırılmamıştır.

1. Örnek¹: Aşağıdaki simetrik matrisin dominant özdeğerlerini bulunuz.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & -3 & 1 & 5 \\ 3 & 1 & 6 & -2 \\ 4 & 5 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

Tam özdeğerler

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -8,02857835 \\ \lambda_2 &= 7,93290472 \\ \lambda_3 &= 5,66886436 \\ \lambda_4 &= -1,57319074. \end{aligned}$$

dür. λ_3 çok yakınlığı nedeni ile ilk iki özdeğerlerin simültane iterasyonu için de daha çok şeyler verilir. Böylece yandaki tabloda hesaplanan sonuç doğru olur. Denklem (29) uyarınca hesaplanan özvektörler oldukça hatalıdır. $(A - \Lambda_i I) x_i = 0$ çözülerek daha iyi değerler bulunur. Bunun için § 21.7 deki, Λ_i yaklaşımlardan hareket ile, bir kaç adımda ilgili özvektörler ile birlikte doğru (tam) özdeğerleri veren düzeltme metoduna bakınız.

2. Örnek : Kompleks Özdeğerler :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 2 & 2 \\ -9 & 8 & 0 & -9 \\ 3 & 4 & 1 & 5 \\ 5 & 6 & -2 & 6 \end{pmatrix}$$

Tablo 21.2. İki özdeğerin simultane iterasyonu, geliştirilmiş Rayleigh - oranları

Λ	z_0	z_1	z_2	z_3	z_4	z_5	z_6	z_7	z_8	z_9	z_{10}	
10	4	8	6	1	10	72	542	4256	32190	257632	15884256	989202272
2	1	3	4	1	2	30	145	1682	8377	101554	6272274	391538834
1	-3	1	5	0	1	22	-4	1330	-1260	80594	5002994	314913810
3	1	6	-2	0	3	17	208	1293	14232	87581	5698413	363911357
4	5	-2	-1	0	4	3	193	-49	10841	-12097	-1089425	-81461729
$\Lambda^2 + 0,097021\Lambda - 63,644487 = 0$												
						Exakt		Fehler				
$\Lambda_1 = -8,026408$						-8,028578		0,002170		0,26% ₀₀		
$\Lambda_2 = 7,929386$						7,932905		-0,003519		-0,44% ₀₁		
										39530,2		
										407438,84		
										0,097021		
										..1		

Tablo 21.3. Kompleks özdeğer halinde iterasyon

A	z_0	z_1	z_2	z_3	z_4	z_5	z_6	z_7
3	1	3	-2	-466	-7639	-55605	218438	11563414
-9	0	-9	-144	-999	4896	223191	2861136	13415481
3	0	3	1	-656	-10880	-78253	328161	16598944
5	0	5	-15	-966	-12808	-63907	834185	22607794
Probe:	-	2	-160	-3087	-26431	-25426	4241920	64185633

A	v_0	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7
3	1	3	-2	-466	-7639	-55605	218438	11563414
8	0	3	53	440	616	-73733	-1090707	-6760240
2	0	2	4	-2	24	-38	44	278
2	0	2	1	-455	-7632	-55646	218321	11563385
Probe:	-	10	56	-483	-15911	-185022	-653904	16366837

$v'_i z_k$	-	0,269537914	-	2,89081136	-	7,16998346	
D_i	-	2,89081136	-	7,16998346	-	304,4479126	
a_i	-	931,510147	-	102,787325	-	6,42420793	
		145,000000	-	15,9999997	-	1	

$A_{1,2} = 8,000000 \pm 9,000000 i$

21.3. Otomatik Hesap.

Hesabın uniformluğu nedeni ile iterasyon metodu özellikle otomatik hesap için uygundur. Bu maksad ile, önemli hususları kapsayan ve kısaltılmış bir Algol- şeklinde yazılmış iki program verilecektir. Çok sık rastlandığı gibi önceden farklı reel özdeğerler bekleniyor ve yalnız bunların en büyüğü önemli ise hesap, 21.1 de olduğu şekilde bant olarak yapılır. Başlangıç vektörü $e' = (1, 0, \dots, 0)$ olsun. Şimdi x ve y ile gösterilen sağdan ve soldan itere edilmiş vektörler $x'y = 1$ e normlaştırılır. i sayısı (tamsayı) S sınırına varıncaya kadar iki ardışık Rayleigh oranının 10^{-7} mertebesinde çakışmasına - kadar geçen iterasyon adımlarını sayar ve ayrıca, buraya kadar yakınsaklık ortaya çıkmaması hali için, ($i = 50$) de hesabın durdurulmasına yarar. Sınıra varışdan sonraki t sayımı, vektörlerin doğruluğunu biraz daha arttırmak için üç ke-re ek iterasyon yapılmasını sağlar.

```

x := y := e; K := 0; i := t := 0;
It: z := Ax; w := A'y;
k := z'w; λ := k/z'y; k := abs(k); k := sqrt(k);
x := z/k; y := w/k; i := i + 1;
if i = 50 then goto E;
S: if abs(λ - K)/abs(λ) < 10-7 then t := t + 1;
K := λ; if t > 3 then goto E else goto It;
E: Drucke (i, λ, x, y)
x := y := e; K := 0; i := t := 0;
It: z := Ax; u := A'y; w := Az; v := A'u; k1 := y'z;
k2 := y'w; k3 := u'w; k4 := v'w; k := abs(k4); k := sqrt(k4);
λ := p4/k3; D := k2 - k1 × k1; A := D/k2;
x := w/k; y := v/k; i := i + 2;
if i = 60 then goto E0;
if A < 10-6 then begin B := abs(λ - K)/abs(λ);
if B < 10-7 then t := t + 1;
K := λ; if t > 3 then goto E1 else goto It
end then

```

```

else begin  $a0 := (k1 \times k3 - k2 \times k2)/D$ ;
 $B := \text{abs}(a0 - K)/\text{abs}(a0)$ ;
if  $B < 10^{-7}$  then  $t := t + 1$ ;
 $K := a0$ ; if  $t > 3$  then goto E2 else goto It
end else;

```

E0: Drucke (Nichtkonv', i, λ, x, y); goto E3;

E1: Drucke (i, λ, x, y); goto E3;

E2: $a1 := (k1 \times k2 - k3)/D$;

$\alpha := -a1/2$; $r := \alpha \times \alpha - a0$; $q := \text{abs}(r)$; $\beta := \text{sgrt}(q)$;

if $r \geq 0$ then begin $\lambda1 := \alpha + \beta$; $\lambda2 := \alpha - \beta$;

$x1 := w - \lambda2 \times z$; $x2 := w - \lambda1 \times z$;

$y1 := v - \lambda2 \times u$; $y2 := v - \lambda1 \times u$;

$k := x1' y1$; $k := \text{sgrt}(k)$;

$x1 := x1/k$; $y1 := y1/k$;

$k := x2' y2$; $k := \text{sgrt}(k)$;

$x2 := x2/k$; $y2 := y2/k$;

Drucke (Re', $i, \lambda1, x1, y1, \lambda2, x2, y2$)

end then

else begin $r := w - \alpha \times z$; $s := \beta \times z$;

$p := v - \alpha \times u$; $q := \beta \times u$;

$k := r' r + s' s$; $k := \text{sgrt}(k)$; $r := r/k$; $s := s/k$;

$k := p' p + q' q$; $k := \text{sgrt}(k)$; $p := p/k$; $q := q/k$;

Drucke (Im', $i, \alpha, \beta, r, s, p, q$)

end else

21.4. Yüksek Özdeğerlerin Hesabı : Koch Metodu.

Vektör iterasyonunun dominant = en büyük λ_1 özdeğerine yakınsama özelliği, titreşim problemlerin de ana frekanslar, stabilite problemlerinde titreşim problemlerin de en küçük kritik yükleri için önemlidir. Bunların ters değerlerine, ilgili matris probleminin dominant özdeğeri

karşılık gelir. Ters veya kesirli iterasyon ile en küçük matris özdeğerinin doğrudan doğruya özellikle teknik problemlerde var olan genel özdeğer problemi $Ax = \lambda Bx$ ile bağıntılı olarak bulunabileceği aşağıdaki paragrafta görülecektir. Dominant değer λ_1 dışında, azalan λ_i ($i \geq 2$) değerleri önemli olup bunlara, numaralarından dolayı, yüksek özdeğerler adı verilecektir. Bunların vektör iterasyonu uygulanması için çeşitli yollar vardır. Bunun için, özvektör x_1 ve sol özvektör y_1 yanında, simetrik olmayan halde, dominant değer λ_1 in yeterli sıhhatle önceden bulunmuş olması öngörülür. Koch¹ metodu olarak bilinen birinci yol sabit matris için normal metod gibidir; ancak dominant özvektör x_1 bileşenine sahip olmayan bir başlangıç vektörü z_0 esas alınır. Bu tip bir vektörün bulunması ve, yuvarlatma hatalarından doğan bileşenlerin ortadan kaldırılması, bir satır ve sütunun eklenmesi ile sağlanır. Başka bir yol matrisde değişiklik yapılmasıdır. Örneğin Wielandt'a² göre matris indirgenmesinde, mertebenin ($n - 1$) e indirgenmesi ile λ_1 özdeğerleri yok edilir. Hotelling'e³ göre matris deflasyonunda, öyle yapılır ki değer düşürülerek $\lambda_1 = 0$ yapılır. İki halde de geri kalan λ_i özdeğerleri değişmez. Her matris değişmesinde, yuvarlatma hatalarından dolayı yanlışlık tehlikesi ve - burada önemli olan - hane kaybı⁴ vardır.

Köşegen benzeri öngörülen matrisin n adet x_i özvektörüne göre keyfi bir x

$$x = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n, \quad (37a)$$

vektörünün c_i açılım katsayıları, $i \neq k$ için $y_i' x_k = 0$ ortogonallığı esas alınarak, y_i sol vektörleri ile çarpılarak bulunur, § 13.4 e bakınız. Ayrıca vektör sistemlerinin

$$y_i' x_k = \delta_{ik}, \quad (38)$$

¹ Koch, J.J.: Bestimmung höherer kritische Drehzahlen Verh. 2-internat, Kongr. tech. Meck. Zürich 1926, s. 213-218.

² Wielandt, H.: Math 2 Bd. 50 (1944), s. 93-143.

³ Hotelling, H.: Journ. educat. psychology. Baltimore Bd. 24 (1933) s. 417, 498.

⁴ Hotelling ve Wielandt metodlarının, sıhhat bakımından karşılaştırılması 3 bas-kıda yapılmıştır. Orada teklif edilen Hotelling- metodu şekli Koch. metoduna özdeğdir. Matris değişikliğinin bu ve diğer tipleri için E. Bodewig, Matrix Calculus [2], s. 357 ye bakınız. Bu neden ile Koch metodu burada biraz değişik λ_1, x_1, y_1 başlangıç değerlerinin hatalarından etkilenmeyen, ayrıca makine hesabı için uygun olan bir şekilde verilecektir.

şeklinde biortogonallaştırması öngörülür ise, x vektörünün bileşenleri olarak

$$c_i = y'_i x \quad (39a)$$

elde edilir. Aynı durum, y_1 sol vektörlerine göre seriye açılmış

$$y = d_1 y_1 + d_2 y_2 + \dots + d_n y_n \quad (37b)$$

vektörü için geçerlidir, bunun katsayıları :

$$d_i = x'_i y \quad (39b)$$

dir.

Ayrıca hiç olmazsa önemli (ilk) özdeğerlerin farklı olmasını öngörelim :

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| > |\lambda_3| > \dots \quad (40)$$

x ve y keyfi, ancak ortogonal olmayan ve dolayısı ile $x'y = 1$ binormlaştırılabilen iki vektör ise,

$$c_1 := y'_1 x \quad \text{veya} \quad d_1 := x'_1 y \quad (41)$$

yardımı ile bunlardan birer, x_1 veya y_1 den bağımsız vektör elde edilir :

$$v := x - c_1 x_1 \quad \text{veya} \quad u := y - d_1 y_1 \quad (42)$$

A matrisi ve bunun A' transpoze matrisi ile iterasyondan aşağıdaki itere edilmiş vektör çifti elde edilir.

$$z := Av \quad \text{veya} \quad w := Ay, \quad (43)$$

bu ise,

$$k := \sqrt{z'w} \quad (44)$$

yardımı ile yine

$$x := z/k \quad \text{veya} \quad y := w/k \quad (45)$$

şeklinde binormlaştırılır ve böylece işlem (41) ve (42) denklemleri ile yeniden başlar. İlk adımdan sonra c_1 ve d_1 katsayıları sıfır olmalıdır. Doğru olmayan başlangıç değerleri ve yuvarlatma hataları nedeni ile

sıfırdan farklı küçük sayılar ortaya çıkar. Bunlardan oluşan (42) deki çıkarma terimleri, hesabın x_1 ve y_1 dominant vektörlerine yaklaşmasını önler. Hesap,

$$z = \Lambda_2 x \quad \text{veya} \quad w = \Lambda_2 y, \quad (46)$$

ye yakınsar ve buradan, ikinci özdeğer için yaklaşım olarak Rayleigh-oranı bulunur :

$$\Lambda_2 := w'z/w'x = z'w/z'y \quad (47)$$

İki ardışık adımın Λ_2 değerleri arasındaki fark, verilen bir ϵ sınırından küçük olduğunda metod son bulur.

Şimdi gerekli x_1 ve y_1 vektörleri tam değil de, önceden verilen adi iterasyondaki $\tilde{x}_1, \tilde{y}_1$ yaklaşımları şeklinde söz konusudur ve vektör yaklaşımlarında, iyi bir Rayleigh-yaklaşımı Λ_1 halinde bile, x_i, y_i ($i \geq 2$) vektörlerinin önemli güçlükleri bulunabilir. Bunun sonunda c_1 ve c_2 düzeltme katsayıları,

$$\bar{c}_1 := \tilde{y}'_1 x \quad \text{ve} \quad \bar{d}_1 := \tilde{x}'_1 y, \quad (41')$$

yaklaşık değerleri şeklinde, sıfırdan farklı olurlar. Böylece hesabın yakınsaklığı x ve y vektörleri, x_2 ve y_2 ara parçaları yanında diğer özvektörlerden az veya çok zayıf parçalara da sahibdir. Bunlar, iterasyonun bitiminden önce, aşağıdaki şekilde yok edilir.

İlk önce $\tilde{x}_1, \tilde{y}_1$ yaklaşımlarını,

$$\begin{cases} \tilde{x}_1 = x_1 + \gamma_2 x_2 + \dots + \gamma_n x_n, \\ \tilde{y}_1 = y_1 + \delta_2 y_2 + \dots + \delta_n y_n \end{cases} \quad (48)$$

şeklinde, özvektörlere göre geriye açılmış kabul edelim; burada γ_i, δ_i 1 e göre küçük katsayılardır. Toplam vektörler için yine 1 e göre küçük k_i, l_i katsayılı bir seriye açılım denklemi yazalım :

$$\begin{cases} x = k_1 x_1 + x_2 + k_3 x_3 + \dots + k_n x_n, \\ y = l_1 y_1 + y_2 + l_3 y_3 + \dots + l_n y_n \end{cases} \quad (49)$$

İkinci mertebeden, küçük $\delta_i k_i$ ve $\gamma_i l_i$ çarpımları ihmal edilir ise, düzeltme katsayıları için

$$\left. \begin{aligned} \bar{c}_1 &= \bar{y}'_1 x = k_1 + \delta_2, \\ \bar{d}_1 &= x'_1 y = l_1 + \gamma_2, \end{aligned} \right\} \quad (50)$$

elde edilir ve böylece, bunların artık sıfır olmadığı teyid edilir.

v ve u vektörleri için (48) ve (49) dan, yine ikinci mertebeden, küçük çarpanların ihmalı ile,

$$\begin{aligned} v &= x - \bar{c}_1 \bar{x}_1 = (k_1 - \bar{c}_1) x_1 + x_2 + \sum k_i x_i, \\ u &= y - \bar{d}_1 \bar{y}_1 = (l_1 - \bar{d}_1) y_1 + y_2 + \sum l_i y_i \end{aligned}$$

ve buradan, itere edilmiş vektörler için

$$\begin{aligned} z &= A v = (k_1 - \bar{c}_1) \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \sum k_i \lambda_i x_i, \\ w &= A' u = (l_1 - \bar{d}_1) \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 + \sum l_i \lambda_i y_i. \end{aligned}$$

bulunur. (46) dan, katsayıların karşılaştırılması ile

$$k_1 (\lambda_1 - \Lambda_2) = \bar{c}_1 \lambda_1, \quad l_1 (\lambda_1 - \Lambda_2) = \bar{d}_1 \lambda_1, \quad (51)$$

$$\Lambda_2 = \lambda_2, \quad (52)$$

$$k_i = l_i = 0, \quad i \geq 3 \text{ için} \quad (53)$$

çıkar. İkinci özdeğer için, iterasyon ile bulunan Λ_2 yaklaşımı, hatalı $\bar{x}_1$, $\bar{y}_1$ başlangıç vektörlerine rağmen ikinci mertebe hataları dışında, doğrudur. x, y tam vektörleri, birinci yaklaşımda yalnız x_1 ve y_1 parçalarına sahiptir; ve bunlar (51) den çıkarılabilen k_1 ve l_1 katsayıları yardımı ile kolayca yok edilebilir. Tüm tam değerler yerine yaklaşık değerler konulur ise - bu, düzeltme büyüklüklerinin küçüklüğü göz önüne alındığında, söz konusu değildir - iterasyonun bitmesinden sonra uygulanabilen düzeltme formülleri bulunur :

$$\boxed{k_1 := \bar{c}_1 \Lambda_1 / (\Lambda_1 - \Lambda_2)} \quad , \quad \boxed{l_1 := \bar{d}_1 \Lambda_1 / (\Lambda_1 - \Lambda_2)} \quad (54)$$

$$\boxed{\bar{x}_2 := x - k_1 \bar{x}_1} \quad \text{ve} \quad \boxed{\bar{y}_2 := y - l_1 \bar{y}_1} \quad (55)$$

İkinci özdeğer için Λ_2 yaklaşımının bulunmasından sonra hiç olmazsa x_2 ve y_2 deki parçaları yük edilmek sureti ile $\bar{x}_1, \bar{y}_1$ yaklaşımları ayrıca düzeltilebilir. Bu durum, yüksek terimleri ($i \geq 3$) ihmalı ile, (48) den kolayca ortaya çıkar. Düzeltilmiş vektörler şunlardır :

$$\boxed{\begin{aligned} x_1 &:= A \bar{x}_1 - \Lambda_2 \bar{x}_1 \\ y_1 &:= A' \bar{y}_1 - \Lambda_2 \bar{y}_1 \end{aligned}} \quad (56)$$

Bu düzeltilmiş değerler- binormlaştırıldıktan sonra ancak, diğer $\lambda_3, \dots$ özdeğerlerinin bulunması için işleme devam edilmesi halinde, kullanılır. x_j ve y_j vektörlerinin ve $j = 1$ ilâ $(l-1)$ için Λ_j özdeğerlerinin verilmesi halinde 1-inci özdeğer λ_1 nin hesablanmasına ait formüller aşağıda yazılmıştır :

$$c_j := y'_j x, \quad d_j := x'_j y, \quad j = 1, 2, \dots, l-1 \quad (41a)$$

$$v := x - \sum_{j=1}^{l-1} c_j x_j, \quad u := y - \sum_{j=1}^{l-1} d_j y_j, \quad (42a)$$

$$z := A v, \quad w := A' u. \quad (43a)$$

Ek düzeltme,

$$k_j := c_j \Lambda_j / (\Lambda_j - \Lambda_1), \quad l_j := d_j \Lambda_j / (\Lambda_j - \Lambda_1), \quad (54a)$$

$$x := x - \sum_{j=1}^{l-1} k_j x_j, \quad y := y - \sum_{j=1}^{l-1} l_j y_j. \quad (55a)$$

uyarınca yapılır.

El hesabı için metod basit ve adi iterasyon tipine göre işler, bunun için A matrisine y'_1 satırı ve $\Lambda_1 x_1$ sütunu eklenir; burada $x_1, y'_1 x_1 = 1$ e normlaştırılır, Tablo 21.4. y'_1 satırı, her adımın başında $c_1 = y'_1 x$ katsayısını verir. Burdan sonra, itere edilmiş vektörü, (42) ve (43) den oluşan

$$z = A x - c_1 \Lambda_1 x_1,$$

Tablo 21.4. Koch'a göre x_2 özvektörü ile birlikte 2. özdeğer λ_2 nin hesaplanması

	1,0357 1532	y_1'	1	0,14287	0,01525	-0,02477	$16,62500 = \lambda_1$
	1	16,059	2,268	0,244		-0,396	16,05171
x_1	0,31757	5,061	0,855	0,080		-0,133	5,09754
	0,56610	9,072	1,344	0,147		-0,231	9,08687
	0,73835	11,928	1,428	0,168		-0,273	11,85178
	0,1812 1486	1	1	1		1	-1,1333 5
	0,1556 0584	0,094 945	-0,4729 36	-0,1842 89		1	0,0002 0377
	0,1503 8891	0,092 588	-0,4533 76	-0,1961 61		1	-0,0000 52716
	0,1500 9106	924 567	-4522 289	1974 461		1	65704
	0,1500 6938	924 4715	4524 4530	1975 4727		1	66555
	0,1500 6781	924 4648	4524 3923	1975 5505		1	66634
	0,1500 6770	924 4639	4524 3880	1975 5566		1	66596
	0,1500 6769	924 4639	4524 3875	1975 5569		1	66608
$\lambda_2 =$	0,1500 6769	924 4636	4524 3875	1975 5571		1	66572
düzeltilme		-0,0000 6486	-0,0000 2060	-0,0000 3672		-0,0000 4789	-0,0000 040410
x_2		0,0923 8150	-0,4521 5935	-0,1975 9245		0,9999 5211	
normlastırır :		0,0923 8592	-0,4521 8100	-0,1976 0189		1	

şeklinde hesaplanır; burada çıkarılan terim $\Lambda_1 x_1$ ek sütunu ile verilir. z den x e normlaştırma, el hesabında, 1 bileşenine normlaştırma ile yapılır. Bundan sonra z nin aynı zamanda aranan λ_2 özdeğerlerinin yaklaşımı olan bu bileşenin yazılması yeterlidir. Yeterli hızla yakınsaklık halinde, Rayleigh yaklaşımından vazgeçilebilir. Tablo 21.4 de 21.1 deki örnek orada bulunan ve bilerek 5 haneye yuvarlatılmış x_1 ve y_1 vektörleri ile alınmıştır. Soldaki vektör x_1 , sağ ek sütun $\Lambda_1 x_1$ in hesabından önce, $y_1 x_1 = 1$ e normlaştırılmıştır. İyi yakınsaklık nedeni ile iterasyona, λ_2 ve x değerleri artık değişmeyeceye kadar devam edebilir. En sonda x vektörünün, denklem (54), (55) uyarınca, x_2 özvektörüne düzeltilmesi yapılır; buradaki $-c_1/(\Lambda_1 - \Lambda_2)$ katsayısı aşağıda sağdadır ve $\Lambda_1 x_1$ sütunu ile çarpılarak düzeltme vektörü olur. λ_2, x_2 nin son değerleri hemen hemen tamdır.

21.5. Kesirli Iterasyon. Genel Özdeğer Problemi.

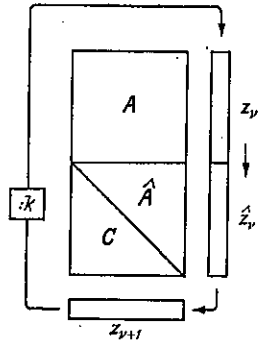
Ekseriya rastlandığı gibi A matrisinin en büyük değil de en küçük özdeğerlerinin bulunması istenir ise, iterasyon metodu A yerine, özdeğerler olarak $x_i = 1/\lambda_i$ ters değerlerine sahip invers matris A^{-1} ile uygulanır. Bu durumda işlem, en küçük λ_n halinde, $x_n = 1/\lambda_n$ dominant değerine yakınsar. Önemli olan bunun, invers matris kullanılmadan da yapılabilmesi, normal iterasyon kuralı $A z_v = z_v + 1$ yerine, ters şekildeki

$$A z_{v+1} = z_v \rightarrow \lambda_n z_{v+1}, \quad (57)$$

iterasyonunun kullanılmasıdır; bu ise özvektör için artan yaklaşım halinde $\lambda_n z_{v+1}$ e yakınsar:

$$z_v \rightarrow \lambda_n z_{v+1}. \quad (58)$$

Zira (58), $z_{v+1} = A^{-1} z_v$ ile yani invers matrisde adi iterasyon ile özdeğerdir. Bu "kesirli iterasyon" (57), itere edilmiş yeni vektör z_{v+1} in hesabı için her adımda, daima eşit A katsayılar matrisli ve her adımda yeni z ikinci taraflı lineer bir denklem sisteminin çözülmesini öngörür. Bunun için gerekli yoketme işlemi örneğin Gauss zinciri şeklinin, (A nın



Şekil 21.1. Kesirli iterasyonun şeması.

üçgenlere ayrılması), brinci alanında A ya göre bir kere yapılması yeterlidir. Her yeni adım ile yok etme işlemi yalnız yeni $z_1, z_2, \dots$ sağ taraflarına genişletilir, bu ise vektörün iki üçgen matris ile çarpımına eşdeğerlidir, yani adi iterasyon kadar çalışma gerektirir. İşlem, Şek. 21.1 deki şema şeklindedir. Yok etme katsayılarının alt üçgen matrisi C ve, yeni basamaklı sistemin üst üçgen matrisi $\hat{A}$ olmak üzere, bir defa üçgen parçalanması

$$A = C\hat{A} \rightarrow C, \hat{A}$$

ile her adım

$$\begin{aligned} C\hat{z}_v &= z_v \rightarrow \hat{z}_v, \\ \hat{A}z_{v+1} &= \hat{z}_v \rightarrow z_{v+1} \end{aligned}$$

uyarınca atılır; yani önce z_v sağ tarafı, $\hat{z}_v$ ye dönüştürülür, bundan sonra basamaklı

$$\boxed{\hat{A}z_{v+1} = \hat{z}_v} \quad (57a)$$

sisteminden, yeni itere edilmiş vektör z_{v+1} (57) nin C^{-1} ile çarpılmasından bulunan değişik iterasyon kuralı olarak bulunur. Yeni vektör z_{v+1} , z_v nin yerini olmak için, normlaştırılır:

$$z_v := z_{v+1}/k_{v+1}. \quad (59)$$

normlaştırma çarpanı k_{v+1} olarak ya z_{v+1} in, z_v için 1 olan en büyük bileşeni kullanılır; veya,

$$k_{v+1} = \sqrt{z'_{v+1} z_{v+1}} \quad (60)$$

yardımı ile 1 "uzunluğuna" normlaştırılır. Her halde bu çarpan $\kappa_n = 1/\lambda_n$ için (kesirli iterasyon nedeni ile) bir yaklaşımdır ve aynı zamanda, verilen bir tolerans dahilinde değişmemesi halinde, hesabın sonu için bir test büyüklüğüdür. Bu maksadla bir Rayleigh-oranı ya basit olanı

$$\Delta_n = \frac{z'_v A z_v}{z'_v z_v} = \frac{z'_v z_{v-1}}{z'_v z_v}. \quad (61a)$$

veya, soldan iterelenmiş vektör v_v kullanılarak,

$$\Delta_n = \frac{v'_v z_{v-1}}{v'_v z_v}, \quad (61b)$$

esas alınır; burada $(v-1)$ indisi normlaştırılmış, v indisi normlaştırılmamış vektörleri belirtir. - Koch metoduna göre yüksek özdeğerlerin hesabı, aşağıda genel özdeğer problemi için verilecektir.

En aşağı bir tane tekil olmayan A veya B matrisine sahip bu genel problem:

$$\boxed{Ax = \lambda Bx} \quad (62)$$

için herhalde kesirli iterasyon yani önüne bir yok etme işlemi eklenen iterasyon uygulanır. Bilinmeyen x vektörü yerine denklemin bir tarafında z_v diğer tarafında z_{v+1} konularak (62) den bir iterasyon kuralı bulunur. Yeni vektör z_{v+1} deki matris tekil olamaz. z_{v+1} in solda veya sağda olmasına göre işlem, max. veya min. λ özdeğerine yakınsar. $\lambda = \omega^2$ olmak üzere (62) nin titreşim problemi olarak özel anlamı nedeni ile burada daima en küçük özdeğerler (ona frekans ve birinci üst frekans), bahis konusudur - metod "min" özdeğere yakınsaklık şekli ile uygulanacaktır ve bu değer (ω_1 ona frekansına karşılık geldiğinden) λ_1 ile gösterilecektir. Yani

$$|\lambda_1| < |\lambda_2| < \dots$$

olsun. Titreşim problemi halinde A , bir yay matrisi (rijidlik matrisi), B ise daima tekil olmayan bir kütle matrisidir. λ_1 e yakınsaklık için metod

$$\boxed{Az_{v+1} = Bz_v} \rightarrow \lambda Bz_{v+1} \quad (63)$$

şeklinde uygulanmalıdır ve bu,

$$\boxed{z_v \rightarrow \lambda_1 z_{v+1}} \quad (64)$$

anlamında yakınsak olur. z_{v+1} in hesabı için gerekli yok etme işlemi uyarınca A tekil olamaz. (sistemde, eksik yay bağına ait serbestlik derecesi bulunamaz § 27.7 ye bakınız). Rayleigh - yaklaşımları olmak

$$\Delta_1 = \frac{z'_v A z_v}{z'_v B z_v} = \frac{z'_v B z_{v-1}}{z'_v B z_v} \quad (65a)$$

veya - simetrik olmayan matrisler halinde - A' ve B' ile paralel

$$\Delta_1 = \frac{v'_v A z_v}{v'_v B z_v} = \frac{v'_v B z_{v-1}}{v'_v B z_v} \quad (65b)$$

iterasyonun soldan itere edilmiş vektörleri v'_v den faydalanılır; ancak (64) ün z'_v ile soldan çarpımından elde edilen ve B_v vektörlerinin bulunmasına gerektirmeyen daha basit yaklaşım olan

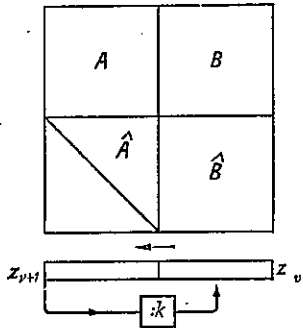
$$\Delta_1 = \frac{z'_v z_v}{z'_v z_{v+1}} \quad (65c)$$

kullanılmamalıdır.

A ve B matrislerine, A ya göre yok etme işlemi uygulanır ise - burada, yok etme katsayılarının alt üçgeni matrisi C olmak üzere, $\widehat{CA} = A$ ve $\widehat{CB} = B$ uyarınca $A, \widehat{A}$ üst üçgen matrisine ve $B, \widehat{B}$ matrisine dönüşür - (63) den, değişik iterasyon kuralı

$$\widehat{A} z_{v+1} = \widehat{B} z_v \quad (63a)$$

yani, yeni vektör z_{v+1} in "aşağıdan yukarıya doğru" hesaplandığı basamaklı bir sistem elde edilir. Sağ taraf olan $\widehat{B} z_v = u_v$ vektörünün açık olarak yazılması gerekmez. B nin altında satır şeklinde düzenlenmiş z_v vektörü ile, hesap makinasında $\sum \widehat{b}_{ik} z_k$ çarpımı toplamı yazılarak, u_v sağ tarafı bulunur. Şek. 21.2 deki şemaya bakınız. z_{v+1} yine, yukarıda verilen tiplerden biri uyarınca normlaştırılır ve yeni z_v olarak kullanılır.



Şek. 21.2. Genel özdeğer problemi (62) için kesirli iterasyon

Burada da birinci özdeğer λ_1 için sona eren iterasyondan sonra λ_2 , Koch metodu uyarınca ele alınabilir, bunun için x_1 den temizlenmiş $z_v - c_{1v} x_1$ vektörü itere edilir; ve böylece devam edilir. c_{1v} temizleme katsayılarının bulunması için, simetrik olmayan matrisler halinde de,

$$A' y = \lambda B' y \quad (66)$$

uyarınca tanımlanan ve,

$$A' v_{v+1} = B' v_v \quad (67)$$

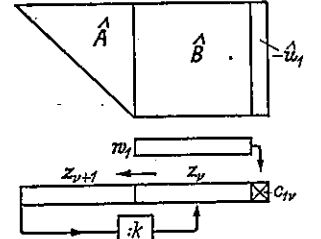
şeklindeki sol-iterasyonlardan (transpoze edilmiş matrisler ile iterasyon) bulunan y_i sol vektörleri kullanılır. Örneğin 1. nci özdeğerin hesabı için yeni $(l-1)$ adet λ_i, x_i, v_i değer sisteminin verilmesi halinde şöyle hareket edilir. $i=1$ ilâ $(l-1)$ için bir defalık bulunan

$$w_i := B' y_i \quad (68a)$$

$$k_i := w'_i x_i \quad (68b)$$

$$w_i^0 := w_i / k_i \quad (68c)$$

$$u_i := \widehat{B} x_i \quad (69)$$



Şek. 21.2. KOHCH'a göre 2. özdeğer için tesirli iterasyon

vektörleri halinde c_{iv} temizleme katsayıları her v iterasyon basamağında,

$$c_{iv} := w_i^{0'} z_v, \quad i = 1, 2, \dots, l-1. \quad (70)$$

uyarınca hesaplanır. Yeni basamaklı sisteme ait iterasyon kuralı

$$\widehat{A} z_{v+1} = \widehat{B} z_v - \sum_{i=1}^{l-1} c_{iv} \widehat{u}_i \quad (71)$$

şeklinde. Bu ise $\widehat{B}$ matrisinin $(l-1)$ adet w_i^0 satırı ve $(l-1)$ adet $-u_i$ sütununa kadar genişletilmesi anlamına gelir. z_v vektörünün w_i^0 satırları ile çarpılmasından önce c_{iv} katsayıları bulunur ve bunlar z_v vektörüne, ek bileşen olarak, itere olur. Bunlar, başlanan iterasyon da ((71) nin sağ tarafının bulunması) $\widehat{B}$ matrisinin $-u_i$ ek sütunları ile çarpılır, Şek. 21.3 deki şemaya bakınız.

Simetrik matrisler $A = A'$ ve $B = B'$ halinde y_i ile x_i çakışır. Buna ait, sayısal hesaplanan bir titreşim tekniği problemi, § 27.6 Tablo 27.1 de verilmiştir.

21.6. Tek Özdeğer için Wielandt-düzeltilmesi.

Spektral-kaymaya bağlı olarak kesirli iterasyon, önce Wielandt tarafından verilen bir düzeltme metoduna¹ götürür. Burada A matrisinin

¹⁾ Wielandt, H.: Bestimmung höherer Eigenwerte durch gebrochene Iteration. Ber. B 44/J/37 der Aerodynam. Vers.-Anst. Göttingen 1944.

keyfi bir λ_q özdeğerinin herhangi bir şekilde bilinen l yaklaşımı, bunun doğruluğu oranında, hızlı olarak düzeltilir. l , önceden keyfi bir sayı ise, $A - lI$ matrisi, λ_l , A nın özdeğerleri olmak üzere, A daki sayıda özvektör halinde, $\lambda_l - l$ özdeğerlerine sahiptir. Ancak l , bir λ_q özdeğerinin yaklaşımı ise ve bu, matris herhangi bir diğer (reel veya kompleks) özdeğerine oranla λ_q ya daha fazla yakın ise, $\lambda_q - l = \varepsilon$ değeri $A - lI$ matrisinin en küçük özdeğerini gösterir ve dolayısı ile bu "kaymış" matrisde kesirli iterasyon ile elde edilir. Bu orada, bilindiği gibi metodun yakınsaklığı, herhangi $|\lambda_l - l|$ ye göre $|\lambda_q - l|$ değişiminin küçülmesi ile, iyileşir. Yeni iterasyon kuralı şöyle olur :

$$(A - lI) z_{v+1} = z_v. \quad (72)$$

Bu basit şekli ile metodun dezavantajı, $A - lI$ denklem matrisinin, l yanlısının iyiliği oranı ile artmak üzere yarım-tekil olmasıdır. Bu durum, çıkarılma ve dış şekil bakımından farklı olan Unger¹ ve Wittmeyer² metodlar ile önlenir; bunlardan birincisinde problem, Newton metoduna göre, x_l ve λ cinsinden lineer olmayan denklem sistemi olarak incelenir ki bu, belli türetme matrisi özel halinde Wielandt metoduna uyar; ancak daha genel, λ cinsinden lineer olmayan özdeğer problemlerine de uygulanabilir. Wittmeyer iterasyon metodu, "Disturbance hesaplama" yolu ile bulunur; ve sayısal hesapda daha da basitleştirilir. - burada, çıkarılma ve dış şekil bakımından değişik bir ifadesi verilecektir.

Yaklaşık değer l kadar spektral kaymadan sonra özdeğer problemi şöyle olur :

$$\begin{aligned} (A - lI) x &= \varepsilon x \\ \varepsilon &= \lambda_q - l \text{ ile} \end{aligned} \quad (73)$$

λ_q özdeğerine ait x özvektörü, belirli, fazla küçük olmayan bir bileşen örneğin n .inci bileşen l 'e eşitlenecek şekilde normlaştırılır, $x_n = 1$. Denklem (73),

$$(A - lI) x_{v+1} = \varepsilon_{v+1} x_n, \quad x_n = 1 \text{ olarak} \quad (74)$$

iterasyon kuralına dönüştürülür; bu yeni iterasyon adımı $(v+1)$ in n adet $x_1^{v+1}, \dots, x_{n-1}^{v+1}$ ve ε_{v+1} bilinmeyenleri için homojen olmayan, lineer

1) Unger, H.: Nichtlineare Behandlung von Eigenwertaufgaben. Z. angew. Math. Mech. Bd. 30 (1950), s. 281-282.

2) Wittmeyer, H.: Berechnung einzelner Eigenwerte eines algebraischen linearen Eigenwertproblems durch "Störirration". Z. angew. Math. Mech. Bd. 35 (1955), s. 441-452.

bir denklem sistemidir. $K = A - lI$ matrisinin k_1 sütunları yardımı ile denklem sistemi

$$k_1 x_1^{v+1} + \dots + k_{n-1} x_{n-1}^{v+1} + k_n \cdot 1 - x_v \varepsilon_{v+1} = 0, \quad (74a)$$

şeklini alır; burada $K = (k_1 \dots k_n)$ matrisi yarı tekil olmakla beraber, başlangıçta çok katlı veya kompleks özdeğere alınmaz ise, bilinmeyenlere ait matris $(k_1 \dots k_{n-1}, -x_v)$ tekil olmayan matrisdir. Yeni sistem daima çözülebilir. n -bileşen olarak burada k_n sütunu, diğer k_i sütunlarına bağlı olan alınır; bu ise, Gauss yok etme (üçgenlere ayırma) metodunda, "küçük köşegen elemanı b_{nn} " dir. Bu esnada sıraların değiştirilmesi gerekebilir.

Toplam matrisin ilk n sütunu $k_1 - k_n$, yok etme işleminde değişmez. Sonuncu olan $-x_v$ ise, her iterasyon adımında değişir ve bu neden ile her defasında yenide yok etme işlemi uygulanır ve bu y_v ye dönüşebilir. Bu durumda, - sıfırdan çok az farklı $-b_{nn}$ köşegen elemanlı basamaklı sistemini n .inci satırı

$$b_{nn} \cdot 1 + y_n^v \varepsilon_{v+1} = 0,$$

şeklinde olup buradan, ε a yakınsayan

$$\varepsilon_{v+1} = -b_{nn} : y_n^v \quad (75)$$

bilinmeyi hesaplanır. Aranılan özvektör

$$\lambda = l + \varepsilon, \quad (76)$$

olur; buna karşılık ilgili özvektör x , itere edilmiş son vektör x_{v+1} olarak doğrudan doğruya bulunur.

Başlangıç vektörü x_0 olarak - tam olarak sağlanmayan $-Kx = 0$ denkleminin, b_{nn} ye ait, sağlanamayan $b_{nn} \cdot 1 = 0$ denkleminin ısı çözülmesi ile elde edilen, yaklaşık çözümü kullanılır. K den, n .inci satırın çizilmesi ile bulunan matris K_0 ile gösterilir ise x_0 ,

$$K_0 x_0 = 0, \quad x_n = 1 \text{ olarak} \quad (77)$$

nin çözümü olur. Bu yaklaşım, l değerinin oranı λ özdeğerine yaklaşması oranında, doğrudur. İterasyon da bunun ile orantılı olarak çabuklaşır. Örneğin $l = A$ gibi iyi bir Rayleigh yaklaşımı kullanılması halinde, hem λ nın hemde x özvektörünün istenen sıhhat ile bulunması için tek bir iterasyon adımı yeterlidir.

Metod kolayca "genel" özdeğer problemi $Ax = \lambda Bx$ e, yani 1 kadar kayma halinde

$$(A - lB)x = \varepsilon Bx = \varepsilon v \quad (78)$$

e dönüştürülebilir; buradaki vektör $Bx = v$ dir. İlgili iterasyon kuralı

$$\begin{cases} (A - lB)x_{v+1} = \varepsilon_{v+1} v_v \\ v_x = Bx_v, \quad x_n = 1 \text{ ile} \end{cases} \quad (79)$$

Adi özdeğer problemi için, $n = 4$ halinde, toplam kontrolleri ile birlikte hesap şeması şöyledir :

	$-x_0$	$-x_1$	$-x_2$				
σ_1	σ_2	σ_3	σ_4	S	s^0	s^1	s^2
$a_{11}-l$	a_{12}	a_{13}	a_{14}	s_1	$-x_1^0$	$-x_1^1$	$-x_1^2$
a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{24}	s_2	$-x_2^0$	$-x_2^1$	$-x_2^2$
a_{31}	$a_{32}-l$	$a_{33}-l$	a_{34}	s_3	$-x_3^0$	$-x_3^1$	$-x_3^2$
a_{41}	a_{42}	a_{43}	$a_{44}-l$	s_4	-1	-1	-1
b_{11}	b_{12}	b_{13}	b_{14}	t_1	y_1^0	y_1^1	y_1^2
$-c_{21}$	b_{22}	b_{23}	b_{24}	t_2	y_2^0	y_2^1	y_2^2
$-c_{31}$	$-c_{32}$	b_{33}	b_{34}	t_3	y_3^0	y_3^1	y_3^2
$-c_{41}$	$-c_{42}$	$-c_{43}$	b_{44}	t_4	y_4^0	y_4^1	y_4^2
$-\tau_1$	$-\tau_2$	$-\tau_3$	-1	0	0	0	0
$x_0:$	x_1^0	x_2^0	x_3^0	1	—		
$x_1:$	x_1^1	x_2^1	x_3^1	1	0	ε_1	
$x_2:$	x_1^2	x_2^2	x_3^2	1	0		ε_2
$x_3:$	x_1^3	x_2^3	x_3^3	1	0		ε_3

Wieland-İterasyonu Hesap Şeması

Genel özdeğer problemi halinde $A - lI$ matrisi $A - lB$ matrisine, $-x_0$ sütunları ise $-x_1$ sütunlarına dönüştürülmelidir; bunların hesabı için $v_0 = Bx_0$ dönüşümleri kullanılır. Geri kalan işlem, yukardaki şemada olduğu gibi yapılır.

Örnek : § 21.2 deki 1. örnekle hesaplanan Λ_2 yaklaşımının düzeltilmesi isteniyor. Hesabın basitleştirilmesi için yaklaşık değer olarak

$l = 7,930$ alalım. Tablo 21.5 deki yok etme işleminde, sabit sıra halinde, 3. köşegen elemanı küçüldüğünden (simetrik) sıra değişimi yapılır. (§ 6.4 e bakınız); böylece $x_3 = 1$ sabit olur. İki adımdan sonra hesaptan yedi-sekiz haneli $\lambda_2 = 7,932\ 1047$ değerleri bulunur.

21.7. İki Özdeğer için Wielandt Düzeltmesi.

Eşit (özellikle kompleks) veya

$$\lambda^2 + s\lambda + p = 0 \quad (80)$$

Tablo : 21.5 λ_2 özdeğeri için Wielandt düzeltmesi.

$A - 7,93 I$		$-x_0$	$-x_1$	
2,07	-3,93	0,07	-1,93	-2,245 1994
-5,93	1	3	4	-0,722 1962
1	-10,93	1	5	-0,273 0275
3	1	-1,93	-2	-1
4	5	-2	-8,93	-0,252 3990
-5,93	1	3	4	-0,722 1962
2,168 6341	-10,761 366	1,505 902	5,674 536	-0,394 8144
0,505 9022	0,139 9360	0,004 818	0,252 3989	-1,658 7144
0,674 5363	0,527 3053	0,817 681	-3,329 636	-0,947 7347
Probe: 0,349 0725	-0,332 7577	-1	-0,747 6011	0
$x_0:$	0,722 1962	0,273 0275	1	0,252 3990
$x_1:$	0,721 1764	0,272 4732	1	0,251 5498
$x_2:$	0,721 1776	0,272 4740	1	0,251 5510
				0,002 9027
				0,002 9047

denklemleri ile verilen yakın λ_1, λ_2 özdeğerleri halinde,

$$A^2 + s_0 A + p_0 I = 0 \quad (81)$$

şeklindeki genelleştirilmiş Rayleigh yaklaşımına bağlı olarak simültane iterasyona dayanan λ_1, λ_2 yaklaşık değerleri Wielandt iterasyonu ile daha da düzeltilebilir; bu esnada özellikle, kaba olarak bulunabilen x_0, x_2 özvektörleri aynı sıhatle bulunur. Bunun için, rank düşmesi 2 olan tekil

$\bar{K} = A^2 + SA + pI = (A - \lambda_1 I)(A - \lambda_2 I)$ matrisine (A nin normal formundan çıkar) sahip

$$\bar{K}z = (A^2 + sA + pI)z = 0 \quad (82)$$

Matris denkleminde hareket edilir. Bu neden ile, bu denklemin z çözümleri x_1, x_2 özvektörlerinin bulunduğu iki boyutlu bir vektör sistemi oluşturulur. Bunlar, (82) nin keyfi bir z çözümünden,

$$(A - \lambda_1 I) \underbrace{(A - \lambda_2 I)z}_{x_1} = (A - \lambda_2 I) \underbrace{(A - \lambda_1 I)z}_{x_2} = 0$$

den görüleceği gibi,

$$\begin{cases} x_1 = Az - \lambda_2 z \\ x_2 = Az - \lambda_1 z \end{cases} \quad (83)$$

olarak bulunurlar. Verilen s_0, p_0 yaklaşımları ve oranın σ ve π düzeltmeleri halinde, aranan s ve p katsayıları için.

$$\begin{cases} s = s_0 + \sigma \\ p = p_0 + \pi \end{cases} \quad (84)$$

alınır ise (82),

$$(A^2 + s_0 A + p_0 I)z + \sigma Az + \pi z = 0,$$

şeklini alır ki bu, yarı tekil,

$$K = A^2 + s_0 A + p_0 I = (k_{ij}) \quad (85)$$

matrisi ile,

$$Kz_{v+1} + \sigma_{v+1} Az_v + \pi_{v+1} z_v = 0, \quad (86)$$

iterasyon kuralına dönüştürülür; bu ise, z_{v+1} in $(n-2)$ adet z_v^{v+1} bilinmeyen ve diğer iki bilinmeyen σ_{v+1}, π_{v+1} cinsinden lineer denklem sistemidir, z vektörü için, iterasyon işleminde belirli olan iki bileşen serbesttir :

$$z_{n-1} = 1, \quad z_n = 0 \quad (87)$$

bunun için K matrisinin son iki sütunu, yok etme işleminden (üçgenlere ayırma) anlaşılacağı gibi, diğerlerine yarı bağımlı olmalıdır. Gerekiirse sıralar da değiştirilmelidir. Son iki sıraya kadar ayırma işlemi uygulanır ise, geriye çok küçük dört eleman kalır :

$$\begin{matrix} b_{n-1, n-1} & b_{n-1, n} \\ b_{n, n-1} & b_{n, n} \end{matrix}$$

aşağıdaki şemaya bakınız, - Başlangıç yaklaşımı olarak

$$K_0 z_0 = 0, \quad z_{n-1}^0 = 1, \quad z_n^0 = 0 \quad \text{olarak} \quad (88)$$

sisteminin z_0 çözümü seçilir; burada K_0 K da son iki (veya yarı bağımlı) satırın atılması ile bulunur.

z_v yaklaşımına $Az_v = v_v$ ek katsayılar sütunları ve (86) sistemine v_v ait olur ve bunlar, yoketme işleminde w_v veya y_v sütunlarına dönüşürler. Yok etme işlemi, w_v nin son bileşeni yani $w_n^v = 0$ olacak şekilde tamamlanmalıdır; bu işe $-c_{n, n-1}^v$ yok etme katsayısı ile sağlanır. Bu yok etme adımının, son iki b_{ik} elemanına uygulanması ile

$$b_{n, n-1} - c_{n, n-1}^v b_{n-1, n-1}, \quad (89a)$$

$$b_{n, n} - c_{n, n-1}^v b_{n-1, n}, \quad (89b)$$

bulunur; $z_n = 0$ nedeni ile bunların birincisi kullanılır; K matrisinin son sütununun tümü gerekli değildir ve ihmal edilebilir. (89-a) yardımı ile, son basamaklı denklem

$$(b_{n,n-1} - c_{n,n-1}^v b_{n-1,n-1}) \cdot 1 + y_n^v \pi_{v+1} = 0$$

deki π_{v+1} düzeltmesi şöyle bulunur :

$$\pi_{v+1} = - (b_{n,n-1} - c_{n,n-1}^v b_{n-1,n-1}) : y_n^v \quad (90)$$

İkinci düzeltme σ_{v+1} ve $z_{n-2}^{v+1}, \dots, z_1^{v+1}$ bilinmeyenleri yine, basamaklı sistemin hesapları ile bulunur. - $n = 5$ için hesap şeması aşağıdaki görüne sahiptir.

$K = A^2 + s_0 A + p_0 I$						v_ν	z_ν	
σ_1	σ_2	σ_3	σ_4	σ_5	S	...	σ^ν	s^ν
k_{11}	k_{12}	k_{13}	k_{14}	k_{15}	s_1		v_1^ν	z_1^ν
k_{21}	k_{22}	k_{23}	k_{24}	k_{25}	s_2		v_2^ν	z_2^ν
k_{31}	k_{32}	k_{33}	k_{34}	k_{35}	s_3		v_3^ν	z_3^ν
k_{41}	k_{42}	k_{43}	k_{44}	k_{45}	s_4		v_4^ν	1
k_{51}	k_{52}	k_{53}	k_{54}	k_{55}	s_5		v_5^ν	0
b_{11}	b_{12}	b_{13}	b_{14}	b_{15}	t_1		w_1^ν	z_1^ν
$-c_{21}$	b_{22}	b_{23}	b_{24}	b_{25}	t_2		w_2^ν	z_2^ν
$-c_{31}$	$-c_{32}$	b_{33}	b_{34}	b_{35}	t_3		w_3^ν	z_3^ν
$-c_{41}$	$-c_{42}$	$-c_{43}$	b_{44}	b_{45}	t_4		w_4^ν	z_4^ν
$-c_{51}$	$-c_{52}$	$-c_{53}$	b_{54}	b_{55}	t_5		$-c_{54}^\nu$	z_5^ν
Probe: $-\tau_1$	$-\tau_2$	$-\tau_3$	τ_4	τ_5	0		$-\tau_5$	-1
z_0	z_1^0	z_2^0	z_3^0	1	0	—		
...	...	...	...	...	...	...		
$z_{\nu+1}$	$z_1^{\nu+1}$	$z_2^{\nu+1}$	$z_3^{\nu+1}$	1	0	0	$\sigma_{\nu+1}$	$\pi_{\nu+1}$

Tecrübe

ÖRNEK : § 21.2 nin sonunda verilen

$$\lambda_1 = -8,0285 \ 7835, \quad \lambda_2 = 7,9329 \ 0472$$

(tam) özdeğerlerine sahip

$$\lambda^2 + 0,0956 \ 7363 \ \lambda - 63,6899 \ 471 = 0$$

ikinci derece denklemleri 1. örnek için - bilhassa kaba,

$$A^2 + 0,10 \ A - 63,70 = 0$$

yaklaşımından hareket edilir; yeni

$$K = A^2 + 0,10 \ A - 63,70 \ I.$$

matrisinde iterasyon yapılır. Sonuç, ikinci adımdan sonra, verilen hane sayısı dahilinde,

$$\lambda^2 + 0,0956 \ 737 \ \lambda - 63,6899 \ 48 = 0.$$

olarak bulunur,

21.8. Jacobi Metodu.

Şimdiye kadar incelenen vektör iterasyonundan tamamen değişik bir tipde iterasyon metodu Jacobi¹ tarafından verilmiş ve simetrik denklem sistemlerinin çözümünde kullanılmıştır. Bu en eski el hesabı için pek tavsiye edilmeyen metod, otomatik hesabın ortaya çıkması ile popüler olmuştur. Bu metod reel simetrik matrisler ile sınırlı olup buna ait tüm özdeğerleri ve ilgili öz vektörleri verir. Genel simetrik olmayan matrise uygulama halen araştırma safhasındadır. Simetrik A, B ve pozitif definit B matrisli genel özdeğer problemine uygulama § 21.9. da gösterilmiştir.

Metod, geometrik olarak düzelme dönmeler sayılan (rotasyon metodu) ve her biri köşegen dışı bir $a_{ik} = a_{ki}$ ($i \neq k$) eleman çiftini sıfır yapan elemanter ortogonal dönüşümlerin sonsuz bir serisi şeklindedir. Bu sıfırlama bir sonraki ve diğer bir i, k indis çiftine uygulanan dönüşümde bozulur. Ancak gösterilebilir ki, köşegen dışı tüm elemanların kareleri toplamı yani "dış norm" sürekli olarak küçülür ve sıfıra yakınsar ve böylece dönüşüm ile bulunan matris dizisi - reel - λ_1 özdeğerlerinden oluşan $\Lambda = \text{Diag}(\lambda_1)$ köşegen matrisine yakınsar.

Belirli bir i, k indis çiftine göre olan

$$A = T' A T$$

elemanter dönüşümünde, birim matrisden ii, ik, ki, kk noktalarında, φ açısı kadar düzlemsel dönmenin

$$\begin{pmatrix} c & s \\ s & -c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ \sin \varphi & -\cos \varphi \end{pmatrix}$$

alt matris 1 kadar fark eden bir ortogonal matrise T kullanılır. Bu esnada A da yalnız i. ninci ve k. ninci satır ve sütunların elemanları deği-

¹⁾ Jacobi, C. G. J.: Ein leichtes Verfahren, die in der Theorie der Säkularstörungen vorkommenden Gleichungen numerisch aufzulösen. J. reine u. angew. Math. Bd. 30 (1846), s. 51-95.

Tablo 21.6. İki özdeğer için Wielandt-Düzeltilmesi.

$K = A^2 + 0,1 A - 63,7 I$					$A z_0 = v_0$			$A z_1 = v_1$		
	9,3	-27,3	7,1	-25,1	19,096 376	2,445 517	z_0	19,088 505	z_1	z_1
-33,5	22,1	17,3	3,4	3,4	5,331 235	0,885 718	0,885 069	5,329 592	0,885 069	0,885 069
22,1	28,0	-3,9	-17,5	-17,5	0,206 321	0,559 799	0,559 455	0,206 704	0,559 455	0,559 455
17,3	-3,9	-13,1	6,8	6,8	9,216 953	1	1	9,214 661	1	1
3,4	-17,5	6,8	-17,8	-17,8	4,341 867	0	0	4,337 549	0	0
-33,5	22,1	17,3	3,4	3,4	5,331 235	0,885 718	0,885 069	5,329 592	0,885 069	0,885 069
0,659 7015	-13,420 597	7,512 836	-15,257 015	-15,257 015	3,723 345	1,144 108	1,143 336	3,722 644	1,143 336	1,143 336
0,516 4179	0,559 7990	0,039 7077	0,014 9591	0,014 9591	14,034 423	2,097 871	2,097 104	14,050 890	2,097 104	2,097 104
0,101 4925	-1,136 8358	0,014 9593	-0,110 2046	-0,110 2046	-0,046 2570	-1,307 810	-1,306 437	-0,046 0062	-1,306 437	-1,306 437
Tecrübe : 0,277 6119	-1,577 0369	0,054 667	-0,095 244	-0,095 244	-1,046 2570	-1	-1	-1,046 0062	-1	-1
z_0 : 0,885 718	0,559 799	1	0	0	-0,004 3231	0,010 0340	0,010 0340	-0,004 3263	0,010 0521	0,010 0521
z_1 : 0,885 0685	0,559 4550	1	0	0						
z_2 : 0,885 0685	0,559 4550	1	0	0						

$$\lambda_1 = -8,028 5785$$

$$\lambda_2 = 7,932 9047$$

83 deki özvektörler

u_1	u_2
12,435 43	-1,691 57
4,698 33	-4,231 40
17,243 24	1,281 76
4,337 55	4,337 55

şir. Bunlar arasında, aşağıdaki gibi hesaplanan köşe noktalarındaki elemanlar önemlidir :

	c	s
	s	$-c$
$a_{ii} a_{ik}$	$c a_{ii} + s a_{ik}$	$s a_{ii} - c a_{ik}$
$a_{ki} a_{kk}$	$c a_{ki} + s a_{kk}$	$s a_{ki} - c a_{kk}$
c	$c^2 a_{ii} + s^2 a_{kk} + c s (a_{ik} + a_{ki})$	$c s (a_{ii} - a_{kk}) - c^2 a_{ik} + s^2 a_{ki}$
s	$c s (a_{ii} - a_{kk}) + s^2 a_{ik} - c^2 a_{ki}$	$s^2 a_{ii} + c^2 a_{kk} - c s (a_{ik} + a_{ki})$

Yeni matrisin b_{rs} ile gösterilen elemanları için, yine matris de simetrik olmaksızın, aşağıdaki bağıntılar bulunur :

$$b_{ii} + b_{kk} = a_{ii} + a_{kk}$$

$$b_{ik} - b_{ki} = -a_{ik} + a_{ki}$$

$$b_{ik} + b_{ki} = (a_{ii} - a_{kk}) \sin 2\varphi - (a_{ik} + a_{ki}) \cos 2\varphi$$

$$b_{ii} - b_{kk} = (a_{ii} - a_{kk}) \cos 2\varphi + (a_{ik} + a_{ki}) \sin 2\varphi$$

Buradan

$$(b_{ii} - b_{kk})^2 + (b_{ik} + b_{ki})^2 = (a_{ii} - a_{kk})^2 + (a_{ik} + a_{ki})^2$$

$$(b_{ii} + b_{kk})^2 = (a_{ii} + a_{kk})^2$$

ve toplama ile,

$$b_{ii}^2 + b_{kk}^2 + \frac{1}{2} (b_{ik} + b_{ki})^2 = a_{ii}^2 + a_{kk}^2 + \frac{1}{2} (a_{ik} + a_{ki})^2. \quad (91)$$

bulunur.

Şimdi

$$b_{ik} + b_{ki} = 0, \quad (92)$$

olsun; buradan φ açısı bulunur.

$$\tan 2\varphi = \frac{a_{ik} + a_{ki}}{a_{ii} - a_{kk}}.$$

Böylece (91) den

$$b_{ii}^2 + b_{kk}^2 = a_{ii}^2 + a_{kk}^2 + \frac{1}{2} (a_{ik} + a_{ki})^2. \quad (93)$$

çıkar. Geri kalan köşegen elemanları değişmediğinden, köşegen elemanların kareleri toplamı her dönüşümde, $1/2 (a_{ik} + a_{ki})^2$ o kadar artar. Her i, k çifti için hane sayısı çerçevesinde $a_{ik} + a_{ki} = 0$ koşulu sağlandığında metod son bulur. Yeni metod, genel matris A halinde yarı simetrik bir matrise yakınsar ve böylece bir kazanç elde edilmez.

Ancak A simetrik ise — böylece tüm dönüşüm matrisler de simetrik kalır — (92) hipotezi $b_{ik} = 0$ şeklini alır ve $a_{ii} \neq a_{kk}$ halinde, φ dönme açısı

$$t = \tan 2\varphi = \frac{2a_{ik}}{a_{ii} - a_{kk}}. \quad (94)$$

den hesaplanır. Böylece,

$$\left. \begin{aligned} c &= \cos \varphi = \sqrt{(1+k)/2} \\ s &= \sin \varphi = \varepsilon \sqrt{(1-k)/2} \\ \text{ile } k &= \cos 2\varphi = 1/\sqrt{1+t^2} \\ \text{ve } \varepsilon &= \text{sgn } t. \end{aligned} \right\} \quad (95)$$

formül takımı uyarınca c ve s çarpanları elde edilir. $a_{ji} = a_{kj}$ yani $\varphi = \pi/4$ özel hali için

$$c = 1/\sqrt{2}, \quad s = \varepsilon/\sqrt{2}, \quad \varepsilon = \text{sgn } a_{ik} \quad \text{olarak} \quad (96)$$

alınır. Bu değerler yardımı ile, i . ninci ve k . ninci satır ve sütunlarının elemanları şöyle değiştirilir:

$$\left. \begin{aligned} b_{ji} &= c a_{ji} + s a_{jk} \\ b_{jk} &= s a_{ji} - c a_{jk} \end{aligned} \right\} \quad j \neq i, k, \quad (97)$$

$$\left. \begin{aligned} b_{ii} &= c^2 a_{ii} + s^2 a_{kk} + 2cs a_{ik} \\ b_{kk} &= s^2 a_{ii} + c^2 a_{kk} - 2cs a_{ik} \end{aligned} \right\} \quad (98)$$

(97 a) dan,
yardımı ile

$$\begin{aligned} a_{ik} &= a_{ki} \\ b_{ii}^2 + b_{kk}^2 &= a_{ii}^2 + a_{kk}^2 + 2a_{ik}^2. \end{aligned} \quad (99)$$

bulunur. Her iterasyon adımı köşegen elemanlarının kareleri toplamı (iç normun karesi) $2a_{ik}^2$ kadar büyür; buna karşılık dış normun karesi de aynı ölçüde küçülür; zira ortogonal dönüşümlere göre toplam norm invarianttır (§ 16.3'e bakınız).

Öngörülen hane sayısı çerçevesinde a_{ik} dış elemanları sıfır olduğu zaman,

$$X'AX = A$$

köşegen şeklin asal eksen dönüşümü tamamlanır. Burada

$$X = T_1 T_2 T_3 \dots,$$

uyarınca $T = T_s$ matrislerinin çarpımı olan dönüşüm matrisi X ortonormalleştirilmiş x_i özvektörlerinden oluşan matris (modal matris) dir; buradaki sıra, ilgili λ_i özdeğerlerinin $\Lambda = \text{Diag}(\lambda_i)$ köşegen matrisinden ortaya çıkma sırası olup bu, tek dönüşümlerin sırasına bağlıdır. Bu $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ modal matrisi,

$$X := I, \quad (100)$$

birim matrisinden hareket edilerek ve her iterasyon adımı,

$$X := XT. \quad (101)$$

kuralı uyarınca bulunarak, adım adım oluşturulur. Bu çarpım yalnız,

$$\begin{aligned} y_{ri} &= c x_{ri} + s x_{rk}, \\ y_{rk} &= s x_{ri} - c x_{rk}. \end{aligned} \quad (102)$$

uyarınca i ve k . ninci sütunun değişmesini öngörür.

Jacobi metodunun önemsiz olmayan çalışma miktarı, i, k indis çiftlerinin matrisinin tüm dış köşegen aralığından geçme sırasına bağlıdır. Bu neden ile problem özellik kazanır. Jacobi de, sıfır yapılacak a_{ik} donanı olarak en büyük değer de olanı seçilmiştir. Bu mantiki ve el hesabı için çok basit bu seçim, özel müdahale yapılmaması halinde, otomatik hesapda bazı güçlükler doğurur. Bu neden ile sabit sıra

$$\left\{ \begin{array}{l} 12, 13, 14, \dots, 1n \\ 23, 24, \dots, 2n \\ 34, \dots, 3n \\ \dots \end{array} \right\} \quad (103)$$

"tour"¹ olarak seçilmiştir. Bunun dezavantajı, fazla bir yenilik getirmeyen, küçük a_{ik} dış elemanlarına sıfırlaştırmanın uygulanmasıdır. Bu durum, aşağıdaki "adım metodu" ile önlenir. Her tourdan önce yeniden ortalama köşegen yüksekliği

$$a = \frac{1}{n} \sum_i |a_{ii}|$$

bulunur ve bu değer önce, "nivo yüksekliği" kabul edilir. Her tourda $|a_{ik}| > a$ olan a_{ik} elemanlarına dönüşüm uygulanır. — Bir çok tour'dan sonra, — başka böyle bir dış eleman yok ise sayıları çok az ise birinci "niveleman" sona erer. Buradan sonra nivo yüksekliği 10^{-1} a'ya indirilir ve aynı şekilde hareket edilir. Metod, öngörülen 10^{-p} a nivo yüksekliğine ulaşıldığında, sona erer. Burada da her tour, tour başına dönüşüm sayıda önemli ölçüde indirgenmiş olsa bile, $n(n-1)/2$ soru gerektirir.

En büyük a_{ik} elemanının istenen ancak geniş kapsamlı olan bulunmasını hiç olmazsa yaklaşık basit şekilde D. Stephan'ın² bir teklifi realize etmektedir. Bileşenleri yani her j satırının köşegen dışı elemanlarının kareleri toplamı

$$q_j = \sum_{l \neq j} a_{jl}^2,$$

olan bir q vektörünü hesaba katalım. Hesabın başlangıcında q_j ler, toplam işleminden bulunur. Her dönüşümde bunların yalnız, a_i ve a_k bileşenleri değişir. Zira $j \neq i, k$ için (97) den

$$b_{ji}^2 + b_{jk}^2 = a_{ji}^2 + a_{jk}^2,$$

yani q_j = sabit bulunur. Her dönüşümden sonra yalnız q_i, q_k bileşenleri yeniden bulunmalıdır. Şimdi q vektöründe Max. $q_j = q_i$ aranır ise, bu i satırı hiç olmazsa yaklaşık şekilde max. elemana sahip olacaktır. Bu neden ile i satırında max. a_{ik} elemanı bulunur ve dönüşümde kullanılır.

Jacobi metodu için, özdeğerlerin hemen hemen eşit sıhhatle bulunması karakteristik bir özelliktir. Çok sık rastlandığı gibi bu neden ile değerler farklı büyüklük mertebesinde ise, küçük özdeğerler izafi olarak sıhatsız bulunurlar. Diğer taraftan metod, eşit veya hemen hemen eşit özdeğerler vs. gibi genellikle can sıkıcı özel hallere karşı, tepki göstermez. Çok katlı veya çok yakın özdeğerler halinde yalnız, (94) deki sıfır olan $a_{ii} - a_{kk}$ paydası nedeni ile yakınsaklık biraz yavaşlar.

¹ Bu ve aşağıdaki bazı kavramları S. Falk vermiştir; sahife 253 deki dip not 1'e bakınız.

² Bu sözlü bir tekliftir; gerçekten en büyük elemanın rasyonel seçimin öngören diğer bir teklif burada verilecek kadar iyi değildir.

21.9. Matris Çiftleri İçin Bir Jacobi-Metodu.

Falk ve Langemeyer¹ Jacobi metodunun pozitif definit B halinde reel- simetrik A, B matris çiftine sahip

$$\boxed{A X = \lambda B X} \quad (104)$$

genel özdeğer problemine geneleştirilmesini vermişlerdir. Bunun için § 15.5 de çiftin genel, yeni artık ortaganal olmayan kongrüent dönüşümü yardımı ile simultane olarak Λ, I köşegen şekline sokulacağı gösterilmiş idi. $X' B X = I$ normlaştırılmasından vazgeçilir ise, asal eksen dönüşümü

$$\boxed{\begin{aligned} X' A X &= \mathring{A} = \text{Diag}(a_i) \\ X' B X &= \mathring{B} = \text{Diag}(b_i) \end{aligned}} \quad (105)$$

şeklini alır; burada X , — artık ortaganal olmayan — özvektörlerin modal matrisidir. Özdeğerlerin köşegen matrisi Λ , aşağıdaki şekilde bulunur :

$$\boxed{\Lambda = \mathring{B}^{-1} \mathring{A}} \quad \boxed{\lambda_i = a_i/b_i} \quad (106)$$

yine (105) dönüşümüne iteratif olarak,

$$A := T' A T$$

$$B := T' B T$$

şeklinde bir dizi elemanter dönüşüm ile yaklaşılr. Her elemanter dönüşüm, $a_{jk} = a_{ki}$ ve $b_{jk} = b_{ki}$ eleman çiftlerini simultane olarak sıfır yapar. Dönüşüm matrisi T nin etkin kısmı

$$\begin{pmatrix} 1 & t_{ik} \\ t_{ki} & 1 \end{pmatrix}$$

şeklinde alınabilir; böylece T birinci matrisden yalnız, i, k ve k, i farklı olur. a_{ik} ve b_{ik} nin sıfır olması öngörülerek iki dönüşüm elemanı

$$\boxed{\begin{aligned} t_{ik} &= p_2/x \\ t_{ki} &= -p_1/x \end{aligned}} \quad (107)$$

¹ Falk, S., u. P. Langemeyer: Das Jacobische Rotationsverfahren für reel-symmetrische Matrizenpaare I, II. Elektron. Datenverarb. 1960, s. 30-43.

olarak bulunur; burada x paydası

$$x^2 - mx - p_1 p_2 = 0 \quad (108)$$

denkleminin köklerinden biri olup şu kısaltmalar kullanılmıştır :

$$\begin{cases} m = a_{ii} b_{kk} - a_{kk} b_{ii}, \\ p_1 = a_{ii} b_{ik} - b_{ii} a_{ik}, \\ p_2 = a_{kk} b_{ik} - b_{kk} a_{ik}. \end{cases} \quad (109)$$

B nin pozitif definitliğinden dolayı iki kök de reeldir. (107) için en büyük kök seçilir. Pratik bir problemde B nin definitliği kati olmadığından otomatik hesapda $m^2 + 4 p_1 p_2 \geq 0$ sorulur ve yalnız evet cevabı halinde hesaba devam edilir.

Sıfırlanacak elemanların i, k çiftlerinin seçimi için (103) şeması kullanılır ancak basamaklı indirilmiş nivo yükseklikleri alınır. Bunlar, iki matrisin farklı olması mümkün büyüklük mertebesi neden ile A ve B için ayrı bulunacaktır. Her tour'un başlangıcında iç değerlerin ortalamaları

$$a = \frac{1}{n} \sum |a_{ii}|, \quad b = \frac{1}{n} \sum |b_{ii}|,$$

bulunur ve her tourda,

$$|a_{ik}| > a \cdot 10^{-e} \text{ veya } |b_{ik}| > b \cdot 10^{-e}$$

geçerli olan i, k indis çiftlerine dönüşüm uygulanır ve $\rho = 1$ nivoluması ile başlanır; sonra $\rho = 2$ vs. alınır ve istenen hane sayısına ulaşıldığında, önceden seçilir $\rho = p$ de metod son bulur.

$\lambda_i = a_i/b_i$ oranları ayrıca,

$$a_i = x'_i A x_i, \quad b_i = x'_i B x_i$$

nedeni ile, Rayleigh - oranlarıdır ve bu neden ile, (100), (101) den çıkan modal matris X in hatalı olması yani A, B matrislerinin küçük köşegen dışı elemanlara sahip olması halinde, oldukça sıhhatlidirler. Hesap esnasında ortaya çıkan yuvarlatma hatalarını Falk ve Longemeyer, "tazeleme" adlı basit bir tedbir ile ortadan kaldırmışlardır - Hatalı - toplam matrisinin X , başlangıç matrislerine uygulanması ile

$$A := X' A X \text{ ve } B := X' B X,$$

bulunur; bunlar önceden hesaplanan A ve B köşegen matrislerinden biraz sapabilir ve özellikle zayıf köşegen dışı elemanlara sahip olabilir.

Bunlar, son bir nivelman ile önlenir. — Bu imkân nedeni ile metod, $B = I$ halinde özel özdeğer problemine Jacobi metodu yerine uygulanabilir.

Falk-Longemeyerden örnek :

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & -4 & 3 & -3 \\ 3 & 23 & -12 & -3 & 3 \\ -4 & -12 & 20 & 12 & 8 \\ 3 & -3 & 12 & 19 & 5 \\ -3 & 3 & 8 & 5 & 7 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 8 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$E_0 = 1$	Leor
$E_1 = 0,1$	1,2 1,3 1,4 1,5 2,3 2,4 2,5 3,4 3,5 4,5
	1,2 1,3 1,4 3,4 3,5
$E_2 = 0,01$	1,2 1,3 2,3 2,4 2,5 4,5
$E_3 = 0,001$	1,2 1,4 1,5 3,4 3,5
$E_4 = 0,0001$	1,3 2,4
$E_5 = 0,00001$	2,3 2,5 4,5
$E_6 = 0,000001$	1,2
$E_7 = 0,0000001$	1,4 1,5
$E_8 = 0,0000000$	2,4 3,4

ÇÖZÜM $\lambda_i =$ 0,270 5051
42,323 1130
-0,226 9039
3,720 3313
8,829 6214

Son hane, 1 birim kadar
kadar eni (Orginal
çalışmaya bakınız).

Özvektörler (X matrisi) :

0,391 6384	0,015 2895	-0,253 3459	0,313 2631	-0,131 9132
0,050 5813	1,467 3199	0,266 5066	0,016 6656	-0,152 0207
0,266 2992	0,375 4060	0,291 1435	-0,072 3093	0,103 2563
-0,233 4133	-0,159 3797	0,037 4297	0,387 3756	0,136 5852
0,008 8927	0,185 7832	-0,563 9835	-0,142 8837	0,791 7780

21.10. Rutishauser'in LR-Dönüşümü.

Reel, fakat artık simetrik olmayan A matrisli adi özdeğer problemi $Ax = \lambda x$ için Jacobi-metodunun genelleştirilmesi ile ilgili bir çok teklif yapılmıştır. Jacobiye benzer elementer benzerlik dönüşümünden oluşan sonsuz bir dizi vasıtası ile, köşegen matris olması bile buna benzer bir

matrise o şekilde yaklaşılır ki, buradan özdeğerler kolayca okunabilir. Reel özdeğerler halinde, adi Jacobi- dönüşümü ile, özdeğerleri köşegen elemanları olan üçgen şekline yaklaşım sağlanır. Lineer olmayan elemanter bölenlerin kompleks ve çok katlı özdeğerleri halinde güçlükler ortaya çıkar!¹

Hedef bakımından aynı fakat işlemde tamamen farklı ve reel ve kompleks özdeğerlere ait bir çok halde kullanılan, bir iterasyon metodu Rutis hauser'in LR-dönüşümüdür.² Bu, tamamen reel özdeğerler halinde belirli koşullar altında bir (örneğin üst) üçgen matrise yakınsar. Kompleks özdeğerler halinde, köşegen boyunca iki sıralı alt matrisler (üçgen-hiper matrisi) :

$$D = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

ortaya çıkar ki burada elemanlar değilse,

$$\text{sp } D = s,$$

$$\det D = p$$

değerleri sabit sayılara yakınsarlar. İlgili eşlenik kompleks özdeğer çifti,

$$\lambda^2 - s\lambda + p = 0$$

denkleminde bulunur. Metod burada, karışık yakınsaklık incelemeleri dışında verilecek ve bunlar ve bazı özellikler için orjinal çalışmalar tavsiye edilecektir.³

Metoda, $A = A_0$ matrisine,

$$A = L_1 R_1$$

Üçgen ayrılması uygulanarak başlanır; burada L_1 sol (alt) ve R_1 sağ (üst) üçgen matrisdir. İki matrisden birinin köşegen elemanları 1 olarak seçilebilir; L_1 'inkileri seçelim. Bundan sonra iki üçgen matrisden, ters sırada çarpım yapılır; böylece yeni matris

$$A_1 = R_1 L_1$$

ortaya çıkar ve buna,

$$A_1 = L_2 R_2,$$

¹) Durand'ın kitabı [5], s. 292 e bakınız.

²) Rutishauser, H.: Z. angew. Math. Phys. Bd. 5 (1954), s. 233-251. Nat. Bur. Stand. Appl. Math. Ser. 49 (1958), s. 47-81.

³) E. Bodewig [2] ve E. Durand [5]'e bakınız.

şeklinde üçgen ayrılması uygulanır; burada L_i nin köşegen elemanları 1 dir. Böylece aşağıdaki iterasyon kuralına göre çalışılır.

$$\begin{aligned} A_0 &= A = L_1 R_1 \\ A_1 &= R_1 L_1 = L_2 R_2 \\ A_2 &= R_2 L_2 = L_3 R_3 \\ &\dots \end{aligned} \quad (110)$$

Kolayca görüleceği gibi, bulunan A_k basamakları birbirine benzer matrislerdir. Zira

$$A_k = R_k L_k$$

nın L_k ile soldan çarpılmasından, $L_k R_k = A$ nedeni ile,

$$L_k A_k = L_k R_k L_k = A_{k-1} L_k$$

ve buradan, tekil olmayan L_k nedeni ile, şu benzerlik bağıntısı elde edilir.

$$A_k = L_k^{-1} A_{k-1} L_k.$$

Bu duruma göre A_k matrislerinden oluşan dizi, tamamen reel değerler ve yalnız lineer elemanter bölenler halinde ve ayrılma ile ilgili koşullar sağlanmış ise, bir üst üçgen matrise yakınsar ve bunun köşegen elemanları oranı özdeğerler olur. Kompleks özdeğerler halinde yakınsaklık, yukarıda verilen sınırlı anlamda bahis konusudur, yani D alt matrislerinin yalnız izi ve determinantı, özdeğerlerin toplamına veya çarpımına yakınsar. Reel halde $L_1, L_2, \dots, L_k$ sol matrislerinin çarpımı, büyüyen k için,

$$T^{-1} A T = B$$

uyarınca başlangıç matrisi A ile üçgen matris B arasındaki bağlantıyı sağlayan T dönüşüm matrisine yakınsar, L_k ların çarpımlarından T matrisi yardımı ile x_i özvektörleri elde edilir. B üçgen matrisinin kolayca hesaplanan z_i vektörlerinden

$$x_i = T z_i.$$

çıkar.

Metod yalnız otomatik hesap için düşünülmüştür; ve hatta bunun için bile fazla çalışma gerektirir. Ancak A matrisi, ikiside $L R$ - dönüşümünde sabit kalan, yarı üçgen matris asal köşegen altında yalnız eğik bir sıra doludur veya köşegen matris şeklinde ise çalışma miktarı n^3 den n^2 ye düşer. Dolayısı ile metodun, ilerdeki paragraflarda verilecek olan matrisin bu şekillerden birine indirgenmesine bağlı olarak özel anlamı vardır.

22. Özdeğer Problemi : Direkt Metodlar.

22.1. Genel Bakış.

Özdeğer probleminin iteratif incelenmesine karşılık direkt metodlarda, karakteristik polinom

$$p(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0 \quad (1)$$

den faydalanılır. Yani bu metodlarda önemli olan sabit bir hesap adımı sayısı ile a_i polinom katsayılarının kullanılmasıdır. Karakteristik denklem $p(\lambda) = 0$ m, pratik matematikte geliştirilen sayısal metodlardan biri ile çözülmesi, özdeğerleri verir. İlgili özvektörlerin bulunması p hesabı gerektirir. Matrisin tüm özdeğerlerinin işlenmesi halinde direkt metod uygulanır. Ancak, bu vesile ile geliştirilmiş olan matrisin üçgenlere veya hatta tridiagonal şekle dönüşümleri, iteratif işleme bağlı olarak Wielandt iterasyonu, Rutishauser'in LR dönüşümü - kullanılabilir ve böylece, oldukça yüklü olan hesap basitleştirilebilir. Bu durumda, yukarıda belirtilen anlamda bir direkt metod bahis konusu değildir.

a_i polinom katsayılarının hesabı için, burada bir kısım verilecek olan çok sayıda metod geliştirilmiştir.¹ § 14.2 de takdim edilen Krylov metodunda, a_i lerin hesabı için bir denklem sisteminin katsayılar şeması sütun cinsinden, itere edilmiş vektörler şeklinde yazılmış idi. Metodun ekseriyen ağır basan dezavantajı, vektörlerin, özdeğerlerin farklı olması ile orantılı şekilde lineer bağımsızlık eğilimi göstermeleridir. Bu neden ile genellikle diğer direkt metodları tavsiye edilir.

Bunlarda, benzerlik dönüşümü prensibi esastır.

$$T^{-1}AT = B. \quad (2)$$

A matrisi, özdeğerleri değişmeksizin yeni B matrisine dönüştürülür; yine değişmemiş olan karakteristik polinom $p(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \det(\lambda I - B)$ nin katsayıları A ya oranlar, burada daha kolay bulunurlar. En ileri adım "Danilewski metodunu"² olup burada $B = F$ Frobenius - matrisine dönüşüm yapılır; ve buradan polinom katsayıları doğrudan doğruya okunur; § 13.5'e bakınız - "Lanczos"³ metodunda şeklin-

¹ Bugün bilinen metodlar şu iki kitapta bulunabilir : E. Bodewig, Matrix Calculus [2] ve E. Durand Bd. 2 [5].

² Danilevskii A. : Mat. Sbornik Bd. 2 (1937) s. 169 - 171.

³ Lanczos, C. : J. Research N. B. S. Bd. 45 (1950) s. 255 - 282.

$$B = \begin{pmatrix} b_1 & c_1 & & \\ 1 & b_2 & c_2 & \\ & 1 & b_3 & c_3 \\ & & \ddots & \ddots \\ & & & 1 & b_n \end{pmatrix}. \quad (3)$$

deki tridiagonal şekle dönüşüm yapılır. $b_{ii} = b_i$ elemanlı ana köşegen dışında yalnız iki yan köşegen dolu olup birinde c_i elemanları diğerinden ise 1 vardır. Bu şekil, karakteristik polinomun basit "rekursif hesabı"nı mümkün kılar. Ana bölge determinantlarının, son sütunlarına göre seriye açımından

$$\left. \begin{aligned} f_{i+1}(\lambda) &= (\lambda - b_{i+1}) f_i(\lambda) - b_i f_{i-1}(\lambda) \\ f_0 &= 1, f_1(\lambda) = \lambda - b_1 \end{aligned} \right\} \text{olarak} \quad (4)$$

çıkar. Hesap, karakteristik polinom $p(\lambda) = f_n(\lambda)$ ile son bulur.

Bu tip metodların sayısal uygulanmasında en önemli nokta sayısal sabitlerdir. Yuvarlatma hatalarının ve sınırlı hane sayısının etkisi altında sayısal olarak hesaplanan B matrisi, teorik olarak (2) ile tanımlanandan az veya çok sapar ve böylece burdan bulunan polinom katsayıları, gerçek değerlere oranla yanlış olabilir. Yani, B matrisinin dış şekli ile, A başlangıç matrisinden sapma miktarı küçüldükçe metod git-tikçe işe yarar hale gelir. Bu neden ile, yalnız (üst veya alt) "yarı üçgen şekli"

$$B = \begin{pmatrix} * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * \\ & * & * & * & * \\ & & * & * & * \\ & & & * & * \end{pmatrix}. \quad (5)$$

e dönüşümü öngören bir grup metod özel anlam kazanır. Burada da özellikle, alt yan köşegenin elemanlarının 1 yapılması halinde, $p(\lambda)$ polinomu rekursif yoldan bulunabilir; aşağıdaki 22.3 e bakınız. Stabilité bakımından tutulan metodlar olarak aşağıda Hessenberg, Givens ve Householder metodları ele alınacaktır. Hessenberg metodunda genel benzerlik dönüşümü esas alınır; ancak T , üçgen şeklinde dönüşüm matrisi olup T ve B matrislerinin ardışık olarak bulunmasını mümkün kılar. Givens ve Householder metodlarında ise, $T^T T = I$ şeklinde ortogonal dönüşüm kullanılır. Simetrik matris A halinde $B = T^T A T$ nedeni ile, B de simetrik olur ve (simetrik) "tridiagonal şekli" ni alır.

$$B = \begin{pmatrix} * & * & & & \\ * & * & * & & \\ & * & * & * & \\ & & * & * & * \\ & & & * & * \end{pmatrix}, \quad (6)$$

Bu ise, $p(\lambda)$ nın rekursif yoldan bulunuşunu basitleştirir. Her iki metod ilk planda elektronik yol ile hesap için düşünülmüştür. Hessenberg metodu, çok açık hesap düzeni nedeni ile ayrıca el ile hesaba da uygundur. Bunun tarifi ile başlayalım; ancak diğer iki metoda ait bazı özellikler burada da kullanılabilir.

İlk iki polinom katsayısı a_{n-1} ve a_{n-2} önceden de hesaplanabilir: $-a_{n-1}$, A nın izi, a_{n-2} ise A^2 nın izidir ve bunlar, yalnız A^2 nin köşegen elemanlarının hesaplanması ve toplanması ile bulunur. Yani

$$a_{n-1} = -\text{sp } A \quad (7a)$$

$$a_{n-2} = \frac{1}{2} [(\text{sp } A)^2 - \text{sp } (A^2)] \quad (7b)$$

İkincisi

$$a_{n-2} = \sum_{i < k} \lambda_i \lambda_k = \frac{1}{2} [(\sum \lambda_i)^2 - \sum \lambda_i^2]$$

den çıkan bu denklemler kontrol maksatları için, ayrıca Krylov-Metodunda hesabın kısaltılması için faydalıdır.

22.2. Hessenberg Metodu.

Metod¹ üçgen şeklinde dönüşüm matrisi yardımı ile zahiri üçgen şekline benzerlik dönüşümünden ibarettir. Başlangıçta el hesabı için verilen şekilde yarı üçgen matrisinin alt köşegen elemanları 1 seçilmiş olup böylece rekursif polinom yapısı basitleşir. Yeni matrisi $-P$ ($-$ işareti hesap kuralını kolaylaştırır) ve, birinci sütunu e_1 birim vektörüne eşitlenen dönüşüm matrisini Z ile gösterelim :

¹ Hessenberg, K. : Auflösung linearer Eigenwertaufgaben mit Hilfe der Hamilton-Cayleyschen Gleichung. Diss. T. H. Darmstadt 1941.

$$Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & z_{22} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & z_{32} & z_{33} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & z_{n2} & z_{n3} & \dots & z_{nn} \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \dots & \dots & p_{1n} \\ -1 & p_{22} & \dots & \dots & p_{2n} \\ 0 & -1 & \dots & \dots & p_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & -1 & p_{nn} \end{pmatrix}. \quad (8)$$

Benzerlik bağıntısı

$$Z^{-1}AZ = -P$$

nin Z ile ön çarpanından, invers matrisden bağımsız şekil

$$[AZ + ZP = O], \quad (10)$$

bulunur ki bu doğrudan doğruya basit bir hesap kuralına çevrilebilir. A, Z ve P matrisleri

$$\begin{array}{c} \rightarrow \\ \boxed{A \mid Z} \\ \downarrow \\ \boxed{P} \end{array}$$

şeklinde düzenlenir ise denklem (10) ilk önce A nın i . ninci satırı ile Z nin k . ninci sütununun, daha sonra Z nin 1. ninci satırı ile P nin k . ninci sütununun skaler çarpımını öngörür; ancak her defasında toplam sıfır olmalıdır. Bu ise, A ve Z den oluşan üst toplam matrisi (A, Z) nin kısaca $A - Z$ matrisinin i . ninci satırı ile Z ve P den oluşan sağ toplam matris $\begin{pmatrix} Z \\ P \end{pmatrix}$ nin kısaca $Z - P$ matrisinin k . ninci sütununun çarpımıdır.

Bu şekilde sırası ile $A - Z$ matrisinin 1., 2., ... n . ninci satırı ile $Z - P$ matrisinin 1. inci sütununun, bundan sonra aynı matrisin 2. sütunun vs. çarpımı yapılır ise, n^2 adet denklemde daima yeni bir bilinmeyen eleman p_{ik} veya z_{ik} ortaya çıkar ve böylece P ve Z matrisleri, sırayla bulunurlar. Hesap işlemini dört sıralı A matrisi örneği ile açıklayalım; bunun için, kolayca görülebilecek ve A ve Z için σ_k ve τ_k sütun toplamaları kontrolleri dahil olmak üzere hesap şeması şöyle yazılır :

σ_1	σ_2	σ_3	σ_4	1	τ_2	τ_3	τ_4
a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	1	0	0	0
a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{24}	0	z_{22}	0	0
a_{31}	a_{32}	a_{33}	a_{34}	0	z_{32}	z_{33}	0
a_{41}	a_{42}	a_{43}	a_{44}	0	z_{42}	z_{43}	z_{44}
				p_{11}	p_{12}	p_{13}	p_{14}
				-1	p_{22}	p_{23}	p_{24}
				0	-1	p_{33}	p_{34}
				0	0	-1	p_{44}

Z-P matrisinin birinci sütunu, denklem (10) uyarınca sırası ile, **A-Z** matrisinin 1., 2., ..., n. ninci satırı ile çarpılır. Kontrol için ayrıca **A-Z** matrisinin σ_k, τ_k toplam satırı ile de çarpılır. Böylece aşağıdaki denklemler bulunur :

$$\begin{aligned}
 a_{11} + p_{11} &= 0 \rightarrow p_{11} \\
 a_{21} - z_{22} &= 0 \rightarrow z_{22} \\
 a_{31} - z_{32} &= 0 \rightarrow z_{32} \\
 a_{41} - z_{42} &= 0 \rightarrow z_{42} \\
 \sigma_1 + p_{11} - \tau_2 &= 0 \quad \text{Probe}
 \end{aligned}$$

P nin birinci ve **Z** nin ikinci sütunu böylece bulunduktan sonra aynı işlem **Z-P** matrisinin ikinci sütununa uygulanır :

$$\begin{aligned}
 a_{12} z_{22} + a_{13} z_{32} + a_{14} z_{42} + p_{12} &= 0 \rightarrow p_{12} \\
 a_{22} z_{22} + a_{23} z_{32} + a_{24} z_{42} + z_{22} p_{22} &= 0 \rightarrow p_{22} \\
 a_{32} z_{22} + a_{33} z_{32} + a_{34} z_{42} + z_{32} p_{22} - z_{33} &= 0 \rightarrow z_{33} \\
 a_{42} z_{22} + a_{43} z_{32} + a_{44} z_{42} + z_{42} p_{22} - z_{43} &= 0 \rightarrow z_{43} \\
 \sigma_2 z_{22} + \sigma_3 z_{32} + \sigma_4 z_{42} + p_{21} + \tau_2 p_{22} - \tau_3 &= 0 \quad \text{Probe}
 \end{aligned}$$

Buradan **P** nin ikinci ve **Z** nin üçüncü sütunu çıkar. **Z-P** matrisinin 3. ve 4. ncü sütununun, **A-Z** matrisinin dört satırı ve toplam satırı ile çarpılmasından **P** ve **Z** nin eksik olan sütunları elde edilir.

Genel olarak **A-Z** matrisinin, $i = 1, 2, \dots, n$ sırasında tüm satırlarının, **Z-P** matrisinin k. ncü sütunu ile skalar çarpımı yapılır. Bu esnada çarpımlar kendiliğinden, bilinen p_{ik} veya $z_{i, k+1}$ elemanından önce dururlar. Çarpım, p_{ik} nin hesabında, kullanılan i adet satırın negatif köşegen elemanı z_{ii} ye bölünür, $z_{i, k+1}$ in hesabında ise doğrudan doğruya yazılır. Skalar çarpımlar, zincirleme algoritmada olduğu gibi, hesap makinasında kısmi çarpımların otomatik olarak toplam çarpımı vermesi ile bulunurlar.

Aşağıdaki tam sayılı örneği ele alalım. Polinomun oluşturulması için **P** nin soluna eklenen üçgen matris **F**, 22.3 de açıklanacaktır.

$$\begin{array}{c|c|c}
 \begin{array}{cccc} 6 & 4 & 10 & -8 \\ 1 & -2 & 3 & -2 \\ 1 & 5 & -1 & -1 \\ 2 & 3 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & 6 & -3 \end{array} & \begin{array}{cccc} 1 & 5 & 3 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & -2 \end{array} & \begin{array}{c} A \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \\
 \hline
 \begin{array}{cccc} & & & 1 \\ & & 1 & -1 \\ & 1 & -2 & 1 \\ 1 & -6 & 12 & -6 \end{array} & \begin{array}{cccc} -1 & 0 & 1 & -4 \\ -1 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{array} & \begin{array}{c} F \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \\
 \hline
 p(\lambda): \begin{array}{cccc} 1 & -5 & 6 & 4 & -8 \end{array} & p(\lambda) = \lambda^4 - 5\lambda^3 + 6\lambda^2 + 4\lambda - 8 \\ & = (\lambda + 1)(\lambda - 2)^3 & P
 \end{array}$$

P nin k. ncü sütununa ait p_{ik} elemanlarının hesabında **Z** matrisinin z_{ii} köşegen elemanlarına bölünmelidir, $z_{ii} = 1$ nedeni ile bölünenin gerekli olmadığı p_{ik} hariç. Sayısal stabilitenin sağlanması için her x_k sütununda en büyük değerli z_{ik} elemanı "köşegen elemanı" olarak seçilir yani sağındaki tüm 2-elemanları sıfır yapılır. **Z** matrisinde böyle bir satır değişimine p_{ik} ların hesabında değiştirilmiş bir sıra karşılık gelir ki bu - çerçevelenerek belirtileri - z_{ik} "köşegen elemanları" nı esas alır ve **A, Z** nin sıfırlarının, hesap esnasındaki numaralanması sayılabilir, 22.3 ve 5 deki sayısal örneğe bakınız. Otomatik hesapda **A** matrisinin satırı aynı adlı sütun değişimi ve **Z** matrisinin satır değişimi yapılır.

Ancak hesap esnasında sütun bir Z sütunu sıfır yani $z_k = 0$ olur ise, ¹ bir önceki P sütununun $P_{k, k-1} = -1$ elemanı sıfır yapılabilir: $P_{k, k-1} = 0$, buna karşılık z_k vektörü keyfi ve z deki satır değişimi göz önüne alınarak, k . nıncı birim vektör e_k ya eşit seçilebilir. Yapılanların sonucunda, buna dayanan $p(\lambda)$ karakteristik polinomu $p_1(\lambda) p_2(\lambda)$ çarpımı şeklini alır ve böylece değerlendirilmesi kolaylaşır. Otomatik hesap için Hessenberg'in verdiği ve yine ayrılmaya dayanan fakat normal hesap yolu değişmeyen bir yol tavsiye edilir. $z_k = 0$ olur ise,

$$z_k = \varepsilon e_k$$

yazılır; burada ε , yapılan dönüşüm sonunda sıfıra eşitlenen sonsuz küçük bir parametredir. Aynı hal ikinci bir defa ortaya çıkar. Örneğin $z_1 = 0$ olur ise,

$$z_1 = \varepsilon^2 e_1$$

alınır, vs. Kayan virgüllü otomatik hesapta bu işlem genellikle kendiliğinden tamamlanır; şöyle ki: sıfır vektörü yaklaşık olarak bulunur ve kuvvetin azalması ile kendini belli eder. Kullanılan hane sayısı içinde z_k nın tam sıfır olması ve verilen ε örneğin $\varepsilon = 10^{-10}$ halinde, $j > k$ için

$z_{kk} = \varepsilon z_{k-1, k-1}$, $z_{jk} = 0$ alınır. Metod el ile hesap için, aşağıdaki paragrafın sonunda bir örnek ile açıklanacaktır.

23.3. Karakteristik Polinomun Kurulması.

Karakteristik polinom $p(\lambda) = \det (\lambda Z + P)$, $P + \lambda I$ nın ara bölge determinantlarının sırası ile, son sütununa göre seriye açılımı ile rekursif olarak bulunur. Böylece, $f_n(\lambda) = p(\lambda)$ olarak aşağıdaki $f_i(\lambda)$ polinomları elde edilir:

¹⁾ Bunun için ya A nın minimal polinomun $m(\lambda)$, $p(\lambda)$ ya oranla daha küçük dereceli olmak veya başlangıç vektörü, matrisin tüm özvektörlerinde bulunmamalıdır; bunun için § 14.2 de verilen Krylov-metodunun istisna hallerine bakınız. Ayrıca Hessenberg'in yukarıda verilen kitabına ve Unger'in Über direkte Verfahren zum Matrizeneigenwertproblem. Wiss. Z. T.H. Dresden Nr. 3, Willers - Heft (1952/53) e bakınız.

$$\begin{aligned} f_1(\lambda) &= p_{11} + \lambda \\ f_2(\lambda) &= p_{12} + (p_{22} + \lambda) f_1(\lambda) \\ f_3(\lambda) &= p_{13} + p_{23} f_1(\lambda) + (p_{33} + \lambda) f_2(\lambda) \\ &\dots \dots \dots \\ f_n(\lambda) &= p_{1n} + p_{2n} f_1(\lambda) + p_{3n} f_2(\lambda) + \dots + (p_{nn} + \lambda) f_{n-1}(\lambda) \end{aligned} \quad (14)$$

Bu işlem, şematik olarak skaler çarpımların bulunması ile uygulanabilir. Bu maksad ile

$$f_i(\lambda) = f_{i0} + f_{i1}\lambda + f_{i2}\lambda^2 + \dots + f_{i,i-1}\lambda^{i-1} + \lambda^i$$

polinomlarının f_{ik} katsayıları, aşağıdaki şemada ($n=4$) P nin sol yanında F üçgen matrisi şeklinde yerleştirilir:

1				1	p_{11}	p_{12}	p_{13}	p_{14}
S_1				f_{10}	(-1)	p_{22}	p_{23}	p_{24}
S_2			f_{21}	f_{20}	0	(-1)	p_{33}	p_{34}
S_3		f_{32}	f_{31}	f_{30}	0	0	(-1)	p_{44}
S_4	f_{43}	f_{42}	f_{41}	f_{40}	$= p(\lambda)$			

P nin i . nınci sütunun (p_{ji} elemanları) sırası ile skaler olarak, $F = (f_{ik})$ nın sütunları ile çarpılarak $f_i(\lambda)$ nın f_{ik} katsayıları bulunur; ayrıca, $k=0$ dışında sondan bir önceki $f_{i-1, k}$ elemanının sağ yanındaki $f_{i-1, k-1}$ eklenmelidir. ($p_{i1} + \lambda$ çarpımındaki λ teriminin göz önüne alınması). Burada P -matrisinin -1 alt köşegen elemanları parantez içine alınmalıdır. Örneğin

$$\begin{aligned} f_{30} &= p_{13} \cdot 1 + p_{23} f_{10} + p_{33} f_{20} \\ f_{31} &= p_{23} \cdot 1 + p_{33} f_{21} + f_{20} \\ f_{32} &= p_{33} \cdot 1 + f_{21} \end{aligned}$$

Bu hesap da toplamalar vasıtası ile kontrol edilebilir. f_{ik} ların satır toplam S_i için kolayca anlaşıldığı gibi,

$$S_i = p_{i1} \cdot 1 + p_{i2} S_1 + \dots + p_{ii} S_{i-1} + S_{i-1}$$

geçerlidir; örneğin

$$\begin{array}{ccccccc}
p_{11} + \lambda_i & p_{12} & p_{13} & \dots & p_{1, n-1} & p_{1n} & \\
-1 & p_2 + \lambda_i & p_{23} & \dots & p_{2, n-1} & p_{2n} & \\
& -1 & p_{33} + \lambda_i & \dots & p_{3, n-1} & p_{3n} & \\
& & \dots & \dots & \dots & \dots & \\
& & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 \cdot p_{nn} + \lambda_i \\
\hline
y_i & y_{1i} & y_{2i} & y_{3i} & \dots & y_{n-1, i} & 1
\end{array}$$

olan basamaklı y_i bir sistemdir. Bir çarpan ile belli özvektörün son bileşeni 1 e eşitlenir ise diğer $y_{n-1, i}, y_{n-2, i}, \dots, y_{2i}, y_{1i}$ bileşenleri sırası ile n. ninci, $n-1$. ci ... 3. ve 2. denklemlerden tek anlamlı olarak bulunur zira bu denklemler, -1 elemanları nedeni ile lineer bağımsızdır ve bunları, ilk $(n-1)$ sütundan oluşan determinantları sıfır olmaz. Birinci denklem, $\det(P + \lambda_i I) = 0$ nedeni ile, son $(n-1)$ denkleme lineer bağlıdır yani, kontrolde fayda olacak şekilde, kendiliğinden sağlanmaktadır. P nin y_i özvektöründen A nin x_i özvektörü

$$x_i = Z y_i \quad (13)$$

dönüşümü ile bulunur.

P matrisi, ana köşegenin altındaki -1 elemanları ile belirlenen yapıda oldukça, çok katlı da olabilecek belirli bir λ_i özdeğeri için tek bir lineer bağımsız özvektör vardır. Çok katlı bir özdeğer için birden fazla özvektörün var olması istenir ise P matrisi -1 elemanlarının bir veya birkaç tanesi sıfır olacak şekilde değişmelidir. Bu durumda metod genel halden ayrılır.

22.5. Hessenberg-Metodunun Başka Şekli Otomatik Hesaplama.

Yarı üçgen matrisin yan köşegen elemanları yerine, otomatik hesaplama için faydalı olacak şekilde, dönüşüm matrisinin köşegen elemanları da 1 e eşitlenebilir. Yeni matrisleri

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & t_{22} & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & t_{n2} & t_{n3} & \dots & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & \dots & b_{1n} \\ b_2 & b_{22} & \dots & \dots & b_{2n} \\ 0 & b_3 & \dots & \dots & b_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & b_n & b_{nn} \end{pmatrix} \quad (14)$$

ile gösterelim ve dönüşüm için yine

$$T^{-1}AT = B \quad (15)$$

yazalım. Eski ve yeni matrisler arasında şu bağıntılar vardır.

$$Z = TD, \quad (16)$$

$$-P = D^{-1}BD \quad (17)$$

buradaki köşegen matrisi D nin elemanları,

$$D = \begin{pmatrix} 1 & & & & 0 \\ & b_2 & & & \\ & & b_2 b_3 & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & b_2 b_3 \dots b_n \end{pmatrix} \quad (18)$$

uyarınca, B nin $b_{i, i-1} = b_i$ alt köşegen elemanlarının çarpımlardan bulunur. B dan P ye geçiş (17), dönüşüm matrisi T den bağımsızdır. Dolayısı ile Givens-Householder metodlarında, P den hareketle 22.3 de verilen şekilde $p(\lambda)$ polinomunun rekursif olarak bulunması için uygulanabilir. Bu esnada, invers matris, D^{-1} e rağmen, B ve P nin yarı üçgen şekli nedeni ile, (17) de bölme ortaya çıkmaz. B matrisi örneğin $n = 4$ için aşağıdaki şemayı veren çarpanlar ile eleman şeklinde çarpılır.

$$\begin{pmatrix} 1 & b_2 & b_2 b_3 & b_2 b_3 b_4 \\ : b_2 & 1 & b_3 & b_3 b_4 \\ : b_3 & 1 & b_4 & \\ : b_4 & & 1 & \end{pmatrix}$$

Alt köşegen elemanlarının 1 e eşitlenmesi sureti ile, bunlarda bulunur: b_i çarpanlarına pratik de ihtiyaç kalmaz.

T matrisi, $(n-2)$ adet T_k elemanter dönüşüm matrisinin çarpımı olarak bulunabilir:

$$T = T_2 T_3 \dots T_{n-1}, \quad (19)$$

burada tek T_k , birim matrisden yalnız, T nin k. ninci sütununa eşit olan k sütununda ayrılır. Invers matris T_k^{-1} ise T_k ile aynı yapıdadır ancak $i > k$ için dönüşüm elemanları negatiftir: $-t_{ik} = -t_i$ Örneğin $n = 5$ ve $k = 2$ için

$$T_2 = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ t_3 & & 1 & \\ & t_4 & & 1 \\ t_5 & & & 1 \end{pmatrix}, \quad T_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ -t_3 & & 1 & \\ -t_4 & & & 1 \\ -t_5 & & & & 1 \end{pmatrix}.$$

Bu elemanter dönüşümler yardımı ile Wilkinson¹, metodu adım adım uygulanır, burada her adım iki kısımlıdır. A nın ilk $(k-1)$ adet sütununda, yan köşegenin altındaki elemanlar daha önceden sıfıra eşitlenmiş olsun. Bu durumda k . nıncı adım, $i > k+2$ için k . nıncı sütundaki a_{ik} elemanlarının bir yok etme işlemi ile sıfır yapılması ile başlar; bu işlem bir satır kombinasyonu olup

$$A := T_{k+1}^{-1} A \quad (20)$$

veya, ayrıntılı olarak

$$a_{ij} := a_{ij} - t_i a_{k+1,j} \quad (20a)$$

($j = k, k+1, \dots, n$; $i = k+2, \dots, n$) şeklinde yazılır. $a_{ik} := 0$ hipotezinden t_i yok etme çarpanları,

$$t_i = a_{ik}/a_{k+1,k} \quad (21)$$

olarak bulunur. İkinci adım için yok etme işlemi,

$$A := A T_{k+1} \quad (22)$$

uyarınca benzerlik dönüşümüne tamamlanır; burada $(k+1)$ sütunu, $i = k+2, \dots, n$ için,

$$a_{i,k+1} := a_{i,k+1} + a_{i,k+2} t_{k+2} + \dots + a_{i,n} t_n \quad (22a)$$

şekline girer ve bu aşağıdaki şekilde de yazılabilir:

$$a_{i,k+1} := a_{i,k+1} + a_{i,j} t_j \quad (j = k+2, \dots, n). \quad (22b)$$

¹⁾ Wilkinson, J. H.: Stability of the reduction of a matrix to almost triangular and triangular forms by elementary similitary transformations. J. Assoc. Comp. Machin. Bd. 6 (1959), s. 336-359.

Yuvarlatma hatalarının sönümü için, yoketme işleminden önce, $i = k+1, \dots, n$ deki a_{ik} elemanlarının en büyüğü satır değişimi ile, alt köşegen elemanı $a_{k+1,k}$ olarak seçilir. Bundan sonraki aynı adlı sütun değişimi, bunu yine benzerlik dönüşümüne tamamlar. Böylece her $(t_i) \leq 1$ olur.

$k = (n-2)$ inci adım sonunda A, B şeklini almış olur. $p(\lambda)$ polinomunun daha kolay hesabı için B, P ye dönüştürülür ve bu yine A ile gösterilir yeni hesap otomatında A nın noktalarında toplanır. Ancak A nın sıfır elemanı noktalarında f_{ik} polinom katsayıları toplanabilir ve bunlar $f_{ik} = a_{i+1,k}$ ile gösterilir ve bu durumda A matrisine bir 0 sütunu ve bir $(n+1)$ satırı eklenmiş olur. Böylece son polinom katsayıları, basılan $a_k = f_{nk} = a_{n+1,k}$ olur. İşlem aşağıdaki Algol-programı ile realize edilecektir.

begin comment Verfahren von Hessenberg, Berechnung der Polynomkoeffizienten;

```
integer n; lies(n);
begin array a[1:n+1, 0:n], t[3:n];
real x, y; integer i, j, k, s;
lies(a);
for i := 1 step 1 until n + 1 do a[i,0] := 0;
for k := 1 step 1 until n do a[n+1,k] := 0;

A 1: for k := 1 step 1 until n - 2 do begin
A 2: x := 0;
for j := k + 1 step 1 until n do begin if x < abs(a[j,k]) then begin
x := abs(a[j,k]); s = j end then, Auswahl größtes Element
end j;
for j := k step 1 until n do begin
y := a[k+1,j]; a[k+1,j] := a[s,j]; a[s,j] := y end Zeilentausch;
for j := 1 step 1 until n do begin
y := a[j,k+1]; a[j,k+1] := a[j,s]; a[j,s] := y end Spaltentausch;
if a[k+1,k] = 0 then goto A 5;

A 3: Elimination der Spalte k:
for i := k + 2 step 1 until n do begin t[i] := a[i,k]/a[k+1,k]; a[i,k] := 0;
for j := k + 1 step 1 until n do a[i,j] := a[i,j] - t[i] * a[k+1,j]
end i Elimination;
```

A 4: Ergänzen zur Ähnlichkeitstransformation:

```
for i := 1 step 1 until n do begin
  for j := k + 2 step 1 until n do  $a_{i,k+1} := a_{i,k+1} + a_{ij} * t_j$ 
end i Transformation;
```

A 5: end k Gesamttransformation;

B: Umrechnung auf Subdiagonalen 1:

```
for k := 2 step 1 until n do begin
  for j := k step 1 until n do begin
    for i := 1 step 1 until k - 1 do  $a_{ij} := a_{ij} * a_{k,k-1}$ 
    end j;
     $a_{k,k-1} := 1$  end k;
```

C: Aufbau der Polynomkoeffizienten:

```
 $a_{10} := 1; a_{n+1,n} := 1;$ 
for i := 2 step 1 until n + 1 do begin
  for j := 1 step 1 until i - 1 do  $a_{i0} := a_{i0} - a_{i,j-1} * a_{j0}$ 
  end j Berechnen von  $a_{i0} = a_{n+1,0}$ ;
  Drucke ( $a_{n+1,0}$ );
  for k := 1 step 1 until n - 1 do begin
    for i := k + 2 step 1 until n + 1 do begin  $a_{ik} := a_{i-1,k-1}$ ;
    for j := k + 1 step 1 until i - 1 do
       $a_{ik} := a_{ik} - a_{j,i-1} * a_{jk}$  end i Berechnen von  $a_k$ ;
    Drucke ( $a_{n+1,k}$ )
  end k; Drucke ( $a_{n+1,n}$ )
```

end

end

22.6. Givens Methode.

Givens¹ de, Jacobi-metodunun düzlemsel dönmeleri esas alınarak o şekilde değiştirilir ki A matrisi Jacobi tipinde, sonlu sayıda elemanter dönüşüm ile, yarı üçgen şekline, simetrik halde ise simetrik tridagonal şekline dönüşür. Bu, k, i nin solundaki $a_{k,i-1}$ elemanının sıfır yapılması ile mümkün olur. Elemanter dönüşümlerdeki indis çiftleri

$$\left. \begin{array}{l} 2,3 \quad 2,4 \quad \dots \quad 2,n \\ 3,4 \quad \dots \quad 3,n \\ \dots \dots \dots \\ n-1,n \end{array} \right\}, \quad (23)$$

¹ Givens, J. W.: Numerical computation of the characteristic values of a real symmetric matrix. Oak Ridge National Laboratory, ORNL-1574. 1954.

sırasını takip ederler ise bir defa bulunmuş olan sıfır elemanları - Jacobi metodunun aksine - ortadan kalkmazlar ve $1/2(n-1)(n-2)$ adım ile hedefe ulaşılmış olur. § 21.8 de olduğu gibi, elemanter dönüşüm esas kısmı olarak, $c = \cos \varphi$, $s = \sin \varphi$ kısaltmaları halinde, alt matris

$$\begin{pmatrix} c & s \\ s & -c \end{pmatrix} \quad (24)$$

seçilir ise,

$$b_{k,i-1} = s a_{i,i-1} - c a_{k,i-1} = 0$$

den dönme acısı için

$$t = \tan \varphi = \frac{a_{k,i-1}}{a_{i,i-1}}, \quad (25)$$

buradan da

$$c = \frac{1}{r}, \quad s = t \cdot c, \quad r = \sqrt{1+t^2} \quad \text{olarak} \quad (26)$$

hesaplanır; burada $r = \sqrt{1+t^2}$ dir. (25) deki paydanın değeri, paydan küçük olur ise, cotg'a geçilir. Bu ve kolayca çıkarılabilecek diğer dönüşüm formülleri aşağıda, simetrik olmayan A matrisi hali için ALGOL-programı şeklinde verilmiş olup bu, birinci program kısmında değişmek üzere, bir sayfa önce bulunan Hessenberg-programının $A_1 - A_5$ kısmı yerine konulmuş sayılabilir. B ve C kısımları değişmeden alınabilir.

Yarı üçgen şekline Givens-dönüşümü

```
A 1: for i := 2 step 1 until n - 1 do begin
  for k := i + 1 step 1 until n do begin
    if  $a_{k,i-1} = 0$  then goto A 3;
    if  $\text{abs}(a_{i,i-1}) \geq \text{abs}(a_{k,i-1})$  then begin
       $t := a_{k,i-1}/a_{i,i-1}; r := \text{sqrt}(1+t*t); c := 1/r; s := t*c$ 
    end then
    else begin
       $t := a_{i,i-1}/a_{k,i-1}; r := \text{sqrt}(1+t*t);$ 
      if  $t \geq 0$  then  $s := 1/r$  else  $s := -1/r; c := t*s$ 
    end else, Berechnung von c und s;
```

```
A 2:  $a_{i,i-1} := c * a_{i,i-1} + s * a_{k,i-1}; a_{k,i-1} := 0;$ 
  for j := i step 1 until n do begin
```

```

x := c * aij + s * akj; akj := s * aij - c * akj; aij := x
end j Zeilentransformation;
for j := 1 step 1 until n do begin
  x := c * aji + s * ajk; ajk := s * aji - c * ajk; aji := x
end j Spaltentransformation

```

```

A 3; end k
end i Gesamttransformation.

```

22.7. Householder Metodu.

Householder^{1,2}, Givens metodunu o şekilde değiştirmiştir ki,

$$\mathbf{A} := \mathbf{V}'_k \mathbf{A} \mathbf{V}_k \quad (27)$$

ile gösterilecek tek ortogonal dönüşümde, k. nıncı sütunda ve yan köşegenin altındaki a_{ik} ($i > k + 1$) elemanlarının tümü bir defalık sıfır olur. Böylece makinalarda hem işlemden ve hemde toplama noktalarından tasarruf yapılır.

Bu,

$$\mathbf{V}_k = \mathbf{I} - 2 \mathbf{v}_k \mathbf{v}'_k \quad (28)$$

şeklinde * bir dönüşüm matrisi ile

$$\mathbf{v}'_k \mathbf{v}_k = 1$$

e normlaştırılmış ve, ilk k elemanları sıfır olan $\mathbf{v}_k$ vektörleri ile yapılır :

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ * \\ * \\ \vdots \\ * \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ * \\ \vdots \\ * \end{pmatrix}, \dots, \mathbf{v}_{n-2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ * \\ * \end{pmatrix}.$$

- ¹⁾ Householder, A. S., u. F. L. Bauer : On certain methods for expanding the characteristic polynomial. Numer. Math. Bd. 1 (1959), s. 29 - 37.
- ²⁾ Wilkinson, J. H. : Householder's method for the solution of the algebraic eigenproblem. Comp. Journ. Bd. 3 (1960), s. 23 - 27.
- * Jacobi ve Givens elemanter dönüşümleri de bu şekilde, i. nıncı veya k. nıncı bileşeni - $\sin \varphi/2$ veya $\cos \varphi/2$ ve diğer bileşenleri sıfır olan $\mathbf{v}_i$ vektörleri cinsinden yazılabilir.

Böylece $\mathbf{v}_k$ dönüşüm matrislerinin ilk k adet satır ve sütunu, birim matrisin satır ve sütunları olur. Bunlar ortogonal ve aynı zamanda simetrikdir, $\mathbf{V}'_k = \mathbf{V}_k$. Bunların yardımı ile $\mathbf{A}$ nın $\mathbf{B}$ ye dönüşümü aşağıdaki gibi adım adım yapılır :

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{A}_1 &= \mathbf{V}_1 \mathbf{A} \mathbf{V}_1 \\ \mathbf{A}_2 &= \mathbf{V}_2 \mathbf{A}_1 \mathbf{V}_2 \\ &\dots \dots \dots \\ \mathbf{B} &= \mathbf{A}_{n-2} = \mathbf{V}_{n-2} \mathbf{A}_{n-3} \mathbf{V}_{n-2} = \mathbf{V}' \mathbf{A} \mathbf{V} \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

burada

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}_1 \mathbf{V}_2 \dots \mathbf{V}_{n-2}. \quad (30)$$

toplam dönüşüm matrisidir. Makinada hesap, her kısmi dönüşümde değişen a_{ik} elemanlarının üst üste yazılması sureti ile olur. Sıfır olan elemanlardan boşalan yerler, özvektörlerin ek hesabında, kullanılacak olan $\mathbf{v}_i$ bileşenlerinin - hiç olmazsa kısmen - alınmasına yarar.

Her kısmi dönüşüm hemen hemen aynıdır. Yani $\mathbf{V}_i$ veya, basitlik için $\mathbf{v}$ ile gösterilecek $\mathbf{v}_1$, halinde ilk adımın incelenmesi yeterlidir :

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

Keyfi bir matrisin $\mathbf{V}_1$ ile sağdan çarpımında, $\mathbf{V}_1$ in yapısı nedeni ile bu matrisin birinci sütunu değişmez. Yani $\mathbf{A}_1 = \mathbf{V}_1 \mathbf{A} \mathbf{V}_1$ in birinci sütununda sıfırlar olması isteniyor ise, bu durum $\mathbf{V}_1 \mathbf{A}$ da bahis konusu olmalıdır. Bu hipotezdir¹ $\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}$ vektörünün $\mathbf{v}_i$ bileşenleri

$$v_2^2 = \frac{1}{2} \left(1 \pm \frac{a_{21}}{S_1} \right) \quad (31)$$

$$v_i = \pm \frac{a_{i1}}{2v_2 S_1} \quad i = 3, 4, \dots, n \quad (32)$$

olarak bulunur ve bunların karelerinin toplamı

$$S_1^2 = a_{21}^2 + a_{31}^2 + \dots + a_{n1}^2 \quad (33)$$

olur.

¹⁾ Ayrıntılar için Wilkinson'un son verilen çalışmasına bakınız.

(32) denklemi, pozitif alınan v_2 ye bölündüğünden, hesabın sayısal olarak mümkün stabil değişimi bakımından, iki özdeğerinin büyüğü alınır. Yani (31), (32) denklemlerinde, pozitif a_{21} için, + işareti, aksi halde - işareti kabul edilir :

$$v_2^2 = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{|a_{21}|}{S_1} \right), \quad (31a)$$

$$v_i = \frac{a_{i1} \operatorname{sgn} a_{21}}{2 v_2 S_1}. \quad (32a)$$

Böylece A_1 in birinci sütunu, B nin birinci satırının son şeklini almıştır ve sıfır yapılmamış iki eleman

$$b_1 = a_{11}, b_{21} = -S_1 \operatorname{sgn} a_{21} \quad (34)$$

olur. İkinci adımda, (31) - (33) denklemlerindeki tüm indisler bir yükseltilmelidir. vs.

V_1 e ait (28) denklemi ile $A_1 = V_1 A V_1$, $p_i q$ gibi iki yardımcı vektör ve K skaler çarpımı kullanılarak, $v_i = v$ vektörü cinsinden yazılabilir. Genel, simetrik olmayan, reel A matrisi hali için kolayca

$$A_1 = A - 2 q v' - 2 v q^* \quad (35)$$

elde edilir; ve bu bileşen cinsinden

$$a_{ik}^{(1)} = a_{ik} - 2 q_i v_k - 2 v_i q_k^* \quad (35a)$$

olarak yazılabilir, burada

$$p = A v, \quad p^* = A' v \quad (36)$$

$$q = p - K v, q^* = p^* - K v \quad (37)$$

$$K = v' A v = v' p = v' p^* \quad (38)$$

dir. Simetrik matris $A = A'$ halinde p ve p^* yani q ve q^* vektörleri çakışır. Ayrıca B tridiagonal olur.

Karakteristik polinom $p(\lambda)$ nin rekursif olarak bulunması için ya (17), (18) dönüşümü yardımı ile 1 alt köşegen elemanlı P şekline geçer. 22.5 e bakınız. Veya B matrisinden.

$$\left. \begin{aligned} c_{11} &= b_{11} & c_{12} &= -b_{12} b_{21} & c_{13} &= b_{13} b_{32} b_{21} & c_{14} &= -b_{14} b_{43} b_{32} b_{21} \dots \\ & & c_{22} &= b_{22} & c_{23} &= -b_{23} b_{32} & c_{24} &= b_{24} b_{43} b_{32} \dots \\ & & & & c_{33} &= b_{33} & c_{34} &= -b_{34} b_{43} \dots \\ & & & & & & c_{44} &= b_{44} \dots \end{aligned} \right\} \quad (39)$$

uyarınca, yeni c_{ik} ara katsayıları veya $c_{ii} = b_{ii}$ den hareketle,

$$c_{i, k+1} = -c_{ik} b_{i, k+1} b_{k+1, k} : b_{i, k} \quad (40)$$

bulunur. Bunların yardımı ile $f_i(\lambda)$ polinomlarının f_{ik} katsayıları, Hessenberg-metodunda olduğu gibi elde edilebilir; bunun için yalnız işaret değişimi göz önüne alınır :

$$\left. \begin{aligned} f_1(\lambda) &= c_{11} - \lambda \\ f_2(\lambda) &= c_{12} + (c_{22} - \lambda) f_1(\lambda) \\ f_3(\lambda) &= c_{13} + c_{23} f_1(\lambda) + (c_{33} - \lambda) f_2(\lambda) \\ f_4(\lambda) &= c_{14} + c_{24} f_1(\lambda) + c_{34} f_2(\lambda) + (c_{44} - \lambda) f_3(\lambda) \\ &\dots \end{aligned} \right\} \quad (41)$$

Simetrik matris halinde hesap önemli ölçüde sadeleşir :

$$\left. \begin{aligned} f_1(\lambda) &= b_{11} - \lambda \\ f_2(\lambda) &= -b_{12}^2 + (b_{22} - \lambda) f_1(\lambda) \\ f_3(\lambda) &= -b_{23}^2 f_1(\lambda) + (b_{33} - \lambda) f_2(\lambda) \\ f_4(\lambda) &= -b_{34}^2 f_2(\lambda) + (b_{44} - \lambda) f_3(\lambda) \\ &\dots \end{aligned} \right\} \quad (41a)$$

Yani dönüşüm katsayılarından oluşan $C = (c_{ik})$ matrisi burada

$$C = \begin{pmatrix} b_{11} & -b_{12}^2 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & b_{22} & -b_{23}^2 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & b_{33} & -b_{34}^2 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \quad (40a)$$

şeklindedir.

$$\left. \begin{aligned} a_{11}x_1 &= a_1 & -a_{12}x_2 - a_{13}x_3 - a_{14}x_4 - \dots \\ a_{22}x_2 &= a_2 - a_{21}x_1 & -a_{23}x_3 - a_{24}x_4 - \dots \\ a_{33}x_3 &= a_3 - a_{31}x_1 - a_{32}x_2 & -a_{34}x_4 - \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Büyük değerli a_{ii} asal köşegen elemanları halinde, sağdaki $a_{ik}x_k$ ($i \neq k$) terimleri, "izafi" küçük düzeltmeler sayılabilir ve bilinmeyenler için ilk yaklaşım x_i^1 ,

$$\left. \begin{aligned} a_{11}x_1^1 &= a_1 \\ a_{22}x_2^1 &= a_2 - a_{21}x_1^1 \\ a_{33}x_3^1 &= a_3 - a_{31}x_1^1 - a_{32}x_2^1 \\ \dots & \dots \end{aligned} \right\} \quad (3a)$$

den bulunur. Tüm x_i^1 ler bulunduktan sonra düzeltilmiş değer cümlesi x_i^2 ,

$$\left. \begin{aligned} a_{11}x_1^2 &= a_1 & -a_{12}x_2^1 - a_{13}x_3^1 - a_{14}x_4^1 - \dots \\ a_{22}x_2^2 &= a_2 - a_{21}x_1^2 & -a_{23}x_3^1 - a_{24}x_4^1 - \dots \\ a_{33}x_3^2 &= a_3 - a_{31}x_1^2 - a_{32}x_2^2 & -a_{34}x_4^1 - \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{aligned} \right\} \quad (3b)$$

den elde edilir. Genel iterasyon kuralı

veya kısaca

$$\left. \begin{aligned} a_{11}x_1^{v+1} &= a_1 & -a_{12}x_2^v - a_{13}x_3^v - a_{14}x_4^v - \dots \\ a_{22}x_2^{v+1} &= a_2 - a_{21}x_1^{v+1} & -a_{23}x_3^v - a_{24}x_4^v - \dots \\ a_{33}x_3^{v+1} &= a_3 - a_{31}x_1^{v+1} - a_{32}x_2^{v+1} & -a_{34}x_4^v - \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

$$A_1 x^{v+1} = a - A_2 x^v, \quad (3')$$

olup burada A matrisi, a_{ii} köşegen elemanlarını kapsayan A_1 alt üçgen matrisine ve asal köşegen üzerindeki elemanları kapsayan A_2 ye, $A = A_1 + A_2$ şeklinde ayrılmıştır.

Birinci denklemden başlamak ve verilen sırada devam etmek üzere her denklemden bilinmeyenler için en yeni değerler yani, bilinmesi halinde, yeni ($v+1$) iterasyon adımına ait değerler, - halde v adımına ait olanlar kullanılır. Bu "Gauss-Seidel" işlemine, sağda yalnız bir önceki basamağın x_i^v yaklaşımlarının yani $A_1 = \text{Diag}(a_{ii})$ nin alındığı (daha az avantajlı) "topdan" iterasyona karşılık, "adım adım iterasyon" denir. Başlangıç yaklaşımı olarak burada $x^0 = 0$ seçilmiştir; bunun yerine herhangi bir değer cümlesi özellikle, bilinmesi halinde, bir yaklaşım da kullanılabilir.

Pratik hesap ve düzenlenmesi çok basittir; aşağıdaki şemaya bakınız. Köşegen elemanlarının çevrelenerek belirtildiği ve sağ tarafları da kapsayan katsayıları şemasında v iterasyon adımlarının x_i^v yaklaşık değer sıraları ortaya çıkar. x_i^{v+1} değeri, x_i nin üzerindeki a_{ii} köşegen elemanına ait i . ninci denklemden bulunur. Sağ taraflar ters işaretli $-a_i$ olarak yazılır ve böylece skalar çarpım halinde 1 çarpanına sahip olurlar. a_{ii} x_i dışında $a_{ik}x_k$ ların skaler çarpımı yazılır; burada $k < i$ (x_i nin solu) için yeni satırın x_k^{v+1} değerleri, $k > i$ (x_i nin sağ) için eski satırın x_k^v değerleri alınır. Bundan sonra a_{ii} köşegen elemanına bölünür ve işareti değiştirilir. Hesap makinası yardımı ile çarpım yazılması, tek çarpımların toplam değerinde otomatik toplanması ve sonra a_{ii} ye bölme ile yapılır.

Gauss-Seidel iterasyonuna ait hesap şeması :

	a_{ik}	$-a_i$
	$\odot$	.
	. $\odot$	.
	. . $\odot$	.
	. . . $\odot$	.
	 $\odot$	.
$v = 1$		1
2		1
3	. . . $\odot$	

ÖRNEK :

$$\begin{aligned} 24x_1 - 2x_2 + 2x_3 + x_4 &= 54 \\ -x_1 + 21x_2 + 2x_3 - x_4 &= -61 \\ x_1 + 2x_2 + 28x_3 - 2x_4 &= 28 \\ x_2 - 2x_3 + 20x_4 &= -45 \end{aligned}$$

SEIDEL iterasyonunda sayısal hesabı aşağıdaki şemaya göre yapılır :

x_1	x_2	x_3	x_4	$-a_i$
24	-2	2	1	-54
-1	21	2	-1	61
1	2	28	-2	-28
0	1	-2	20	45
2,250	-2,797 6	1,119 5	-1,998 2	1
2,006 83	-3,010 97	1,000 67	-1,999 38	1
1,999 004	-3,000 082	1,000 086	-1,999 987	1
1,999 985	-3,000 008	1,000 002	-1,999 999	1
1,999 999	-3,000 000	1,000 000	-2,000 000	1
2,000 000	-3,000 000	1,000 000	-2,000 000	1

Büyük köşegen elemanları nedeni ile yakınsaklık yeterlidir. Çok basit hesap kurallarından dolayı metod, hesap makinalarının uygulanmasına da imkan verir Yakınsaklık problemi bir sonraki paragrafda tekrar ele alınacaktır.

23.2. Yok etme sureti ile İterasyon.

Burada köşegen elemanları dışında, bunlara komşu $a_{i, i \pm 1}$ katsayıları da, bunlar ile karşılaştırılabilir mertebededir; buna karşılık köşegenden daha uzak olan a_{ik} elemanları yeterli ölçüde geri giderler yani sonuca çok az etki ederler. Bu halde iterasyon ve yok etme işleminin kombinasyonu tavsiye edilir.¹ Yok etme işlemi ile önce yalnız köşegenin altındaki $a_{i, i-1}$ elemanları sıfır yapılır; burada, c_{ik} yok etme katsayılarından oluşan C matrisi, $c_{ii} = 1$ köşegenine komşu $c_{i, i-1}$ elemanlarının yalnız bir sırasını gösterdiğinden yok etme işlemi çok basittir. Örneğin beş sıralı olan toplam matris A :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{pmatrix} \quad (4)$$

1) Benzer, özellikle hesap makinaları için uygun bir metodu S. Falk vermiştir : Eine Variante zur Gauss-Seidelschen Iteration. Elektron. Datenverarbeitung 1963, s. 230 - 234.

nin yalnız, merdiven hattının üstündeki A_1 kısmına yok etme işlemi uygulanır; böylece $A_1, B_1 = (b_{ik})$ üst üçgen matrisine dönüşür; buna karşılık zayıf a_{ik} katsayılı, altıda kalan A_2 kısmı ilk önce belirsiz kalır. İterasyon kuralı olarak

$$A_1 x^{v+1} = a - A_2 x^v = a^v, \quad (5)$$

kullanılır; burada a^v sağ tarafları x^v yaklaşımı ile bellidir. Şimdi A_1 i B_1 üst üçgen matrisine dönüştüren yok etme işlemi (üçgenlere - ayırma)

$$A_1 = C_1 B_1 \quad (6)$$

uygulanır ise,

$$a^v = C_1 b^v. \quad (7)$$

uyarınca a^v sağ tarafları b^v şeklini alır. Bu durumda, b^v sağ tarafı her defasında $a^v = a - A_2 x^v$ den - çok basit yok etme işlemi ile bulunan, basamaklı denklem sistemi

$$B_1 x^{v+1} = b^v, \quad (8)$$

nin çözülmesi gereklidir. x_i^{v+1} bilinmeyenleri, (8) sisteminden aşağıdan yukarıya çıkarak hesaplanır (yeni Seidel-İterasyondaki gibi yukarıdan aşağıya değil). Burada da adım adım bir iterasyon bahis konusu olup basamaklı sistemde yeni $(v+1)$ basamağının bilinen x_i^{v+1} değerleri kullanılır.

Pratik hesap için aşağıdaki kural uyarınca z^v düzeltmeleri ilk daha rahat çalışılır.

Yok etme işleminden önce

$$\begin{aligned} A_1 x^0 &= a \\ A_1 z^1 &= -A_2 x^0 = -a^0 \\ A_1 z^2 &= -A_2 z^1 = -a^1 \\ A_1 z^3 &= -A_2 z^2 = -a^2 \\ &\dots \end{aligned}$$

Yok etme işleminden sonra

$$\begin{aligned} B_1 x^0 &= b \rightarrow x^0 \\ B_1 z^1 &= -b^0 \rightarrow z^1 \\ B_1 z^2 &= -b^1 \rightarrow z^2 \\ B_1 z^3 &= -b^2 \rightarrow z^3 \\ &\dots \end{aligned}$$

(9)

Böylece x çözümü,

$$x = x^0 + z^1 + z^2 + \dots, \quad (10)$$

şeklinde bulunur; burada z^v düzeltmeleri, verilen hane sayısı gerçeğinde tamamen sıfır oluncaya kadar, gittikçe küçülür hesap biter.

$n = 5$ için ve $v = 2$ ye kadar, kontroller dahil tam hesap şeması aşağıdaki gibidir :

σ_1	σ_2	σ_3	σ_4	σ_5	$-\sigma$	a_i^0	a_i^1
σ_1''	σ_2''	σ_3''	—	—	—	σ^0	σ^1
σ_1'	σ_2'	σ_3'	σ_4'	σ_5'	$-\sigma'$	—	—
a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	a_{15}	$-a_1$	0	0
a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{24}	a_{25}	$-a_2$	0	0
a_{31}	a_{32}	a_{33}	a_{34}	a_{35}	$-a_3$	a_3^0	a_3^1
a_{41}	a_{42}	a_{43}	a_{44}	a_{45}	$-a_4$	a_4^0	a_4^1
a_{51}	a_{52}	a_{53}	a_{54}	a_{55}	$-a_5$	a_5^0	a_5^1
b_{11}	b_{12}	b_{13}	b_{14}	b_{15}	$-b_1$	0	0
$-c_{21}$	b_{22}	b_{23}	b_{24}	b_{25}	$-b_2$	0	0
0	$-c_{32}$	b_{33}	b_{34}	b_{35}	$-b_3$	b_3^0	b_3^1
0	0	$-c_{43}$	b_{44}	b_{45}	$-b_4$	b_4^0	b_4^1
0	0	0	$-c_{54}$	b_{55}	$-b_5$	b_5^0	b_5^1
$-\tau_1$	$-\tau_2$	$-\tau_3$	$-\tau_4$	-1	0	0	0
x_1^0	x_2^0	x_3^0	x_4^0	x_5^0	1	0	
z_1^1	z_2^1	z_3^1	z_4^1	z_5^1		1	0
z_1^2	z_2^2	z_3^2	z_4^2	z_5^2			1
x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	1	0	

satır toplamı σ_k' , A_1 kısmi matrisine dayanır ve yok etme işlemini kontrol eder. σ_k'' satırı A_2 ye dayanır ve a_i' ve b_i' sütunlarını kontrol eder. x_i^0 ve z_i^v nin son kontrolü yine σ_k' ile yapılır. x_i lerin son kontrolü ise, $A(\sigma_k = \sigma_k' + \sigma_k'')$ matrisinin σ_k toplamı ile yapılır.

Metod, az veya çok küçük olmalarına göre çok veya az a_{ik} elemanlarının A_1 ana matrisine eklenmesi sureti ile değiştirilmelidir; böylece bunlar düzeltmeler veya yok edilecek elemanlar olarak ele alınır; aşağıya bakınız.

ÖRNEK : E. Bodewing [2], sayfa 131 de, yok etme işlemi suretiyle, iterasyon uygulanması için karakteristik olan ve orada, adi iterasyon ile incelenen aşağıdaki sayısal örneği vermiştir :

Sağ tarafları ile birlikde matris :

15,032 874	0,291 456	-1,754 343	0,032 160	5,067 107
0,034 376	-8,852 656	-0,817 307	1,267 660	7,755 243
0,198 822	3,893 840	-22,225 977	0,341 238	49,588 894
0,079 720	-0,986 150	-0,016 570	-5,313 570	5,283 290

2. ve 3. satır ve sütunun değiştirilmesi ile, orta büyüklükteki rahatsız edici elemanlar asal köşegene yaklaşırlar ve böylece işlem başarı sağlar. Hesap, Tablo 23.1 deki gibi yapılır. Düzeltmelerin kuvvetle geri gittiği farkedilir. Üç adımdan sonra çözümler virgülden sonra 7 nci haneye kadar doğrudur; buna karşılık adi Seidel iterasyonunda 5 adımdan sonra ancak 5, toplam iterasyonda ise 6 adım sonra ancak 4-5 ondalık kadar doğru olur. - Düzeltmeler ile çalışıldığından, birinci yaklaşım x^0 in bile istenen tam hane sayısı ile hesaplanması temin edilmelidir.

23.3. Yalınsaklık ve Hata Tahmini.

23.1 ve 23.2 de verilen iki iterasyon metodu - ve diğerleri - aynı iterasyon kuralı ile özetlenebilir. İlk önce denklemlerden herbiri, a_{ii} köşegen elemanına bölünür ve iterasyon kuralı

$$x^{v+1} = -A_1 x^{v+1} - A_2 x^v + a \quad (11)$$

şeklinde azalır. Adım adım "Seidel" iterasyonu halinde, 1 köşegen elemanına göre A_1 ve A_2 , köşegenin altında ve üstünde bulunan üçgen matrislerdir. İki matris

$$A_0 = A_1 + A_2, \quad (12)$$

olarak yazılır ve böylece $a_{ii} = 1$ e getirilmiş toplam matris $I + A_0$ olur. 23.2 uyarınca yok etme işlemi ile iterasyon halinde A_1 , 1 e normlaştırılır.

Tablo 23.1 Yok etme işlemi ile iterasyon örneği.

-0,312 918	0,016 570	—	—	—	-0,062 1408	-0,000 0175	$\bar{a}_i^{(2)}$
15,032 874	21,288 941	6,236 422	3,672 512	57,560 320	—	—	0
15,032 874	-1,754 343	0,291 456	-0,032 160	-5,067 107	0	0	0,198 822
-0,198 822	22,225 977	-3,893 840	-0,341 238	49,588 894	-0,014 4209	-0,000 0218	0,034 367
-0,034 376	0,817 307	8,852 656	-1,267 660	7,755 243	—	—	0,096 290
-0,079 720	0,016 570	0,986 150	5,313 570	5,283 290	—	81	0
15,032 874	-1,754 343	0,291 456	-0,032 160	-5,067 107	0	0	0,198 8220
0	22,225 977	-3,893 840	-0,341 238	49,588 894	-14 4209	-218	0,027 065
0	-0,036 7726	8,995 843	-1,255 112	5,931 730	—	—	0,093 323
0	0	-0,109 6228	5,451 159	4,633 037	-45 0114	84	0
-1	-1,036 7726	-1,109 6228	-1	0	0	0	1
0,072 5318	-2,380 4667	-0,777 9673	-0,849 9178	1	0	0	1
1096	1 0157	1 3703	8 2572	1	1	1	0
1	10	1	-15	1	0	1	1
$x_i = 0,072 6415$	-2,379 4500	-0,776 5969	-0,841 6621	1	0	1	1
$\lambda_i = 0,00133$	0,01015	0,00540	0,01712	1	0	1	1

mış köşegen elemanları dışında, merdivenin üstündeki, A_2 ise altındaki elemanları kapsar.

x çözüm denklemi

$$x = -A_1 x - A_2 x + a$$

nın (11) den çıkarılması ile $y^v = x^v - x$ hata vektörü için şu sistem bulunur :

$$-y^{v+1} = A_1 y^{v+1} + A_2 y^v. \quad (13)$$

Bu, tekil olmayan $I + A_1$ matrisi için,

$$y^{v+1} = -(I + A_1)^{-1} A_2 y^v = L y^v \quad (14)$$

e göre çözülür; burada $L = -(I + A_1)^{-1} A_2$, iterasyon matrisidir. Metodun yakınsaklığı için ölçü L nin λ_i özdeğerlerinin λ_L max. değeridir ve gerek ve yeter yakınsaklık koşulu

$$\lambda_L = \max |\lambda_i| < 1 \quad (15)$$

dir. (14) uyarınca

$$y^v = L^v y^0$$

olup y^0 başlangıç hatasıdır. Yani bu, - tümü mevcut kabul edilen - L nin z_i özvektörlerine göre seriye açılır ise,

$$y^v = c_1 \lambda_1^v z_1 + c_2 \lambda_2^v z_2 + \dots + c_n \lambda_n^v z_n,$$

ve buradan, (15) halinde, $v \rightarrow \infty$ için, $y^v \rightarrow 0$ bulunur.

Bu durumda yakınsaklık koşulu (15) pratik değer taşımaz; zira iterasyon matrisi L nin özdeğerleri belli değildir ve kolayca bulunmaz. Yani hiç olmazsa yeterli fakat kolay kullanılabilen yakınsaklık kriterlerinin ve hata tahminlerinin verilmesi bahis konusudur. Bu, § 16.3 de belirtilen norm incelemeleri yardımı ile sağlanır. Çok sayıda bilenen tahminler arasından W. Dück'ünki verilecektir ¹ $\|x\|$ keyfi bir vektör normu ve $\|A\|$ buna uygun bir matris normu olsun, § 16.3 e bakınız. Bu durumda (13) den, normlara geçiş ve norm hesap kurulları dikkate alınmak sureti ile,

¹ Dück, W.: Eine Fehlerabschätzung zum Einzelschrittverfahren bei linearen Gleichungssystemen. Numer. Bd. 1 (1959) s. 73 - 77. Diğer tahminler ile karşılaştırmayı H. Feldmann yapmıştır: ZAMM. Bd. 41 (1961) s. 515 - 516.

$$\|y^{v+1}\| \leq \|A_1\| \|y^{v+1}\| + \|A_2\| \|y^v\|$$

veya

$$(1 - \|A_1\|) \|y^{v+1}\| \leq \|A_2\| \|y^v\|$$

bulunur.

$\|A_1\| < 1$ hipotezi ile burada bölme yapılabilir ve iki ardışık hata vektörünün normu için şu eşitsizlik elde edilir :

$$\|y^{v+1}\| \leq \frac{\|A_2\|}{1 - \|A_1\|} \|y^v\|. \quad (16)$$

Böylece metod için yeterli yakınsaklık koşulu

$$\rho_1 = \frac{\|A_2\|}{1 - \|A_1\|} < 1 \quad (17)$$

olur.

Hata tahmini

$$\|y^v\| = \|x^v - x\| \leq \rho \|x^v - x^{v-1}\| \quad (18)$$

şeklinde olup burada ρ , W. Dück'ün aşağıdaki gibi bulduğu bir tahmin çarpanıdır. (13) ün basitçe değiştirilmesi ve v yerine $(v-1)$ konulması ile,

$$-y^v = (A_1 + A_2)y^v + A_2(y^{v-1} - y^v) = A_0 y^v + A_2(x^{v-1} - x^v)$$

elde edilir. Normlara geçişden,

$$\|y^v\| \leq \|A_0\| \|y^v\| + \|A_2\| \|x^{v-1} - x^v\|$$

eşitsizliği veya, yeni hipotez $\|A_0\| < 1$ halinde, istenen tahmin

$$\|y^v\| = \|x^v - x\| \leq \frac{\|A_2\|}{1 - \|A_0\|} \|x^v - x^{v-1}\| \quad (19)$$

bulunur, burada tahmin çarpanı :

$$\rho = \frac{\|A_2\|}{1 - \|A_0\|} \quad (20)$$

dir.

Vektör normu olarak, hata gözlemlerinde, max. bileşen diğeri

$$\|x\| = \max_i |x_i| \quad (21)$$

ve uygun matris normu olarak satır normu

$$\|A\| = Z(A) = \max_i \sum_k |a_{ik}|. \quad (22)$$

kullanılır. 23.1 deki örnek için

$$\|A_1\| = \max \left\{ 0, \frac{1}{21}, \frac{3}{28}, \frac{3}{20} \right\} = \frac{3}{20} = 0,150$$

$$\|A_2\| = \max \left\{ \frac{5}{24}, \frac{3}{21}, \frac{2}{28}, 0 \right\} = \frac{5}{24} = 0,208$$

$$\|A_0\| = \max \left\{ \frac{5}{24}, \frac{4}{21}, \frac{5}{28}, \frac{3}{20} \right\} = \frac{5}{24} = 0,208$$

elde edilir. Böylece

$$\rho_1 = \frac{0,208}{0,850} = 0,245 < 1, \quad \rho = \frac{0,208}{0,792} = 0,263.$$

olur 23.2 deki yok etme ile iterasyon örneği için

$$\|A_1\| = \max \{0,1382; 0,1906; 0,2355; 0,1856\} = 0,2355$$

$$\|A_2\| = \max \{0; 0,0089; 0,0039; 0,0181\} = 0,0181$$

$$\|A_0\| = \max \{0,1382; 0,1995; 0,2394; 0,2037\} = 0,2394.$$

yani

$$\rho_1 = \frac{0,0181}{0,7645} = 0,0237, \quad \rho = \frac{0,0181}{0,7606} = 0,0238$$

bulunur. Son adıma ait hata tahminleri şöyledir.

$$\|y\| \leq 0,0238 \cdot 15 \cdot 10^{-7} = 0,36 \cdot 10^{-7}.$$

23.4. Gauss - Southwell Relaksasyon Metodu.

Son zamanlarda Southwell tarafından "relaksasyon"¹ adı altında, Seidel iterasyonunun değişik bir şekli verilmiş olup bu Dedekind'in, 23.1 deki dip notu 2 de değinilen "en küçük kareler metodu hakkında konuşmasında Gauss" isimli yazısı s. 53-56 da, kontroller ile birlikte tüm ayrıntılı ve yakınsaklık ivmelendirilmesi için ekseriya etkili bir suni müdahale uygulanması olarak verilmiştir.

Relaksasyon zaaf göstermek yorulmak anlamına gelir ve "kalanların" ardışık ve sistematik olarak "küçülmesi" ne işaret eder :

¹ Southwell, R. V. : Relaxation methods in engineering science. Oxford University Press 1940.

$$A x_v - a = x_v, \quad (23)$$

bunlar, x_v yaklaşımının (1) denklem sisteminde yerine konulması ile ortaya çıkarlar; uygun "düzeltmeler"

$$z_v = x_v - x^{v-1}, \quad (24)$$

kullanılması halinde ise denklem (23) den şu bağıntı elde edilir :

$$A z_v = r_v - r_{v-1} \quad (25)$$

Burada Z_v o şekilde hesaplanmalıdır ki yeni r_v kalanı, eski r_{v-1} kalanından küçük olsun. Burada da A matrisinin a_{ii} asal köşegen elemanları ağır basıyor ise, bileşenler cinsinden şöyle hareket edilir : Tek bileşen $z_k^v \neq 0$ seçilir ve geri kalanlar $z_i^v = 0$ kabul edilir. Böylece denklem (25) sadeleşir.

$$\left. \begin{aligned} a_{1k} z_k^v &= r_1^v - r_1^{v-1} \\ a_{2k} z_k^v &= r_2^v - r_2^{v-1} \\ &\dots \dots \dots \\ a_{nk} z_k^v &= r_n^v - r_n^{v-1} \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

Şimdi

$$z_k^v \approx - \frac{r_k^{v-1}}{a_{kk}}, \quad (27)$$

yazılır ise, kalan bileşen r_k sıfıra çok yaklaşır, buna karşılık diğer kalan bileşenleri çok az değişirler. Bu esnada z_k^v düzeltmesini, max. yapacak şekilde bir k seçilir. Bundan sonra en yakın verimli bileşene yani en büyük düzeltmeye seçilir ve böyle devam edilerek tüm r_i^v kalanlarını, bahis konusu hane sayısı gerçevesinde sıfıra çok yaklaşmaları temin edilir.

Her defasında tek bir hane düzeltilir; yeni düzeltmeler tek haneli sayılar olarak seçilir ve böylece tüm hesap kolayca kafadan yapılabilir. Tüm x_i bilinmeyenlerine bu işlem uygulandıktan yani kalanlar, 0 hanede başka küçültme mümkün olmayacak kadar küçüldükten sonra ((27) deki bölenler birimin altına düştükten sonra) bir sonraki haneye geçilir, burada kalanlar 10 ile çarpılır ve böylece, bu hanede de düzeltmeler 1 den küçük olana kadar yeniden hesap yapılır. Her seferinde en verimli düzeltmenin seçimi ile metod, en uygun şekilde kullanılır. Ayrıca burada tuhaf bir psikolojik gecikilik vardır : Hesap, mekanik mono-

tonlukdan kurtulur ve "oyun gibi" ve ayrıca kolayca, Gauss'un Gerling'e yazdığı mektubdaki gibi, "yarı uykuda gibi" yapılır.

Bilinmeyenler yerine düzeltmeler ile çalışıldığı için, Gauss-Seidel iterasyonunda kullanılan ve yaklaşık değerlerin sürekli yerine konulmasına dayanan otomatik kontrol burada faydalı olmaz. Bir hesap hatası, kendini belli etmez ve bundan sonraki tüm hesap geçersiz olur. Dolayısı ile burada sürekli kontrolların işleme sokulması çok önemlidir : Gauss bunları aşağıda 0 Nr. ile gösterilen ve verilen denklemlerin negatif toplamında çıkan ek bir denklemi de hesaba katmak suretiyle elde eder. Burda her x_k bilinmeyenine ait katsayıların toplamı ve sağ tarafların toplamı sıfıra eşittir. Bu durumda her v basamağındaki bulunanların toplamı da sıfıra eşit olur :

$$r_1^v + r_2^v + \dots + r_n^v + r_0^v = 0, \quad (28)$$

Kalanlar, genellikle en fazla iki haneli sayı olduğu için bu kontrol kolayca kafadan yapılabilir.

Son sonuç, tüm düzeltmelerin x_0 başlangıç yaklaşımına ilavesi ile elde edilir :

$$x = x_0 + z_1 + z_2 + \dots, \quad (29)$$

burada başlangıç yaklaşımı en basit olarak, sıfır seçilir. Bu durumda birinci kalan vektörü r_0 , negatif ikinci taraflara eşit olur :

$$x_0 = 0. \text{ için } r_0 = -a \quad (30)$$

Örnek :

$$\begin{aligned} 12x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 18 &= 0 \\ -x_1 + 8x_2 - 2x_3 + 32 &= 0 \\ -x_1 + 3x_2 + 12x_3 - 6 &= 0 \\ \hline -10x_1 - 9x_2 - 13x_3 - 8 &= 0 \end{aligned}$$

Başlangıç yaklaşımı $x_0 = 0$ dan $-18,32, -6; -8$. Kalanları elde edilir. En büyük oran $32:8 = 4$ dür; yeni en büyük düzeltme olarak $z_2 = -4$ seçilir; böylece kalanlar $-10, 0, -18;28$ değerlerini alırlar; böylece toplamaları yine sıfır olur. Bundan sonraki düzeltme olarak $+18:12 \approx 2 = z_3$ seçilir. Yeni kalanlar $-4, -4,6; 2$ olup birinci hane düzeltilmiştir. 10

ile çarpılan son kalanlar yani -10, -40, 60; 20 den bir sonraki hane-
nin incelenmesine ait başlangıç değerleri bulunur. Hesabın devamı, Tab-
lo 23.2 de görülmektedir.

Yukarıda verilen toplam kontroluna bağlı olarak Gauss, bir çok
hallerde özellikle dengeleme hesabının belirli matrislerinde ve diferans
matrislerinde faydalı olan ve yakınsaklığı ivmelendiren bir suni müda-
hele kullanmıştır. Gauss

$$x_i = \bar{x}_i - \bar{x}_0 \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (31)$$

substitüsyonu ile ek bir $(n + 1)$. ci $\bar{x}_0$ bilinmeyenini hesaba katarak a_{j0}
katsayıları a_{ik} nin negatif satır toplamlarına eşit olur. $\bar{x}_0$ için ek bir sü-
tunlu bir denklem sistemi elde etmiştir. $(n + 1)$. ci denklem olarak n
adet denklemin negatif toplamı ile birlikte, $(n + 1)$ - sıralı, tekil nega-
tif satır - ve sütun toplamı sınırlar dahilinde A dan çıkan, $\bar{A}$ matrisine
sahip bir sistem elde edilir. Yeni uyumla sistemin x_i çözümleri böylece
tek anlamlı olmaz; bunlar, denklem (31) deki diferanslardır.

"Seidel" iterasyonuna özdeş olan metodun yakınsaklığı için

$$(A_1 \lambda + A_2) x = 0 \quad (32)$$

probleminin özdeğerleri yeni iterasyon matrisi $L = -A_1^{-1} A_2$ nin özde-
ğerleri bahis konusudur; burada A_1 , köşegen elemanları dahil olmak
üzere A nın tekil olmayan, alt üçgen matrisi, A_2 ise tekil kalandır. A nın
 $A = \bar{A}_1 + \bar{A}_2$ şekline yani iterasyon matrisinin $L = -\bar{A}_1^{-1} \bar{A}_2$ şekline
sokulması halinde (32) denklemindeki özdeğerleri $\lambda_n = \bar{\lambda}_n = 0$ dışında ve
 $\bar{x}_0 = e = (1, 1, \dots, 1)'$ özvektörlü yeni bir $\lambda_0 = 1$ değerinin eklenmesi
halinde $\bar{\lambda}_1$ ye dönüşürler. (31) denklemini böylece dominant özdeğerin kü-
çülmesi halinde, yakınsaklığı ivmelendirmeğe götürür :

$$|\bar{\lambda}_1| < |\lambda_1|. \quad (33)$$

Ek özdeğer $\bar{\lambda}_0 = 1$ yakınsaklığa etki etmez; zira ilgili özvektör
 $\bar{x}_0 = e$, z_0 hata vektörünün seriye açılımında yalnız, serbest ek bilinme-
yen $\bar{x}_0$ nedeni ile sabit bir hareketi göz önüne alır ki bunun x_i değerlerine
hiçbir tesiri yoktur. Hangi matris için (33) koşulunun gerçekleştiğine
ait ayrıntılı bir koşul şimdilik bilinmemektedir.¹

¹ Bakınız; G. E. Forsythe, T. S. Motzkin: An Extension of Gauss' Transformation
for Improving the Condition of systems of Linear Equations. Math. Tables a.
other Aids to Comp. VI, Nr. 37 (1952), s. 9 - 17.

Tablo 23.2 Gauss-Southwell Relaksasyon
Metodu ile lineer denklem sisteminin çözümü.

1)	12	-2	3				
2)	-1	8	-2				
3)	-1	3	12				
0)	-10	-9	-13	kalan			
				s_1	s_2	s_3	s_0
	0	0	0	-18	32	-6	-8
		-4		-10	0	-18	28
			2	-4	-4	6	2
	0,0	-4,0	2,0	-40	-40	60	20
	5	4	-5	-55	-30	0	85
				5	-35	-5	35
				-3	-3	7	-1
	0,50	-3,60	1,50	-30	-30	70	-10
	4		-6	-48	-18	-2	68
				0	-22	-6	28
		3		-6	2	3	1
	0,540	-3,570	1,440	-60	20	30	10
	5		-2	0	15	25	-40
				-6	19	1	-14
		-2		-2	3	-5	4
	0,5450	-3,5720	1,4380	-20	30	-50	40
			4	-8	22	-2	-12
		-3		-2	-2	-11	15
			1	1	-4	1	2
	0,5450 0	-3,5723 0	1,4385 0	10	-40	10	20
		5		0	0	25	-25
			-2	-6	4	1	1
	0,5450 00	-3,5722 50	1,4384 80	-60	40	10	10
	5			0	35	5	-40
		-4		8	3	-7	-4
	-1			-4	4	-6	6
	0,5450 040	-3,5722 540	1,4384 800	-40	40	-60	60
			5	-25	30	0	-5
		-4		-17	-2	-12	31
	1			-5	-3	-13	21
			1	-2	-5	-1	8
	0,5450 0410	-3,5722 5440	1,4384 8060	-20	-50	-10	80
		6		-32	-2	8	26
	3			4	-5	5	-4
	0,5450 0413	-3,5722 5434	1,4384 8060	4	-5	5	-4

Açıklama için "Dedekind'in yazısındaki örneği kullanalım :

$$\begin{aligned} 3x_1 - x_2 - x_3 &= 1531 \\ -x_1 + 4x_2 - x_3 - x_4 &= -3681 \\ -x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 &= 2868 \\ -x_2 - x_3 + 2x_4 &= 0 \end{aligned}$$

(31) denklemi yardımı ile sistem aşağıdaki şekle dönüşür :

$$\begin{aligned} 2x_0 - \bar{x}_1 - \bar{x}_2 &= -718 \\ -x_0 + 3\bar{x}_1 - \bar{x}_2 - \bar{x}_3 &= 1531 \\ -x_0 - \bar{x}_1 + 4\bar{x}_2 - \bar{x}_3 - \bar{x}_4 &= -3681 \\ -\bar{x}_1 - \bar{x}_2 + 3\bar{x}_3 - \bar{x}_4 &= 2868 \\ -\bar{x}_2 - \bar{x}_3 + 2\bar{x}_4 &= 0 \end{aligned}$$

Ana köşegen elemanlarının ağır basması burada çok zayıftır. 23.3 deki (17) denklemi de, yeterli bir yakınsaklık sağlamaz. Başlangıç sisteminin doğrudan doğruya incelenmesi gerçekten çok sıkıcıdır. Buna karşılık genişletilmiş denklem sistemi sağılacak kadar iyi yakınsaklık gösterir; sayısal hesabın yapıldığı Tablo 23.3 e bakınız. Sonuçlar şöyledir :

$$\begin{aligned} x_0 &= -740 \\ \bar{x}_1 &= 171 & x_1 &= 911 \\ \bar{x}_2 &= -934 & x_2 &= -194 \\ \bar{x}_3 &= 655 & x_3 &= 1395 \\ \bar{x}_4 &= -140 & x_4 &= 600 \end{aligned}$$

Eski ve değiştirilmiş iterasyon matrisinin dominant özdeğerleri

$$\lambda_1 = 0,7336, \quad \bar{\lambda}_1 = -0,09837$$

dir. Böylece bahis konusu halde, Gauss - dönüşümünün dikkate değer etkisi açıklanmış olur.

23.5. Nüve İteratif İnceleme - Ill - Conditioned Sistemler.

Geniş kapsamlı denklem sistemlerinin bir yok etme metodu, örneğin Gauss algoritması uyarınca çözümünde, önlenemeyen yuvarlatma hatalarının yazılması nedeni ile, sonuçlar az veya çok hatalıdır. Özellikle kü-

Tablo 23.3 Gauss'a Göre Yakınsaklığı İvmesi Relaksasyon Örneği

$\bar{x}_0$	$\bar{x}_1$	$\bar{x}_2$	$\bar{x}_3$	$\bar{x}_4$						
2	-1	-1	0	0	kalan					
-1	3	-1	-1	0						
-1	-1	4	-1	-1						
0	-1	-1	3	-1						
0	0	-1	-1	2						
		-920			718	-1531	3681	-2868	0	
-820					1638	-611	1	-1948	920	
					-2	209	821	-1948	920	
			650		-2	-441	171	2	270	
	150				-152	9	21	-148	270	
				-140	-152	9	161	-8	-10	
80					8	-71	81	-8	-10	
	24				-16	1	57	-32	-10	
		-14			-2	15	1	-18	4	
			6		-2	9	-5	0	-2	
	-3				1	0	-2	3	-2	
			-1		1	1	-1	0	-1	
-740	171	-934	655	-140						

çük determinanlı, ill - conditioned katsayılar matrisi halinde bu durum bahis konusudur. (§ 16.5 e bakınız); burada normal yuvarlatma hatalarına, birbirine çok yakın sayıların farkı alınmak suretiyle, önlenemeyen bir hane kaybı eklenir ki bu durum problemin sayısal çözümünü şüpheye düşürebilir. Tamamen bir ill-condition olunması halinde hatalı x_0 çözümleri, ek bir düzeltme hesabı ile düzeltilebilir. Bu sıfırlar yerine, mutlaka yapılması gereken

$$r = a - Ax_0 \quad (34)$$

şeklindeki kontrolden, elde edilen r kalan vektörüne dayanır. Düzeltmiş x çözümü için

$$x = x_0 + z \quad (35)$$

yazılarak, (34) denklemi ve $Ax = a$ hipotezinden z düzeltme çarpanı olarak

$$Az = r, \quad (36)$$

denklemler sistemi bulunur ki bu, (1) sisteminden yalnız a yerine r sağ tarafları ile bellidir. A matrisine göre yok etme işlemi x_0 yaklaşımının hesabında uygulandığı için (üçgenlere ayırma), z nin hesabı yalnız işlemin yeni sağ tarafların r sütununa genişletilmesini ve buradan sonra z bilinmeyeninin hesaplanmasını öngörür; bu, otomatik hesaba bile kolayca ana programa eklenebilir bir işlemdir. Böylece elde edilen, düzeltilmiş x çözümünün kalitesi hakkında yeni yerine koyma kontrolü ile fikir edilir. Şimdi var olan kalanlar, eskilerine oranla hissedilecek kadar indirgenmiş olmalıdır. Gerektiğinde işlem, z düzeltmeleri istenen hane sayısı gerçeğinde artık düzeltme sağlamayana kadar tekrarlanır.

Küçük r kalanlarının ortaya çıkışı - ilk başda şaşırtıcı olmakla beraber - x_0 çözümünün yeterli doğruluğunu göstermez. (36) nin şekilsel çözümü

$$z = A^{-1}r \quad (37)$$

den, invers matrisde büyük elemanlar halinde, küçük bir r kalan vektöründe büyük z düzeltmelerine yol açacağı görülür. Bu hal ancak ill-conditioned matris için bahis konusudur. Özellikle, düzeltme hesabının başarılı olması için r kalanlarının yeterli doğrulukla bulunması gerekir. Ancak kalanlar, adet eşit sayıların farklı olarak ortaya çıktığından ve öngörülen hane sayısına varılmadığından bunlara arttırılmış (örneğin iki katı) hane sayısı ile hesaplanmalıdır; bu işlem el makinasında kendiliğinden oluşur. - Simetrik ve pozitif definit matris için, ill-conditioned halinde bile, daima Gauss yok etme işleminin Cholesky tipi uygulanır (§ 6.3 e bakınız); burada küçük b_{ii} halinde, köşegen elemanlarının hane kaybı azaltılır. Ancak burada da skaler çarpımlar, iki kat hane sayısı ile bulunmalı ve kökün alınmasından veya köşegen elemana bölünmeleri sonra yuvarlatılmalıdır. Bu işlem masa makinasında kendiliğinden olur; hesap makinası ile hesabda özel bir programı gerektirir - Cholesky-metoduna bağlı olarak düzeltme metodunun etkinliği hakkında aşağıdaki çok küçük kondisyon sayısı $K_H = D/V = 1,4 \cdot 10^{-11}$ e sahip sayısal örnek bir fikir verebilir; bu örnekde iki katlı düzeltmeden, 8 haneli hesap halinde, exact çözümler 10 haneli olarak elde edilir. Tablo 23.4

Tablo 23.4 ill-Conditioned Denklem Sisteminin Ek İteratif İncelenmesi

	A			ϵ	$r_0 \cdot 10^6$	$r_1 \cdot 10^9$
	0,1568 0,5587 2 1,3448 96	0,5587 2 1,9919 36 4,7975 168	1,3448 96 4,7975 168 11,5616 2048	0,4870 592 1,7368 4736 4,1841 51296	0,0003 1872 0,0001 26976 -0,0022 260224	0,0530 9440 -0,1892 9152 0,4559 23712
R	0,3959 7980	1,4109 8107 0,0326 8670	3,3963 7527 0,1620 1047 0,0028 4832	1,2300 1022 0,0405 7380 0,0005 6965	0,0008 048895 -0,0308 59888 0,0140 06723	-0,1340 8361 0,0031 2312 0,0068 3798
x_0	0,4999 5194	0,2500 2533	0,1999 9308	-1	-1	-1
$10^8 \cdot z_1$	48,0382	-25,3182	4,9176 3			
x_1	0,4999 999782	0,2500 000118	0,1999 999976			
$10^8 \cdot z_2$	21,8064	-11,8035	2,4007 1			
x_2	0,5000 000000	0,2500 000000	0,2000 000000			

23.6. G. Schultz'a göre Invers Matrisinin Iteratif Hesabı.

Bir A matrisinin $X = A^{-1}$ invers matrisi için yeterli X_0 yaklaşımının bilinmesi halinde G. Schulz¹ invers matrisinin hesabı için etkili bir iterasyon metodu geliştirmiştir. Bu methoda sıfır matrisi $I - AX = O$ yerine, X_0 yaklaşımı ile bulunan kalan matris

$$R_0 = I - A X_0, \quad (38)$$

kullanılır. X için, $X = X_0 + Z$ $X_0 = X - Z$ düzeltmesi yazılır ise denklem (38) den $AZ = R_0$ sistemi ve buradan da düzeltme matrisi olarak $Z = A^{-1} R_0 = X R_0$ bulunur. G. Schultz burada, bilinmeyen invers matris X yerine X_0 yaklaşımını koyarak yaklaşık bir düzeltme matrisi

$$Z_1 = X_0 R_0 \quad (39)$$

ve buradan düzeltilmiş bir yaklaşım

$$X_1 = X_0 + Z_1. \quad (40)$$

elde eder. Metodun uygulanmasına devam edilir yani

$$\begin{aligned} R_0 &= I - A X_0; & Z_1 &= X_0 R_0; & X_1 &= X_0 + Z_1; \\ R_1 &= I - A X_1; & Z_2 &= X_1 R_1; & X_2 &= X_1 + Z_2; \\ &\dots\dots\dots \end{aligned} \quad (41)$$

veya daha kısa yazılır ise,

$$\begin{aligned} X_{n+1} &= X_n + X_n (I - A X_n) \\ n &= 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (42)$$

iterasyon kuralı ile çalışır.

Methoda tahmini kuadratik yakınsaklık özelliği vardır. $AX = I - R_1$ nedeni ile,

$$\begin{aligned} X_1 &= X_0 + Z_1 = X_0 (I + R_0) \\ A X_1 &= A X_0 (I + R_0) = (I - R_0) (I + R_0) = I - R_0^2 \end{aligned}$$

den

¹⁾ Schulz, G.: Iterative Berechnung der reziproken Matrix. Z. angew. Math. Mech. Bd. 13 (1933), s. 57-59.

$$R_1 = R_0^2 \quad (43a)$$

veya, genel olarak

$$R_n = R_{n-1}^2 = R_0^{2^n}. \quad (43b)$$

bağıntısı bulunur. Yeni kalan matris için her adımda karesi alınmaktadır. Şimdi R_0 "yeteri kadar küçük" ise, methodan yakınsaklık beklenir. Gerçekten, R_0 'ın maximum özdeğeri 1 den küçük ise, hata matrisi:

$$Y_n = X - X_n = X (I - A X_n) = X R_n = X R_0^{2^n} \quad (44)$$

$n \rightarrow \infty$ için, sıfıra yakınsar. Genellikle bilinmeyen bu değer ise R_0 ın bir normu ile tahmin edilebilir ve böylece iterasyon metodunun yeterli yakınsaklık koşulu olarak

$$\|R_0\| < 1 \quad (45)$$

bulunur. Normlar yardımı ile W. Dück¹ de basit bir "hata tahmin metodu" verilmiştir. $I - A X_n = R_n$ halinde

$$X_{n+1} = X_n + X_n (I - A X_n) = X_n + X_n R_n$$

den hata için

$$\begin{aligned} X - X_{n+1} &= (X - X_n) - X_n + X_n A X_n \\ &= (X - X_{n+1}) + (X_{n+1} - X_n) - (X - X_{n+1}) A X_n \\ &\quad - (X_{n+1} - X_n) A X_n \\ &= (X - X_{n+1}) R_n + (X_{n+1} - X_n) R \end{aligned}$$

elde edilir. Normlara geçiş ile

$$\begin{aligned} \|X - X_{n+1}\| &\leq \|X - X_{n+1}\| \|R_n\| + \|X_{n+1} - X_n\| \|R_n\|, \\ \|X - X_{n+1}\| (1 - \|R_n\|) &\leq \|X_{n+1} - X_n\| \|R_n\| = \|Z_{n+1}\| \|R_n\| \end{aligned}$$

bulunur. Bu durumda, $\|R_n\| < 1$ hipotezinden tahmin yapılır:

¹⁾ Dück, W.: ZAMM Bd. 40 (1960) s. 192-194.

$$\|X - X_{n+1}\| \leq \frac{\|R_n\|}{1 - \|R_n\|} \|Z_{n+1}\| \quad (46)$$

Matris normu olarak satır normu tavsiye edilir; § 16.3 e bakınız; ancak diğer matris normları da kullanılabilir.

Yani her iterasyon adımında $\|R_n\|$ ve $\|Z_{n+1}\|$ normları ve dolayısı ile (46) ın sağındaki sınır bulunur ve iterasyona, bu sınır verilen bir ϵ değerinin altına düşene kadar devam edilir. Bu durumda başlangıç yaklaşımı için $\|R_n\| < 1$ koşulu sağlanmıyor ise bir kaç adım daha uygulanabilir. Yine $\|R_n\| < 1$ sağlanmıyor ise metoda, işe yaramaz olarak son verilir. Bundan başlangıç yaklaşımı X_0 ın fazla kaba olduğu anlaşılır.

UYGULAMALAR

24. Elektroteknikte Matrisler.

Matris hesabının elektroteknik problemlerine özellikle şebeke hesaplarının uygulanması çok yenidir. Bu konudaki önemli çalışmalar Amerikalı Gabriel Kron¹ tarafından yapılmış olup bunu, hesap yöntemlerinin yapısı ve uygulanması ile ilgili birçok çalışmalar izlemiştir.² Son zamanlarda bu gelişme büyüyen problem kapsamı nedeni ile, digital hesap makinalarının kullanılmasına yol açmıştır. Bugün alışılmış ölçülerdeki şebeke hesaplarının matris hesabı ve digital otomatlar yardımı olmaksızın yapılabileceğini söylemek zordur. Bu kitaplarda yalnız temel düşüncelere gidilip yapılacak ve ayrıntılar için ders kitapları tavsiye edilecektir.^{3,4}

Şebeke hesaplarına esas olan ve matris denklemleri ile formüle edilebilen lineer bağıntılar, kısmen fiziksel tipte ifadelerdir: Gerilim ile akım arasındaki "Ohm Kanunu" adı verilen lineer bağıntı gibi. Diğer taraftan bunlar matematik, daha doğrusu topolojik karakter taşırlar. Şebeke kollarının düğümler ile birbirine bağlanma şekli iki Kirchhoff kanununu kapsamına girer. Matrisler ile ifade halinde fiziksel ve topolojik şekiller arasındaki fark iyice ortaya çıkar.

Şebekenin incelenmesine topolojik gözlemleri esas alarak başlayalım. Bunlar aynı veya benzer şekilde birçok problemlerde, örneğin trafik ve telekomünikasyon problemlerde ortaya çıkar.

Aşağıdaki birinci kısım bu anlamda ele alınmalıdır.

- 1) General Electric Review Bd. 38 (1935). - Tensor analysis of networks. New-York 1939.
- 2) Es seien hier nur einige wenige für die Entwicklung grundlegende Arbeiten genannt: QUADE, W.: Matrizenrechnung und elektrische Netze. Arch. Elektrot. Bd. 34 (1940), s. 545-567. - ZIMMERMANN, F.: Öster. Ing. Arch Bd. 3 (1949) s. 140-180; Bd. 4 (1950), s. 243-251. E.T.Z.A. Bd. 74 (1953), s. 45-50. - EDELMANN, H.: Arch. Elektrot. Bd. 44 (1959), s. 419-440, Bd. 45 (1960), s. 347-356, 479-500. Dort weiteres Schrifttum.
- 3) PROMBERGER, M.: Anwendung von Matrizen und Tensoren in der theoretischen Elektrotechnik. Berlin 1960. 211 s.
- 4) EDELMANN, H.: Berechnung elektrischer Verbundnetze. Mathematische Grundlagen und technische Anwendungen. Berlin 1963. 282 s.

24.1. Yönlenmemiş Şebeke Topolojisi.

Bir elektrik şebekesi, topolojik anlamda düğümlerden ve -düzgünleri birleştiren - kollarından oluşur. Böyle bir modele, Graf adı verilir.

Ve bu genişletilmiş bir matematik teorisinin konusunu oluşturur. Her kol iki düğüm ile sınırlanır, her düğüme birçok, en az bir kol açılır. Kollar bir yönlü olabilir (Akım yönü trafik, veya telekomünikasyon yönü) bu durumda yönlenmiş bir graf söz konusudur. İlk başta, ilerde hesaba katılacak olan, yönler ihmal edilir; yani, topolojik esasları en basit şekilde belirtmek amacı ile graf yönlenmemiş kabul edilir. Bu durum aynı zamanda cebirsel incelemelerinde genişletilmesi olanaklarını sağlar.

Graf'a bir matris karşılık gelir ve böylece topolojik problemler cebirsel yoldan incelenebilir. Graf, (şebeke)'k adet düğümden ve n adet koldan oluşur. Bu iki sayı $k - 1 \leq n$ sınırı dışında, birbirinden bağımsızdır. Düğümler $i = 1, \dots, k$ ya kadar, kollar ise $j = 1, \dots, n$ 'e kadar keyfi şekilde numaralanmış olsun. Bu şekle k satırlı ve n sütunlu bir matris karşılık gelir; ve satırlar düğümleri, sütunlar ise kolları gösterir. Matris elemanları 0 ve 1 sayılarıdır. i düğümü ve j kolu birbirine ait iseler, i, j noktasından 1 sayısı aksi halde 0 sayısı bulunur. i - inci satırın 1 elemanları, hangi kolların i düğüme açıldığını gösterir. j - inci sütunun 1 elemanları ise, j kolunun iki uç noktasını belirtir.

Böylece her satırda en aşağı bir adet 1 eleman, her sütunda ise iki adet 1 elemanı bulunur. Yani satırların herhangi bir tanesi fazladır. Bu, geri kalan $k - 1$ adet satır ile tamamen bellidir; bu, 1 elemanını diğer satırlarda yalnız bir tane 1 elemanın bulunduğu sütunda ihtiva eder.

Düğüm matrisi K_0 'ın k adet satırı lineer bağımlı, buna karşılık, her $k - 1$ satır bağımsızdır. K_0 'da gelişigüzel bir satırın çizilmesi ile oluşan ve K ile gösterilen matris, aşağıda açıklanacak anlamda satır düzgündür. Çizilen satıra ait düğüme, referans düğümü denir.

Alışılmış cebirsel anlamda bağımlılık kavramını anlayabilmek için, özel bir cebir tipi gereklidir. Bu cebirde yalnız 0 ve 1 sayıları bulunmalı ve negatif sayılar olmamalıdır.

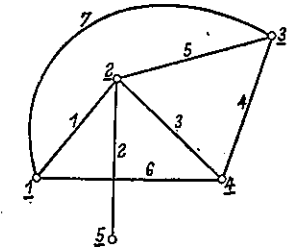
1) Grundlagen ist D. KÖNIG: Theorie der endlichen und unendlichen Graphen. New York: Chelsea Publ. 1950. Für Anwendungen auf elektrische Netze vgl. S. SESHU u. M. B. REED: Linear graphs and electrical networks. Reading. Mass. USA 1961.

Bu tip bir cebir, tam sayıların ikiye bölünmesinde kalanlar cinsinden ortaya çıkar. Her çift sayının ikiye bölünmesinde kalan sıfır; her tek sayının bölünmesinde kalan birdir. Bu durum sıfır ve negatif sayılar içinde geçerlidir. Böyle bir sayı sistemine kalan sınıf cismi veya modülü 2 olan kalan sınıf adı verilir. Örneğin

$$6 \equiv 0 \pmod{2}, \quad 5 \equiv 1 \pmod{2}, \quad -1 \equiv 1 \pmod{2}$$

yazılabilir. Bu kapalı sayı sistemindeki hesap kuralları toplama ve çarpma:

Toplama	Çarpma
$0 + 0 = 0$	$0 \cdot 0 = 0$
$0 + 1 = 1$	$0 \cdot 1 = 0$
$1 + 1 = 0$	$1 \cdot 1 = 1$



Şekil 24.1.

Yönlenmemiş bir şebeke örneği

Her iki halde de komutatif kuralı geçerlidir. Bu tür cebirde K_0 matrisinin herhangi bir satırı, geri kalan $k - 1$ satırın toplamına eşittir; ve K_0 tüm satırlarının toplamı sıfır satırını verir. Buna karşılık indirgenmiş K matrisi satır düzgündür; ve en aşağı bir adet $k - 1$ inci mertebeden $D = 1 \pmod{2}$ determinantına sahiptir.

Bütün bunları Şekil 24.1 Şebeke örneğinde açıklayalım. Düğüm ve kolların -gelişigüzel- numaralanmasından referans düğümü olarak 5 No'lu düğümün seçilmesinden sonra şebeke-graf ile düğüm matrisi K arasında şu bağıntı bulunur:

$$K = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

5. Satır ile genişletilmiş matris ise

$$K_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Bir şebekenin düğüm matrisi, şebekenin gözlerine ait ikinci bir matris ile genişletilebilir; buna göz matrisi denir ve C ile gösterilir. Bunun n adet sütunu K da olduğu gibi şebeke kollarına karşı gelir r adet satır ise gözleri belirtir. Şebekede mümkün bütün gözler arasından -genellikle farklı şekilde- tamamen belirli r sayıda bağımsız göz seçilir ve bunlara C nin r adet satırı karşı gelir. Bu tip bağımsız r adet göz şöyle ayrılabilir: Şebekeden, bir göz oluşmaksızın bütün düğümleri kapsayan bir kol cümlesi seçilir; bu durumda her düğümden bir diğerine tek bir yoldan ulaşılabilir. Bu kollar $k - 1$ adet koldan oluşan (tam) bir ağaç oluşturur. Geri kalan

$$r = n - k + 1 \quad (1)$$

kola ağacın serbest veya bağımsız dalları adı verilir. Ağaca her defasında serbest dallardan bir tanesi eklenerek bir tek göz bulunur. Böylece bir ağaç seçilmek sureti ile r adet göz elde edilir ve bunlar, ileride görülebileceği gibi, bağımsızdır. Gözler $\rho = 1$ ile r arasında numaralanmış olsun.

Göz matrisi C aşağıdaki gibi bulunur ρ 'uncu satır üzerinde j koluna ait ρ, j noktasında, bu kolun gözünde olup olmamasına bağlı şekilde bir 1 veya 0 bulunur. Her gözde tek bir serbest kol bulunur. Kol ve gözlerin birbirine uygun numaralandırılması halinde göz matrisi

$$C = (C_1, I) \quad (2)$$

şeklini alır; burada I r -inci mertebeden birim matrisidir. Böylece C nin r adet satırının lineer bağımsız olduğu anlaşılır ve C matrisi satır düzgündür. Gözler ise bağımsızdır.

Şekil 24.1 deki örnek için ağaç olarak Şekil 24.2 deki 1, 2, 3, 4 no'lu kolları alalım. Serbest 5, 6, 7 no.lu kollara ait gözleri 1, 2, 3 ile göstereyim, Şekil 24.3. Bu durumda göz matrisi

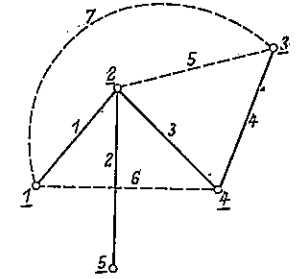
$$C = \left(\begin{array}{cccc|ccc} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) = (C_1, I)$$

şeklini alır. 2 no.lu kol için, beklendiği, bir göz söz konusu değildir. 2 nci sütun boştur. Diğer kolların her biri, en aşağı bir kere ortaya çıkar; yani üç gözün en az bir tanesinde vardır. Şebekenin bu şekilde

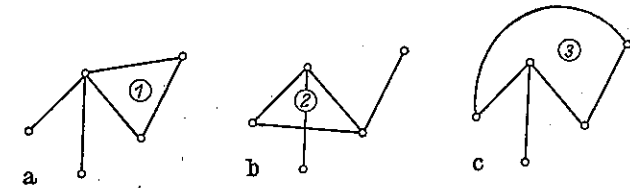
seçilmiş her göz matrisi ile düğüm matrisi arasında dikkate değer bir bağıntı vardır. Aşağıda göstereceğimiz gibi

$$KC' = 0 \pmod{2} \quad (3)$$

geçerlidir. C nin r adet satırı K 'nin $r - 1$ adet satırına, modülü 2 olan cebir anlamında, ortogondur. i -düğüme karşı gelen K nin k^i inci satırı, 1 ile düğüme açılan tüm kolları kapsar. Eğer düğüm ρ , gözünde ise, gözde ve düğümden en aşağı iki, ancak daima çift sayıda kol bulunur. Her k^i c^{ρ} skaler çarpımında çift sayıda $1 \cdot 1 = 1$ terimleri ortaya çıkar; ve böylece $1 + 1 = 0 \pmod{2}$ nedeni ile 0 elde edilir. Bir taraftan K nin $k - 1$ adet bağımsız satırının, diğer taraftan C nin r



Şekil 24.2.
Bir ağacın seçimi



Şek. 24.3a - c: Şekil 24.2. deki ağaca ait gözler.

adet bağımsız satırının kapladığı iki alt uzayın ortogonallığı nedeni ile, K ve C nin toplam n adet satırı beraberce, lineer bağımsız olur; yani toplam matris

$$A = \begin{pmatrix} K \\ C \end{pmatrix} \quad (4)$$

tekil olmayan matristir, ve $\det A = 1 \pmod{2}$ dir.

Örneğimiz için (3) denkleminin geçerliliği kolayca kontrol edilebilir.

$$K = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} A$$

C'nin herhangi bir satırı C ile gösterilir ise, (3) denklemi yardımı ile r adet lineer bağımsız göz, $Kc' = 0 \text{ mod } 2$ denklem sisteminin r adet lineer bağımsız çözüm şeklinde bulunabilir. (3) denklemi herhalde kontrol maksadı ile faydalıdır.

24.2. Yönlenmiş Şebeke.

Elektrik şebekelerinde her kola, akımı ve gerilimi belirten - serbest seçilebilir - bir yön verilir. Bu durumda düğüm matrisleri 0,1 dışında -1 elemanlarında ortaya çıkacak şekilde değişirler :

Düğüm matrisi K_0 ve K :

iJ noktasındaki eleman

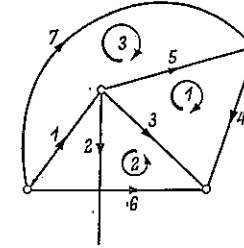
- +1, eğer J kolu i- düğümüne yönelmiş ise
- 1, eğer J kolu i- düğümüne ters yönelmiş ise
- 0, eğer J kolu i- düğümüne açılmıyor ise

Göz matrisi C :

ρ - nucu göz için bir dönme yönü seçildikten sonra ρ, j noktasındaki eleman

- +1, eğer kol yönü ile dönme yönü aynı ise
- 1, eğer kol yönü ile dönme yönü aynı ters ise
- 0, eğer j kolu ρ gözünde yok ise

Şekil 24-4 deki yönlerin esas olmadığı Şekil 24.1 deki örnek için düğüm matrisi



Şekil 24.4.

Yönlenmiş şebeke

$$K = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

olur. K_0 'dan çizilen 5.inci satır ise şudur :

$$K^5 = (0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0)$$

Şimdi mod 2 cebiri yerine yine adi sayılar ile hesap yapalım. K_0 ın tüm satırları toplamı sıfır satırını verir. K matrisi-ağışılmış anlamda- satır düzgündür.

Her dönme yönü, gözü oluşturan serbest kolun yönü ile çıkışacak şekilde seçilir; ve kollar, önce tüm ağaç kolları sonrada serbest kollar ortaya çıkacak şekilde numaralanır ise, göz matrisi yine (2) şeklini alır. Düğüm matrisi ile göz matrisi arasındaki bağıntı yine (3) denklemi ile, ancak adi cebir anlamında verilmiştir. Örneğimiz

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

dir.

24.3. Şebeke Hesabı.

J şebeke kollarındaki e_j elektromotor kuvvet (EMK) etkisi altında verilen z_j kol empedansları halinde şebekede bir akım oluşur. Şebeke hesabında, istenen i kol akımları, e_j EMK leri gibi bir n-inci mertebeden sütun matrisi ile gösterilebilir :

$$i = \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \\ \vdots \\ i_n \end{pmatrix}, \quad e = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix}. \quad (5)$$

Normal halde belirttikleri büyüklükler ile, karıştırılma tehlikesi olmaksızın, burada akım vektörü ve EMK vektöründen söz edelim. (i_j, e_j) bileşenleri, alternatif akım şebekeleri halindedir vektör, yani kompleks

sayılardır) kol emdanslarını bir köşegen matrisi, yani n-inci mertebeden kol-empedans matrisi şeklinde gösterelim.

$$\mathbf{Z} = \text{Diag}(z_j). \quad (6a)$$

Çünkü bu halde

$$\mathbf{Z}\mathbf{i} = (z_j i_j) \quad (7a)$$

çarpımı n adet koldaki gerilim düşmelerine ait vektörü verir. Ancak daima var olan kol empedansları yanında farklı şebeke kolları arasında indüktif kuplajlar ortaya çıkarsa köşegen matris (6a)'ın yerini tam kol-empedans matrisi

$$\mathbf{Z} = (z_{jl}) \quad (6)$$

olur; burada

$$z_{jj} = z_j = R_j + iX_j$$

ve

$$z_{jl} = -z_{lj} = i\omega L_{jl}.$$

Şimdi gerilim düşmeleri vektörü şöyle yazılır :

$$\mathbf{Z}\mathbf{i} = \left(\sum_{l=1}^n z_{jl} i_l \right). \quad (7)$$

u_j kol gerilimlerine yani düğüm-potansiyel farklarına ait $\mathbf{u}$ vektörünü

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}, \quad (8)$$

hesaba katarak Ohm. kanununu matris şeklinde yazalım :

$$\mathbf{u} = \mathbf{e} - \mathbf{Z}\mathbf{i} \quad (9)$$

Empedans matrisi $\mathbf{Z}$ tekil olmayan matris ise,¹ invers matris,

¹⁾ Bak H. EDELMANN : Arch. Elektrot. Bd. 44 (1959), s. 17 ff.

$$\mathbf{Y} = (y_{jl}) = \mathbf{Z}^{-1}, \quad (10)$$

kol admittans matrisi şeklinde olup, kuplaj olmaması halinde

$$\mathbf{Y} = \text{Diag}(1/z_j) \quad (10a)$$

şeklini alır. Böylece Ohm. kanunu da $\mathbf{i}$ ye göre çözülmüş şekilde yazılabilir.

$$\mathbf{i} = \mathbf{Y}(\mathbf{e} - \mathbf{u}), \quad (11)$$

buradaki gerilim vektörü $\mathbf{u}$, başlangıçta bilinmemektedir.

Buraya kadar şebeke kollarını, şebekeye bağlanma şekillerini göz-önüne almadan yalnız matrisler ile gösterdik. Ohm. kanununu, (9) ve (11) de yine bağımsız kola aittir. Şimdi şebeke topolojisi Kirchhoff denklem grubu şeklinde, yani bir taraftan düğüm denklemleri, diğer taraftan dönme-veya göz denklemleri şeklinde ele alınacaktır.

$\mathbf{K}$ ve $\mathbf{C}$ düğüm matrisleri kullanılarak, şöyle yazılabilir :

$$\mathbf{K}\mathbf{i} = \mathbf{0} \quad \text{Düğüm denklemi} \quad (12)$$

$$\mathbf{C}\mathbf{u} = \mathbf{0} \quad \text{Göz denklemi} \quad (13)$$

Şekil 24.1. - 24.4 deki örneğimiz için şunlar geçerlidir :

$$\text{Düğüm 1: } -i_1 - i_6 - i_7 = 0$$

$$\text{Düğüm 2: } i_1 - i_2 - i_3 - i_5 = 0$$

$$\text{Düğüm 3: } -i_4 + i_5 + i_7 = 0$$

$$\text{Düğüm 4: } i_3 + i_4 + i_6 = 0$$

$$\text{Düğüm 5: } i_2 = 0$$

$$\text{Göz 1: } -u_3 + u_4 + u_5 = 0$$

$$\text{Göz 2: } -u_1 - u_3 + u_6 = 0$$

$$\text{Göz 3: } -u_1 - u_3 + u_4 + u_7 = 0.$$

Bunların herbiri n adet i_j ve u_j bilinmeyenleri arasında bir bağ oluşturur. Akımlarda $k - 1$ bağ vardır; çünkü k adet düğüm denklemlerinden bir tanesi geri kalan $k - 1$ adet denkleme lineer bağımlıdır. Kol

gerilimlerinde ise, r adet bağıntı vardır. Böylece akımlar için $n - k + 1 = r$ denklem, gerilimler için ise $n - r = k - 1$ denklem bağımsızdır. Problemimizin incelenmesine devam amacı ile, eksik denklemler yerine bağımsız yeni bilinmeyenler, yani ya r adet yeni akım büyüklüğü veya $k - 1$ adet yeni gerilim büyüklüğü almak gerekir. Böylece çözülecek denklem sayısı r 'ye veya $k - 1$ 'e indirgenmiş olur. Bunlar çözüldükten sonra yeni bilinmeyenlerden, başlangıç bilinmeyenleri, yani alınan n adet i_j kol akımı kolayca bulunur. Takip edilecek yola göre, aşağıda ayrı veya verilen dönme yöntemi veya düğüm yöntemi seçilir.

A. Dönme Yöntemi

Bir ağacın seçilmesi ile belli şebekenin r adet bağımsız ve, C dönme matrisi ile gösterilen gözleri için yeni r bilinmeyeni olarak, i_0 dönme akımları alınır; ve bunlar

$$i_0 = \begin{pmatrix} i_1^0 \\ i_2^0 \\ \vdots \\ i_n^0 \end{pmatrix} \quad (14)$$

dönme akım vektörü ile gösterilir. Bunlar r adet bağımsız ve başlangıçta serbestçe seçilebilen büyüklükler olup esas i_j kol akımları bunların süperpozisyonundan bulunur. Dönme akımları yardımı ile ve

$$i = C' i_0 \quad (15)$$

uyarınca, kol akımları tamamen bellidir. Bu bağıntının geçerliliği, üç bağımsız dönmeye i_1^0, i_2^0, i_3^0 gibi üç dönme akımının karşı geldiği, örneğimizden hemen anlaşılır. Şekil 24.4 den doğrudan doğruya anlaşılacağı gibi denklem (15) uyarınca bunlardan kol akımları şöyle hesaplanır :

$$\begin{aligned} i_1 &= -i_2^0 - i_3^0 \\ i_2 &= 0 \\ i_3 &= -i_1^0 - i_2^0 - i_3^0 \\ i_4 &= i_1^0 + i_3^0 \\ i_5 &= i_1^0 \\ i_6 &= i_2^0 \\ i_7 &= i_3^0 \end{aligned}$$

Serbest 5, 6, 7 no.lu ağaç dallarındaki son $r = 3$ kol akımı kararlaştırıldığı üzere dönme akımlarına eşittir.

r adet yeni i_0 bilinmeyenlerine ait denklem sistemi (13) Kirschhoff denklemlerinde Ohm. kanunu denklemi (9) yerine konularak ve denklemi (9) yerine konularak ve denklem (15) uyarınca i kol akımları yerine i_0 dönme akımları geçirilerek bulunur.

$$Cu = C(e - Zi) = Ce - CZC' i_0 = 0,$$

yani

$$CZC' i_0 = Ce,$$

kısaca

$$Z_0 i_0 = e_0 \quad (16)$$

burada r -inci mertebeden dönme empedans matrisi

$$Z_0 = CZC' \quad (17)$$

ve dönme EMK

$$e_0 = Ce \quad (18)$$

dir. Tekil olmayan şebeke empedansı Z halinde satır düzgün C matrisi nedeni ile dönme empedansı Z_0 da tekil olmayandır. Bu durumda (16) denklem sistemi bilinmeyen i_0 dönme akımlarına göre çözülebilir. Bundan sonra, i kol akımları (15) denkleminde hesaplanarak şebeke hesabı problemi çözülmüş olur. Dönme sayısı r , kol sayısının yarısı olan n den küçük veya buna eşit ise yani $r - k - 1$ ise, dönme yönteminin kullanılması faydalıdır.

(15) denklemi (12) düğüm denklemlerinde yerine konarak

$$KC' i_0 = 0$$

bulunur. Bu bağıntı şebekede mümkün tüm akımlar için geçerli olacağından ancak yalnız verilen e gerilimlerinden doğanlar için söz konusu olmadığından ve dönme akımları serbestçe seçilebildiğinden düğüm matrisi ile dönme matrisi arasında, yukarıda tamamen başka bir yoldan bulunan şu bağıntı elde edilir.

$$KC' = 0 \quad (19)$$

Yukarıdaki denklemler, enerji korunumu nedeni ile, aşağıdaki koordinat dönüşümünde gücün invariant kalışına uygundur :

$$\mathbf{i} = \mathbf{C}' \mathbf{i}_0, \quad \mathbf{e}_0 = \mathbf{C} \mathbf{e}.$$

N nominal güç ne N_B kör güç olmak üzere $S = N + i N_B$ kompleks güç katsayısı şeklinde tüm şebekede dönüşen güç

$$S = \mathbf{i}^* \mathbf{e} = \sum_j \bar{i}_j e_j$$

skaler çarpımına eşittir; burada $\mathbf{i}^*$ eşlenik transpoze akım vektörünü göstermektedir :

$$\mathbf{C} \mathbf{u} = \mathbf{C} \mathbf{e} - \mathbf{C} \mathbf{Z} \mathbf{i} = \mathbf{0} \quad (13a)$$

şeklindeki Kirchhoff göz denklemleri dikkate alınarak

$$\mathbf{i}^* \mathbf{e} = \mathbf{i}_0^* \mathbf{C} \mathbf{e} = \mathbf{i}_0^* \mathbf{C} \mathbf{Z} \mathbf{i} = \mathbf{i}_0^* \mathbf{C} \mathbf{Z} \mathbf{C}' \mathbf{i}_0 = \mathbf{i}_0^* \mathbf{Z}_0 \mathbf{i}_0 = \mathbf{i}_0^* \mathbf{e}_0.$$

elde edilebilir.

$$\mathbf{i} = \mathbf{T} \tilde{\mathbf{i}}, \quad (20)$$

uyarınca genel olarak $\mathbf{i}$ akımlarının yeni $\tilde{\mathbf{i}}$ akım değerlerine dönüştürülmesi söz konusu ise, invariant güç gerilimler için aşağıdaki kontragra diyent dönüşümü gerektirir :

$$\tilde{\mathbf{e}} = \mathbf{T}^* \mathbf{e}. \quad (21)$$

Çünkü ancak bu durumda

$$\mathbf{i}^* \mathbf{e} = \tilde{\mathbf{i}}^* \tilde{\mathbf{e}} \quad (22)$$

olur. Empedans ise,

$$\tilde{\mathbf{Z}} = \mathbf{T}^* \mathbf{Z} \mathbf{T} \quad (23)$$

şekline dönüşür.

B. Düğüm Yöntemi

Burada yeni bilinmeyen olarak,

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_{k-1} \end{pmatrix} \quad (24)$$

ile gösterilen v_1 düğüm potansiyelleri alınır; ve ($\mathbf{K}$ da çizilmiş olan) referans düğümünün potansiyeli $v_k = 0$ kabul edilir. Böylece u_j kol gerilimleri potansiyel farkları olarak bellidir :

$$\mathbf{u} = \mathbf{K}' \mathbf{v}. \quad (25)$$

Böylece örneğimiz için şunlar elde edilir :

$$\begin{aligned} u_1 &= -v_1 + v_2 \\ u_2 &= -v_2 \\ u_3 &= -v_2 + v_4 \\ u_4 &= -v_3 + v_4 \\ u_5 &= -v_2 + v_3 \\ u_6 &= -v_1 + v_4 \\ u_7 &= -v_1 + v_3 \end{aligned}$$

$k - 1$ adet yeni $\mathbf{v}$ bilinmeyenlerine ait denklem sistemi Kirchhoff düğüm denklemlerinden çıkarılır; şöyle ki $\mathbf{i}$ yerine (11) denklemindeki Ohm. kanunu ve $\mathbf{u}$ kol gerilimleri yerine denklem (25) uyarınca $\mathbf{v}$ düğüm potansiyelleri konulur :

$$\mathbf{K} \mathbf{i} = \mathbf{K} \mathbf{Y} (\mathbf{e} - \mathbf{u}) = \mathbf{K} \mathbf{Y} \mathbf{e} - \mathbf{K} \mathbf{Y} \mathbf{K}' \mathbf{v} = \mathbf{0},$$

yani

$$\mathbf{K} \mathbf{Y} \mathbf{K}' \mathbf{v} = \mathbf{K} \mathbf{Y} \mathbf{e}$$

kısaca

$$\mathbf{Y}_+ \mathbf{v} = \mathbf{K} \mathbf{Y} \mathbf{e} \quad (26)$$

burada

$$\mathbf{Y}_+ = \mathbf{K} \mathbf{Y} \mathbf{K}'$$

(27)

düğüm-admittans matrisidir. Kol empedansı $\mathbf{Z}$ ve $\mathbf{Y} = \mathbf{Z}^{-1}$ tekil olmayan ise, satır düzgün $\mathbf{K}$ nedeni ile $\mathbf{Y}_+$, de tekil olmayandır; ve böylece (26) sistemi $\mathbf{v}$ ye göre çözülebilir. $\mathbf{v}$ yardımı ile (25) den $\mathbf{u}$ kol gerilimi ve böylece (11) denkleminde $\mathbf{i}$ kol akımları hesaplanır. Bağımsız düğüm sayısı $k - 1$, bağımsız dönme sayısı r den küçük ise ve ayrıca admittans matrisi $\mathbf{Y}$ (10a) denklemindeki köşegen matris olacak şekilde şebekede kollar arasında indüktif kuplajlar yok ise düğüm metodunun kullanılması tavsiye edilir.

25. Statik Uygulamalar.

25.1. Genel Bakış.

Lineerlik kanunu, tekniğin diğer dallarına oran ile statikte daha çok kullanılır. Dolayısı ile bu kanun, matris hesabının uygulanmasında özel olarak takdim edilmelidir. Ancak bu yöndeki gelişme çok daha sonraları başlamıştır; özellikle hesap kapsamının, yeni ve güçlü hesap yöntemlerinin bulunmasını zorunlu kıldığı uçak statığında bu durum söz konusudur. Elektronik hesap makinalarının kullanılması ile matris hesabı, bu alanda ideal ve pratik önem kazanmıştır. Bu konu ile ilgili olarak Langefors¹, Argyris² ve diğerlerinin çalışmalarını sayabiliriz.

Aşağıda yalnız temel düşünceler ortaya konacaktır; * bunlar, esasa ilgili klâsik statik yöntemlere dayanır.

Burada yüksek dereceden hiperstatik sistemlerin hesabı söz konusudur. Denklem sistemlerinin büyüyen kapsamı elektronik hesap makinaları ile birlikte matris hesabının kullanılmasını mantıksal kılsa bile matris hesabının bu probleme uygulanması statik belirsiz sistemlerin

¹) Langefors, B.: Analysis of elastic structures by matrix transformation etc. J. aeron. Sci. Bd. 19 (1952), s. 451 - 58.

²) Argyris, J. H.: Energy theorems and structural analysis. Part I, General Theory. Aircr. Eng. Bd. 26 (1954), s. 347 - 56, 383 - 87, 394; Bd. 27 (1955), s. 42 - 58, 80 - 94, 125 - 134, 145 - 158. Dir Matrizentheorie der Statik. Ing. Arch. Bd. 25 (1957), s. 174 - 194. - ARGYRIS, J. H., u. S. KELSEY: Structural analysis by matrix force method etc. Jahrb. Wiss. Ges. Luftfahrt 1956, s. 78 - 98. In diesen Arbeiten auch weiteres Schrifttum.

* Mükemmel bir giriş şu kitapta verilmiştir. E. C. Pestel, F. A. Leckie: Matrix Methods in Elastomechanics, Mc Graw - Hill. 1963.

hesabı ile ilgili lineer denklem sisteminin çözümü ile sonuçlanırsada problem görüldüğü kadar basit değildir. Denklem sistemleri ve bunların sayısal çözümleri bir lineer hesap zincirinin yani matris işleminin son adımını oluştururlar; bunlar ise, denklemleri, şematik şekilde kurmak sureti ile otomatik hesaba hazırlarlar. Temel fikir - önemli impulsların çıktığı elektrik şebekeleri ile geniş anlamda analizi halinde - yapı sisteminden, bilinen elastik özellikli basit elemanlara (çubuklar, kirişler, veya daha kompleks elemanlar) geçmek, bunların kolayca görülebilen belirli elâstik davranışını belirtmek ve elemanları - kinematik ve dinamik uyum koşullarını sağlayarak - tekrar yapı sisteminde birleştirmek - tir. Bu işlem - elektrik şebekelerinin düğüm matrislerine uygun olarak - belirli yapı matrisleri ile yapılır; bunlar ise, yapı elemanlarının elâstik özelliklerinden bağımsız olarak statik yapıyı belirtirler. Esas statik düşünceler ilgili yapı matrisinin kurulmasını öngörürler. Geri kalan işlemler matris hesabı ile otomatik yoldan yapılır.

Statikte lineerlik, üç temel matris bağıntısı ile belirlenen üç tipte ortaya çıkar. Yapı meelanlarındaki gerilmeler (çubuk kuvvetleri, eğilme momentleri, kesme kuvvetleri) yapıya etkiyen yüklere tam lineer olarak bağılırlar; ancak sistem rijit veya - alışılmış kabul uyarınca - sistem deformasyonları boyutlara oran ile küçük olmalıdır. Sistem noktalarındaki (örneğin, yük tatbik noktalarındaki) yer değiştirmeler, - şekil değiştirmeler küçük olmak üzere - yine yapı elemanlarının deformasyonlarına lineer olarak bağılırlar. Yükden ileri gelen yer değiştirmeler ve diğer sistem noktalarının yer değiştirmeleri de yüklere lineer bağılır; ancak elemanlardaki gerilmeler ile şekil değiştirmeler arasında lineer bir bağıntı olmalıdır; diyer bir deyim ile Hooke kanunu geçerli olmalıdır. İlk iki lineerlik, elastisite konumundan bağımsızdır. Sonuncu ise, elastisite konumunun lineerliği ile ilgilidir. İncelemelerin yalnız bu son kısmında yapı elemanlarının kesitleri ve elâstik özellikleri hesaba katılmıştır. Yani bu kısımda bir taraf olan yapı elemanlarının boyutlandırılması, diğer taraftan esas kabul edilen elastiklik ele alınmıştır. Klâsik statikte esas alınan lineer elastisite kanunu halinde tüm hesap lineer özellik gösterir. Böylece statik belirsiz sistemlerin hesabı için lineer denklem sistemleri ortaya çıkar. Ancak elastisite kanunu lineer olmaktan çıkar ise, yani orantı ve akma sınırı aşılar ise, lineer işlemler - yani matris hesabı uygulanması kısmen mümkün olur. Özellikle statik belirsiz sistemlerin hesabında kullanılan denklem sistemi lineer - olmayan şekle girer

25.2. Elemanlarda Gerilme ve Şekil Değiştirmeler.

Yapı elemanlarında, kısaca gerilme adı verilen zorlamalar ile, şekil değiştirmeler arasındaki bağıntıdan hareket ile lineer elastisite kanununu ele alalım; lineer - olmayan elastiklik ilerde incelenecektir. Yapı sistemi s adet elemandan oluşsun; bu elemanlardan her birinde belirli bir zorlanma olur ve bu tek bir gerilme s_i (örneğin kafes kirişteki S_i çubuk kuvveti, burulmağa çalışan bir milde M_i burulma moment) ile veya bir s_i sütun vektörü ile gösterilen s_{ij} zorlamaları (örneğin lineer moment değişimi halinde kiriş parçasındaki başlangıç - veya uç eğilme momentleri M_{i1}, M_{i2} veya kuadratik moment değişimi halinde başlangıç, orta ve uçdaki üç değer) ile tamamen belirlidir. Zorlanma belirli bir şekil değiştirme doğurur. s_i gerilme değerine v_i şekil değiştirmesi (örneğin çekme çubuğunda Δl uzaması, burulma çubuğunda φ burulma açısı), $s_i = (s_{ij})$, zorlanma grubuna ise eşit sayıda v_{ij} şekil değişimlerinden oluşan $v_i = (v_{ij})$ şekil değiştirme grubu karşı gelir. Şekil değiştirme grubu, - az veya çok kayfiliyle - gerilme grubu seçimine bağlı olarak

$$2 A_i = s'_i v_i = \sum_j s_{ij} v_{ij} \quad (1)$$

bağıntısı ile bellidir; burada A_i , i-ninci yapı elemanında depolanan şekil değiştirme enerjisidir. Münferit gerilmelerden veya gerilme gruplarından oluşan s adet s_i gerilmeleri ve bunlara karşı gelen, münferit şekil değiştirmelerden veya şekil değiştirme gruplarından oluşan v_i şekil değiştirmeleri, birer

$$s = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_s \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_s \end{pmatrix} \quad (2)$$

sütun vektöründe toplanır; bunların s bileşenleri skaler veya vektör (sütun) olabilir.

Lineer elastiklik halinde i-inci elemandaki s_i gerilmeleri ile v_i şekil değiştirmeleri arasında

$$v_i = f_i^0 s_i \quad (3)$$

bağıntısı vardır; burada f_i^0 fleksibilite olup münferit s_i, v_i halinde f_i^0 skalerin, s_i, v_i grupları halinde ise, kuadratik - simetrik bir matris gösterir. Yani, elemanların s gerilme vektörü ve v şekil değiştirme vektörü arasındaki tam bağıntı :

$$v = F_0 s \quad (4)$$

şeklinde olup, burada

$$F_0 = \begin{pmatrix} f_1^0 & & 0 \\ & f_2^0 & \\ 0 & & f_s^0 \end{pmatrix} \quad (5)$$

kuadratik-simetrik esas fleksibilite matrisi olup, elemanları yine kuadratik alt-matrisler olan bir köşegen matrisdir.

25.3. Fleksibilite.

f_i^0 ifadeleri - f_i^0 skaleri halinde - doğrudan doğruya yazılabilir; veya şekil değiştirme enerjisi denklemi (1) ile (3) denkleminden çıkartılabilir. Aşağıda i eleman indisi, $l_i = l$ uzunluklarını, $F_i = F$ kesitlerini ve $I_i = I$ atalet momentlerini göstermekte kullanılacaktır. Çekme - veya burulma çubuğu için hemen şunları yazabiliriz :

$$\text{Çekme:} \quad s_i = S, \quad f_i^0 = \frac{l}{EF} \quad (6)$$

$$\text{Burulma:} \quad s_i = M_T, \quad f_i^0 = \frac{l}{GI_p} \quad (7)$$

Alanı $F = a \cdot b$, kalınlığı t olan ve sabit q yazılı yükü etkisindeki dikdörtgen şeklinde bir çubuk halinde, yüzey elemanı $dx \cdot dy$ de depolanmış şekil değiştirme enerjisi dA , $\tau = q/t$ kayma gerilmesi $\gamma = \tau/G$ kayma açısından bulunur :

$$2 dA = \tau y dx dy \cdot t = \frac{q^2}{tG} dx dy,$$

yani toplam olarak sabit t kalınlığı halinde

$$2 A_i = \frac{q^2 F}{t G} = q^2 f_i^0$$

ve buradan

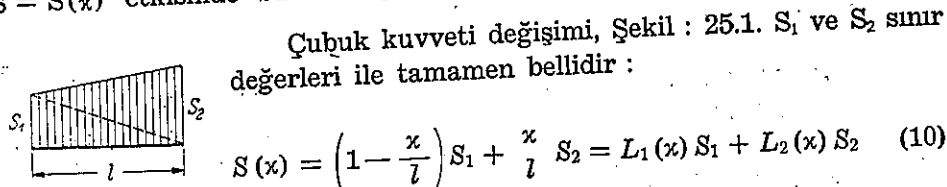
$$\text{Çubuk için: } s_i = q, \quad f_i^0 = \frac{F}{Gt} = \frac{ab}{Gt} \quad (8)$$

çıkar.

s_i, v_i gerilme ve şekil değiştirme gurupları halinde A_i şekil değiştirme enerjisi için (1) ve (3) den

$$2 A_i = s_i' v_i = s_i' f_i^0 s_i \quad (9)$$

bulunur. Bu, f_{ik} katsayıları, aranan $f_i^0 = (f_{ik})$ matrisinin elemanları s_i gerilme değerleri cinsinden kuadratik bir forma sahiptir. Bu durumu, uzunluğu l , uzama rijitliği EF olan, lineer değişken çubuk kuvveti $S = S(x)$ etkisinde bulunan çubukta açıklayalım.



Şek. 25.1. Lineer değişken çubuk kuvveti $S=S(x)$.

burada $L_1(x) = 1 - \frac{x}{l}$ ve $L_2 = x/l$

lineer fonksiyonları lineer Lagrange polinomlarını gösterir. Bilinen şekil değiştirme enerjisi ifadesi

$$2 A = \int_0^l \frac{S(x)^2}{EF} dx$$

de $S(x)$ yerine (10) denklemini alınarak

$$2 A = f_{11} S_1^2 + 2 f_{12} S_1 S_2 + f_{22} S_2^2$$

bulunur; burada :

$$f_{ik} = \int_0^l \frac{L_i(x) L_k(x)}{EF} dx \quad (11)$$

integralleri i-ninci çubukdaki f_i^0 , fleksibilite matrisinin elemanlarıdır. Sabit çubuk kesiti F halinde, yukarıda verilen $L_j(x)$ lineer polinomlarından

$$f_i^0 = \frac{l}{6 EF} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad (12)$$

kuadratik matrisi elde edilir.

Lineer değişken eğilme momenti $M(x) = L_1(x) M_1 + L_2(x) M_2$ etkisindeki eğilme çubuğu halinde - kayma şekil değiştirmesi ihmal edilerek - fleksibilite matrisi bulunur :

$$f_i^0 = \frac{l}{6 EI} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad (13)$$

Bu denklem, sabit eğilme rijitliği EI için (11) denkleminin paydasına EI konarak da bulunur.

Parabolik değişken eğilme momenti $M(x)$ halinde bu, çubuk parçasının başında, ortasında, ucundaki M_1, M_2, M_3 değerleri cinsinden aşağıdaki şekilde bulunur :

$$M(x) = L_1(x) M_1 + L_2(x) M_2 + L_3(x) M_3 \quad (14)$$

burada kuadratik Lagrange polinomları kullanılmıştır. Şimdi f_{ik} elemanlı ve paydasına EI yazılmış (11) denkleminde çıkan 3 üncü mertebeden f_i^0 matrisi, sabit eğilme rijitliği EI halinde

$$f_i^0 = \frac{l^3}{30 EI} \begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 2 & 16 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \quad (15)$$

şeklinde bulunur. Ancak eğilme momenti değişimi, lineer değişken $q(x)$ yazılı yükü nedeni ile bir giriş parçasında kübik ise, gerilme değerleri olarak iki M_i eğilme momenti ve bunların türevi olan $Q_i (i=1,2)$ kesme kuvvetleri seçilir. $L_i(x)$ Hermitsel interpolasyon polinomlarını kapsayan

$$M(x) = L_1(x) M_1 + L_2(x) M_2 + L_3(x) Q_1 + L_4(x) Q_2 \quad (16)$$

ifadesi, yukarıda olduğu gibi 4. üncü mertebe fleksibilite matrisini verir :

$$f_i^0 = \frac{l}{420 EI} \begin{pmatrix} 156 & 54 & 22l - 13l \\ 54 & 156 & 13l - 22l \\ 22l - 13l & 13l - 22l & 4l^2 - 3l^2 \\ -13l & -22l & -3l^2 & 4l^2 \end{pmatrix} \quad (17)$$

Böylece en sık rastlanan yapı elemanlarına ait fleksibiliteler bir araya toplanmış olur.

25.4. Strüktür Matrisi.

Elemanlardaki s gerilmeleri yüklere lineer olarak bağlıdır. Tüm yüklerin iki katına çıkarılması halinde, bütün zorlamalarda iki katına çıkar. Sistem, kabul edildiği gibi, statik belirsiz ise, zorlanmalar (çubuk kuvvetleri, eğilme momentleri) yüklerden tam statik yol ile bulunamaz; elastik şekil değiştirmeler de dikkate alınmalıdır. Fazla bağların atılması ile, sistem statik belirli temel sisteme dönüşür; bu yeni sistemde, atılmış olan bağların yerini, x_i bilinmeyen dış yükleri, yani statik bilinmeyenler alınmıştır; ve bunlar, gerçek sistemin ön gördüğü şekilde yer değiştirme etkileri ihmal edilerek hesaplanırlar. s zorlanmaları lineer olarak yükler ve ek - halen bilinmeyen - X_i kuvvetleri cinsinden aşağıdaki matris şeklinde ifade edilir:

$$s = s_0 + C_1 x \quad (18)$$

burada x , n adet statik bilinmeyenden oluşan sütun matrisidir:

$$x = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix} \quad (19)$$

s_0 sütunu yalnız, her i için $X_i = 0$ halindeki yükler altında statik belirli ana sistemin zorlanmalarını belirtir. C_1 matrisinin k . nıncı sütunu c_k^1 ise, $i \neq k$ için $X_i = 0$ ve dış kuvvetlerin ihmalı koşulu ile, $X_k = 1$ yükü altında ana sistemdeki s zorlanmasını gösterir. Bu s_0 ve c_k^1 sütunları statik belirli ana sistemde tam statik yoldan da bulunabilir (kafes kiriste Cremona plânları, kiriş ve çerçevelerde moment diyagramları). Böylece C_1 matrisi sistemin strüktürü ile belli olup, bu neden ile de strüktür matrisi adını alır. s_0 sütunu ayrıca sistemin yüküne bağlıdır.

Problemin çözümü için gereken statik düşünceler s_0 ve c_k^1 sütunlarının kurulmasında belirtilmiştir. F_0 fleksibilite matrisi her yapı elemanı için tamamen belli f_i^0 fleksibilitelerinin yanyana sıralanmasından oluşur. Geri kalan kısım, ilerde görüleceği gibi, tam şematik yoldan ve matris hesabı yardımı ile tamamlanır.

Lineer elastiklik halinde Castigliano teoremi yardımı ile statik bilinmeyenleri veren denklemler yazılabilir; bu durumda statik bilinmeyenler, A şekil değiştirme enerjisini minimum kılarlar. $2A = s'v = s'F_0s$ denkleminde (18) yerine konularak

$$\begin{aligned} 2A &= (s_0' + x' C_1') F_0 (s_0 + C_1 x) \\ &= s_0' F_0 s_0 + 2x' C_1' F_0 s_0 + x' C_1' F_0 C_1 x \\ &= 2A_0 + 2x' f_{10} + x' F_{11} x \end{aligned}$$

bulunur. Buradan $\partial A / \partial x = 0$ koşulundan

$$F_{11} x + f_{10} = 0 \quad (20)$$

lineer denklem sistemi elde edilir; burada $x = (X_i)$ statik bilinmeyenin hesabı için aşağıdaki kısaltmalar kullanılmıştır:

$$F_{11} = C_1' F_0 C_1, \quad (21a)$$

$$f_{10} = C_1' F_0 s_0. \quad (21b)$$

Simetrik $n \times n$ matrisi F_{11} , bir fleksibilite matrisi olup, $F_{11}x$ ifadesi ana sistemde yalnız X_i etkisi altında, X_i yüklerin tatbik noktalarındaki yer değiştirmeleri gösterir (20) denklemindeki f_{10} serbest terimleri, X_i lerin ihmalı halinde bu noktalardaki yer değiştirmeleri belirtir. (20) denklemi, bu iki yer değiştirmenin birbirini yok etmesini öngörür.

x statik bilinmeyenleri (20) denklem sistemleri çözülerek bulunduktan sonra, yapı elemanlarındaki $s = (s_i)$ zorlanmaları (18) denkleminde ve $v = (v_i)$ şekil değiştirmeleri $v = F_0 s$ den bulunarak problem çözülmüş olur.

25.5. Şekil Değiştirmeler ve Yer Değiştirmeler.

Yapı elemanlarının v şekil değiştirmeleri yukarıda verilen yöntem ile bulunduktan sonra, bunlara tam geometrik şekilde bağlı olan geliş güzel noktalardaki $r = (r_i)$ yer değiştirmeleri, birinci mertebe teorisi

uyarınca sistem boyutlarına oran ile küçük oldukları sürece lineer şekilde hesaplanabilirler. Bağıntının geometrik yoldan (yer değiştirme plânı) çıkarılması genellikle güçtür. Burada da tam statik metod ile ve iş ifadeleri yardımı ile çalışmak daha rahattır. (Virtüel yer değiştirmeler veya Virtüel kuvvetler prensibi). Bu maksat ile, verilmiş v şekil değiştirme sisteminde, hesaplanacak her yer değiştirme bileşeni r_i doğrultusunda bir $\bar{P}_i$, virtüel kuvveti düşünelim; bu tip bir kuvvet ilgili yer değiştirmenin nedeni olamaz. Bu fiktif $\bar{P}_i$ kuvvetleri, r_i yer değiştirmeleri ile birlikte düşünülür ise, $\Sigma \bar{P}_i \cdot r_i = \bar{p}'r$ işini yaparlar ve burada

$$r = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_N \end{pmatrix}, \quad \bar{p} = \begin{pmatrix} \bar{P}_1 \\ \bar{P}_2 \\ \vdots \\ \bar{P}_N \end{pmatrix} \quad (22)$$

Bu fiktif kuvvetlere yapı elemanlarındaki fiktif $\bar{s}$ zorlanmaları karşı gelir; bunlar statik belirsiz sistemde belli bir dereceye kadar keyfi olarak ve $\bar{p}$ kuvvetleri ile denge sistemi oluşturacak şekilde seçilebilirler. Bu amaç ile statik belirli ana sistemde, $\bar{p}$ kuvvetlerinden tam statik olarak bulunan ve aralarında

$$\bar{s} = C_0 \bar{p} \quad (23)$$

lineer bağıntısı olan zorlanmalar seçilir. Bu ikinci strüktür matrisi C_0 'ın N adet sütunu arasından k . nıncı sütun c_k^0 ile tam statik yoldan, $i \neq k$ için $P_i = 0$ halinde $\bar{P}_k = 1$ yükü altında statik belirli ana sistem zorlamaları olarak, yani birinci strüktür matrisi C_1 'in satırları gibi bulunur. $\bar{s}$ ile $\bar{p}$ arasındaki denge koşulu bu durumda

$$\bar{s}'v = \bar{p}'r, \quad (24)$$

iş denklemi şeklini alır; ve buradan, (23) yardımı ile

$$\bar{p}'C_0'v = \bar{p}'r$$

bulunur. Bu denklem gelişigüzel $\bar{p}$ yükleri için geçerli olduğundan hesaplanan v şekil değiştirmeleri ve r yer değiştirmeleri arasındaki aranan bağıntı olarak

$$r = C_0'v \quad (25)$$

yer değiştirme denklemi çıkar. Bu bağıntı da, statik esaslara dayanan bir strüktür matrisi ile gösterilecektir.

Denklem (25), Argyris'in özellikle belirttiği gibi, elastiklik prensibinin lineer veya lineer - olmayan halinden bağımsız şekilde geçerlidir. Çünkü denklemin çıkarılmasında elastiklik prensibi kullanılmamıştır. Lineer elastiklik $v = F_0s$ halinde, (18) denklemi yardımı ile (25) denkleminde

$$F_{01}x + f_{00} = r \quad (26)$$

denklem sistemi elde edilir; burada şu kısaltmalar kullanılmıştır :

$$F_{01} = C_0'F_0C_1 \quad (28a)$$

$$f_{00} = C_0'F_0s_0 \quad (28b)$$

Sistemin yükü gerçekten yalnız fiktif $\bar{p}$ kuvvetlerinden oluşuyor ise ve başka da yük yok ise (18) yerine

$$s = C_0p + C_1x \quad (18a)$$

denklemi yazılır. Lineer elastiklik halinde, yukarda olduğu gibi, (20) ve (26) denklemleri

$$F_{11}x + F_{10}p = 0 \quad (20a)$$

$$F_{01}x + F_{00}p = r \quad (26a)$$

elde edilir. Ayrıca (21a) ve (28a) fleksibilite matrislerine ek olarak

$$F_{01} = C_0'F_1C_1 = F_{10}', \quad (29a)$$

$$F_{00} = C_0'F_0C_0. \quad (29b)$$

(20a) denkleminde

$$x = -F_{11}^{-1}F_{10}p$$

şeklinde çözülmesi ve bunun (26a) denkleminde yerine konulması ile, yükler ile yükden ileri gelen yer değiştirmeler arasındaki lineer bağıntı olarak

$$\boxed{\mathbf{r} = \mathbf{F} \mathbf{p}} \quad (30)$$

elde edilir. Burada sistem fleksibilite matrisi şudur :

$$\boxed{\mathbf{F} = \mathbf{F}_{00} - \mathbf{F}_{01} \mathbf{F}_{11}^{-1} \mathbf{F}_{10}} \quad (31)$$

(30) denklemi özellikle dinamik zorlanan sistemlerde önem kazanır; bu $\mathbf{P}_j = -m_j \mathbf{r}_j$ kuvvetleri atalet kuvvetleri olup $\mathbf{M} = \text{diag}(m_j)$ olmak üzere

$$\mathbf{p} = -\mathbf{M} \ddot{\mathbf{r}}$$

matrisi şeklinde yazılır. Böylece (30) denklemi aşağıdaki titreşim diferansiyel denklemi sistemine dönüşür :

$$\boxed{\mathbf{F} \mathbf{M} \ddot{\mathbf{r}} + \mathbf{r} = \mathbf{0}} \quad (32)$$

25.6. Lineer olmayan Elastiklik.

Statik bilinmeyenlerin hesabında kullanılan § 25.4. Castigliano teoreminden çıkartılan (20) denklem sistemi, - daha genel şekilde - $\mathbf{X}_i$ lerin tatbik noktalarında birbirlerini yok eden yer değiştirmeler esas alınarak ve virtüel kuvvetler prensibi yardımı ile, (25) denkleminin benzer şekilde de bulunabilir :

$$\boxed{\mathbf{r}_X = \mathbf{C}'_1 \mathbf{v} = \mathbf{0}} \quad (33)$$

Bu denklem, elastisite kuralına bağlı değildir; ancak lineer elastiklik $\mathbf{v} = \mathbf{F}_0 \mathbf{s}$ halinde (33) ile, (18) denklemlerinden (20) lineer denklem sistemi çıkar. Ayrıca, $\mathbf{x} = (\mathbf{X}_i)$ bilinmeyenleri için, genel lineer-olmayan bir denklem sisteminin söz konusu olduğu lineer-olmayan hal de incelenebilir. Bu amaç ile

$$\mathbf{v} = \mathbf{F}_0 (\mathbf{I} + \Phi(\mathbf{s})) \mathbf{s} \quad (34)$$

şeklindeki Denke Formülü kullanılır; burada $\Phi(\mathbf{s}) = (\varphi_{ik})$ matrisinin $\varphi_{ik}(s_k)$ elemanları s_k gerilme değerlerinin lineer - olmayan fonksiyonlarıdır. Lineer elastiklik davranışına, burada lineer - olmayan bir kısım

süper poze edilir. Bu neden ile aşağıdaki tam köşegen matrisle hali ile yetinilecektir :

$$\mathbf{F}_0 = \text{Diag}(f_i^0), \quad \Phi(\mathbf{s}) = \text{Diag}(\varphi_i(s_i)) \quad (35)$$

Çünkü f_i^0 matrislerinde şekil değiştirme ve gerilme bileşenleri arasındaki bağıntılara esas olan lineer süper pozisyonlar burada söz konusu değildir. Bu kısıtlama göz önüne alınarak aşağıdaki gibi hareket edilir; $\mathbf{s} = \mathbf{s}_0 + \mathbf{C}_1 \mathbf{x}$ olmak üzere (34) denklemi (33) de yerine konularak

$$\mathbf{C}'_1 \mathbf{F}_0 (\mathbf{I} + \Phi(\mathbf{s})) (\mathbf{s}_0 + \mathbf{C}_1 \mathbf{x}) = \mathbf{0}$$

ve buradan

$$(\mathbf{C}'_1 \mathbf{F}_0 \mathbf{C}_1 + \mathbf{C}'_1 \mathbf{F}_0 \Phi(\mathbf{s}) \mathbf{C}_1) \mathbf{x} = -\mathbf{C}'_1 \mathbf{F}_0 (\mathbf{I} + \Phi(\mathbf{s})) \mathbf{s}_0$$

veya kısaca

$$\boxed{(\mathbf{F}_{11} + \Psi(\mathbf{s})) \mathbf{x} = -(\mathbf{f}_{10} + \Psi(\mathbf{s}))} \quad (36)$$

bulunur; burada $\mathbf{F}_{11}$, $\mathbf{f}_{10}$ kısaltmaları ve aşağıdaki lineer-olmayan ek terimler alınmıştır :

$$\Psi(\mathbf{s}) = \mathbf{C}'_1 \mathbf{F}_0 \Phi(\mathbf{s}) \mathbf{C}_1, \quad (37a)$$

$$\Psi(\mathbf{s}) = \mathbf{C}'_1 \mathbf{F}_0 \Phi(\mathbf{s}) \mathbf{s}_0. \quad (37b)$$

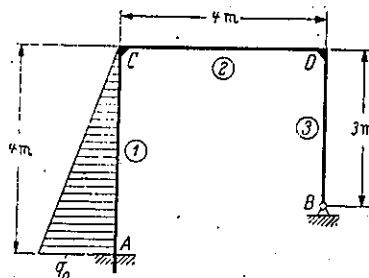
Bu denklem sistemi

$$(\mathbf{F}_{11} + \Psi(\mathbf{s}_{(v)})) \mathbf{x}_{(v+1)} = -(\mathbf{f}_{10} + \Psi(\mathbf{s}_{(v)})) \quad (38a)$$

kuralı uyarınca iteratif yoldan incelenebilir. İlk yaklaşım $\mathbf{x}_{(1)}$ olarak, (18) lineer sistemin çözümü kullanılır; bunun yardımı ile $\mathbf{s}_{(1)}$ ve (37) denklemindeki ilgili lineer olmayan terimler hesaplanır; böylece yine lineer olan (36) denklem sisteminin katsayılar matrisi ve ikinci tarafı değişmiş olur. $\Phi(\mathbf{s})$ lineer-olmayan kısım küçük ise, işlemin çok çabuk yakınsaması beklenebilir.

25.7. Bir Örnek.

Şekil 25.2. de, maximum değeri $q_0 = 3 \text{ t/m}$ olan yanal üçgen yük etkisindeki ikinci dereceden statik belirsiz çerçeve görülmektedir.



Şek. 25.2. Bir örnek

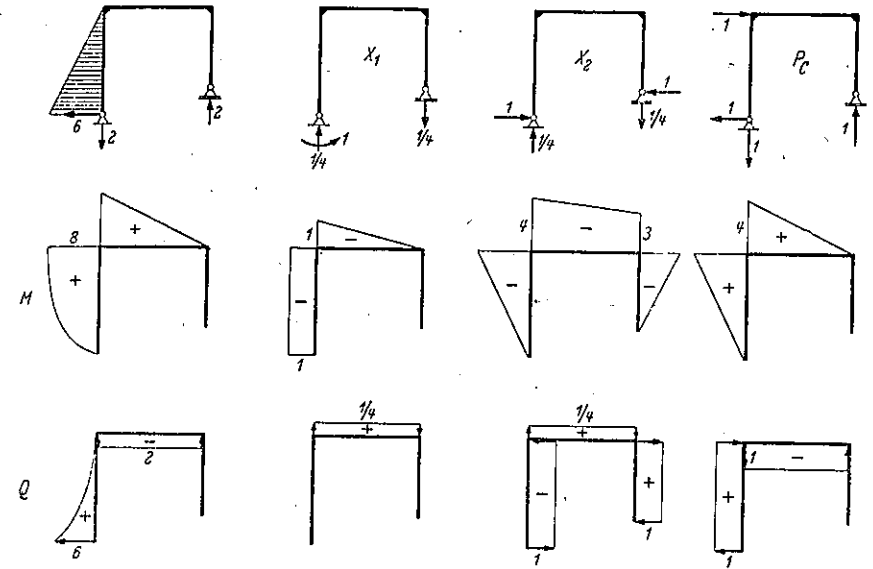
Eğilme rijitliği EI , tüm çerçeve boyunca sabit olsun. Normal doğrultudaki uzamalar ihmal edilecektir. ($EF = \infty$). Mesnet reaksiyonları, kesit etkileri ve soldaki C noktasının r_c yatay yerdeğiştirilmesi istenmektedir.

$M_A = X_1$ ankastrelik momenti, ve $B_x = X_2$ yatay bileşen statik bilinmeyen kabul edilecektir. Şek. 25.3 de q yükü, $X_1 = 1$, $X_2 = 1$ ve $P_c = 1$ birim etkiler altındaki

statik belirli ana sistem gösterilmiştir. Zorlama değerleri olarak (1) parçasında M_{11} , M_{12} , eğilme momentleri Q_{11} , Q_{12} , kesme kuvvetleri, (2) ve (3) parçalarında ise, M_{21} , M_{22} ve M_{31} , M_{32} eğilme momentleri seçilsin. Bu büyüklükler Şekil 25.3 den s_0 , c_1^1 , c_2^1 ve c_1^0 sütunları olarak aşağıdaki gibi bulunur :

	s_0	C_1		C_0
		c_1^1	c_2^1	c_1^0
M_{11}	0	-1	0	0
M_{12}	8	-1	-4	4
Q_{11}	6	0	-1	1
Q_{12}	0	0	-1	1
M_{21}	8	-1	-4	4
M_{22}	0	0	-3	0
M_{31}	0	0	-3	0
M_{32}	0	0	0	0

Birimler metre ve ton'dur. Esas fleksibilite matrisi F_0 dan, basit sayılar elde etmek için $l_0 = 4$ metre olmak üzere $420 EI/l_0 = 105 EI$ çarpımını çıkaralım. Fleksibilite hesabı, Tablo 25.1 de yapılmış olup son sütunda toplam kontrolü verilmiştir. X_1 lerin hesabı için (70 veya 7) gibi ortak çarpan ile kısaltılarak) Tablodan denklem sisteminin katsayıları alınır.



Şek. 25.3. Eğilme momentleri ve kesme kuvvetleri statikte ana sistemi teşkil ederler.

Tablo 25.1. Çerçeve örneği için matris hesabının tatbiki.

				s_0	c_1^1	c_2^1	c_1^0	Deneme
				0	-1	0	0	-1
				8	-1	-4	4	7
				6	0	-1	1	6
				0	0	-1	1	0
				8	-1	-4	4	7
				0	0	-3	0	-3
				0	0	-3	0	-3
				0	0	0	0	0
$105 EI F_0$				960	-210	-252	252	750
				1560	-210	-588	588	1350
				800	-140	-224	224	660
				-992	140	336	-336	-852
				1120	-140	-770	560	770
				560	-70	-700	280	70
				0	0	-315	0	-315
				0	0	-157,5	0	-157,5
				-1	-1	0	0	-1
				0	-4	-1	-1	-4
				0	4	1	1	4
				-3640	560	1610	-1400	-2870
				-12208	1610	8365	-5320	-7553
				10528	-1400	-5320	4480	8288

$$\begin{array}{ccc} X_1 & X_2 & 1 \\ 8 & 23 & -52 \\ 230 & 1195 & -1744 \\ \hline 22028 & 1992 & 4270 \end{array} \quad \begin{array}{l} X_1 = \frac{22028}{4270} = 5,1588 \text{ mt} \\ X_2 = \frac{1992}{4270} = 0,4665 \text{ t} \end{array}$$

$$105 EI r_c = -1400 X_1 - 5320 X_2 + 10528 = \frac{3517920}{4270}$$

$$EI r_c = \frac{33504}{4270} = 7,8464 \text{ m}^3 \text{ t}$$

EI = 1000 tm² eğilme rijitliği için $r_c = 0,785 \text{ cm}$. bulunur.

Mesnet Reaksiyonu hesabı: Etki sayıları yine Şekil 25.3 den alınacaktır.

	Çarpanlar			Sonuçlar
	1	X_1	X_2	
M_A	0	1	0	5,159 mt
A_x	6	0	-1	5,533 t
$-A_y$	2	-1/4	-1/4	0,594 t
B_x	0	0	1	0,467 t
B_y	2	-1/4	-1/4	0,594 t

26. Elastomekanik Problemlerin İncelenmesinde Taşıma Matrisleri

26.1. Prensip.

Kısmen sabit kesit boyutlarına sahip keyfi sınır - ve ara koşulları altındaki çok açıklıklı kiriş ve çerçevelerde eğilme titreşiminin, burkulmanın ve eğilmenin ve ayrıca elastomekanığın diğer daha genel problemlerinin incelenmesi son zamanlarda çok yönlü olarak matrisler yardımı ile yapılmış¹⁻⁶ ve, bunun için matris hesabının özellikle uygun olduğu digital hesap makinaları rasyonel şekilde kullanılmıştır. Tam literatür ile birlikte ayrıntılı inceleme yeni ders kitaplarında vardır.⁷⁻⁹ Başlangıçta belirtilen üç problem için, kısmen sabit kesitler halinde kısmen

- 1) FALK, S.: Abh. Braunsch. Wiss. Ges. Bd. 7 (1955), S. 74-92. Ing.-Arch. Bd. 24 (1956), S. 85-91; S. 216-32; Bd. 26 (1958), S. 61-80.
- 2) FUHRKE, H.: Ing.-Arch. Bd. 23 (1955), S. 329-348; Bd. 24 (1956), S. 27-42.
- 3) MARGUERRE, K.: J. Math. Phys. Bd. 35 (1956), s. 28-43.
- 4) PESTEL, E.: Abh. Braunsch. Wiss. Ges. Bd. 6 (1954), s. 227-242. - PESTEL, E., u. G. SCHUMPICH: Schiffstechnik Bd. 4 (1957), s. 55-61.
- 5) SCHNELL, W.: Z. angew. Math. Mech. Bd. 35 (1955), s. 269-284.
- 6) UNGER, H.: Intern. oKolloquium Probl. Rechentechnik, Dresden 1955, s. 141-149.
- 7) KLOTTER, K.: Technische Schwingungslehre. 2. Aufl. Bd. 2, s. 411-462. Berlin/Göttingen/Heidelberg: 1960.

kapalı şekilde çözülebilen 4. mertebeden birer lineer diferansiyel denklem vardır. Bu esnada her bölgede = açıklıkda dört integrasyon sabiti ortaya çıkar. Bu sabitlerin, açıklık sınırlarının geçiş koşullarına ve kiriş sınır koşullarına uydurulması matris hesabı ile çok açık ve şematik olarak sağlanır. Bu maksad ile çözüm fonksiyonları o şekilde seçilir ki, sabitler mekanik anlam taşıyan büyüklüklere - çökme, eğim, eğilme momenti ve kısme kuvveti - yani, bir "durum vektörü" ile özetlenen açıklık başlangıcındaki "durum büyüklükleri" ne eşit olsunlar. Bu durumda açıklık başlangıcındaki ve açıklık sonundaki durum vektörleri arasında - diferansiyel denklemin lineer karakterine uygun olarak - bir matris ile gösterilebilen bir bağıntı vardır. Açıklık başlangıcındaki dört durum büyüklüğüne giriş büyüklükleri, açıklık sonundakilere çıkış büyüklükleri adı verilmek üzere, bunları birleştiren matrise de "taşıma matrisi" denilebilir.^(*) Bu matris burada bahis konusu kiriş açıklığına aittir ve bu neden ile açıklık matrisi adını alır. Ayrıca açıklık sınırlarında süresiz geçişler (maddesel noktalar, yaylar vs.) için taşıma matrisleri olarak "nokta matrisleri" de hesaba katılabilir; bunlar açıklık sınırından hemen önce ve sonraki durum vektörleri arasındaki bağıntıyı verirler. Bu durumda ardışık tek açıklıklardan kiriş oluşmuş ise, görüleceği gibi, tek açıklık matrislerin - nokta matrisleri de eklenerek - çarpımından oluşan ve kiriş başlangıcı ile kiriş sonunu bağlayan toplam taşıma matrisi karşılık gelir. Kiriş uçlarında sistemin sınır koşulları ile ikişer durum büyüklüğü bellidir. Bir kiriş ucundan başlayarak diğer bir kiriş ucuna kadar, bilinmeyen iki durum büyüklüğü ile hesap, oradaki bütün bölgeler için yapılarak - ki bu ikişer vektörün taşıma matrisleri ile devamlı çarpımına gider - bu kiriş ucunda, iki bilinmeyen bulunması için, geriye kalan iki sınır koşulundan, iki koşul denklemini elde edilir.

Ayrıca iç sınır koşulları örneğin ara mesnedler veya Gerber mafsal-ları var ise, ortaya çıkan iki bilinmeyenden biri, ($w = 0$ veya $M = 0$) ek koşulu ile, diğeri cinsinden yazılabilir. Bunun yerine, ara mesned halinde mesned kuvveti, mafsal halinde açı değişmesi şeklinde yeni bir ikinci bilinmeyen geçer. Bu tip bir sabitler indirgenmesi ile, keyfi yüksek dereceli statik belirsiz problemler halinde bile, bilinmeyen sayısı daima iki olur.

⁸⁾ KIRSTEN, R.: Das Reduktionsverfahren der Baustatik. Berlin/Göttingen/Heidelberg: 1962. 242 s.

⁹⁾ PESTEL, E., u. F. A. LECKIE: Matrix methods of elastomechanics. New York: McGraw-Hill 1963. 435 s.

* Türkçe karşılık olarak, Übertragungmatrizen = Taşıma matrisleri yaygındır; ancak "bağlama matrisi" adı, çeviren tarafından önerilmektedir. (Çevirenin notu).

Diferansiyel denklemin ve her taşıma matrisinin bilinmeyen özdeğerine parametre olarak sahip olduğu özdeğer problemi - burulma titreşimi ve burkulma - halinde hesap seçilmiş parametre değerleri ile yapılabilir ve bunlar, kiriş ucundaki başlangıçta sınır koşulları - örneğin mesnedde $w = 0$ ve $M = 0$ - sağlanacak şekilde değiştirilir. Holzer-Tolle'nin adı verilen bu "kalan büyüklükler metodu" özellikle hesap otometleri için uygundur. Zira program tekniği bakımından yararlı olduğu gibi, aynı hesap işlemi, değiştirilmiş parametre değeri ile tekrarlanmaktadır. Kalan büyüklük - burulma titreşiminde, özdeğer için sıfır olan iki sıralı determinant - parametresinin üzerine taşınır. Bu eğrinin sıfırdan geçişleri aranan özdeğerleri gösterir.

26.2. Eğilme Titreşimleri.

Bilinmeyen ω frekansı halinde, boyu l , eğilme rigidliği EI ve birim uzunluk başına kütleleri μ olan bir kirişin eğilme titreşiminin diferansiyel denklemi :

$$w^{IV} = \left(\frac{\lambda}{l}\right)^4 w \quad (1)$$

ile

$$\lambda^4 = \frac{w^2 \mu}{EI} l^4 \quad (2)$$

nin genel çözümü şudur :

$$w = A \cos \lambda \frac{x}{l} + B \sin \lambda \frac{x}{l} + C \cos \lambda \frac{x}{l} + D \sin \lambda \frac{x}{l}.$$

Burada-Rayleigh 'ye göre - A, B, C, D , sabitleri w_0, w_0', w_0'', w_0''' başlangıç değerleri cinsinden yazılabilir.

$$w(x) = w_0 C \left(\lambda \frac{x}{l}\right) + w_0' l \frac{1}{\lambda} S \left(\lambda \frac{x}{l}\right) + w_0'' l^2 \frac{1}{\lambda} c \left(\lambda \frac{x}{l}\right) + w_0''' l^3 \frac{1}{\lambda^3} s \left(\lambda \frac{x}{l}\right) \quad (3)$$

Rayleigh 'nin verdiği, $x = l$ kiriş ucundaki fonksiyonlar veya bunların değerleri şöyledir :

$$\left. \begin{aligned} C \left(\lambda \frac{x}{l}\right) &= \frac{1}{2} \left(\cos \lambda \frac{x}{l} + \cos \lambda \frac{x}{l} \right) \text{ bzw. } C = \frac{1}{2} \left(\cos \lambda + \cos \lambda \right) \\ S \left(\lambda \frac{x}{l}\right) &= \frac{1}{2} \left(\sin \lambda \frac{x}{l} + \sin \lambda \frac{x}{l} \right) \text{ bzw. } S = \frac{1}{2} \left(\sin \lambda + \sin \lambda \right) \\ c \left(\lambda \frac{x}{l}\right) &= \frac{1}{2} \left(\cos \lambda \frac{x}{l} - \cos \lambda \frac{x}{l} \right) \text{ bzw. } c = \frac{1}{2} \left(\cos \lambda - \cos \lambda \right) \\ s \left(\lambda \frac{x}{l}\right) &= \frac{1}{2} \left(\sin \lambda \frac{x}{l} - \sin \lambda \frac{x}{l} \right) \text{ bzw. } s = \frac{1}{2} \left(\sin \lambda - \sin \lambda \right) \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Şimdi w ve w ile boyutsuz yapılmış türevler

$$z_0 = \begin{pmatrix} w_0 \\ w_0' l \\ w_0'' l^2 \\ w_0''' l^3 \end{pmatrix}$$

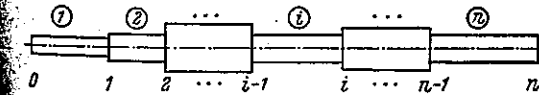
durum vektöründe ve $x = l$ kiriş ucundaki uygun değerler z_1 de toplanır ise, denklem (3) türetilerek ve z_0 ile z_1 arasında $x = l$ yerine konularak

$$z_1 = F z_0 \quad (5)$$

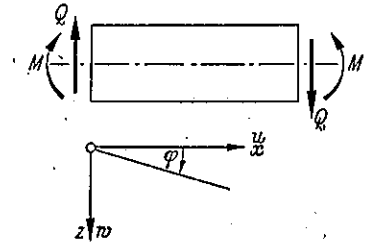
lineer bağıntısı elde edilir; burada Rayleigh - fonksiyonlarının açıklık matrisi

$$F = \begin{pmatrix} C & S/\lambda & c/\lambda^2 & s/\lambda^3 \\ s\lambda & C & S/\lambda & c/\lambda^2 \\ c\lambda^2 & s\lambda & C & S/\lambda \\ S\lambda^3 & c\lambda^2 & s\lambda & C \end{pmatrix} \quad (6)$$

olup bunun ikinci satırında, birinci satırın, üçüncüsünde ikincinin ve nihayet dördüncüsünde üçüncünün türevleri vardır. Matris ikinci köşegenine (sağ üstten sol alt köşeye giden köşegen) göre simetrikdir. Bunun determinanı 1 e eşittir ve invers matrisi, satranç tahtası şeklinde değişik işaret dışında F ye eşittir; bunun anlamı şudur : $z_0 = F^{-1} z_1$ ters bağıntısı, w' ve w'' de, değişik işaret dışında, denklem (5) şeklindedir. Şekil 26.1 tipinde birden fazla l boyunda açıklıktan, sabit EI eğilme rigidliğinden ve μ birim kütlelerinden oluşan bir kiriş halinde, her açıklık için denklem (5) şeklinde bir bağıntı vardır.



Şek. 26.1. Sabit eğilme rijitliği parçalarından bir kirişin şeması. Alan ve alan sınırının işaretlenmesi.



Şek. 26.2. Kiriş eğilmesinde w, ϕ, M, Q durum büyüklüklerinin ön işaretleri.

Geçiş noktalarında, süreksiz kesit değişmesi nedeni ile, süreksizliklerin önlenmesi için w'', w''' süreksiz türevlerinden

$$-EI w'' = M, \quad -EI w''' = Q,$$

sürekli kesit büyüklüklerine yani eğilme momentine ve kesme kuvvetine geçer. Şekil 26.2. gereğince işaretler 0 şeklinde geçilirki, pozitif kesitdeki (pozitif eksen yönünde dış normal) M, Q kesit büyüklükleri pozitif eksen yönünde alınsın. Bunun geriye kalan bileşenleri, sabit l_0 uzunluğu ve $E I_0$ rigidliği kullanılarak, w ile boyutsuz yapılar yani

$$\left. \begin{aligned} \frac{w_i}{\varphi_i} &= w'_i l_0 \\ \frac{M_i}{Q_i} &= M_i l_0^2 / E I_0 \\ \frac{Q_i}{M_i} &= Q_i l_0^3 / E I_0 \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

aşağıdaki durum vektörünün bileşenleri olarak seçilir :

$$z_i = \begin{pmatrix} \frac{w_i}{\varphi_i} \\ \frac{M_i}{Q_i} \end{pmatrix} \quad (8)$$

$l_0, E I_0$ büyüklüklerine ve μ_0 birim kütlerine ait

$$\beta_i = l_i / l_0, \alpha_i = E I_i / E I_0, \varrho_i = \mu_i / \mu_0 \quad (9)$$

oranları ile, i . inci açıklığın $i - 1$ başlangıcındaki ve i ucundaki durum büyüklükleri için

$$z_i = F_i z_{i-1} \quad (10)$$

bağıntısı bulunur; burada, denklem (6) ile aynı özellikli ve (6) gereğince aşağıdaki gibi değiştirilecek açıklık matrisi

$$F_i = \begin{pmatrix} C & \frac{\beta}{\lambda} S & -\frac{1}{\alpha} \left(\frac{\beta}{\lambda} \right)^2 c & -\frac{1}{\alpha} \left(\frac{\beta}{\lambda} \right)^3 s \\ \frac{\lambda}{\beta} s & C & -\frac{1}{\alpha} \frac{\beta}{\lambda} S & -\frac{1}{\alpha} \left(\frac{\beta}{\lambda} \right)^2 c \\ -\alpha \left(\frac{\lambda}{\beta} \right)^2 c & -\alpha \frac{\lambda}{\beta} s & C & \frac{\beta}{\lambda} S \\ -\alpha \left(\frac{\lambda}{\beta} \right)^3 s & -\alpha \left(\frac{\lambda}{\beta} \right)^2 c & \frac{\lambda}{\beta} s & C \end{pmatrix} \quad (6a)$$

vardır. Sonda eklenen i indisi elemanlarda ortaya çıkan büyüklük ve fonksiyon işaretlerini gösterir; sonuncuların anlamı şudur :

$$C_i = \frac{1}{2} (\cos \lambda_i + \cos \lambda_i)$$

$$\lambda_i^4 = \frac{\mu_i \omega^2 l_i^4}{E I_i} = \frac{\varrho_i \beta_i^4}{\alpha_i} \bar{\lambda}^4 \quad (11)$$

ve burada

$$\bar{\lambda}^4 = \frac{\mu_0 \omega^2 l_0^4}{E I_0} \quad (12)$$

dır. Bu (14) denklemleri, $i = 1, 2, \dots, n$ için yanyana sıralanarak tek F_i açıklık matrislerinin çarpımı

$$A = F_n F_{n-1} \dots F_2 F_1, \quad (13)$$

toplam taşıma matrisini verir ve 0 giriş başlangıcındaki z_0 ve n giriş ucundaki z_n durum vektörleri arasında şu direkt lineer bağıntı elde edilir :

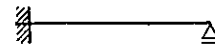
$$z_n = A z_0 \quad (14)$$

Şimdi z_0 ve z_n deki iki durum vektörü, giriş başlangıcında ve - sonunda verilen sınır koşullarından bulunur; örneğin Şekil 26.3 deki kirişte

$$w_0 = \varphi_0 = 0,$$

$$w_n = M_n = 0,$$

dir ve durum vektörünün bileşenleri için w, φ, M, Q yazılır ise, (14) denklemleri ayrıntılı olarak elde edilir :



Şek. 26.3. Sınır şartları için örnek.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ M_0 \\ Q_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \varphi_n \\ 0 \\ Q_n \end{pmatrix}$$

Bilinmeyen M_0 ve Q_0 durum büyüklükleri giriş başlangıcında bilinmeyen kabul edilir ise, bunlar için giriş ucundaki sınır koşullarından iki homojen lineer denklem, örneğimizde

$$\begin{aligned} a_{13} M_0 + a_{14} Q_0 &= 0, \\ a_{33} M_0 + a_{34} Q_0 &= 0, \end{aligned}$$

olarak bulunur; bunlar ise,

$$\Delta = \Delta(\bar{\lambda}) = \begin{vmatrix} a_{13} & a_{14} \\ a_{33} & a_{34} \end{vmatrix} = 0$$

determinant koşulunun sağlanması halinde, trivial olmayan çözümler verirler. Fakat bu determinantın değeri $\bar{\lambda}$ parametresinin yani w frekansının bir fonksiyonudur; zira F_1 açıklık matrislerinin tüm elemanları ve dolayısı ile A toplam taşıma matrisinin a_{ik} elemanları, $\bar{\lambda}$ parametresine bağlıdır. Bu fonksiyonun şekilsel ifadesi $\Delta = \Delta(\bar{\lambda})$ genellikle açık olmadığından, transandan

$$\Delta(\bar{\lambda}) = 0 \quad (15)$$

“frekans denklemi” nin çözümü için, beklenen özdeğer yakınında bir seri kabul edilen parametre değeri ile hesap yapılır ve aranan $\bar{\lambda}_e$ özdeğeri, $\Delta(\bar{\lambda})$ fonksiyon değişiminin sıfır noktası olarak, interpolasyon ile bulunur.

Pratik hesap için, denklem (13) çarpım matrisinin tam ifadesinin gerekli olmaması önemlidir. Daha ziyade, bahis konusu başlangıç koşuluna ait a_{ik} elemanlarının - örneğimizde a_{13} ve a_{14} elemanlarının - hesabı, iki özel vektörde açıklık matrislerinin devamlı çarpımı ile yapılır. Bu maksad ile giriş başlangıcındaki durum vektörü aşağıdaki gibi yazılmış kabul edilir:

$$z_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} w_0 + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \varphi_0 + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} M_0 + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} Q_0,$$

burada ikiye durum büyüklüğü, başlangıç koşulları ile bellidir; diğer ikisi ise bilinmeyen olarak kalır. Yani Şekil 26.3 örneğinde

$$z_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} M_0 + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} Q_0.$$

Bu durumda bu bilinmeyenlerin iki sütunu için hesap, bilinmeyen çarpan olmak üzere yan taraftaki şema uyarınca yapılır; ve böylece sırası ile $z_1 = F_1 z_0$, $z_2 = F_2 z_1$, ... $z_n = F_n z_{n-1}$ durum vektörleri elde edilir. Burada her sütun ilgili bilinmeyen ile - örneğimizde M_0 ve Q_0 ile - çarpılmış kabul edilmelidir. Son da a_{13} ve a_{14} katsayıları ortaya çıkar, bunlardan giriş ucundaki koşul yazılabilir. Şekil 26.3 deki serbest mesned için

$$\Delta(\bar{\lambda}) = \begin{vmatrix} a_{13} & a_{14} \\ a_{33} & a_{34} \end{vmatrix} = a_{13} a_{34} - a_{33} a_{14}$$

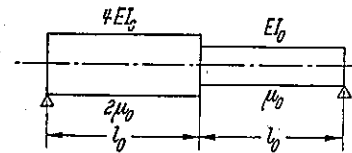
determinant değeri doğrudan doğruya okunur.

Örnek : Boyutları Şekil 26.4 de verilen değişken kesitli milde en küçük öz frekansın bulunması için, bunu, özdeğeri $\lambda = \pi$ ile belli, eşit $l = 2l_0$ uzunluğunda, $EI = 2EI_0$ ortalama rigidliğine ve $\mu = 1,5\mu_0$ ortalama kütesine sahip bir sabit kesitli mil ile karşılaştıralım : $\alpha = 2$, $\beta = 2$ ve $\rho = 1,5$ halinde denklem (13) den şu özdeğer bulunur :

$$\lambda^4 \approx 8, \quad \lambda \approx 1,7.$$

1.7 yakınındaki üç eşit uzaklıkta λ değeri için, kuadratik interpolasyona ait birinci ve ikinci diferanslar yanında aşağıdaki Δ determinant değerleri bulunur :

$\bar{\lambda}$	Δ	$\delta\Delta$	$\delta^2\Delta$
1,60	0,1861 517	- 0,4663 010	
1,65	- 0,2801 493	- 0,5024 919	- 0,0360 909
1,70	- 0,7826 412	- 0,4844 465	- 0,0180 455



Şek. 26.4. Bir değişken kesitli şaft örneği.

İlk iki diferansın ortalama değeri $\delta \Delta_1$ olmak üzere, kuadratik interpolasyon formülü

$$\Delta = \Delta_1 + \delta \Delta_1 \cdot t + \delta^2 \Delta_1 t^2/2 = 0$$

ile

$$-0,2801493 - 0,4844465t - 0,0180455t^2 = 0$$

dan, lineer terime göre çözümlenerek ve iterasyon yapılarak

$$t = -0,578287 - 0,037250t^2$$

$$= -0,578287$$

$$-0,013024$$

$$= -0,591311$$

ile şu bulunur :

$$\bar{\lambda} = 1,65 + 0,05t = 1,62043$$

26.3. Ara Koşulları.

Teknik özdeğer problemleri büyük önemini, taşıma matrisleri ile bilhassa, keyfi ana koşulların hesaba kolayca monte edilmelerine borçludurlar. Teknik problemlerde rigid veya elastik ara mesnetler, mafsallara (Gerber mafsalları) ve benzer şekillerde sık sık ortaya çıkan bu tip koşulları klasik özdeğer metodlarına önemli güçlükler çıkarırlar. Bu tip bir koşulu örneğin i noktasındaki mesned halinde $w_i = 0$, mafsal halinde $M_i = 0$ 'a, ilgili bir durum büyüklüğünde bir sıçrama yani mesned halinde kesme kuvveti sıçraması ΔQ_i , mafsal halinde açısıçraması $\Delta \varphi_i$ karşılık gelir. Bu sıçrama büyüklüğü ΔQ_i veya $\Delta \varphi_i$ ara koşul noktasında, başlangıçdan itibaren gelen iki başlangıç bilinmeyenine (örneğin mesnet de φ_0, Q_0 ankraj noktasında M_0, Q_0) yeni bilinmeyen olarak eklenir. Fakat koşul denkleminde (mesnet de $w_i = 0$, mafsalda $M_i = 0$) iki başlangıç bilinmeyeninden biri yok edilebildiğinden, hesaba yine yalnız iki bilinmeyen ile devam edilir. Bu durumlar, ara mesnet örneğinde açıklanacaktır.

İki başlangıç - bilinmeyeni A ve B ile gösterilsin i. ninci bölgenin sonunda yani ara mesnedin hemen önündeki i noktasında, A ve B ile çarpılacak durum vektörlerinin bilinmeyenleri a_j ve b_j ($j = 1, 2, 3, 4$) olsun, böylece ilgili denklemler yanında aşağıdaki şema bulunur :

$$\left. \begin{array}{cc|cc} A & B & & \\ \hline a_1 & b_1 & w_i & z_1^i = w_i = a_1 A + b_1 B \\ a_2 & b_2 & \varphi_i & z_2^i = \varphi_i = a_2 A + b_2 B \\ a_3 & b_3 & M_i & z_3^i = M_i = a_3 A + b_3 B \\ a_4 & b_4 & Q_i & z_4^i = Q_i = a_4 A + b_4 B \end{array} \right\}$$

Mesnet koşulu

$$w_i = a_1 A + b_1 B = 0$$

yardımları ile A, B bilinmeyenlerinden biri, diğeri cinsinden yazılabilir. Burada en küçük çarpanlı olanı yok edelim. Bunu B ile gösterelim yani kabul edelim ve

$$B = -\alpha A, \alpha = a_1/b_1 \text{ olmak üzere}$$

koyalım. Böylece z_i vektörünün geriye kalan üç bileşeni z_j^i den

$$z_j^i = (a_j - \alpha b_j) A = a'_j A, \quad j = 2, 3, 4$$

bulunur; burada

$$a'_j = a_j - \alpha b_j = \frac{a_j b_1 - a_1 b_j}{b_1},$$

A'nın yeni katsayılarıdır; ve nümerik hesap, bu denklemin birinci veya ikinci şekli ile yapılır, Kesme kuvveti için mesnedden hemen sonraki i' noktasında

$$Q_i' = a'_4 A + 1 \cdot \Delta Q_i$$

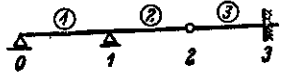
değeri konulur; buna karşılık mesnedden önce $Q_i = a'_4 A$ geçerlidir. Q_{i+1} , A ya yeni parametre olarak eklenmek üzere, yeni i + 1 açıklığından önce z_1^i başlangıç vektörü şöyle yazılır :

$$\left. \begin{array}{cc|cc} A & \Delta Q_i & & \\ \hline 0 & 0 & w_i & = 0 \\ a'_2 & 0 & \varphi_i & \\ a'_3 & 0 & M_i & \\ a'_4 & 1 & Q_i' & \end{array} \right\}$$

i + 1 bölgesinden sonra mesnedi, $M_{i+1} = 0$ olan bir mafsal takip eder ise, yeni bilinmeyen olarak açısıçraması $\Delta \varphi_{i+1}$ hesaba katılır. Bu maksatla A veya AQ_i bilinmeyenlerinden, en büyük katsayılı olanı $M_{i+1} = 0$

moment koşullarından bulunur; bu ise b_3 ile gösterilir, diğer bilinmeyenlerin a_j katsayıları ise, $\alpha = a_3/b_3$ yardımı ile, $a'_j = a_j - \alpha b_j$ lere dönüşür.

Şimdiye kadarki açıklamalarda esas alınan Şek. 26.5 deki örnek için bütün hesap şemasını bir kere daha uygulayalım. Yok edilecek katsayıları b_1 olmak üzere vektör bileşenleri burada basitlik için a_1, b_1 ile gösterilmiştir. $i = 1$ mesnedinde Q_0 büyüklüğünün, $i = 2$ mafsalında φ_0 büyüklüğünün yok edildiğini kabul edelim. Yeni hesaba katılan son bilinmeyenler ΔQ_1 ve $\Delta \varphi_2$ dir. Ankastrelik noktasında ki uç - sınır koşulu $w_3 = \varphi_3 = 0$ dan, a_1, b_1 katsayılı determinant şartı



Şek. 26.5. Ara destek ve ara mafsallı kiriş.

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0, \quad (16)$$

bulunur, bu ise doğru seçilmiş λ parametresi için sağlanmak zorundadır.

Eğer (16) gerçekleşiyor ise, bir tanesinin keyfi, örneğin 1 e eşit kabulü halinde, $\varphi_0, Q_0, \Delta Q_1$ ve $\Delta \varphi_2$ bilinmeyenleri sırası ile, $w_1 = 0, M_2 = 0, w_3 = 0$ ve $\varphi_3 = 0$ koşullarından hesaplanabilir. Böylece son sü-tunda verilen durum vektörleri tamamen bulunabilir.

26.4. Yaylar ve Tek Kütller.

Ara koşullar tek yay ve tek kütle şeklinde yani hem c_i mesnet yayları ve m_i noktasal kütleleri hemde C_i burulma yayları ve Θ_i döner kütleleri olarak da ortaya çıkarlar; Şek. 26.6. Bunlara yine kesme kuvveti veya eğilme momentinde sıçramalar karşılık gelir :

$$\left. \begin{array}{ll} \text{Mesnet yayı} & \Delta Q_i = Q'_i - Q_i = c_i w_i \\ \text{Noktasal kütle} & \Delta Q_i = -m_i \omega^2 w_i \\ \text{Burulma yayı} & \Delta M_i = M'_i - M_i = -C_i \varphi_i \\ \text{Döner kütle} & \Delta M_i = \Theta_i \omega^2 \varphi_i \end{array} \right\} \quad (17)$$

Birim uzunluk boyutuna indirgenmiş (7) durum büyüklükleri ile bu bağıntılar

$$\left. \begin{array}{ll} \Delta \bar{Q}_i = \bar{c}_i w_i, & \Delta \bar{Q}_i = -\bar{m}_i \bar{\lambda}^4 w_i \\ \Delta \bar{M}_i = -\bar{C}_i \varphi_i, & \Delta \bar{M}_i = \bar{\Theta}_i \bar{\lambda}^4 \varphi_i \end{array} \right\} \quad (17a)$$

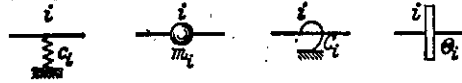
	φ_0	Q_0	δ_1	
	0	0		0
	1	0		φ_0
	0	0		0
	0	1		Q_0
F_1	a_1	b_1		$w_1 = 0$
	a_2	b_2		φ_1
	a_3	b_3		M_1
	a_4	b_4	ΔQ_1	Q_1
	0		0	0
	a'_2		0	φ_1
	a'_3		0	M_1
	a'_4		1	Q'_1
F_2	b_1		a_1	w_2
	b_2		a_2	φ_2
	b_3		a_3	$M_2 = 0$
	b_4		a_4	Q_2
			a'_1	0
			a'_2	1
			0	0
			a'_4	0
				Q_2
F_3			a_1	$w_3 = 0$
			a_2	$\varphi_3 = 0$
			a_3	M_3
			a_4	Q_3

şeklinde yazılabilirler; burada

$$\left. \begin{array}{l} \bar{c}_i = c_i l_0^2 / E I_0, \quad \bar{m}_i = m_i / \mu_0 l_0 \\ \bar{C}_i = C_i l_0 / E I_0, \quad \bar{\Theta}_i = \Theta_i / \mu_0 l_0^3 \end{array} \right\} \quad (18)$$

boyutsuz sabitlerdir; ve $\bar{\lambda}^4$, denklem (12) ile bellidir. Diğer bütün bağıntılar, alışılmış büyüklükler cinsinden yani (17) şeklinde yazılacaktır. Yay ve kütle denklemlerini basitlik için,

$$\left. \begin{array}{l} \Delta Q_i = k_i w_i \quad \text{burada } k_i = c_i - m_i \omega^2 \\ \Delta M_i = -K_i \varphi_i \quad \text{burada } K_i = C_i - \Theta_i \omega^2 \end{array} \right\} \quad (19)$$



Şekil 26.6 c_i mesnet yayı, m_i tek kütle, C_i burulma yayı, θ_i dönen kütle

ile gösterelim; burada k_i, K_i dinamik yay sabitleri olup bunlar, eksik kütleler halinde, c_i veya C_i ve, eksik yaylar halinde $-m_i \omega^2$ veya $-\Theta_i \omega^2$ şeklini alırlar.

(19) denklemleri iki farklı yoldan, ya kuvvet koşulları veya "şekil değiştirme koşulları" cinsinden, hesaba monte edilebilir. Dinamik ara koşullarının bu farklı incelenme tipi, sayısal hesabın uygulanması için çok önemlidir.

A. Kuvvet Koşulları Olarak İnceleme

Birinci inceleme tipinde, i - sırama noktasından evvelki Q_i, M_i kuvvet büyüklükleri, (19) gereğince,

$$\begin{cases} Q'_i = Q_i + k_i w_i \\ M'_i = M_i - K_i \varphi_i \end{cases} \quad (19a)$$

şeklinde, sırama noktasından sonraki Q'_i, M'_i büyüklüklerine dönüştürülür; bu ise bir z_i vektörü ile bir P_i nokta matrisinin çarpımıdır:

$$z'_i = P_i z_i$$

nokta matrisi ise

$$P_i = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -K_i & 1 & 0 \\ k_i & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (20)$$

olup burada k_i, K_i yay sabitlerinden biri sıfır da olabilir. i sırama noktasındaki hesap şeması ve katsayılar bağıntıları aşağıdaki gibidir:

		A	B			
F_i	*	*	*	*	z_i	$\begin{cases} a'_4 = a_4 + k_i a_1 \\ b'_4 = b_4 + k_i b_1 \end{cases}$
	*	*	*	*		
	*	*	*	*		
	*	*	*	*		
P_i	1	0	0	0	z'_i	$\begin{cases} a'_3 = a_3 - K_i a_2 \\ b'_3 = b_3 - K_i b_2 \end{cases}$
	0	1	0	0		
	0	$-K_i$	1	0		
	k_i	0	0	1		

Bu iki katlı matris çarpımı Falk'ın bir teklifine göre, F_i açıklık matrisinin dört sütunundan ve, P_i nin $k_i, -K_i$ elemanlarına sahip olan iki ek sütundan oluşan bir "Tüm Matris" L_i kullanılarak bir çalışma adımı ile yapılabilir:

$$L_i = \left(\begin{array}{cccc|cc} * & * & * & * & 0 & 0 \\ * & * & * & * & 0 & 0 \\ * & * & * & * & 0 & -K_i \\ * & * & * & * & k_i & 0 \end{array} \right), \quad (21)$$

Böylece $z_i = F_i z_{i-1}$ ve $z'_i = P_i z_i$ denklemleri

$$z'_i = L_i z_{i-2},$$

ile gösterilir, ancak alışılmışından farklı olarak çarpım oluşturulması o şekilde anlaşılmalıdır ki, L_i nin birinciden dördüncüye kadar sütunları z_{i-1} in dört bileşeni ile, L_i nin diğer iki sütunu ise yeni z_i vektörünün ilk w_i ve φ_i bileşenleri ile çarpılsın. Bu durum, L_i nin ek sütunlarının, ilk iki satırdaki sıfırlar nedeni ile, yeni w_i ve φ_i değerlerinin var olması halinde yani M'_i ve Q'_i nin hesabında mümkündür. Sırama noktasının önündeki uygun M_i, Q_i değerleri bulunmaz. - Giriş başlangıcındaki yay ve maddesel noktalar halinde, serbest başlangıç değerleri olmaları koşulu ile, w_0 ve φ_0 a ait başlangıç vektörleri şöyle değiştirilir:

w_0	φ_0
1	0
0	1
0	$-K_0$
k_0	0

k veya K yay sabitleri çok büyürler ise yani, pratikte çok sık rastlandığı gibi, çok rigid mesnet yayı veya, dinamik yay sabitleri $-m_1\omega^2$ ve $\Theta_1\omega^2$ nin büyük olduğu yüksek frekansların hesabı bahis konusu ise tanımlanan bu metod geçerli olmaz. $k \rightarrow \infty$ sınır hali için z_{i+1} vektörünün iki kısmı sütunu, birbiri ile orantılı iki vektörden oluşur ve bu durum bundan sonraki bütün vektörler için de geçerli olduğundan son determinant, eşit büyüklükte sayıların farkı şeklinde, sıfıra eşit olur. Bu geçersizliğin ortadan kaldırılması için farklı yollar teklif edilmiştir: Fuhrke, § 26.5 de ele alınacak determinant matrislerini hesaba katmıştır. Pestel ve çalışma arkadaşları¹, $\Delta(\lambda)$ yerine, başka bir "kalan büyüklük" kullanmışlardır. Marguerre ve Uhrig,² - Falkın bir teklifini değiştirerek ara büyüklükleri basamaklı yok ederler ve böylece Gauss eliminasyonu ile bağıntı kurarlar. Güçlük aşağıdaki şekilde oldukça basit olarak giderilir.

B. Şekil Değiştirme Koşulları Olarak İnceleme

Büyük - statik veya dinamik - k veya K yay sabitleri halinde i noktası (indis, aşağıdaki formüllerde yazılmayacaktır), artık rigid değilde zayıf elastik olan bir mesned veya dönel mesnet kabul edilecektir. Rigid mesnede ait şekil değiştirme koşulu $w = 0$ veya $\varphi = 0$, § 26.3 deki gibi, yeni bilinmeyen olarak ΔQ veya ΔM sığrama büyüklüğü alınarak,

$$w = \gamma \Delta Q \quad \text{burada } \gamma = 1/k \quad (22a)$$

$$\varphi = -\Gamma \Delta M \quad \text{burada } \Gamma = 1/K \quad (22)$$

şekline dönüştürülür. Bu koşulların biri yardımı ile A, B bilinmeyenlerinden bir tanesi, koşulda max. çarpanlı olan B ($j = 1$ veya 2) yok edilebilir.

$$w = a_1 A + b_1 B = \gamma \Delta Q \quad \text{veya} \quad \varphi = a_2 A + b_2 B = -\Gamma \Delta M$$

$$\text{den} \quad B = -\alpha_1 A + (\gamma/b_1) \Delta Q \quad \text{veya} \quad B = -\alpha_2 A - (\Gamma/b_2) \Delta M,$$

bulunur; böylece geri kalan $z_i = a_i A + b_i B$ vektör bileşenleri,

¹⁾ PESTEL, E., u. O. MAHBENHOLZ: Zum numerischen Problem der Eigenwertbestimmung mit Übertragungsmatrizen. Ing.-Arch. 28 (1959), s. 255-262.

²⁾ MARGUERRE, K., u. R. UHRIG: Berechnung vielgliedriger Schwingerketten I: Das Übertragungsverfahren und seine Grenzen. Z. angew. Math. Mech. Bd. 44 (1964), s. 1-21.

$$z_i = a'_i A + \gamma \beta_i \Delta Q \quad (23a)$$

$$a'_i = a_i - \alpha_1 b_i \quad (24a)$$

$$\alpha_1 = a_1/b_1, \quad \beta_i = b_i/b_1 \quad (25a)$$

$$z_i = a'_i A - \Gamma \beta_i \Delta M \quad (23b)$$

$$a'_i = a_i - \alpha_2 b_i \quad (24b)$$

$$\alpha_2 = a_2/b_2, \quad \beta_i = b_i/b_2 \quad (25b)$$

şeklini alırlar. Yeni bilinmeyenlere dönüşmüş halde vektör bileşenleri şöyle olurlar:

A	ΔQ		A	ΔM	
0	γ	w_i	a'_1	$-\Gamma \beta_1$	w_i
a'_2	$\gamma \beta_2$	φ_i	0	$-\Gamma$	φ_i
a'_3	$\gamma \beta_3$	M_i	a'_3	$1 - \Gamma \beta_3$	M_i
a'_4	$1 + \gamma \beta_4$	Q_i	a'_4	$-\Gamma \beta_4$	Q_i

mesnet yayı ve
noktasal kütle için

burulma yayı ve dönme
kütlesi için

A) veya B) ye göre göz önüne alınmış m_i noktasal kütleleri yani $k_i = -m_i\omega^2$ dinamik yay katsayıları halinde bütün problem yaklaşık şekilde basit olarak incelenebilir. Şöyleki: Her açıklık yerine uzunluğu l_i ve rigidliği EI_i olan kütesiz bir çubuk, sürekli birim kütle yerine ise açıklık sınırlarında noktasal kütleler konulur; bunun için $\mu_i l_i$ açıklık kütleleri yarı yarıya açıklık sınırlarına dağıtılır. Yeterli yaklaşımını sağlanması için böyle bir işlem çok nazik bir çubuk bölünmesi gerektirir ki bu, hesap makinaları kullanılması halinde, bir güçlük arzetmez. Kütesiz çubukların açıklık matrisi, (6) ya oranla, oldukça sadeleşir:

$$F_i = \begin{pmatrix} 1 & \beta & -\beta^2/2\alpha & -\beta^3/6\alpha \\ 0 & 1 & -\beta/\alpha & -\beta^2/2\alpha \\ 0 & 0 & 1 & \beta \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_i \quad (6a)$$

Burada artık λ parametresi yoktur: λ , yalnız $K_i = -m_i\omega^2$ yay katsayısında (boyutsuz: $k_i = -m_i\lambda^4$) veya γ_i ters değerinde ortaya çıkar.

26.5. Determinant Matrisleri.

Büyük yay katsayılarından doğan nümerik güçlüklerin önlenmesi için tamamen değişik ve dikkate değer bir yol Fuhrke tarafından kullanılmıştır; Fuhrke matris elemanlarından ve vektör bileşenlerinden, sayısal değerleri yani matrislerin ve vektörlerin elemanları olan, iki sıralı determinantlara geçer. - Toplam taşıma matrisi

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{14} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{41} & \dots & a_{44} \end{pmatrix}$$

için, her biri belirli bir sınır koşuluna karşılık gelen, 6 kere 6 adet iki sıralı determinant vardır. Bu 36 determinant değeri yine altı sıralı bir matris, bir determinant matrisi veya "Δ-matrisi" olarak yazılabilir, ¹ bunun için determinantlarda ortaya çıkan satır - ve sütun kombinasyonlarına, aşağıdaki şekil uyarınca, birer numara verilir :

$$\begin{array}{cccccc} \text{Sıra kombinasyon} & : & 12 & 13 & 14 & 23 & 24 & 34 \\ \text{Numara} & : & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \quad (27)$$

Böylece örneğin, $A = (a_{ik})$ nın 1. ve 3. satırı ile 3. ve 4. sütunundan oluşan determinant şöyle gösterilir :

$$\Delta = [13, 34] = \begin{vmatrix} a_{13} & a_{14} \\ a_{33} & a_{34} \end{vmatrix} = A_{26}$$

A_{pq} nun birinci indisi p satır kombinasyonunu, burada 1, 3, ve ikinci indisi q sütun kombinasyonunu, burada 3, 4, gösterir. Bütün bu iki sıralı determinantlar, altı sıralı Δ-matrisi $A^\Delta = (A_{pq})$ ile özetlenir.

Tüm - taşıma matrisi A, çok açıklıklı giriş halinde, birden fazla açıklık ve nokta matrisinin (veya tüm matrisinin) çarpımı olarak bulunur. Şimdi (bakınız : Fuhrke H. Ing. Arch. Bd. 23 (1955), S. 329 - 348; Bd. 24 1956), S. 27 - 42.)

$$A = BC \quad \text{ile} \quad A^\Delta = B^\Delta C^\Delta \quad (23)$$

¹ Burada, özellikleri ayrıntılı incelenmiş, ikinci "türetilmiş" Kronecker matrisi bahis konusudur; bakınız : Gröbner, Matrizenrechnung [8] veya Gantmacher, Matrizenrechnung [7], orada "assoziierte Matrizen" terimi kullanılmıştır.

geçerli olduğu gösterilebilir : $A = BC$ matris çarpımının Δ-matrisi A^Δ , B, C çarpımlarına ait Δ-matrislerinin $B^\Delta C^\Delta$ çarpımına eşittir. Bu durumda tüm hesap, matrisler yerine, ilgili Δ-matrisleri ile yapılabilir. Şöyleki, bir defalık olmak üzere açıklık ve nokta matrislerine ait Δ-matrisleri bulunur ve bunlar ile, matrisler de olduğu gibi, işlem yapılır. Bu durumda, şimdiye kadarki iki vektör yerine tek bir vektör ile çalışılır. Ayrıca, başlangıçta altı sıralı Δ-matrislerinin beş sıralı matrislere indirgenebileceği görülecektir. Böylece açıklık başına gerekli çarpım sayısı 2 kere 16 = 32 den 25 e düşer; burada başlangıç matrisinin 16 elemanına karşılık her Δ-matrisinin 25 elemanı hesaplanacaktır. Fakat buradaki avantaj, uygun bir Δ-matris ile çarpılarak ara koşullarında (mesnetler, mafsallar, yaylı mafsallar ve noktalı kütleler) hesaba katılmasıdır. Böylece bütün hesap işlemi, hesap otomatlarının kullanılmasında kolaylık sağlayan, birim şekle dönüşür. Dezavantaj ise, durum vektörlerinin yeni titreşim şeklinin bu yoldan hesaplanamamasıdır. Bu durumda λ_c özdeğerinin bulunmasından sonra hesabın, eski yoldan yapılması gerekir.

Δ matrisi A^Δ nın her q sütununa sol giriş kenarında belirli bir sınır koşullu, her p satırına ise sağda bir koşul karşılık gelir. Burada 6 adet p veya q kombinasyonunun yalnız 4 adeti mekanik anlamda taşırlar :

Giriş sol ucu			Giriş sağ ucu		
Mesnet	Bilinmeyen durum büyük.	Sütun q	Mesnet	Durum büyüklükleri	Satır p
—	1,2	1	—	3,4	6
	1,3	2		2,4	5
Δ	2,4	5	Δ	1,3	2
	3,4	6		1,2	1

p, q = 1, 2, 5, 6 için, Δ-matrisi A^Δ nın her p, q elemanına, giriş uçlarında belirli bir mesnedlenme karşılık gelir; burada yine ikinci köşegen göre simetri vardır. İkinci köşegen üzerindeki şu simetrik mesnedlenme halleri vardır :

	1	2	5	6
1				
2				
5				
6				

Burada ihmal edilen $p, q = 3$ ve 4 orta satır ve orta sütunlarının elemanlarının, Maxwell karşıt teoremi uyarınca ana köşegen elemanlarındaki, eklenecek olan, 1 lar dışında, ikiyeşer birbirine eşit olduğu gösterilebilir. Δ -matrisinin orta çifte haçı şu şekli alır :

$$\begin{array}{ccccc}
 & & A_{13} = A_{14} & & \\
 & & A_{23} = A_{24} & & \\
 A_{31} & A_{32} & A + 1 A & A_{35} & A_{36} \\
 \parallel & \parallel & & \parallel & \parallel \\
 A_{11} & A_{12} & A & A + 1 A_{45} & A_{46} \\
 & & A_{53} = A_{54} & & \\
 & & A_{63} = A_{64} & &
 \end{array}$$

Bu özellik, keyfi sayıda Δ -matrisinin çarpımında da vardır. Böylece, 3. ve 4. sütun eklenerek ve dördüncü satır tamamen ihmal edilerek orta sıralar bir tek sıra ile gösterilebilir; zira iki Δ -matrisinin çarpımında sıraların eşitliği ancak bu şekilde göz önüne alınabilir. Böylece Fuhrke'nin teklifine göre, orta haçı

$$\begin{array}{ccccc}
 & & 2 A_{13} & & \\
 & & 2 A_{23} & & \\
 A_{31} & A_{32} & 2 A + 1 & A_{54} & A_{63} \\
 & & 2 A_{53} & & \\
 & & 2 A_{63} & &
 \end{array}$$

olan, beş sıraya indirgenmiş bir Δ -matrisi bulunur. İkinci simetri burada ortadan kalkmıştır.

Aşağıda, her defasında belirtmeksizin, bütün Δ -matrisleri indirgenmiş şekilde kabul edilecektir. Bir elemanın (satır veya sütunun) p, q şeklinde numaralanması başlangıçtaki Δ -matrisine ait sayılar özellikle,

yukarda verilen sınır koşulları ile ilgili 1, 2, 5, 6 sayıları ile yapılacaktır. Bu esnada p daima sağ kenarı (kirişucunu), q daima sol kenarı (kiriş başlangıcını) gösterir. Örneğin $p = 2$ sağda serbest mesnet, $q = 6$ solda ankasterlik gösterir. Ayrıca p nolu noktada 1 ve diğer noktalarda sıfırlara sahip olan e_p birim vektörünü hesaba katalım; bu durumda, daima 0 sıfır 3 ve 4 noktaları çakışır. Örneğin :

$$e_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

U_q mesnetleri (p, q) olan bir kiriş için tüm taşıma matrisi A nın Δ -matrisi A^Δ ya ait A_{pq} elemanı bulunmalıdır; bu, λ parametresinin aranan λ_e özdeğerine ait frekans determinatı olarak sıfır olmalıdır. Son açıklıklı bir kiriş halinde A , açıklık - ve nokta matrislerinin, genellik U_1 taşıma matrislerinin bir çarpımı olur; burada, Δ -matrisleri ile çalışma halinde, iç sınır koşullarında belirli mesnet matrisleri ile gösterilir.

$$A = U_n U_{n-1} \dots U_2 U_1$$

Zincirleme çarpımına, Δ -matrislerine ait olan

$$A^\Delta = U_n^\Delta U_{n-1}^\Delta \dots U_2^\Delta U_1^\Delta$$

çarpımı karşılık gelir. A_{pq} elemanı ise, bilindiği gibi, şöyle elde edilir. U_1^Δ nın yalnız q sütunu ve U_n^Δ nın yalnız p sütunu kullanılır yani sürekli olarak bir vektör ile çarpılır ve sonuç vektörünün yalnız p bileşeni alınır. U_1^Δ nın q sütunu, sol mesnetlenme q ya uygun olarak U_1^Δ nın q . ncu birim vektör e_q ile çarpılmasından bulunur. Böylece hesap aşağıdaki vektörlerin ardışık oluşturulması ile yapılır :

$$\left. \begin{array}{l} u_1 = U_1^\Delta e_q \\ u_2 = U_2^\Delta u_1 \\ \dots \\ u_n = U_n^\Delta u_{n-1} \end{array} \right\} \quad (29)$$

burada son vektörün p bileşeni, $\lambda = \lambda_e$ özdeğeri için sıfır olan, aranan A_{pq} elemanıdır.

Δ -matrisleri ile çalışma esnada iç sınır koşullarında, "mesned matrisleri" adı verilen ve S^A ile gösterilecek olan belirli Δ -matrisleri vasıtası ile göz önüne alınabilmesi dikkate değer. Bu durum, yaylı bir mesnedde gösterileceği gibi, yay - nokta matrislerinin sınır geçişi ile sağlanır. Bu, bilindiği üzere,

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ c & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

nokta matrisi ile göz önüne alınır. Yaylı mesnedden, $c \rightarrow \infty$ ile sabit bir mesned bulunur. P nin bir çarpan olduğu A tüm matrisinden Δ determinantının bulunmasında, c ile büyüyen terimlerin birbirini yok ettiği görülür; böylece sayısal hesap gittikçe belirsizleşir ve sonunda pratik olarak uygulanmaz hale gelir. Bu durum, yalnız determinantların hesaplandığı, Δ -matrisleri ile çalışma halinde, giderilir. P nokta matrisine, kolayca anlaşılacağı gibi, $c \rightarrow \infty$ limitinin alınabileceği, indirgenmiş P^A -matrisi :

$$P^A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -c & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -c & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

verilmiştir. A_{pq} da bir sayısal çarpan önemli olmadığından yalnız $A_{pq} = 0$ değeri gereklidir - bu, - c ye bölünebilir ve böylece $w = 0$ mesned koşulu aitt mesnet matrisi olarak :

$$S_w^A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

elde edilir. Bu matris, bir u vektörü ile çarpılarak

$$S_w^A \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_{3,4} \\ u_5 \\ u_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

bulunur. Yani bu 1, 2 bileşenlerinin 5, 6 ya gitmesini sağlar. Bunun anlamı şudur : 1 veya 2 başlangıç koşulları, 5 veya 6 uç koşullarına dönüşürler yani

$$w = 0 \rightarrow w = 0$$

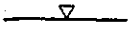
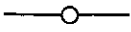
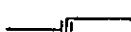
$$p = 1 \quad \varphi = 0 \rightarrow M = 0 \quad q = 5$$

$$p = 2 \quad M = 0 \rightarrow \varphi = 0 \quad q = 6.$$

$p \rightarrow q$ değişimi, birer $S_{qp} = 1$ elemanı ile sağlanır. $w = 0$ (mesned) koşulu yanında, ikişer $S_{qp} = 1$ elemanlı mesned matrislerinin karşılık geldiği diğer üç iç koşul yani $M = 0$ (mafsal), $Q = 0$ (kayar mafsal) verilebilir. Bunlar limit ile bulunmakla beraber, yukarıdakilere benzer gözlemler ile de elde edilir. Özet olarak :

İç Sınır Koşulları

$p \rightarrow q$ Mesnet matrisi S_{qp}

Mesnet		$w = 0$	$\begin{matrix} 1 & 5 \\ 2 & 6 \end{matrix}$	S_w^A	$S_{51} = S_{62} = 1$
Mafsal		$M = 0$	$\begin{matrix} 2 & 1 \\ 6 & 5 \end{matrix}$	S_M^A	$S_{12} = S_{56} = 1$
Dip yatağı		$Q = 0$	$\begin{matrix} 5 & 1 \\ 6 & 2 \end{matrix}$	S_Q^A	$S_{15} = S_{26} = 1$
Kayar mafsal		$\varphi = 0$	$\begin{matrix} 1 & 2 \\ 5 & 6 \end{matrix}$	S_φ^A	$S_{21} = S_{65} = 1$

Dört mesned matrisinin ayrıntılı şekilleri şöyledir :

$$S_w^A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad S_M^A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (30)$$

$$S_Q^A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad S_\varphi^A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Son olarak (6-a) açıklık matrisinin ve (20) genel nokta matrisinin (indirgenmiş) Δ -matrisleri yazılsın. Sonuncu, kolayca

$$S_i^{\Delta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -K_i & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -k_i & 0 & 0 & 1 & 0 \\ k_i K_i & -k_i & 0 & -K_i & 1 \end{pmatrix} \quad (31)$$

olarak verilebilir. Rayleigh - fonksiyonlarının (6-a) açıklık matrisine ait F^a nın gösterilmesi için aşağıdaki kısaltmalar tavsiye edilir :

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2} (\cos \lambda \sin \lambda + \sin \lambda \cos \lambda), C^* = \cos \lambda \cos \lambda \\ B &= \frac{1}{2} (\cos \lambda \sin \lambda - \sin \lambda \cos \lambda), S^* = \sin \lambda \sin \lambda \end{aligned} \quad (32)$$

Bunlar ile ve $\lambda/\beta = \nu$ kısaltması ile

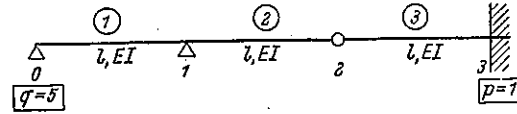
$$F^d = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(1+C^*) & -A/\alpha \nu & -S^*/\alpha \nu^2 & -B/\alpha \nu^3 & \frac{1}{2}(1-C^*)/\alpha^2 \nu^4 \\ \alpha \nu B & C^* & 2A/\nu & S^*/\nu^2 & -B/\alpha \nu^3 \\ \frac{1}{2}\alpha \nu^2 S^* & -\nu B & C^* & A/\nu & -\frac{1}{2}S^*/\alpha \nu^2 \\ \alpha \nu^3 A & -\nu^2 S^* & -2\nu B & C^* & -A/\alpha \nu \\ \frac{1}{2}(1-C^*)\alpha^2 \nu^4 & \alpha \nu^3 A & \alpha \nu^2 S^* & \alpha \nu B & \frac{1}{2}(1+C^*) \end{pmatrix} \quad (33)$$

elde edilir.

Δ -matrislerinin az sayıda elemanları kullanılarak önemli sadeleşmeler bulunur; bu durum, Şek. 26.7'deki iki mesnedli, mafsallı ve ankastre kiriş örneği ile gösterilecektir. Burada üç açıklık matrisindeki 75 eleman yerine yalnız 8 tanesi, aşağıdaki hesap şemasında görüleceği gibi, kullanılır. Şöyleki : Kullanılan elemanlara haç ile, kullanılmayanlar ise noktalar ile gösterilmiştir. Tamamen eşit açıklık boyutları halinde sayı 4 elemene indirgenir. Bunların bulunmasından sonra yalnız 6 çarpım gereklidir.

		0
		0
		0
		1
		0
F_1^d	. . . + .	+
	. . . + .	+
		.
		.
		.
S_1^d	0 0 0 0 0	0
	0 0 0 0 0	0
	0 0 0 0 0	0
	1 0 0 0 0	+
	0 1 0 0 0	+
F_2^d		.
	. . . + +	+
		.
		.
	. . . + +	+
S_2^d	0 1 0 0 0	+
	0 0 0 0 0	0
	0 0 0 0 0	0
	0 0 0 0 1	+
	0 0 0 0 0	0
F_3^d	+ . . + .	+
		.
		.
		.
		.

En küçük özfrekansın frekans parametresi, uzunluğu 1 olan, bir ucundan ankastre kirişe ait 1.875 değerinden biraz küçük olacaktır. (Daha gerçek ankraj, daha büyük kütle). Başka bir hesaptan $\lambda \approx 1.70$ değeri



Şek. 26.7. Ara şartlı kirişler.

ri bulunmuştur. Hesabın 1.69 1.20 ve 1.71 değerleri yapılmasından, $A_{15} = A$ determinant ifadesi içinden aşağıdaki değerler ve interpolasyon ile

bulunur

$$\lambda = 1,7015 \ 025$$

λ	$A_{15} = A$	δA	$\delta^2 A$
1,69	0,0232 339		
1,70	0,0030 512	-0,0201 827	-0,0002 159
1,71	-0,0173 474	-0,0203 986	
		-0,0202 907	-0,0001 080

$$A = 0,0030 \ 512 - 0,0202 \ 907 t - 0,0001 \ 080 t^2 = 0$$

$$t = 0,15037 - 0,00532 t^2$$

$$= 0,15037$$

$$= -0,00012$$

$$= 0,15025$$

$$\lambda = 1,70 + 0,01 t = 1,7015 \ 025.$$

Δ -matrisleri F^a nın bulunmasında kullanılan elemanlar şunlardır :

λ	F_{11}	F_{15}	F_{25}	F_{65}
1,69	0,3333 908	0,3204 386	0,9099 493	- 2,6139 157
1,70	0,3177 985	0,3201 319	0,9078 131	- 2,6737 736
1,71	0,3019 340	0,3198 199	0,9056 398	- 2,7345 753

26.6. Kiriş Eğilmesi Problemleri.

Falk'a göre taşıma matrisleri statik belirli veya belirsiz kiriş problemlerinin incelenmesinde de kullanılabilir. Alışılmış diğer metodlara oranla bu metodun avantajı şuradadır : Hesap o şekilde yapılabilir ki, statikçe belirsizlik derecesinden tamamen bağımsız olarak daima kiriş

ucundaki iki sınır koşulundan bulunacak iki bilinmeyen ortaya çıkar. Başlangıç bilinmeyenlerinden biri, bir ara koşulun belirmesi halinde, yok edilmiyor ise ve bunun yerine ek bilinmeyen sıçrama büyüklüğü konulmuyor ise, buna karşılık bu sıçrama büyüklükleri, sonunda bütün bilinmeyenlerin - şimdi homojen bir denklem sisteminden hesaplanması için, ek bilinmeyen sayılıyor ise, bu durumda pratik bir değişiklik olmaz. Bu sistem basamaklı olduğu için yok edilmesi, ara yok edilmeden fazla bir çalışma gerektirmez. Çalışma miktarı burada da bilinmeyenlerin sayısı ile lineer olarak artar. Bilinmeyen olarak kuvvetlerin (mesned, moment) yanında şekil değiştirmeler de (mafsal açılma değişme) de ortaya çıkar.

Uzunluğu l ve rigidliği EI olan bir açıklığın $q(x)$ ile yüklenmesi halinde, - şimdi homojen olmayan - $EI w^{IV} = q(x)$ diferansiyel denklemini çözümlenerek, açıklık başı ile açıklık ucu arasındaki bağıntı şöyle bulunur :

$$\left. \begin{aligned} w_1 &= w_0 + w'_0 l - \frac{l^2}{2EI} M_0 - \frac{l^3}{6EI} Q_0 + w^* \\ w'_1 &= w'_0 - \frac{l}{EI} M_0 - \frac{l^2}{2EI} Q_0 + w^{*'} \\ M_1 &= M_0 + l Q_0 + M^* \\ Q_1 &= Q_0 + Q^* \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

Buradaki ilk dört terim başlangıç koşullarının yani açıklık başlangıcındaki dört durum büyüklüğünün tesirini (integrasyon sabitleri) bir yıldız ile belirtilmiş son terim ise, $q(x)$ yükünün tesirini gösterir :

$$\left. \begin{aligned} Q^*(x) &= - \int_0^x q(\xi) d\xi, & M^*(x) &= \int_0^x Q^*(\xi) d\xi, \\ w^{*'}(x) &= - \frac{1}{EI} \int_0^x M^*(\xi) d\xi, & w^*(x) &= \int_0^x w^{*'}(\xi) d\xi. \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

Pratik hesap için referans büyüklükleri kullanılması ve boyut birimli durum büyüklükleri ile hesap etme tavsiye edilir. Burada çökme ve eğim yanında eğilme momentleri ve kesme kuvvetleri de önemli olduğundan, l_0 boyu yanında bir P_* kuvveti, örneğin $P_* = 1$ ton esas alınır. Durum büyüklükleri boyutsuz seçilir. w ve w' için fazla küçük sayısal değerler bulmamak için bu değerler 100 ile çarpılır ki bu cm ile

hesapla karşılık gelir; buna karşılık diğer uzunluklar m cinsinden ölçülmelidir. Böylece durum büyüklükleri olarak

$$\left. \begin{aligned} \bar{w} &= 100 w/l_0 & \bar{M} &= M/P_* l_0 \\ \bar{\varphi} &= 100 w' & \bar{Q} &= Q/P_* \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

seçilir ve bunlar - problemin homojen olmayan karakterine uygun şekilde - aşağıdaki beş sıralı vektör ile gösterilir :

$$z = \begin{bmatrix} \bar{w} \\ \bar{\varphi} \\ \bar{M} \\ \bar{Q} \\ 1 \end{bmatrix} \quad (37)$$

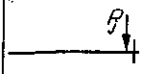
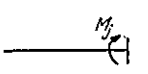
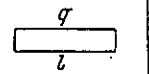
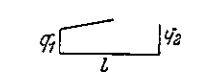
Uzunluklar, rigidlik ve yay sabitleri için esas alınan büyüklükler şimdi :

$$\beta_i = l_i/l_0, \alpha_i = EI_i/100 P_* l_0^2, \gamma_i = c_i l_0/100 P_*, \Gamma_i = C_i/100 P_* l_0 \quad (38)$$

“Yükleri” de esas alınan şekilde gösterelim :

$$\bar{P}_j = P_j/P_*, \quad \bar{M}_j = M_j/P_* l_0, \quad \bar{q}_j = q_j l_0/P_* \quad (39)$$

Bu durumda en önemli yükleme halleri için durum vektörünün yük terimleri şunlardır :

				
$\bar{w}^*$	0	0	$\bar{q} \beta^4/24 \alpha$	$(4 \bar{q}_1 + \bar{q}_2) \beta^4/120 \alpha$
$\bar{\varphi}^*$	0	0	$\bar{q} \beta^3/6 \alpha$	$(3 \bar{q}_1 + \bar{q}_2) \beta^3/24 \alpha$
$\bar{M}^*$	0	$\bar{M}_j$	$-\bar{q} \beta^2/2$	$-(2 \bar{q}_1 + \bar{q}_2) \beta^2/6$
$\bar{Q}^*$	$-\bar{P}_j$	0	$-\bar{q} \beta$	$-(\bar{q}_1 + \bar{q}_2) \beta/2$

P_j tek yükleri ve M_j tek momentleri halinde açıklık sınırı doğrudan doğruya, yük noktasının arkasına konulur.

Böylece açıklık matrisi ve yay halinde - tüm matrisi şöyle olurlar :

$$F_i = \begin{bmatrix} 1 & \beta & -\beta^2/2 \alpha & -\beta^3/6 \alpha & \bar{w}^* \\ 0 & 1 & -\beta/\alpha & -\beta^2/2 \alpha & \bar{\varphi}^* \\ 0 & 0 & 1 & \beta & \bar{M}^* \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \bar{Q}^* \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_i \quad (40)$$

$$L_i = \begin{bmatrix} 1 & \beta & -\beta^2/2 \alpha & -\beta^3/6 \alpha & \bar{w}^* & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\beta/\alpha & -\beta^2/2 \alpha & \bar{\varphi}^* & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \beta & \bar{M}^* & 0 & -K \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \bar{Q}^* & k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}_i \quad (41)$$

ve açıklık başlangıcı ile açıklık sonundaki iki durum vektörü arasındaki bağıntı

$$z_i = F_i z_{i-1} \text{ benzer olarak } z_i = L_i z_{i-1} \quad (42)$$

olur. Kiriş başlangıcındaki başlangıç vektörü yine aşağıdaki parçalara ayrılır :

$$z_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \bar{w}_0 + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \bar{\varphi}_0 + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \bar{M}_0 + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \bar{Q}_0 + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \bar{M}_0^* \\ \bar{Q}_0^* \\ 1 \end{pmatrix} \cdot 1 \quad (43)$$

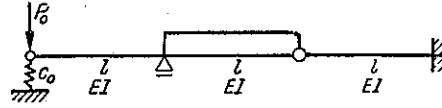
Burada dört durum büyüklüğünün ikisi, sol kiriş kenarındaki başlangıç koşulları ile bellidir. Bunlar ya sıfırdır ve denklem (43) de ortadan kalkarlar; veya sıfırdan farklıdır; örneğin başlangıç mesnedi yer değiştirmesi vardır ve son homojen olmayan vektör parçasına eklenirler. Bu durumda hesap, aşağıdaki iki örnekte açıklanacağı gibi, başlangıç - bilinmeyenlerinin üç sütunu ve yük sütunu 1 ile yaparlar.

	$\bar{w}_0$	$\bar{\varphi}_0$	$\Delta\bar{Q}_1$	$\Delta\bar{\varphi}_2$	1	z_i
$\gamma_0 = 1$	1	0			0	1/2
	0	1			0	-1
	0	0			0	0
	1	0			-1	-1/2
	0	0			1	1
F_1	1	1	-3	-1	0	0
		1	-6	-3	0	1/2
			1	1	0	-1/2
				1	0	-1/2, 3/2
					1	1
F_2	1	1	-3	-1	1/2	1
		1	-6	-3	2	1, -3/2
			1	1	-1	0
				1	-2	-1/2
					1	1
F_3	1	1	-3	-1	0	0
		1	-6	-3	0	0
			1	1	0	-1/2
				1	0	-1/2
					1	1
Uç denklemleri	0	1	0	0	1	$0 = w_1$
	2	0	1	0	-3	$0 = M_2$
	-26	3	-8	1	69/2	$0 = w_3$
	-27	1	-12	1	41	$0 = \varphi_3$
Yok etme	2	0	1	0	-3	0
	0	1	0	0	1	0
	13	-3	5	1	-15/2	0
	27/2	-1	-3/10	0,7	1,75	0
Bilinmeyenler	1/2	-1	2	-5/2	1	

	$\bar{\varphi}_0$	Q_0	ΔQ_1	$\Delta\bar{\varphi}_2$	1	z_i
	0	0			0	0
	1	0			0	1,4
	0	0			1	1
	0	1			0	-0,6
	0	0			1	1
L_1	1	1	-3	-1	1	0
		1	-6	-3	4	1,2
			1	1	-2	-1,6
				1	-4	-4,6 +1,6
					1	1
L_2	1	1	-3/2	-1/2	0	2,8
		1	-3	-3/2	0	3,6 -1,3
			1	1	0	0
				1	0	1,6 3,0
					1	1
L_3	1	1	-3	-1	3/2	0
		1	-6	-3	6	-4,3
			1	1	-3	0
				1	-6	-3,0
					1	1
Uç denklemleri	1	-1	0	0	-2	$w_1 = 0$
	0	2	1	0	-5	$M_2 = 0$
	8	-70	-23	4	109	$w_3 = 0$
	4	0	7	0	-49	$M_3 = 0$
Yok etme	1	-1	0	0	-2	
	0	2	1	0	-5	
	-8	31	8	4	-30	
	-4	-2	-5/8	-5/2	-49/4	
Bilinmeyenler	1,4	-0,6	6,2	-4,9	1	

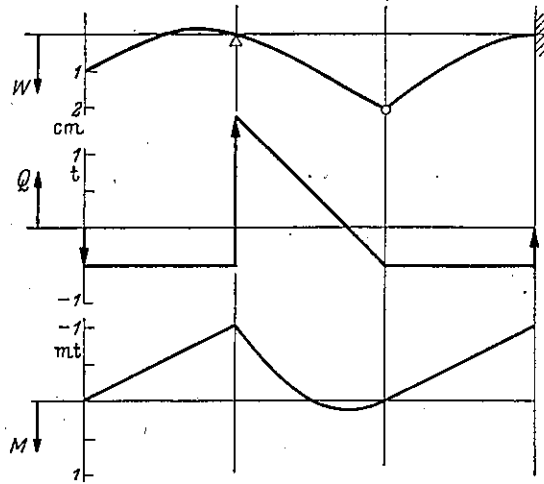
1. Örnek : Şek. 26.8 Hesap gelen sayfada

$$\begin{aligned}
 l &= 2 \text{ m} & l_0 &= l, \beta = 1 \\
 P_0 &= 1 \text{ t} & P_* &= 1 \text{ t} & \bar{P}_0 &= P_0/P_* = 1 \\
 q &= 1 \text{ t/m} & \bar{q} &= q l_0/P_* = 2 \\
 EI &= \frac{200}{3} \text{ tm}^2 & \alpha &= EI/100 P_* l_0^2 = 1/6 \\
 c_0 &= 50 \text{ t/m} & \gamma_0 &= c_0 l_0/100 P_* = 1
 \end{aligned}$$



Şekil 26.8 Kiriş eğilmelerine ait ilk örnek.

Bilinmeyenlerin bulunmasından sonra devam büyüklükleri - son sütun - hesaplanabilir. Şek. 26.9 da bunlar - esas alınan değerlerden gerçek değerlere geçişten sonra bilinen kiriş uzunluğu üzerine kaydedilmiştir.

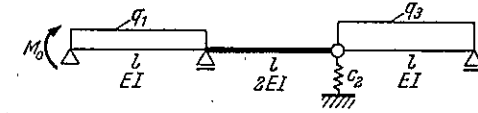


Şekil 26.9 Örneğe ait kesme kuvvetinin geçişi, eğilme momenti ve burulma momenti.

2. Örnek : Şek. 26.10 Hesap bir evvelki sayfadadır.

$$\begin{aligned}
 l_i &= l_0 = 10, \beta_i = 1 \\
 P_* &= 1 \text{ t} \\
 M_0 &= 10 \text{ mt}, \bar{M}_0 = 1 & EI &= 10000/6 \text{ tm}^2 & c_2 &= 5 \text{ t/m} \\
 q_1 &= 0,4 \text{ t/m}, \bar{q}_1 = 4 & \alpha_1 &= 1/6 & \gamma_2 &= 1/2 \\
 q_3 &= 0,6 \text{ t/m}, \bar{q}_3 = 6 & \alpha_2 &= 1/3
 \end{aligned}$$

Yine - doğru boyutlu değerlere çevrilmiş - durum büyüklükleri Şek. 26.11 de kiriş uzunluğu üzerine kaydedilmiştir.



Şekil 26.10 Kiriş eğilmesine ait ikinci örnek.

27. Titreşim Tekniğinde Matrisler.

27.1. Sonlu Serbestlik Dereceli Sönümsüz Titreşim Sistemleri.

Sönümsüz ve Jiroskopik hareketi olmayan n serbestlik dereceli bir titreşim sisteminin hareketi

$$T + U = \text{sabit} \quad (1)$$

enerji denklemi ile tanımlanır; burada potansiyel enerji U ve kinetik enerji T, sistemin koordinatları y_i veya hızları $\dot{y}_i$ cinsinden kuvaratik formdadır :

$$\begin{aligned}
 U &= \frac{1}{2} \sum c_{ik} y_i y_k = \frac{1}{2} \mathbf{y}' \mathbf{C} \mathbf{y} \\
 T &= \sum \frac{1}{2} a_{ik} \dot{y}_i \dot{y}_k = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{y}}' \mathbf{A} \dot{\mathbf{y}}
 \end{aligned} \quad (2)$$

Fiziksel karakteri gereği T formu pozitif definittir; yani T pozitifdir ve tam sükünet hali $\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{0}$ için sıfırdır; buna karşılık $U - \mathbf{y} = \mathbf{0}$ için sıfır-noktasının uygun seçilmesi halinde -pozitif definit veya, belirli y_i yer değiştirmeleri için geri çağırıcı kuvvetler yok ise, yarı- definittir. Küçük

x_i özvektörleri sistemi bilindiği gibi asal eksenler sistemi adı verilen mükemmel bir koordinat sistemi gösterir; ve burada titreşim denklemleri de çok basit şekil alırlar. Bu amaç ile A ya göre ortonormlaştırılmış x_i değerleri seçilir.

$$x_i' A x_k = \delta_{ik}, \quad (8a)$$

ve bunlar $X = (x_i)$ matrisi ile özetlenir ise

$$X' A X = I. \quad (8)$$

bulunur. Bu durumda $CX = AX$ ile özetlenen $Cx_i = \lambda_i A x_i$ özdeğer denklemleri X' ile soldan çarpılarak

$$X' C X = \Lambda = \text{Diag}(\lambda_i) \quad (9)$$

yani

$$y = Xz \quad (10)$$

dönüşümü ile yeni ve sisteme has z asal koordinatlarına geçilir ise, bağlı hareket denklemleri sistemi (3)

$$\ddot{z} + \Lambda z = 0, \quad (11)$$

ayrıntılı olarak

$$\begin{cases} \ddot{z}_1 + \lambda_1 z_1 = 0 \\ \ddot{z}_2 + \lambda_2 z_2 = 0 \\ \dots \dots \dots \\ \ddot{z}_n + \lambda_n z_n = 0 \end{cases} \quad (11a)$$

şeklini alır. Burada hareket denklemleri birbirlerine bağlı değildir; ve çözümleri doğrudan doğruya

$$\begin{cases} z_1 = A_1 \cos \omega_1 t + B_1 \sin \omega_1 t \\ z_2 = A_2 \cos \omega_2 t + B_2 \sin \omega_2 t \\ \dots \dots \dots \\ z_n = A_n \cos \omega_n t + B_n \sin \omega_n t \end{cases} \quad (12)$$

olarak yazılabilir; ve buradan (10) dönüşümü yardımı ile (7) çözümü

$$y = z_1 x_1 + z_2 x_2 + \dots + z_n x_n \quad (7a)$$

(7a) şekline girer. Pratikte asal eksen dönüşümünün önemi yoktur. Çünkü uygulanması için x_i özvektörlerinin bilinmesi şarttır.

Asal koordinatlara geçiş yolu ile bağın kaldırılması imkanı şu sonuca yol açar; titreşim sistemi, hareket denklemlerinin bağlanma şekli sisteme has ve bu neden ile, titreşim probleminin, titreşimi belirten bir özelliği olmayıp, o anda seçilen sistem koordinatının bir özelliğidir.¹

Titreşim tekniğinde sık rastlandığı üzere bir yay - veya ivme bağlantısının ya da (sönüm olması halinde) hız bağlantısının farklı, oldukça yüzeysel ve sistem koordinatlarının seçimine bağlı bir özelliktir. Titreşim problemlerinin, olayın esasına dayanan sınıflandırılması elemanter bölenler teorisi yardımı ile elde yapılabilir.

Genel özdeğer probleminden, özel hale geçiş için § 12.3 deki uygulamalara bakınız.

27.2. Sönümlü Titreşim Sistemleri. Stabilite.

n serbestlik dereceli titreşim sistemlerinde sönüm terimleri de var ise A eylemsizlik matrisi ve C fleksibilite matrisine aynı şekilde reel simetrik sönüm matrisi B eklenir ve hareket denklemleri sistemi şu şekli alır :

$$A \ddot{y} + B \dot{y} + C y = 0. \quad (13)$$

gerçek sönüm, -enerji kaybı- halinde sönüm matrisi B pozitif definit, veya hiç olmaz ise, yarı-definitdir. Alışılmış kuvvet formülü

$$y = x e^{\lambda t}$$

halinde (13) diferansiyel denklemi, ilgili homojen lineer

$$(A \lambda^2 + B \lambda + C) x = 0, \quad (14)$$

denklemini yani λ ya göre kuadratik polinom matrisli genelleştirilmiş özdeğer problemini verir. İlgili karakteristik denklem -trivial olmayan x_i çözümleri koşulu-

$$\det(A \lambda^2 + B \lambda + C) = 0 \quad (15)$$

olup bunun $2n$ adet λ_i kökü -yani özdeğerler- $2n$ adet lineer bağımsız x_i öz çözümlerini verir ki, böylece sistemi genel hareket değişimi belli olur.

¹⁾ KLOTTER, K. : Kopplung mechanischer Schwingungen. Ing. - Arch. Bd. 5 (1934), s. 157. — QUADE, W. : Über die Schwingungsvorgänge in gekoppelten Systemen, Ing. - Arch. Bd. 6 (1935), s. 15 - 34.

Titreşim hareketi karakterinin ayrıntılı incelenmesi, elemanter bölenler teorisi yardımı ile yapılabilir. Bu, $n = 2$ hali için, Quade'nin bir çalışmasında yapılmıştır.¹⁾ Ancak daha fazla serbestlik derecesi halinde, ilgili incelemeler oldukça karışık olabilir. Hareket değişiminin özelliklerini belirtme bile önemli stabilite sorusunu cevaplandıran titreşim olayı hakkında Falk çok daha basit tahminler yapmıştır.² Aşağıda bu incelemelerin esasları verilecektir.

Falk problemi, hemen Hermitsel matris haline genelleştirir; yani

A, B, C 'nin Hermitsel, A 'nin pozitif definit olmasını öngörür. Özdeğer denklemi (14) transpoze x^* vektörü ile soldan çarpılarak

$$\boxed{A\lambda^2 + B\lambda + C = 0} \quad (16)$$

denklemi bulunur; ve bunun katsayıları

$$\left. \begin{aligned} A &= x^*Ax > 0, \\ B &= x^*Bx, \\ C &= x^*Cx, \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

olup Hermitsel şekiller olarak, reeldir; ve bunlar arasında A , pozitif definit A matrisi nedeni ile pozitifdir. Bu durum uyarınca denklem A ya bölünebilir:

$$\boxed{\lambda^2 + b\lambda + c = 0}, \quad (18)$$

burada b, c katsayıları A, B ve A, C matris çiftlerinin Rayleigh oranlarıdır:

$$b = \frac{B}{A} = \frac{x^*Bx}{x^*Ax}, \quad c = \frac{C}{A} = \frac{x^*Cx}{x^*Ax}. \quad (19)$$

(14) denkleminin çözümü olarak her reel veya kompleks - x_i özvektörü için b_i, c_i sayıları bulunur; ve (18) denkleminin $\lambda_{1,2}^{(i)}$ köklerinden bir tanesi problemin ilgili λ_i özdeğeri olur. Verilen b_i, c_i halinde genel çözüm formülü

¹⁾ QUADE, W.: Klassifikation der Schwingungsvorgänge in gekoppelten Stromkreisen. Leipzig 1933. Vgl. auch dieses Buch, 1. u. 2. Aufl.

²⁾ FALK, S.: Klassifikation gedämpfter Schwingungssysteme und Eingrenzung ihrer Eigenwerte. Ing.-Arch. 29 (1960), s. 436-44.

$$\lambda = -\frac{b}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{b^2 - 4c} \quad (20)$$

den kökün ve buna bağlı olarak ilgili hareket değişiminin karakteri bulunur. Bu durum açık şekilde $b - c$ diyagramında gösterilebilir. Şekil 27.1.

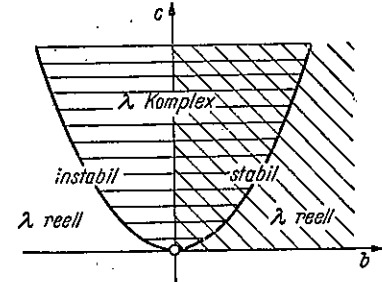
$$4c = b^2$$

parabolü reel, kompleks λ değerleri arasındaki sınırı belirtir. Bu sınır parabolünün üst yarısında b_i, c_i noktaları için kompleks kökler ve titreşen hareket değişimi söz konusudur. Denklem (20) uyarınca $b > 0$ ve $c > 0$ için, yani ancak

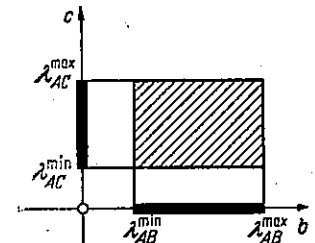
A, B ve C matrislerinin tümü pozitif definit olması ile, negatif reel kısımlar ve sönümlü yani stabil hareketler söz konusu olur. $b < 0$ ve $c > 0$ yani

A ve C pozitif definit, B negatif definit halinde ise, pozitif reel kısım ve kuvvetlenen yani stabil olmayan hareket değişimi söz konusu olur. $c < 0$ bölgesi (definit olmayan veya negatif definit C) için basit tahminler yapılamaz.

Bu durumda, x_i özvektörleri belli değil ise b_i, c_i noktalarının kesin konumu da belli olamaz. Ancak oldukça basit yoldan b, c için A, B ve A, C matris çiftlerinin -reel- değer aralıkları şeklinde sınırlar bulunabilir. Örneğin bu matris çiftlerini λ_{AB} ve λ_{AC} maximum ve minimum özdeğeri iteratif yoldan tayin edilir. Böylece (14) problemi için $b - c$ düzleminde dik dörtgen şeklinde değer aralığı bulunur. Şekil 27.2. Bu değer aralığının, yukarıda belirtilen düzlem bölgelerinde, örneğin sağ üst bölgede sınır parabolünün üstünde olmasına göre hareket değişiminin karakteri hakkında belirli tahminler yapılır.



Şek. 27.1. $b - c$ düzleminde λ -alanı.



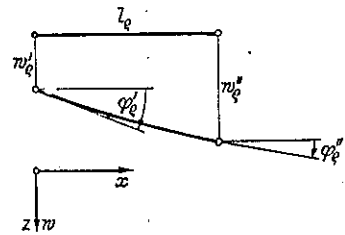
Şek. 27.2. Özdeğer probleminin (14) b_i, c_i için değer alanı.

27.3. Eğilme Titreşimlerinin Hesabı İçin Bir Matris Yöntemi.

Çok açıklıklı kiriş ve çerçevelerde eğilme titreşimlerinin yaklaşık hesabı için burada ve aşağıdaki paragraflarda problemi elemanter şekilde ele alan ve bu neden ile karışık sistemlerde uygulanabilen bir yöntem verilecektir. Tek kiriş açıklığının elastik ve dinamik özelliklerini 4. mertebeden rijitlik matrisi C_p ve kütle matrisi M_p ile gösterelim. Tüm açıklıklar için aynı tipte olan açıklık matrisleri sistemin geometrik ve dinamik yapısını göz önüne alınan belirli bağıntı matrisleri yardımı ile C, M toplam matrisinde birleştirilebilir. Böylece sürekli probleme

$$Cy = \lambda My \quad (21)$$

şeklindeki Matris - özdeğer problemi ile yaklaşılmış olur. Bir ve aynı j noktasındaki w_j çökmeleri ve φ_j dönmeleri koordinat olarak alınsın. Böylece iki j noktasının arasındaki yani açıklık içerisindeki $w(x)$ şekil değiştirmesine basit ve oldukça kesin şekilde $w(x)$ üçüncü derece enterpolasyon polinomu ile yaklaşıyoruz ve burada her iki açıklık sınırındaki w_j, φ_j gibi dört şekil değiştirme "mesnet değeri" olarak kullanılır. w_j, φ_j koordinatları $1, 2, \dots, n$ 'e kadar indisli ortak y_i işareti altında, y vektörünün bileşenleri olarak hesaba katılır. Mesnet koşulları nedeni ile ortadan kalkan şekil değiştirmeler (örneğin bir mesnetteki $w_j = 0$) bu y_i



Şek. 27.3. Açıklık koordinatları.

sistem koordinatları arasında gösterilmemiştir. $\rho (\rho = 1, \dots, r)$ numaralı tek açıklıklı yani koordinatlar yani açıklık başlangıcı için $w_{\rho'}, \varphi_{\rho'}$ ve açıklık için sonu için $w_{\rho''}, \varphi_{\rho''}$ kullanılır. Tek açıklık için x, y, z kartezyen sistemi seçildiğinden bunların işaretleri bellidir. Şekil 27.3. Bunlar için $v_{\rho^j} (j = 1, 2, 3, 4)$ ortak işareti ve v_{ρ} açıklık vektörü kullanılır, yani

$$v_{\rho^1} = w_{\rho'}, v_{\rho^2} = \varphi_{\rho'}, v_{\rho^3} = w_{\rho''}, v_{\rho^4} = \varphi_{\rho''}.$$

v_{ρ^j} açıklık koordinatları ile y_i sistem koordinatları arasında belirli ve kolayca gözden kaçabilecek bir bağıntı vardır. Bu bağıntı birer bağlantı - veya indis matrisi K_p ile gösterilebilir. Yalnız dik çerçeveler ele alınır ise bir y_i sistem koordinatının ilgili ρ açıklığında olup olmadığı ve işaretinin ne olduğu 0, 1 veya -1 elemanlarından anlaşılır. K_p matrisinin, dört v_{ρ^j} açıklık koordinatına karşılık dört satırı ve n adet y_i sistem koordinatı belirten n sütunu vardır; ve her sütunda sıfırdan farklı

bir eleman bulunur. Bir satırın tüm elemanları sıfır ise yani mesnet koşulu nedeni ile ilgili v_{ρ^j} büyüklüğü yok oluyor ise bu satır ihmal edilir ve aynı zamanda C_p, M_p açıklık matrislerinde ilgili satır ve sütun da çizilir. Böylece v , açıklık vektörü ile y sistem vektörü arasındaki şu bağıntı bulunur :

$$v_{\rho} = K_{\rho} y. \quad (22)$$

r adet açıklık - indis matrisi K_{ρ} , ilerde kullanılmak amacı ile ve K_{ρ} açıklık şeritleri üst üste yazılarak toplam - indis matrisi K ile gösterilir :

$$K = \begin{pmatrix} K_1 \\ K_2 \\ \vdots \\ K_r \end{pmatrix}. \quad (23)$$

Bütün bunları Şekil 27.4 de verilen çerçeve örneğinde açıklayalım :

Şek. 27.4. Örnek : Çerçeve titreşimi.

		$i = 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5$					
		$y_i = \varphi_0 \quad w_1 \quad \varphi_1 \quad \varphi_2 \quad \varphi_3$					
$j = 2$	2	1					Açıklık 1
	3		1				
	4			1			
	2				1		
4					1		
1		-1				Açıklık 4	
2					1		
4							1

İndis Matrisi K

27.4. Eğilme Titreşimleri Rijitlik Matrisi.

Elâstik davranışın belirtilmesi için C rijitlik matrisinin elemanları olan c_{ik} rijitlik etki sayıları kullanılır. Bunlar $l \neq k$ için $y_l = 0$ halinde $y_k = 1$ birim ötelenmesinden veya dönmelerinden ileri gelen K_i kuvvetleri veya momentleridir. Etki matrislerinin mümkün olduğu kadar basit şekilde kurulması istenir ise, bu şekil, değiştirme yöntemi, statikte kullanılan kuvvet yöntemine - birim kuvvet altındaki ötelemeler $= f_{ik}$ yer değiştirmeleri - tercih edilir. Çünkü birim şekil değiştirme, k şekil değiştirme noktası dışında ancak doğrudan doğruya i sistem noktalarına etki eder. Buna karşılık birinci yük, şekil değiştirme olarak tüm sisteme yayılır.

Tek ρ açıklığına ait rijitlikler, $v_\rho = e_k$ birim şekil değiştirmeleri altında zorlayıcı kuvvetler olarak tam statik yoldan bulunabilir. En önemli olan sabit kesitler hali için açıklık matrisi¹

$$C_\rho = \frac{EI_\rho}{l_\rho^3} \begin{pmatrix} 12 & 6l_\rho & -12 & 6l_\rho \\ 6l_\rho & 4l_\rho^2 & -6l_\rho & 2l_\rho^2 \\ -12 & -6l_\rho & 12 & -6l_\rho \\ 6l_\rho & 2l_\rho^2 & -6l_\rho & 4l_\rho^2 \end{pmatrix} \quad (24)$$

şeklini alır; burada l_ρ açıklık uzunluğu ve EI_ρ eğilme rijitliğidir. Matris tekil olup rankı 2 dir. Çünkü serbest açıklık 2 kerre serbesttir.

C_ρ açıklık rijitliği

$$2 A_\rho = v_\rho' C_\rho v_\rho \quad (25)$$

uyarınca A_ρ potansiyel enerji (şekil değiştirme işi) matrisidir. Bu açıklık enerjileri A toplam enerjisinde birleşir; burada yalnız şu husus göz önüne alınmalıdır: genellikle bir y_i sistem koordinatı birden fazla v_ρ^j açıklık koordinatına bağlıdır (K indis matrisinin i -nci sütununda birden fazla 1 elemanı vardır). Yani (25) ifadelerinin toplamı dışında açıklık koordinatlarının, denklem (22) uyarınca sistem koordinatlarına dönüştürülmesi gerekir. Böylece, toplam enerji A için

$$2 A = \sum_{\rho=1}^r y' K_\rho' C_\rho K_\rho y = y' \left(\sum_{\rho=1}^r K_\rho' C_\rho K_\rho \right) y$$

bulunur. Buradaki iç toplam şöyle oluşturulur: C_ρ açıklık rijitliği, köşegen matris tipindeki

$$C^0 = \text{Diag} (C_\rho) \quad (26)$$

yardımcı matrisine çevrilir; ve bu matris sağdan soldan toplam matris K veya K' ile çarpılır. Böylece basit yoldan sistem - rijitlik matrisi elde edilir:

$$C = K C^0 K \quad (27)$$

Yay sabitleri c_i veya C_i olan yaylı - veya döner yaylı mesnetler halinde $c_i w_i^2$ veya $C_i \varphi_i^2$ şeklinde enerji ifadeleri ortaya çıkar ki bu durum,

¹ Für Veränderliche Querschnitte vgl. die auf s. 417, Anm. 1, zitierte Arbeit.

c_i veya C_i yay sabitlerinin toplam rijitlik C nin ilgili köşegen elemanına eklenmesi anlamına gelir.

27.5. Eğilme Titreşimleri : Kütle Matrisinin Kurulması.

En basit şekilde kinetik enerjiden çıkarılan kütle matrisi için de yukardaki gibi hareket edilir. Sinus titreşimi halinde zamana bağlı maksimum değer

$$T = \frac{1}{2} \omega^2 \int \mu(x) w^2(x) dx$$

olup $\mu(x)$ (genellikle değişken) kütle yayılmasını gösterir. Her açıklık içerisinde bilinmeyen $w(x)$ şekil değiştirme fonksiyonu yerine

$$\widehat{w}(x) = \sum_{j=1}^4 H_j(x) v_\rho^j$$

üçüncü derece enterpolasyon polinomunu koyalım; buna ait Hermitsel enterpolasyon polinomları ise

$$\left. \begin{aligned} H_1(x) &= 1 - 3z^2 + 2z^3 \\ H_2(x) &= (z - 2z^2 + z^3)l \\ H_3(x) &= 3z^2 - 2z^3 \\ H_4(x) &= (-z^2 + z^3)l \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

olup burada $z = x/l$ dir. Böylece açıklık enerjisi için yine matris elemanlarından oluşan ve açıklık koordinatlarına göre 2 inci dereceden bir denklem elde edilir:

$$m_{ik}^\rho = \int_0^l \mu(x) H_i(x) H_k(x) dx \quad (29)$$

En önemli olan sabit kesit haline ait açıklık matrisi şudur:

$$M_\rho = \frac{\mu_\rho l_\rho}{420} \begin{pmatrix} 156 & 22l_\rho & 54 & -13l_\rho \\ 22l_\rho & 4l_\rho^2 & 13l_\rho & -3l_\rho^2 \\ 54 & 13l_\rho & 156 & -22l_\rho \\ -13l_\rho & -3l_\rho^2 & -22l_\rho & 4l_\rho^2 \end{pmatrix} \quad (30)$$

Açıklık koordinatları, y_i sistem koordinatlarına çevrilmek ve açıklık enerjileri toplam enerjide birleştirilmek sureti ile, rijitlik halinde olduğu gibi sistem - kütle matrisi elde edilir:

$$\boxed{\mathbf{M} = \mathbf{K}' \mathbf{M}^0 \mathbf{K}} \quad (31)$$

ilgili yardımcı matris ise şudur :

$$\mathbf{M}^0 = \text{Diag} (\mathbf{M}_\varphi) \quad (32)$$

burada da muhtemel m_i kütleleri ve θ_i dönme eylemsizlikleri $\mathbf{M}$ nin ilgili köşegen elemanlarına eklenecektir.

Sayısal hesap için, referans büyüklükleri olarak, uzunluk, rijitlik ve kütle dağılımı alınarak boyutsuz büyüklükler ile çalışmak tavsiye edilir. Bu durumda, referans büyüklükleri aşağıdaki gibidir :

$$l_0, EI_0, \mu_0$$

Uzunluklar $\bar{l}_\varphi = l_\varphi / l_0,$

Rijitlikler $\alpha_\varphi = EI_\varphi / EI_0,$

Kütleler $\bar{\mu}_\varphi = \mu_\varphi / \mu_0, \bar{m}_i = m_i / \mu_0 l_0, \bar{\Theta}_i = \Theta_i / \mu_0 l_0^2,$

Yay Sabitleri $\bar{c}_i = c_i l_0^3 / EI_0, \bar{C}_i = C_i l_0 / EI_0.$

φ açıları ve $\mathbf{M}$ momentleri yerine w_i, K_i ile aynı boyutlu

$$\bar{\varphi} = l_0 \varphi, \bar{\mathbf{M}} = \mathbf{M} / l_0,$$

büyüklikleri kullanılır ise ω^2 'nin yerini boyutsuz

$$\lambda = \frac{\mu_0 l_0^4 \omega^2}{EI_0}$$

özdeğer parametresi alır. Tüm formüllerde l, μ, m, c, φ büyüklükleri yerine üstü çizgili olanları ve EI_φ rijitliği yerine α_φ alınacaktır :

27.6. Eğil Titreşimlerine Örnekler.

1. Örnek : Şekil 27.5 de görülen değişken kesitli şaftın eğilme titreşimi hesabı.

Referans uzunluğu $l_0 = 2l$, açıklık uzunlukları

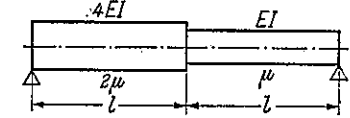
$$\bar{l}_1 = \bar{l}_2 = \frac{1}{2}, \alpha_1 = 4, \bar{\mu}_1 = 2, \alpha_2 = \bar{\mu}_2 = 1$$

Rijitlikler için aşağıdaki iki açıklık matrisi bulunur :

$$\mathbf{C}_1 = 32 \begin{pmatrix} - & \varphi_0 & w_1 & \varphi_1 \\ * & * & * & * \\ * & 1 & -3 & 0,5 \\ * & -3 & 12 & -3 \\ * & 0,5 & -3 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{C}_2 = 8 \begin{pmatrix} w_1 & \varphi_1 & - & \varphi_2 \\ 12 & 3 & * & 3 \\ 3 & 1 & * & 0,5 \\ * & * & * & * \\ 3 & 0,5 & * & 1 \end{pmatrix},$$

ve bunlar toplam matrisde birleştirilir :

$$\bar{\mathbf{C}} = 4 \begin{pmatrix} \varphi_0 & w_1 & \varphi_1 & \varphi_2 \\ 8 & -24 & 4 & 0 \\ -24 & 120 & -18 & 6 \\ 4 & -18 & 10 & 1 \\ 0 & 6 & 1 & 2 \end{pmatrix} = 4 \mathbf{C}^0.$$



Şek. 27.5. Değişken kesitli şaft.

aynı şekilde kütle matriside şöyle elde edilebilir :

$$\mathbf{M} = \frac{1}{1680} \begin{pmatrix} 4 & 26 & -3 & 0 \\ 26 & 936 & -22 & 13 \\ -3 & -22 & 6 & -1,5 \\ 0 & -13 & 1,5 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{1680} \mathbf{M}^0$$

Sayısal çarpanlar ayrılarak şu dönüşüm yapılır :

$$\mathbf{C}^0 \mathbf{y} = \lambda^0 \mathbf{M}^0 \mathbf{y} \text{ burada } \lambda^0 = \lambda / 6720.$$

Tablo 27.1 de ilk iki özdeğer için iterasyon, § 21.5 de tanımlanan yöntem (kesirli iterasyon) ile yapılmıştır. Yok etme işleminde ($\mathbf{C}^0$ 'ın üçgenlere ayrılmasında) tam sayıları saklamak amacı ile 3- ve 4- satırlar 4 ve 29 ile çarpılmıştır. λ_2 ve y_2 nin hesabı için Koch yöntemindeki yardımcı vektörler

$$w_1 = \mathbf{M} y_1, k_1 = w_1' y_1, w^0_1 = w_1 / k_1, \hat{w}_1 = \hat{\mathbf{M}} y_1.$$

şeklinde yazılır. $C_{11} = z' w^0_1$, yok etme katsayılarının birinci adımı sonunda sıfıra çok yakın ve yuvarlatma hatasına bağlı bir değer aldıkları kolayca görülür.

Sonuç :

$$\lambda_1 = 111,0245 \quad \lambda_2 = 3071,86$$

$$y_1 = \begin{pmatrix} 0,662710 \\ 0,265995 \\ 0,306268 \\ -1 \end{pmatrix} \quad y_2 = \begin{pmatrix} 0,506834 \\ -0,004487 \\ -0,612314 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Açılar y_i cinsinden ve $l_0 = 2l$ toplam uzunluk ile çarpılmış şekilde ortaya çıkarlar.

$$\lambda_1 = 2,24825 \quad \lambda_2 = 24,365$$

$$y_1 = \begin{pmatrix} 0,40798 \\ 0,52592 \\ 0,18726 \\ 1,0 \end{pmatrix} \quad y_2 = \begin{pmatrix} 0,30796 \\ -1,12136 \\ 1,19754 \\ 1,0 \end{pmatrix}$$

çözümleri elde edilir. Bileşenlerin önemine uygun olarak, sistemin titreşim şekilleri vektörlerden çıkartılabilir.

27.7 Tekil Rijitlik Matrisi.

Sistemin belirli hareket şekillerinde yay bağlantısının hiç olmaması veya çok yumuşak olması halinde, C rijitlik matrisi tekil (pozitif yarı definit) veya hemen hemen tekil (yaklaşık tekil) olur. n adet serbestlik derecesinden p adedi bağımsız ise, p -katlı $\lambda_0 = 0$ özdeğeri ortaya çıkar. C matrisi tekil olup rank düşmesi p dir :

$$C y_i^0 = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, p) \quad (33)$$

homogen sisteminin p adet lineer bağımsız y_i^0 çözümü vardır; ve bunlar şekil değiştirmemiş titreşim sisteminin, titreşim olayı önemsiz olan hareket şekilleridir. Tekil C nedeni ile yukarıda verilen şekilde ve sıfırdan farklı en küçük $\lambda_1 \neq 0$ özdeğerine yakınsama halinde

$$C y = \lambda M y \quad (21)$$

problemi iteratif yoldan incelenemez. Bunun yapılması için özel tedbirler gerekir. Örneğin problem, titreşim olayı için ölçü kabul edilen $n-p$ serbestlik derecesine indirgenmelidir. y_i^0 homogen çözümlerine yine

$$w_i^0 = M y_i^0 \quad (34)$$

vektörleri karşı getirilir; ve her ikisi birer vektör sistemi ile gösterilir.

$$Y_0 = (y_1^0, \dots, y_p^0), \quad W_0 = (w_1^0, \dots, w_p^0) = M Y_0. \quad (35)$$

y_i^0 çözümleri

$$y_i^{0'} M y_k^0 = w_i^{0'} y_k^0 = \delta_{ik} \quad (36)$$

ortonormlaştırma koşullarını, kısaca

$$Y_0' M Y_0 = W_0' Y_0 = I \quad (36a)$$

denklemini sağlayacak şekilde seçilmiş olsunlar. Bu durum denklem (33) deki geliş güzel y_i^0 çözümleri için söz konusu olmamakla beraber aşağı-

da ele alınacak uygun düşünceler yardımı ile daima sağlanabilir. Tekil ve C ile aynı ranklı ve (21) denkleminde M nin yerini alabilecek

$$M^{(1)} = M - W_0 W_0' \quad (37)$$

kütle matrisini oluşturalım. Çünkü (35) ve (36 a) uyarınca

$$M^{(1)} Y_0 = M Y_0 - W_0 = 0$$

geçerlidir; yani (33) denkleminin y_i^0 çözümleri aynı zamanda $M^{(1)} y = 0$ denkleminin çözümleridir. Bu çözümler ile diğerleri yani $\lambda_k \neq 0$ ait y_k özvektörleri arasında söz konusu olan ve kendiliğinden sağlanan

$$y_i^{0'} M y_k = 0 \text{ veya } W_0 y_k = 0$$

şeklindeki ortogonalite nedeni ile

$$M^{(1)} y_k = M y_k.$$

geçerli olup böylece (21) denklemi yerine

$$C y = \lambda M^{(1)} y \quad (21a)$$

yazılabilir.

$n - p$ mertebeli indirgenmiş C^0 ve M^0 matrisleri aşağıdaki şekilde elde edilir : $C, M^{(1)}$ matrislerinde, indirgenmiş matrisler, tekil olmayacak şekilde seçilen p adet eşit ancak geliş güzel satır ve sütunlar çizilir. Bu durumda şöyle kavranabilir : söz konusu satır ve sütunlar, sondaki p adet olsun; ve

$$Y = (e_1, \dots, e_{n-p}, Y_0),$$

matrisinin baştaki $n - p$ adet sütunları birim matrisin sütunları olsun; buna karşılık sondaki p adet ise homogen çözümlerden oluşan Y_0 matrisinden bulunsun. Böylece (fiktif olarak)

$$y = Y z$$

uyarınca yeni z koordinatlarına dönüşüm yapalım. Bu durumda (21 a) denklemi

$$C Y z = \lambda M^{(1)} Y z$$

şeklini alır; burada $CY, M^{(1)}Y$ matrislerinin ilk $n - p$ sütunu, $C, M^{(1)}$ matrisindekiler ile çakışır; sondaki p adet ise sıfır olur. Tekrar simetri sağlamak amacı ile Y' ile soldan çarpım yapılarak

homojen denklem sistemi elde edilir, burada trivial olmayan x çözümleri için şu koşul söz konusudur :

$$\det(A - \lambda I) = 0 \quad (4)$$

Böylece (1) diferansiyel denklem sisteminin katsayılar matrisinin "özdeğer problemi" ortaya çıkar. Matrisin karakteristik denklemi, diferansiyel denklem sisteminin karakteristik denklemi olur; bunun n adet kökü yani matrisin λ_i özdeğerleri, denklemi (2) den birer çözüm için bulunan λ parametresinin değerleridir. Örneğin bileşenlerin $e^{\lambda_i t}$ gibi bir ortak çarpanı, denklem sisteminin homojenliği nedeni ile, önemli olmadığından ilgili x_i özvektörleri "genlik vektörleri" sayılır ve bunlar için c yerine x_i yazılabilir. Bu x_i özvektörleri herhangi bir şekilde normlaştırılmış sayılır ise çözümde her x_i için serbest bir A_i çarpanı ortaya çıkar. Bu

$$A_i x_i e^{\lambda_i t}$$

tek çözümlerinin süperpozisyonundan, (1) in çözümü

$$x = A_1 x_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 x_2 e^{\lambda_2 t} + \dots + A_n x_n e^{\lambda_n t} \quad (5)$$

olarak bulunur. Eğer A matrisinin n adet x_i özvektörü lineer bağımsız seçilmiş ise bu, problemin n adet A_i serbest integrasyon sabitli "genel çözümü" olur. Çünkü bu ancak söz konusu halde ve

$$A_1 x_1 + A_2 x_2 + \dots + A_n x_n = x_0 \quad (6)$$

uyarınca, n adet keyfi $x(0) = x_0 = (x_i^0)$ başlangıç koşullarına uyabilir veya, x_i özvektörlerinin, tekil olmayan X matrisi ve $a = (A_1, A_2, \dots, A_n)'$ vektörü halinde kısaca

$$X a = x_0 \quad (6')$$

yazılabilir. Aranan A_i integrasyon sabitlerinden oluşan bu lineer denklem sistemi, keyfi x_0 başlangıç koşulları sağ taraf olmak üzere ancak ve ancak, X tekil olmayan ise veya A matrisinin n adet lineer bağımsız x_i özvektörü var ise yani A köşegen benzeri ise, çözülebilir.

n .ci mertebeden tek bir diferansiyel denklemin genel çözümünde, karakteristik denklemin λ çok katlı kökleri halinde, $e^{\lambda t}$ nin yanında p - katlı kökünde $t e^{\lambda t}, t^2 e^{\lambda t}, \dots, t^{p-1} e^{\lambda t}$ şeklinde terimlerin de ortaya çıkmasına karşılık A katsayılar matrisi köşegen benzeri yani $A - \lambda I$ karakteristik matrisinde yalnız lineer elementer bölenler olduğu sürece

(1) diferansiyel denkleminde bu durum söz konusu değildir. Çözümlerin lineer bağımsızlığı kısmen eşit üstel fonksiyonlar halinde bile yalnız x_i genlik vektörlerinin lineer bağımsızlığı ile sağlanır. Çok katlı kökler halinde lineer olmayan bölenlerin ortaya çıkışı ise durumu değiştirir.

Örnek :

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -2x_1 + 2x_2 - 3x_3 \\ \dot{x}_2 &= 2x_1 + x_2 - 6x_3 \\ \dot{x}_3 &= -x_1 - 2x_2 \end{aligned}$$

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -6 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \text{ matrisinin özdeğerleri } \lambda_1 = \lambda_2 = -3, \quad \lambda_3 = 5 \text{ ve}$$

ilgili üç bağımsız özvektör:

$$x_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad x_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Böylece genel çözüm

$$x = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} A e^{-3t} + \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} B e^{-3t} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} C e^{5t}$$

veya

$$\begin{aligned} x_1 &= (-2A + 3B) e^{-3t} + C e^{5t} \\ x_2 &= A e^{-3t} + 2C e^{5t} \\ x_3 &= B e^{-3t} - C e^{5t} \end{aligned}$$

olur. Örneğin

$$x_1(0) = 8, \quad x_2(0) = 0, \quad x_3(0) = 0$$

başlangıç koşulları için

$$\begin{aligned} -2A + 3B + C &= 8 \\ A + 2C &= 0 \\ B - C &= 0 \end{aligned}$$

denklemlerinden $A = -2, B = C = 1$ integrasyon sabitleri, yani başlangıç koşullarına uyan şu özel çözüm bulunur :

$$\begin{aligned}x_1 &= 7e^{-3t} + e^{5t} \\x_2 &= -2e^{-3t} + 2e^{5t} \\x_3 &= e^{-3t} - e^{5t}\end{aligned}$$

(1) sisteminin, x_0 başlangıç koşulları kapsayan bir çözümü

$$\boxed{x = e^{At} x_0} \quad (7)$$

şeklinde yani $x = a_x$ diferansiyel denkleminin $x = x_0 e^{at}$ çözümüne tamamen benzer olarak elde edilir. Çünkü $t = 0$ halinde e^{At} matrisinin I birim matrisine dönüşmesi sureti ile denklem (7), $\dot{x} = Ax$ diferansiyel denkleminin ve $x(0) = x_0$ başlangıç koşulunu sağlar. Bu $B = e^{At}$ matrisi ya seri şeklinde,

$$B = e^{At} = I + At + \frac{1}{2!} A^2 t^2 + \dots \quad (8)$$

olarak ifade edilebilir ve böylece B matrisine, belirli t -değerleri için $A^n t^n = (At)^n$ matris kuvvetleri bulunarak istenen hassasiyet ile yaklaşılabilmektedir. Bunun için λ_1 özdeğerlerinin bilinmesine gerek yok olur. Bu yol hesap makinalarının kullanılabilmesi halinde tavsiye edilmeye değer. Ancak normal çözüm yolu B matris fonksiyonunun, içinde A nın λ_1 özdeğerlerinin de bulunduğu A matrisine ait $\varphi(A)$ ersatz polinomu ile ifade edilmesidir. (Bak. 20.2) $m(\lambda)$ minimal polinomu çok sayıda λ_σ sıfır noktalarına sahip olmak üzere - ki bunlar karakteristik denklemin çok katlı kökleri de olabilir - A köşegen benzeri matris ise

$$B = e^{At} = \varphi(A) = \sum_{\sigma=1}^s \frac{e^{\lambda_\sigma t}}{m_\sigma(\lambda_\sigma)} m_\sigma(A) \quad (9)$$

olur; burada

$$m_\sigma(\lambda) = \frac{m(\lambda)}{\lambda - \lambda_\sigma}$$

dır. $m(A) = 0$ nedeni ile

$$m(A)x_0 = (A - \lambda_\sigma I) m_\sigma(A)x_0 = 0,$$

olur; yani, herhangi başlangıç vektörü x_0 halinde

$$m_\sigma(A)x_0 = x_\sigma \quad (10)$$

λ_σ ya ait bir özvektöre eşittir. Ancak böylece (9) ve (10) ile birlikte denklem (7),

$$x = e^{At} x_0 = \sum_{\sigma=1}^s \frac{e^{\lambda_\sigma t}}{m_\sigma(\lambda_\sigma)} x_\sigma, \quad (11)$$

şekline dönüşür ve bu, A_1 integrasyon sabitlerinin başlangıç koşullarına uydurulması ile denklem (5) den elde edilecek olan ve $x(0) = x_0$ başlangıç koşuluna uygun olan çözümdür. - Söylediklerimizi yukarıda verilen örnek ile açıklayalım. Bunun için

$$\begin{aligned}m(\lambda) &= (\lambda + 3)(\lambda - 5) \\ \lambda_1 &= -3 \quad m_1(\lambda) = \lambda - 5, \quad m_1(\lambda_1) = m_1 = -8 \\ \lambda_2 &= 5 \quad m_2(\lambda) = \lambda + 3, \quad m_2(\lambda_2) = m_2 = 8\end{aligned}$$

$$m_1(A) = A - 5I = \begin{pmatrix} -7 & 2 & -3 \\ 2 & -4 & -6 \\ -1 & -2 & -5 \end{pmatrix},$$

$$m_2(A) = A + 3I = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 4 & -6 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

dir. Yukarıda seçilen

başlangıç koşulu halinde

$$x_0 = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 8 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{m_1} m_1(A) x_0 = \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{m_2} m_2(A) x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

ve dolayısı ile

$$x = \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-3t} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} e^{5t}$$

bulunur ki bu da yukarıdaki özel çözüme uygun olur.

28.2. Lineer Olmayan Elementer Bölenler İçin Durum.

Eğer çok katlı özdeğerler halinde A matrisi, lineer bağımsız özvektörlerin tümüne sahip değil ise (5) çözümün herhangi x_0 başlangıç koşullarına uygun ifadesi mümkün olmaz. Köşegen benzeri olmayan bu matris yani lineer olmayan elementer bölenler halinde (1) denkleminin genel çözümünü bulmak için; n . ci mertebeden tek bir diferansiyel denklemin λ_1 çok katlı köklerinde olduğu gibi,

$$\boxed{x = c(t) e^{\lambda_1 t}} \quad (12)$$

şeklinde bir çarpan oluşturulur; burada $C(t)$ bir genlik vektörüdür; ve elemanlar, t cinsinden ve dereceleri halen belli olmayan polinomlarıdır.

$$\dot{x} = \lambda c(t) e^{\lambda t} + \dot{c}(t) e^{\lambda t}$$

nın diferansiyel denklemde yerine konulması ile, denklem (3) ün genel şekli olarak.

$$(A - \lambda I) c(t) = \dot{c}(t) \quad (13)$$

bulunur. Polinom vektörü $c(t)$ için

$$\boxed{c(t) = x^1 P(t) + x^2 \dot{P}(t) + \dots + x^e P^{(e-1)}(t)} \quad (14)$$

yazılır; burada $P(t)$ belli olmayan e halinde, $(e-1)$ inci dereceden bir polinom olup

$$\boxed{P(t) = A + Bt + C \frac{t^2}{2!} + \dots + E \frac{t^{e-1}}{(e-1)!}} \quad (15)$$

şeklinde ifade edilir ve böylece

$$x(0) = c(0) = A x^1 + B x^2 + \dots + E x^e \quad (16)$$

bulunur ki burada x^e bilinmeyen - lineer bağımsız - vektörleri gösterir. Buna göre

$$\dot{c}(t) = x^1 \dot{P}(t) + x^2 \ddot{P}(t) + \dots + x^{e-1} P^{(e-1)}(t), \quad (17)$$

olmasına karşılık $P^{(e)}(t) = 0$ nedeni ile son terim ortadan kalkar. Denklem (14) ve (17) nin denklem (13) de yerine konulması ve $P^{(e)}(t)$ türevleri için katsayılar karşılaştırılması sonucunda x^e vektörleri için şu ön kabul bulunur :

$$\begin{aligned} (A - \lambda I) x^1 &= 0 \\ (A - \lambda I) x^2 &= x^1 \\ &\dots \dots \dots \\ (A - \lambda I) x^e &= x^{e-1} \end{aligned} \quad (18)$$

Bunlar ise § 19.4, denklem (17) de ortaya çıkan τ basamaklı x^τ asal (ana) vektörlerinin tanım denklemleri olup 1. basamaktaki x^1 vektörü özvektörleri olup 1. basamaktaki x^1 vektörü özvektöre eşittir.

$d < p$ olmak üzere, karakteristik matris $A - \lambda I$ nin rank düşmesi d ise p -katlı özdeğer için, bilindiği gibi, d adet lineer bağımsız özvektör vardır (lineer olmayan elementer bölenler hali). Bu durumda, § 19.4 ve 19.5 de gösterildiği gibi, d adet $x_1^1, x_2^1, \dots, x_d^1$ özvektörü o şekilde seçilebilirki denklem (18) deki kural uyarınca herbirinden belirli e uzunluğunda bir ana vektör zinciri oluşabilir. $e = 1$ hali de bu arada ortaya çıkabilir. A matrisinin toplam olarak, $x = 1, 2 \dots k$ ile numaralanan ve kendilerine - imkan oranında eşit - k adet özdeğerin tekabül ettiği k adet lineer bağımsız $x_k = x_k^1$ özvektörü var ise A matrisinin J Jordan formundaki elementer terimlerin mertebeleri olan e asal vektör - zincir uzunlukları problemimiz için önem taşıyan λ özdeğerlerinin çok katlılıklarını belirtirler. Bunlar matrisin, "karakteristiği" ile özetlenen sayılardır yani gerçek çok katlılıkları gösteren yuvarlak parantezler burada önemsizdir. Bir asal vektör zincirinin başlangıç (ilk) terimi olarak her x^1 özvektörü için

$$\boxed{x_k(t) = c_k(t) e^{\lambda_k t}} \quad (x = 1, 2, \dots, k), \quad (12a)$$

şeklinde bir diferansiyel denklem çözümü vardır ve her $c_k(t)$, denklem (14), uyarınca, e -1 dereceli bir $P_k(t)$ polinomuna sahip asal vektör zinciri ile bellidir. Denklem (12 a) daki münferit çözümlerden genel çözüme varılır :

$$\boxed{x(t) = c_1(t) e^{\lambda_1 t} + \dots + c_k(t) e^{\lambda_k t}} \quad (19)$$

Buradaki n adet $A, B, \dots, (x = 1, 2, \dots, k)$ integrasyon sabiti, herhangi başlangıç koşulu $x(0) = x_0$ halinde, katsayılar matrisi n adet bağımsız x^e öz - ve asal vektörlerinden oluşan bir denklem sisteminden hesaplanabilir.

Örneğin $n = 9$ halinde A matrisinin karakteristiği $[(2, 1, 1)(3, 2)]$ ise yani 4 veya 5 katlı $\lambda_1 = a$ ve $\lambda_2 = b$ gibi farklı iki özdeğeri var ise, nokta şeması ve asal vektörler sistemi şöyle olur :

$$\begin{aligned} \lambda_1 = a : x &= 1 \dots x_1^1 x_1^2 \\ &2 \dots x_2^1 \\ &3 \dots x_3^1 \\ \lambda_2 = b : &4 \dots x_4^1 x_4^2 x_4^3 \\ &5 \dots x_5^1 x_5^2 \end{aligned}$$

Böylece diferansiyel denklemin genel çözümü bulunur :

$$\begin{aligned} x(t) &= [(A_1 + B_1 t) x_1^1 + B_1 x_1^2] e^{at} + A_2 x_2^1 e^{at} + A_3 x_3^1 e^{at} \\ &+ \left[(A_4 + B_4 t + C_4 \frac{t^2}{2}) x_4^1 + (B_4 + C_4 t) x_4^2 + C_4 x_4^3 \right] e^{bt} \\ &+ [(A_5 + B_5 t) x_5^1 + B_5 x_5^2] e^{bt} \end{aligned}$$

Örnek :

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= 24 x_1 + 18 x_2 - 27 x_3 + 8 x_4 \\ \dot{x}_2 &= -19 x_1 - 14 x_2 + 24 x_3 - 6 x_4 \\ \dot{x}_3 &= 10 x_1 + 8 x_2 - 10 x_3 + 4 x_4 \\ \dot{x}_4 &= 19 x_1 + 16 x_2 - 24 x_3 + 8 x_4 \end{aligned}$$

Matrisin dört katlı özdeğeri $\lambda = 2$ ve karakteristiği $[(31)]$ dir. Bu durumda asal vektörler aşağıdaki şemadan bulunur :

öz ve asal vektörlerin hesabı :

$A - \lambda I$				$\bar{x}_1^1$	$\bar{x}_1^2$
22	18	-27	8	2	5
-19	-16	24	-6	1	0
10	8	-12	4	2	4
19	16	-24	6	-1	0
				y_1	y_2
22	18	-27	8	4	0
-19	-16	24	-6	2	1
10	8	-12	4	-5	0
19	16	-24	6	0	1
0	3	2	0		
-2	2	0	1		
5	-6	0	0	←	-1
8	-9,5	0	0	←	-1

Hesap, § 6.5 deki bölüm olmayan algoritma ile yapılır. Vektörler şöyle ayrılır :

y_1	y_2					
4	0					
2	1					
-5	0					
0	1					
-4	3	0	3	2	0	$\bar{x}_1^1$
-4	3	-2	2	0	1	$\bar{x}_2^1$
8	-6	5	-6	0	0	$\bar{x}_1^2$
13	-9,5	8	-9,5	0	0	$\bar{x}_1^3$
-4	3	0	3	2	0	* x_2^1
-1	0	-2	-1	-2	1	→ x_1^2
2	0	5	0	4	0	→ x_1^3
13/4	1/4	8	1/4	13/2	0	* x_1^3

Daha küçük basamaklara iniş yolu :

$A - \lambda I$				x_1^3	x_1^2	x_1^1
22	18	-27	8	8	5	2
-19	-16	24	-6	1/4	0	1
10	8	-12	4	13/2	4	2
19	16	-24	6	0	0	-1

ÇÖZÜM :

$$x(t) = \left[(A_1 + B_1 t + C_1 \frac{t^2}{2}) x_1^1 + (B_1 + C_1 t) x_1^2 + C_1 x_1^3 + A_2 x_2^1 \right] e^{2t}$$

veya sabitlere göre düzenleme ve $C_1/2$ yerine C_1 yazılması halinde,

$$x(t) = \left[\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} A_1 + \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} A_2 + \begin{pmatrix} 5 + 2t \\ t \\ 4 + 2t \\ -t \end{pmatrix} B_1 + \begin{pmatrix} 16 + 10t + 2t^2 \\ 1/2 + t^2 \\ 13 + 8t + 2t^2 \\ -t^2 \end{pmatrix} C_1 \right] e^{2t}$$

daha ayrıntılı olarak

$$\begin{aligned} x_1 &= [2 A_1 + (5 + 2t) B_1 + (16 + 10t + 2t^2) C_1] e^{2t} \\ x_2 &= [A_1 + 3 A_2 + t B_1 + (1/2 + t^2) C_1] e^{2t} \\ x_3 &= [2 A_1 + 2 A_2 + (4 + 2t) B_1 + (13 + 8t + 2t^2) C_1] e^{2t} \\ x_4 &= [-A_1 - t B_1 - t^2 C_1] e^{2t} \end{aligned}$$

olur.

28.3. Yüksek Mertebeden Sistemler.

Şimdiye kadarki işlemler sabit katsayılı homojen denklemler halinde yüksek mertebeden diferansiyel denklem sistemlerinin çözümünde de kullanılabilir; çünkü türevlerin yeni değişken sayılması ile yüksek mertebeden denklemler birinci mertebeden sistemler indirgenebilir.

Bu durumu, sabit katsayılı denklem sistemlerinin ayrıntıları ile incelendiği Routh¹ un dinamik kitabındaki bir örnek ile açıklayalım.

$D = d/dt$ yani $\dot{x} = Dx$ kısaltması halinde örnek

$$\begin{aligned} (D-1)^2 (D+1) x_1 - (D-1) (D-2) x_2 + (D-1) x_3 &= 0 \\ 3 (D-1)^2 x_1 - (D-1) (D-3) x_2 + 2 (D-1) x_3 &= 0 \\ (D-1)^2 x_1 + (D-1) x_2 + (D-1) x_3 &= 0 \end{aligned}$$

şeklinde ifade edilebilir. Genellikle bu tip denklemler matris şeklinde yazılabilir.

$$\boxed{F(D) x = 0} \quad (20)$$

Alışılmış üstel ifade

$$x = c e^{\lambda t}$$

genlik vektörüne ait homojen denklem sistemine götürür.

¹⁾ Routh E. J.: Advanced rigid dynamics. 6. Aufl. London 1905. — Almanca tercüme: Die Dynamik starrer Körper. Bd. 1, 2. Leipzig 1898. Insbesondere Bd. 2, s. 236-241.

$$\boxed{F(\lambda) c = 0} \quad (21)$$

burada $F(\lambda)$, λ cinsinden polinom matrisi olup örneğimizde

$$F(\lambda) = \begin{pmatrix} (\lambda-1)^2 (\lambda+1) & -(\lambda-1) (\lambda-2) & (\lambda-1) \\ 3 (\lambda-1)^2 & -(\lambda-1) (\lambda-3) & 2 (\lambda-1) \\ (\lambda-1)^2 & (\lambda-1) & (\lambda-1) \end{pmatrix}.$$

dir. Karakteristik denklem

$$\boxed{\det F(\lambda) = 0} \quad (22)$$

bu halde $\det F(\lambda) = -(\lambda-1)^6 = 0$

şeklini alır yani altı katlı $\lambda = 1$ köküne sahiptir. Buna göre problem 6. cı mertebededir ve genel çözüm 6 serbest sabiti gerektirir.

Çözümün, o yukardaki bölümde verilen metodla yapılması için aşağıdaki yeni değişkenler yardımı ile 3. mertebeden sistem 1. mertebeden sisteme indirgenir.

$$\begin{aligned} z_1 &= x_1 & z_4 &= x_2 & z_6 &= x_3 \\ z_2 &= \dot{x}_1 & z_5 &= \dot{x}_2 \\ z_3 &= \ddot{x}_1 \end{aligned}$$

Böylece ve ayrıntılı yazılmış

$$\begin{aligned} \ddot{z}_1 - \ddot{z}_1 - \dot{z}_1 + z_1 - \ddot{z}_2 + 3 \dot{z}_2 - 2 z_2 + z_3 - z_3 &= 0 \\ 3 \ddot{z}_1 - 6 \dot{z}_1 + 3 z_1 - \ddot{z}_2 + 4 \dot{z}_2 - 3 z_2 + 2 \dot{z}_3 - 2 z_3 &= 0 \\ \ddot{z}_1 - 2 \dot{z}_1 + z_1 + \dot{z}_2 - z_2 + \dot{z}_3 - z_3 &= 0 \end{aligned}$$

1. mertebeden sistem

$$Bz + Cz = 0$$

Şeklinde elde edilir; burada B, C katsayılar semaları aşağıdaki tabloda verilmiş olup

$$\dot{z} = A z$$

normal şekline dönüşüm yapılır ve $BA + C = O$ denklem sisteminin çözümü, olarak A matrisi şöyle bulunur;

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

6 katlı $\lambda = 1$ özdeğerine sahip bu A matrisi yukardaki bölümde olduğu gibi incelenecektir. Karakteristiği $((3 \ 2 \ 1))$ olarak bulunur. Öz- ve asal vektörler sayfa 489 ve 490 daki iki şemada hesaplanmıştır :

Buradan $z_1 = x_1, z_4 = x_2, z_6 = x_3$ bileşenleri bulunur.

$$x(t) = \left[A_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + B_1 \begin{pmatrix} -1+t \\ -1+t \\ -t \end{pmatrix} + C_1 \begin{pmatrix} 1-t+t^2/2 \\ 1-t+t^2/2 \\ -t^2/2 \end{pmatrix} \right. \\ \left. + A_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + B_2 \begin{pmatrix} 2-t \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + A_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right] e^t.$$

İntegrasyon sabitleri $x_1, \dot{x}_1, \ddot{x}_1; x_2, \dot{x}_2, \ddot{x}_2; x_3$, gibi altı başlangıç koşullarından veya bunlara tekabül eden $z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6$, değerlerinden yani $z(0) = z_0$ vektöründen tayin edilirler; bu ise, z_x^T öz- ve asal vektörlerinin tekil olmayan matrisini havi bir denklem sistemidir.

28.4. Homojen Olmayan Sistemler.

Birinci mertebeden, homojen olmayan bir sistem için tek diferansiyel denklemde olduğu gibi çözüm "sabitlerin varyasyonu" metodu ile yapılabilir. Sabit katsayılar yani $r_1(t)$ pertürbasyon fonksiyonlarının verilmiş $r(t)$ vektörüne sahip

z_1	z_2	z_3	z_4	z_5	z_6	z_1	z_2	z_3	z_4	z_5	z_6
1						-1					
	1						-1				
		1	-1	1		1	-1	-1	-2	3	-1
			1						-1		
			-1	2		3	-6	3	-3	4	-2
				1		1	-2	1	-1	+1	-1
0	0	1	0	1	-1	1					
1	0	-3	0	-2	2		1				
0	1	3	0	1	-1			1			
0	0	0	0	-1	1				1		
0	0	0	1	2	-1					1	
0	0	0	0	0	1						1

$A - \lambda I$	$\bar{z}_1^1$	$\bar{z}_2^1$	$\bar{z}_1^2$
-1 1 0 0 0 0	1 0	2	
0 -1 1 0 0 0	1 0	1	
1 -3 2 0 0 0	1 0	0	
0 0 0 -1 1 0	0 -1	1	
1 -2 1 -1 1 0	0 -1	0	
-1 2 -1 1 -1 0	0 1	0	
-1 1 0 0 0 0	1 1 -1	1 0	2
0 -1 1 0 0 0	-2 -1 1	1 0	1
1 -2 0 0 0 0	1 0 0	0 0	0
0 0 0 -1 1 0	0 -1 1	0 -1	1
1 -1 0 -1 0 0	0 1 0	0 0	0
-1 1 0 1 0 0	0 0 1	0 0	0
z_1^1 1 1 1 0 0 0			
z_2^1 0 0 0 1 1 0			
z_3^1 0 0 0 0 0 1			
z_1^2 -2 -1 0 0 0 0	-1		
z_2^2 0 0 0 1 0 0	-1		
z_3^2 -3 -1 0 -1 0 0		-1	

1	1	-1									
-2	-1	1									
1	0	0									
0	-1	1									
0	1	0									
0	0	1									
0	0	0	1	1	1	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	1	1	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0
-0	-1	1	-2	-1	0	0	0	0	0	0	0
0	-1	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0
-1	-1	1	-3	-1	0	-1	0	0	0	0	0
0	0	0	1	1	1	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	1	1	0	0	0	0
0	0	-1	0	0	0	-1	-1	1	0	0	0
0	-1	-1	-2	-1	0	-1	-1	0	0	0	0
0	-1	-1	2	1	0	1	0	0	0	0	0
-1	-1	-1	-1	0	0	-1	0	0	0	0	0

$\rightarrow z_1^3$
 $* z_2^1$
 $\rightarrow z_2^2$
 $* z_2^2$
 $\rightarrow z_1^3$
 $* z_1^3$

$A - \lambda I$	z_1^3	z_1^2	z_1^1	z_2^2	z_2^1	z_1^1
-1 1 0 0 0 0	1	-1	1	2	-1	0
0 -1 1 0 0 0	0	0	1	1	-1	0
1 -3 2 0 0 0	0	1	1	0	-1	0
0 0 0 -1 1 0	1	-1	1	1	0	1
1 -2 1 -1 1 0	0	0	1	1	0	1
-1 2 -1 1 -1 0	0	0	-1	0	0	0

Çözüm :

$$z(t) = [A_1 z_1^1 + B_1 (z_1^2 + z_1^1 t) + C_1 (z_1^3 + z_1^2 t + z_1^1 t^2/2) + A_2 z_2^1 + B_2 (z_2^2 + z_2^1 t) + A_3 z_3^1] e^t$$

$$\dot{x} = Ax + r(t) \quad (23)$$

şeklindeki bir denklem halinde homojen denklemin

$$z = e^{At} z_0$$

Şeklindeki çözümü esas alınır ve homojen olmayan sistemin bir çözümü elde edilir :

$$x = e^{At} y(t) \quad (24)$$

burada $y(t)$ daha belli değildir

$$\dot{x} = Ax + e^{At} y(t)$$

nin denklem (23) de yerine konulması ile

$$e^{At} \dot{y}(t) = r(t)$$

ve buradan, tekil olmayan e^{At} nedeni ile,

$$\dot{y} = e^{-At} r(t)$$

bulunur. $x(0) = x_0$ başlangıç koşullarının göz önüne alınması ile integrasyon işleminin sonuncu

$$y(t) = \int_0^t e^{-A\tau} r(\tau) d\tau + x_0$$

olur ve böylece çözüm olarak

$$x(t) = e^{At} x_0 + e^{At} \int_0^t e^{-A\tau} r(\tau) d\tau, \quad (25)$$

elde edilir ki bu, birinci mertebeden tek lineer diferansiyel denklemin çözüm formülünün karşılığıdır.

Ancak genellikle - tek diferansiyel denklemlerde olduğu gibi - homojen olmayan sistemin, $r(t)$ pertürbasyon fonksiyonuna uygun $x_1(t)$ özel çözüm şekli ile çözülmesi denir. Bu durumda genel çözüm

$$x(t) = z(t) + x_1(t) \quad (26)$$

olup $z(t)$, yapısı ilk iki bölümde belirtilen homojen sistemin genel çözümüdür. Bu çözüm yoluna basit örnekler ile açıklayalım.

a) Kuvvet (Üs) :

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 t^m, \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (27)$$

pertübasyon fonksiyonu için

$$\mathbf{x}_1(t) = \mathbf{a}_0 + \mathbf{a}_1 t + \dots + \mathbf{a}_m t^m \quad (28)$$

polinom ifadesinden, katsayıların karşılaştırılması ile,

$$\begin{array}{lcl} \mathbf{A} \mathbf{a}_0 & = & \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{A} \mathbf{a}_1 & = & 2 \mathbf{a}_2 \\ \dots & & \dots \\ \mathbf{A} \mathbf{a}_{m-1} & = & m \mathbf{a}_m \\ \mathbf{A} \mathbf{a}_m & = & -\mathbf{r}_0 \end{array} \quad (29)$$

koşulları bulunur.

$\mathbf{A}$ tekil olmayan ise buradan, sırası ile, keyfi $\mathbf{r}_0$ vektörü için $\mathbf{a}_m, \mathbf{a}_{m-1}, \dots, \mathbf{a}_0$ vektörleri bulunur. Fakat $\mathbf{A}$ tekil, örneğin rank düşmesi 1 ise t-kuvveti ile genişletilmiş polinom ifadesi

$$\mathbf{x}_1(t) = \mathbf{a}_0 + \mathbf{a}_1 t + \dots + \mathbf{a}_{m+1} t^{m+1} \quad (28a)$$

hedefe götürür; burada $\mathbf{a}_1$ değerleri, (29) benzeri sistemlerden bulunur.

b) Üstel fonksiyon :

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 e^{\alpha t} \quad (30)$$

halinde,

$$\mathbf{x}_1(t) = \mathbf{a} e^{\alpha t} \quad (31)$$

ifadesinden

$$(\mathbf{A} - \alpha \mathbf{I}) \mathbf{a} = -\mathbf{r}_0 \quad (32)$$

bulunur ve bu, α nın, $\mathbf{A}$ nın λ_i özdeğerlerinden biri ile çakışmadığı yani $\alpha \neq \lambda_i$ olduğu sürece keyfi $\mathbf{r}_0$ için çözülebilir. Fakat $\alpha = \lambda_i$ halinde, (32) genel halde çözümler. Bu durumda

$$\mathbf{x}_1 = (\mathbf{a} t + \mathbf{b}) e^{\alpha t}, \quad \alpha = \lambda_i \quad (31a)$$

dan

$$(\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I}) \mathbf{a} = \mathbf{0} \quad (32a)$$

$$(\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I}) \mathbf{b} = \mathbf{a} - \mathbf{x}_0 \quad (32b)$$

bulunur. Keyfi $\mathbf{c}_i$ özvektörüne sahip $\mathbf{a} = \mathbf{c}_i \mathbf{c}_i$, λ_i ye eşit kılınır ise, $\mathbf{c}$ çarpanı homojen olmayan (26) sisteminin çözünürlük koşullardan elde edilir, bu ise bir $\mathbf{b}$ vektörü verir.

c) Dairesel Fonksiyonlar :

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 \cos \omega t + \mathbf{s}_0 \sin \omega t \quad (33)$$

pertübasyon fonksiyonu için

$$\mathbf{x}_1(t) = \mathbf{a} \cos \omega t + \mathbf{b} \sin \omega t \quad (34)$$

ifadesinden $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ cinsinden bir denklem sistemi elde edilir.

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A} & -\omega \mathbf{I} \\ \omega \mathbf{I} & \mathbf{A} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} \mathbf{r}_0 \\ \mathbf{s}_0 \end{pmatrix}, \quad (35)$$

bu ise, burada ortaya çıkan ve kompleks $\mathbf{B} = \mathbf{A} + i\omega \mathbf{I}$ matrisi ile eş anlamlı olan matris, tekil olmayan ise keyfi $\mathbf{r}_0, \mathbf{s}_0$ için çözülebilir, bunun için örnek verelim :

$$\dot{x}_1 = x_1 + 3x_2$$

$$\dot{x}_2 = x_1 - x_2 + 8 \sin 2t.$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \lambda_1 = 2, \lambda_2 = -2 \text{ öz değerleri ve}$$

$$\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

özvektörleri halinde homojen sisteminin genel çözümü

$$\mathbf{z} = \mathbf{A} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t} + \mathbf{B} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-2t}$$

olur.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

matrisine sahip (35) denklem sisteminden

$$a = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ve dolayısı ile genel çözüm bulunur :

$$\begin{aligned} x_1 &= 3Ae^{2t} + Be^{-2t} - 3\sin 2t \\ x_2 &= Ae^{2t} - Be^{-2t} - 2\cos 2t + \sin 2t. \end{aligned}$$

28.5. Sabit Olmayan Katsayılar.

Diferansiyel denklemin katsayıları yani A matrisinin elemanları artık sabit değil de bağımsız değişkenlerin $a_{ik} = a_{ik}(t)$ şeklinde fonksiyonları iseler yalnız özel hallerde kapalı çözüm mümkün olur. Sayısal veya grafik metodların istenmemesi halinde genellikle seriye açılım kullanılır. Burada seri şeklinde iki çözüm verilecektir. Önce

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) \quad (36)$$

şeklinde verilen homojen sistemi ele alalım : burada $A(t)$ matrisinin $a_{ik} = (t)$ elemanları, t nin sürekli ve istenildiği kadar türetilebilen fonksiyonları olsunlar. Ayrıca bunlar t ye göre kuvvet serilerine açılabilirler ve böylece $A(t)$, belirli bir t -aralığında yakınsak olan sabit A matrisleri cinsinden

$$A(t) = A_0 + A_1 t + A_2 t^2 + \dots \quad (37)$$

kuvvet serisi olarak yazılabilir. Böylece

$$x(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots \quad (38)$$

den aşağıdaki denklemler elde edilir :

$$\left. \begin{aligned} A_0 a_0 &= a_1 \\ A_0 a_1 + A_1 a_0 &= 2a_2 \\ A_0 a_2 + A_1 a_1 + A_2 a_0 &= 3a_3 \\ &\dots \end{aligned} \right\} \quad (39)$$

buradan da a vektörleri sırası ile $x(0) = x_0 = a_0$ başlangıç koşulundan bulunur. Burada yakınsaklık sorunu ele alınmamıştır. Yakınsaklık halinde, serinin yeterli sayıda teriminin de alınması halinde denklem (38) den, belli t için bir yaklaşım elde edilir.

Picard - iterasyonu yolu ¹ ile bir diğer seriye açılım ortaya çıkar. Bunun için denklem (36) integre edilmiş

$$x(t) = x_0 + \int_0^t A(\tau)x(\tau) d\tau \quad (40)$$

şeklinde yazılı ve, $x(t)$, n ci yaklaşım olarak üzere, bu bağıntı

$$x_{n+1}(t) = x_0 + \int_0^t A(\tau)x_n(\tau) d\tau, \quad (41)$$

iterasyon kuralı şeklinde kullanılır. Başlangıç yaklaşımı olarak $x_0(t) = x_0 = x(0)$ = sabit seçilir ise 1. yaklaşım olarak

$$x_1(t) = x_0 + \int_0^t A(\tau) d\tau x_0$$

bulunur. Bunun denklem (41) in sağ tarafında yerine konulması ile 2. yaklaşım elde edilir.

$$x_2(t) = x_0 + \int_0^t A(\tau) d\tau x_0 + \int_0^t A(\tau_1) \int_0^{\tau_1} A(\tau_2) d\tau_2 d\tau_1.$$

Bu şekilde devam edilerek çözüm

$$x(t) = \Omega_0^t(A)x_0 \quad (42)$$

şeklinde bulunur; burada sonsuz bir matris serisi yani A matrisinin matrisant denilen

$$\begin{aligned} \Omega_0^t(A) &= I + \int_0^t A(\tau_1) d\tau_1 + \int_0^t A(\tau_1) \int_0^{\tau_1} A(\tau_2) d\tau_2 d\tau_1 + \\ &+ \int_0^t A(\tau_1) \int_0^{\tau_1} A(\tau_2) \int_0^{\tau_2} A(\tau_3) d\tau_3 d\tau_2 d\tau_1 + \dots \end{aligned} \quad (43)$$

veya biraz daha başka olarak

¹ Bakınız : Praktische Mathematik [15] s. 451.

$$\Omega_0^t(\mathbf{A}) = \mathbf{I} + \mathbf{A}^{(1)} + \mathbf{A}^{(2)} + \mathbf{A}^{(3)} + \dots \quad (43a)$$

söz konusudur; buradaki itere edilmiş $\mathbf{A}^{(v)}$ matrisleri aşağıdaki kural uyarınca bulunur :

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^{(1)}(t) &= \int_0^t \mathbf{A}(\tau) d\tau, & \mathbf{B}^{(1)}(t) &= \mathbf{A}(t) \mathbf{A}^{(1)}(t) \\ \mathbf{A}^{(2)}(t) &= \int_0^t \mathbf{B}^{(1)}(\tau) d\tau, & \mathbf{B}^{(2)}(t) &= \mathbf{A}(t) \mathbf{A}^{(2)}(t) \\ \mathbf{A}^{(3)}(t) &= \int_0^t \mathbf{B}^{(2)}(\tau) d\tau, & \mathbf{B}^{(3)}(t) &= \mathbf{A}(t) \mathbf{A}^{(3)}(t) \\ &\dots\dots\dots \end{aligned} \quad (43b)$$

Eğer $a_{ik}(t)$ ler, t nin sürekli fonksiyonları iseler (43) serisinin her $\mathbf{A}$ matrisi için t ye göre terim ve uniform yakınsak olduğu gösterilebilir.¹ (43-a) terim terim türetilerek ve

$$\frac{d}{dt} \mathbf{A}^{(v)}(t) = \mathbf{B}^{(v-1)}(t) = \mathbf{A}(t) \mathbf{A}^{(v-1)}(t)$$

den, ayrıca (43-b)

$$\frac{d}{dt} \Omega_0^t(\mathbf{A}) = \mathbf{A}(t) \Omega_0^t(\mathbf{A}), \quad (44)$$

bağıntısı çıkar ve, ayrıca gösterilebileceği gibi,

bu seri de her $\mathbf{A}$ matrisi için t cinsinden uniform yakınsak olduğu için terim türev alınabilir ve böylece denklem (42), $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$ başlangıç koşullu (36) diferansiyel denkleminin bir çözümü olur.

$\mathbf{A} = \text{sabit}$ şeklinde bir sabit katsayı halinde kolayca görüleceği üzere $\Omega_0^t(\mathbf{A})$

$$\Omega_0^t(\mathbf{A}) = \mathbf{I} + \mathbf{A}t + \mathbf{A}^2 \frac{t^2}{2!} + \dots = e^{\mathbf{A}t}$$

üstel serisine yani denklem (42) deki çözüm denklem (7) ye dönüşür. Ancak genel olarak $\Omega_0^t(\mathbf{A})$ $t=0$ noktasındaki $\mathbf{x}_0$ çözümü ile herhangi t noktasındaki $\mathbf{x}(t)$ çözümü arasındaki bağıntıyı veren ve 26 da kullanılan "taşım matrisini" gösterir.

¹ Schmeidler W.: Determinanten und Matrizen [12] s. 137.

İtere edilmiş $\mathbf{A}^{(v)}$ matrislerinin, denklem (43 b) deki kural gereğince bulunması genellikle çok zordur. Dolayısı ile ancak denklem (43 a) da az sayıda seri teriminin yeterli olması halinde, bunların pratik de kullanılması tavsiye edilir. Bu durum, $0, \dots, t$ esas aralığının

$$0 \dots t_1 \dots t_2 \dots \dots t_{n-1} \dots t_n = t$$

kısmî aralıklarına yeterli ölçüde ayrılması ile sağlanabilir. Buna göre ara noktalarda

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{x}_1 &= \mathbf{x}(t_1) = \Omega_{t_1}^{t_1}(\mathbf{A}) \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{x}_2 &= \mathbf{x}(t_2) = \Omega_{t_2}^{t_2}(\mathbf{A}) \mathbf{x}_1 \\ &\dots\dots\dots \\ \mathbf{x}_n &= \mathbf{x}(t) = \Omega_{t_n}^{t_n}(\mathbf{A}) \mathbf{x}_{n-1} \end{aligned} \right\} \quad (45)$$

şeklinde yaklaşık çözümler, buradan da, tüm matrisi için

$$\Omega_0^t(\mathbf{A}) = \Omega_{t_{n-1}}^{t_{n-1}}(\mathbf{A}) \dots \Omega_{t_1}^{t_1}(\mathbf{A}) \Omega_0^{t_1}(\mathbf{A}) \quad (46)$$

çarpım ifadesi bulunur ki bu taşıma matrislerinin çarpım teşkili ile özdeşdir.

Homojen olmayan

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(t) \mathbf{x} + \mathbf{r}(t) \quad (47)$$

denklemini, matrisant yardımı ile çözülebilir şöyle ki çözüm için sabitlerin varyasyonu ifadesi

$$\mathbf{x}(t) = \Omega_0^t(\mathbf{A}) \mathbf{y}(t)$$

kullanılır.

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A} \mathbf{x} + \Omega_0^t(\mathbf{A}) \dot{\mathbf{y}}(t)$$

ile buradan, aranan $\mathbf{y}(t)$ fonksiyonu için

$$\Omega_0^t(\mathbf{A}) \dot{\mathbf{y}}(t) = \mathbf{r}(t) \quad (48)$$

bağıntısı elde edilir. Şimdi $\Omega_0^t(\mathbf{A})$ nin tekil olmayan matris olduğu yani, $\mathbf{A}$ matrisinin $\text{sp } \mathbf{A} = a_{11}(t) + a_{22}(t) + \dots + a_{nn}(t)$ izi dahil olan

$$\det \Omega_0^t(\mathbf{A}) = e^{\int_0^t \text{sp } \mathbf{A} d\tau} \neq 0$$

determinantına sahip olduğu gösterilebilir. Yani matrisant tersinebilir ve denklem (48), $y(t)$ ye göre çözülebilir :

$$\dot{y}(t) = [\Omega'_0(A)]^{-1} r(t).$$

Başlangıç koşulu göz önüne alınarak ve integrasyon yapılarak buradan

$$y(t) = \int_0^t [\Omega'_0(A)]^{-1} r(\tau) d\tau + x_0 \quad (49)$$

ve dolayısı ile denklem (47) nin genel çözümü olarak

$$x(t) = \Omega'_0(A) x_0 + \Omega'_0(A) \int_0^t [\Omega'_0(A)]^{-1} r(\tau) d\tau \quad (50)$$

bulunur.

Matrisant metodunun özellikle özdeğer problemlerinin ele alınması ile ilgili uygulama örnekleri için Hellman'ın iki çalışması tavsiye edilir.¹

¹ Hellman, O. : Z. angew. Math. Mech. Bd. 35 (1955), s. 300-315, Bd. 37 (1957), s. 139-144.

YAZAR ve KONU İNDEKSİ

A

Açıklık Matrisi 466
Açınım Teoremi 193
Algoritma 63
Alt Determinantlar 38
Analitik Fonksiyonlar 305
Ara Basamak Problemi 204
Ardışık İterasyon 315
Argyris, J. H. 414
Asal Bölge Determinantları 246
Asal Eksenler 243
Asal Eksenlere Dönüşüm 243
Asal Eksen Sistem Çifti 241
Asal Köşegen 9
Asal Vektörler 484, 488, 276, 285
Asal Vektörler Basamağı 276
Asal Vektör Zincirleri 290
Assosiyatif Kural 20

B

Bağlı Bilinmeyen 68
Banachiewicz, Th. 84
Bauer, F. L. 231
Benoit 72
Benzerlik 273
Benzerlik Dönüşümü 176, 356
Bileşenler 2
Bilineer Form 139
Biortonormal Sistemler 25
Birimler 14
Birim Kökler 45
Birim Matris 11
Birim Vektör 28, 32
Bocher, M. 268
Bodewig, E. 325, 356
Bölen 267
Bölmesiz Algoritma 79, 485

C

Cauchy-Schwarz Eşitsizliği 26
Cayley, A. 2
Cayley-Hamilton Denklemi 201
Cebirsel Bütünler 313
Cebirsel Matris Denklemi 313
Cholesky 72
Cholesky Ayrılması 72
Cholesky Metodu 71, 476
Collar, A. R. 214, 195
Collatz, L. 214
Courant, R. 214
Cramer Kuralı 41

Ç

Çarpımların Özdeğerleri 15
Çok Katlı Özdeğerler 201

D

Dairesel İç Yapı 263
Dairesel Matris 260
Danilewski Metodu 310
Dar Açılı Koordinatlar 315
Dedekind, R. 373
Definit Hermitsel Formlar 148
Definit Kuvadratik Formlar 243
Definit Matrisler 181
Değiştirilebilir Matrisler 213
Dengeleme Denklemi 163
Denke, P. H. 435
Determinant 12
Determinantların Açınımı Teoremi 165
Determinant Bölünü 267
Determinantın Bulunuşu 83
Determinant Matrisleri 444
Devir Akımları 411

500

Devir Enpedansı 403
Devir Metodları 415
Differansiyel Denklemler 438
Direkt Metodlar 358
Direnc Matrisi 415
Dominant Özdeğer 27
Dominant Özvektör 28
Doolittle, M. H. 65
Dönme Uzaması 244
Dönme ve Genleşme 215
Dönüşüm 248
Duck, W. 387
Duncan, W. J. 135
Durand, E. 356
Durum Vektörlü 438
Dyadik Çarpım 27

E

Eğilme Titreşimleri 430, 469
Ek Düzeltmeler
Elektrik Devreleri 403
Elemantar Bölenler 131, 134, 267
Elemantar Bölenlerin Kuvvetleri 218
Elemantar Dönüşümler 89, 130
Elemantar Polinomlar 131, 267
Enpedans Matrisi 408
Ersatz Polinomu 297
Esas Olmayan Ortogonal Dönüşüm 215
Eşdeğerlilik 99
Eşit Özdeğerler 125
Etki Sayıları 35
Euklid Normu 229
Eylemsizlik İndisi 141
Eylemsizlik Kanunu 149

F

Falk, S. 415, 353
Feigh, G. 34
Feldmann, H. 387
Fike, C. T. 231
Focke, J. 241
Fonksiyonlar 305
Forsythe, G. E. 392
Frazer, R. A. 195
Frazer-Duncan-Collar Metodu 195

Frobenius, G. 178, 246
Frobenius Matrisi
Fuhrke, H. 442, 444

G

Gantmacher, F. R. 451
Gauss, C. F. 379
Gauss Algoritması 63
Gauss Dönüşümü 31
Gauss-Seidel İterasyonu 379
Gauss-Southwell Relaksasyonu 389
Geiringer, H. 204
Genel Özdeğer Problemi 159, 186, 217, 335
Genelleştirilmiş Ortogonal Matris
Genişletilmiş Matris
Geometrik Anlam 150
Geometrik Seri
Gerschgorin 237
Givens, J. W. 372
Givens Metodu 372
Gradyant 150
Gröbner, W. 264
Grub 161
Güç İnvaryantı 213

H

Hadamard 238
Hata Denklemleri 152, 154
Hata Tahmini 385
Heinrich, H. 236
Hellmann, O. 498
Henrici, P. 231
Hermite, Ch. 45
Hermitsel Formlar 148
Hermitsel Formların Reelliği 153
Hermitsel İnterpolasyon 419, 469
Hesap Makinası 115
Hessenberg, K. 360
Hessenberg Metodu 360
Hilbert, D. 214
Hilbert Normu 229
Holze-Tolle Metodu 430
Homojen Denklemler 101
Homojen Differansiyel Denklemler 477

Homojen Olmayan Differansiyel
Denklemler 453
Hotelling 325
Householder, A. 374
Householder Metodu 374

I

İkinci Derece Yüzeyleri 149
İki Vektör Arasındaki Açı 471
İnvaryant Çarpanlar 178
İnvaryantlar 176
İnvers Matris 34, 84
İnvers Matrisin İteratif Tayini 348
İnvolut Matris 47
İteratif Ek İnceleme 345
İterasyonda Yakınsaklık 348
İtere Edilmiş Matrisler 361
İtere Edilmiş Vektörler 198
İz 177

J

Jacobi, G. G. J. 347
Jacobi Metodu 347, 353
Jordan, C. 277
Jordan Matrisi 213
Jordan Normal Formu 276

K

Kafes Kiriş 155
Kalanlar Metodu 145
Kanonik Form 324
Kapsam Teoremleri 246
Karakteristik Denklem 487, 128, 169
Karakteristik Determinant 126, 134
Karakteristik Kökler 127, 134
Karakteristik Matris 163
Karakteristik Polinom 364
Karakteristik Sayılar 151
Kare Kök Almak 244
Kelsey, S. 414
Kesirli İterasyon 471, 335
Kinetik Enerji 144

Klotter, K. 460, 463
Kogradyant Dönüşüm 315
Kommutatif Matrisler 20
Kompleks Lineer Denklemler 218
Kompleks Matrisler 187
Kompleks Matrislerin Özdeğerleri 50
Kompleks Özdeğerler 319
Kompleks Özvektörler 49
Kompleks Sayılar 43
Kompleks Vektörler 43
Kongruans Dönüşüm 145
Kongruent Matrisler 145
Kontragradyent Dönüşüm 61
Koordinat Dönüşümü 58
Koordinat Sistemi 19
Köşegen Benzeri Matris 190
Köşegen Forma Dönüşüm 190
Köşegen Matris 11, 24
Kron, G. 401
Kronecker, L. 32
Kronecker Sembolü 32
Krylov, A. N. 191
Krylov Metodu 191
Kuvadratik Formun Tayini 138
Kuvadratik Olmayan Matrisler 149
Kuvvetler 29
Kuvvet Serileri 300
Kuvvet Serilerinde İterasyon 347

L

Lagrange Polinomları 215
— Denklemi 216
— Matrisi 216
Lanczos, C. 358
Langefors, B. 414
Langemeyer, P. 353
Lineer Bağımlılık 12, 86
Lineer Denklemler 63
Lineer Denklemlerin Çözümüllüğünün
Tekliği 67
Lineer Denklemlerin Genel Çözümü 65
Lineer Denklemlerin Sayısal Çözümü 66
Lineer Differansiyel Denklemler 477
Lineer Differansiyel Denklemlerin
Genel Çözümü 72
Lineer Dönüşüm 2, 54

Lineer Elemanter Bölenler 127
Lineer Matris Denklemleri 308
Lineer Olmayan Bölenler 131
Lineer Tasvir 3, 52
Lineer Vektör Sistemleri 143
LR - Dönüşümü 355

M

Mac Duffee, C. C.
Mahrenholz, O. 442
Maksimal Kök 246
Marguerre, K. 442
Matris Bölümü 42, 81
Matris Çarpımı 15, 182
Matris Çarpımının Determinantı 103
Matris Çarpımının Özdeğeri 212
Matris Çarpımının Rankı 104
Matris Çiftleri 273
Matris Değer Aralığı 179
Matris Denklemleri 295
Matris Elemanları 215
Matris Fonksiyonları 295
Matris Kondisyonu 215
Matris Kuvvetleri 182
Matris Normu 221
Matris Polinomları 297
Matris Rankı 89
Matrisant 495, 497, 498
Matrisin Ayrılması 215
Matrisin Tekil Değerleri 243
Matrislerin İndirgenmesi 297
Matrislerin Sınıflandırılması 205
Matrislerin Toplanması 223
Mauer, V. 236
Mesnet Matrisi 413
Minimal Polinom 269
Minimum Denklemi 201, 263
Minörler 65
Mises, R. v. 315
Modal Matris 123
Modernleştirilmiş Gauss Algoritması 318
Modül 45
Motzkin, T. S. 392
Muth, P. 276

N

Negatif Olmayan Matrisler 246
Nokta Matrisi 113
Nokta Şeması 484, 283
Normal Denklemler
Normal Form 145, 149, 276
Normal Forma Dönüşüm 151
Normalleştirilebilen Denklemler 218
Normal Matrisler 32, 221
Normlaştırma 195

O

Ortogonal Birim Vektörler 44
Ortogonal Dönüşüm 60
Ortogonalleştirme 110, 111
Ortogonalılık 173
Ortogonal Matrisler 32
Ortogonal Sistemler 110
Ortonormlaştırma 112
Ostrowski 228

Ö

Özdeğerlerin Extrem Özelliği 209
Özdeğerlerin Max. Özelliği 103
Özdeğerlerin Reelliği 104
Özdeğerlerin Tahmini 235
Özdeğer Problemi 127, 163, 315
Özdeğer Probleminin İteratif İncelenmesi 198
Özdeğer Probleminin Sayısal İncelenmesi 315
Özdeğer Sınırları 227
Özel Özdeğer Problemi 153, 186
Özvektör Hesabı 101
Özvektörler 207
Özvektörlere Göre Açınım 108
Özvektörlerin Ortogonalleştirilmesi 292
Özvektörlerin Sayısı 115
Özvektörlerin Üniterliği 112

P

Parametre Matrisleri 126
Pestel, E. 442

Polinom 29
Polinomların Özdeğerleri 101
Polinom Matrisi 126, 129
Pollazeck-Geiringer 212
Potansiyel Enerji 160
Pozitif Definit Formlar 140, 156
Pozitif Definit Matris 156
Pozitif Matris 246
Pozitif Özdeğerler 86
Promberger, M. 401

Q

Quade, W. 401, 415

R

Rank Düşmesi 126
Rank Sınırları 115
Rank Tayini 213
Rayleigh, J. W. 179
Rayleigh Oranı 179
Reel Simetrik Matrisler 214
Regüler Matris 14
Relaksasyon 389
Rijidlik Matrisi 474
Rohrbach, H. 34
Routh, E. J. 325
Rutishauser, H. 356

S

Sabitlerin Değişimi 161
Sanal Matris 210
Sanal Özdeğerler 213
Satır Değişmesi 15
Satır Düzgün 15
Satır Matrisi 10
Satır Normu 228
Satranç Tahtası Matrisleri 252
Sayısal İnvaryantlar 103
Schmeidler, W. 21, 496
Schmell, W. 260
Schulz, G. 398
Schumrich, G. 315
Schur, I. 410
Schwarz Eşitsizliği 26
Segre, C. 271

Seidel, Ph. L. 379
Serbest Bilinmeyenler 101
Sıfır Çarpanı 124
Sıfır Matrisi 126
Sıfır Vektörü 12
Sınır Koşulları 121
Sıra Değişmesi 74
Simetrik Matrisler 9, 207
Simultane Eşdeğerlilik 273
Simultane İterasyon 368
Sinden, F. W. 235
Skaler 23
Skaler Çarpım 25
Skaler Çarpımların İnvaryantı 61
Smith Normal Formu 131
Sol İnverson 21
Soldan İtere Vektörler 215
Sol Özvektörler 173
Sonsuz Matris Serileri 316
Southwell, R. V. 389
Sönüm 412
Spektral Ayrım 206
Spektral Norm 229
Spektral Ötelenme 215
Stabilite 359
Statikde Uygulamalar 414
Stephan, D. 414
Stokastik Matrisler 249
Strüktür 420
Strüktür İnvaryantları 302
Sütun Düzgün 15
Sütunlar 420
Sütun Matrisi 10, 420
Sütun Normu 229
Sütun Toplamları Sabit Matris 249
Sütun Vektörleri 5
Sylvester, J. J. 1, 146

Ş

Şebeke Hesabı 407
Şekil Değiştirme İş 421, 442

T

Tabana Göre Açınım 312
Taban Vektörleri 78

Tam Ortogonal Vektörler 79
 Tam Sayılı Matrisler 129
 Taralı Denklem Sistemi 148
 Taşıma Matrisleri 452, 496
 Tekil Matrisler 12
 Tekil Tasvir 19
 Tek Sıralı Matrisler 123
 Temel Sistem 420
 Titreşimler 215
 Toplam Kontrolü 216
 Transpoze Matris 9

U

Unger, H. 111
 Unimodular Eşdeğerlilik
 Unimodular Matris 130
 Üniter Dönüşüm 65
 Üniter Kongruans 149
 Üniter Matrisler 220
 Üniter Özvektörler
 Üniter Vektörler 44
 Uyum Koşulları 68
 Uzama 83
 Uzama ve Dönme 85
 Uzay 188

Ü

Üçgen Matris 162
 Üstel Seri 73

V

Vandermonde Determinantları 167
 Vektör Bileşenleri 2
 Vektörler 22
 Vektör Sistemi 243
 Vektör Şiddeti 26
 Vieta Kök Teoremleri 148

W

Welerstrass, K. 131, 134
 Weyr Karakteristiği 282
 Wielandt, H. 339
 Wielandt İterasyonu 343
 Wilkinson, J. H. 370, 377
 Wittmeyer, H. 189

Y

Yarı Definit Formlar 213
 Yarı Hermitsel Matris 44, 220
 Yarı İnvers Matris 46
 Yarı İnvolut Matris 47
 Yarı Simetrik Matris 9
 Yay Matrisi 95

Z

Zincirleme Gauss Algoritması 65
 Zincir Matrisleri 65